

PITKÄ

MATEMATIIKKA

KURSSI MAv1

LUKIOVALMIUSKURSSI

Markku Männikkö
2002

Sisällysluettelo:

1. Lukujoukot.....	1
2. Lukujen perusalgebraa.....	1
3. Kokonaisluvut.....	2
4. Murtoluvut.....	3
5. Desimaaliluvut.....	4
6. Tehtäviä yleistietoudesta.....	5
7. Neliöjuuri.....	6
8. Lauseke.....	6
9. Potenssit.....	7
10. Polynomi.....	9
11. I asteen yhtälö.....	11
12. Probleema.....	12
13. Prosentti.....	13
14. Yhtälöpari.....	15
15. Funktion kuvaaja.....	17
16. Tasogeometrian kuvioiden pinta-aloja ja viivojen pituuksia.....	17
17. Avaruuskappaleiden tilavuuksia ja pinta-aloja.....	19
18. Trigonometriaa.....	20
Vastauksia.....	21

MAV1. Lukiovalmiuskurssi.

1. Lukujoukot

1.1. Luonnollisten lukujen joukko N

Siihen kuuluvat 0, 1, 2, 3, 4, ... eli lukumäärää ilmaisevat luvut eli positiiviset kokonaisluvut ja nolla

1.2. Kokonaislukujen joukko Z

Siihen kuuluvat ... -2, -1, 0, 1, 2, ... kaikki positiiviset ja negatiiviset kokonaisluvut ja nolla

1.3. Rationaalilukujen joukko Q

Siihen kuuluvat kaikki kokonaisluvut ja murtoluvut

Desimaaliluvuista päättyvät desimaaliluvut ja päättymättömät jaksolliset desimaaliluvut

1.4. Reaalilukujen joukko R

Siihen kuuluvat rationaalisten lukujen lisäksi kaikki irrationaaliset luvut

1.5. Lukujoukkojen N, Z, Q ja R hierarkia

$N \subset Z \subset Q \subset R$

eli kaikki joukkoon N kuuluvat luvut ovat joukossa Z, jonka luvut ovat kaikki joukossa Q jne.

1. Mihin peruslukujoukkoihin kuuluu a) 123 b) -45 c) $-1,3$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\sqrt{9}$ f) $\sqrt{10}$

2. Mikä on pienin peruslukujoukko, mihin kuuluu yhtälön ratkaisu a) $2x - 6 = 0$ b) $2x + 8 = 0$ c) $2x + 9 = 0$
d) $x^2 = 9$ e) $x^2 = 10$?

2. Lukujen perusalgebraa

2.1. Vastaluku

Kaksi lukua ovat vastalukuja, jos niiden summa on 0

Ne ovat itseisarvoltaan yhtä suuria mutta vastakkaismerkkisiä

2.2. Käänteisluku

Kaksi lukua ovat käänteislukuja, jos niiden tulo on 1

Jos ne voidaan esittää varsinaisina murtolukuina, ovat niiden osoittajat ja nimittäjät ovat vaihtaneet paikkaa

2.3. Vaihdantalaki

Yhteenlaskun $a + b = b + a$ eli summa on sama vaikka yhteenlaskettavat ovat eri järjestyksessä

Kertolaskun $a \cdot b = b \cdot a$ eli tulo on sama vaikka tekijät ovat eri järjestyksessä

2.4. Liitântälaki

Yhteenlaskun $(a + b) + c = a + (b + c)$

Kertolaskun $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

2.5. Osittelulaki

$m \cdot (a + b) = m \cdot a + m \cdot b$ ja $(m + n) \cdot a = m \cdot a + n \cdot a$

1. Mikä on luvun vastaluku a) 2 b) -3 c) $\frac{2}{3}$ d) $-\frac{5}{6}$ e) 2,3 f) $1\frac{2}{3}$ g) $\sqrt{2}$ h) 0

2. Mikä on luvun käänteisluku a) 2 b) -3 c) $\frac{2}{3}$ d) $-\frac{5}{6}$ e) 2,3 f) $1\frac{2}{3}$ g) $\sqrt{2}$ h) 0

3. Laske päässä a) $9 + 18 + 1$ b) $5 \cdot 13 \cdot 2$ c) $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ d) $1 + 2 + 3 + \dots + 7 + 8 + 9$.

4. Laske päässä a) $3 \cdot 14 + 14 \cdot 7$ b) $8 \cdot 3 + 8 \cdot 5 + 8 \cdot 2$ c) $12 \cdot 7 + 13 \cdot 3$

5. Laske päässä a) $23 + (151 - 23)$ b) $23 \cdot (151:23)$ c) $81 + 151 + 19$ d) $25 \cdot 151 \cdot 4$ e) $21 \cdot 68 + 79 \cdot 68$

6. Laske päässä a) $27 + 769 + 73$ b) $63 \cdot 392 + 37 \cdot 392$ c) $63 \cdot 392 + 38 \cdot 392$ d) $127 \cdot 456 - 27 \cdot 456$

7. Mikä on lukujen 5 ja -3 erotuksen vastaluku?

8. Laske lukujen 2 ja 3 summan käänteisluvun ja käänteislukujen summa.

3. Kokonaisluvut

3.1. Kokonaislukujen yhteen- ja vähennyslasku

Samanmerkkisten kokonaislukujen summan etumerkki on sama kuin yhteinen etumerkki ja itseisarvo on itseisarvojen summa.

Erimerkkisten kokonaislukujen summan etumerkki on itseisarvoltaan suuremman etumerkki ja itseisarvo on suuremman itseisarvo - pienemmän itseisarvo.

Vähennyslasku voidaan tulkita negatiivisen luvun yhteenlaskuksi.

Useamman luvun yhteenlaskussa voidaan laskea ensin kaikki positiiviset luvut yhteen, sitten kaikki negatiiviset luvut yhteen ja lopuksi näiden summa. (tai laskut yksi kerrallaan vasemmalta oikealle)

3.2. Kokonaislukujen kerto- ja jakolasku

Kahden samanmerkkisen luvun tulo ja osamäärä on positiivinen.

Kahden erimerkkisen luvun tulo ja osamäärä on negatiivinen.

Jos tekijöitä on useampia, on merkki positiivinen, jos negatiivisia tekijöitä on parillinen määrä. Ja negatiivinen, jos negatiivisia tekijöitä on pariton määrä.

Itseisarvo (numero-osa) saadaan suorittamalla laskut itseisarvoilla.

3.3. Kokonaislukujen korottaminen potenssiin

Potenssin merkki on + , jos kantaluku on positiivinen.

Potenssin merkki on + , jos kantaluku on negatiivinen ja eksponentti parillinen kokonaisluku.

Potenssin merkki on - , jos kantaluku on negatiivinen ja eksponentti pariton kokonaisluku.

1. a) $5 + 8$ b) $5 - 8$ c) $-5 + 8$ d) $-5 - 8$ e) $5 - (-8)$ f) $-5 + (-8)$ g) $-5 - (-8)$ h) $-(-5 - (-8))$

2. a) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8$ b) $2 - 7 + 4 - 3 + 6 + 9 - 5$

3. a) $6 \cdot 7$ b) $6 \cdot (-7)$ c) $-6 \cdot 7$ d) $-6 \cdot (-7)$ e) $-(-6 \cdot (-7))$

4. a) $4 \cdot (-5) \cdot 6$ b) $-4 \cdot 5 \cdot (-6)$ c) $-4 \cdot (-5) \cdot (-6)$ d) $-(-4 \cdot (-5) \cdot (-6))$

5. a) 2^3 b) $(-2)^3$ c) $(-2)^4$ d) -2^4 e) $(-2)^5$ f) -2^5

6. a) $3 \cdot 2^3$ b) $-3 \cdot (-2)^3$ c) $3 \cdot (-2)^4$ d) $-3 \cdot (-2)^4$ e) $-3 \cdot (-2^4)$ f) $(-3)^2 \cdot (-2)^3$

7. a) $-5 \cdot (-4 - 3)$ b) $-5 \cdot (-4 - 3 \cdot 2)$ c) $-5 \cdot (-4) - 3 \cdot 2$ d) $-5 \cdot (-4 - 3) \cdot 2$

8. a) $30 + 6 : 2 - 5$ b) $30 + 6 : (2 - 5)$ c) $(30 + 6) : 2 - 5$ d) $(30 + 6) : (2 - 5)$

9. a) $120 \cdot (-18) : (-6)$ b) $120 : (-18 - 6)$ c) $(120 - 18) : (-6)$ d) $120 : (-18) : (-6)$ e) $120 : ((-18) : (-6))$

10. Laske koordinaatiston pisteiden $(-5,3)$ ja $(4,-6)$ a) x- b) y-koordinaattien erotus.

11. Laske lukujen -15 ja 8 a) summan vastaluku b) vastalukujen summa.

12. Millä ehdolla lukujen x ja y summa on pienempi kuin niiden erotus?

13. Vähennä luvusta -16 lukujen -7, 6 ja -3 summa.

14. Vähennä lukujen -6 ja 8 erotuksesta samojen lukujen summa.

15. Mitkä seuraavista ovat keskenään yhtä suuria kaikilla x:n ja y:n arvoilla a) $x - y$ b) $y - x$ c) $-x + y$ d) $-y + x$ e) $x + (-y)$ f) $(-x) - (-y)$?

16. Olkoon $|x| = 12$ ja $|y| = 3$. Mitä arvoja voi saada lukujen x ja y a) summa b) erotus c) tulo d) osamäärä?

17. Mitä voi päätellä luvuista x ja y , kun niiden summa on negatiivinen ja tulo positiivinen?

18. Mitä voi päätellä luvuista x ja y , kun niiden summa on positiivinen ja tulo negatiivinen?

4. Murtoluvut

4.1. Murtoluvun supistaminen

Supistattaessa murtoluvun osoittaja ja nimittäjä jaetaan samalla luvulla. Arvo pysyy tällöin samana.

4.2. Murtoluvun laventaminen

Lavennettaessa murtoluvun osoittaja ja nimittäjä kerrotaan samalla luvulla. Arvo pysyy tällöin samana.

4.3. Murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku

- Lavenna murtoluvut niin, että niillä on sama nimittäjä
- Osoittajaksi tulee osoittajien summa
- Nimittäjäksi tulee yhteinen nimittäjä
- Supistetaan ja/tai muutetaan sekaluvuksi, jos sellainen voidaan tehdä

4.4. Murtolukujen kertolasku

- Sekaluvut muutetaan varsinaisiksi murtoluvuiksi
- Osoittajaksi tulee osoittajien tulo
- Nimittäjäksi tulee nimittäjien tulo
- Supistetaan ja muutetaan sekaluvuksi, jos voidaan

4.5. Murtolukujen jakolasku

Kerrotaan jaettava jakajan käänteisluvulla. (Edellinen jälkimmäisen käänteisluvulla). Jatko kuten edellä.

4.6. Murtolukulaskut laskimella

Syötetään luvut laskimeen murtolukunäppäimen avulla. (Kaikissa laskimissa ei sitä ole)

Esimerkiksi murtoluku $2\frac{1}{6}$ syötetään näppäilyllä jolloin näytössä on

Tehtävässä olevat laskut (+, -, x, /) samoin kuin muillakin luvuilla.

1. Supista a) $\frac{6}{8}$ b) $\frac{36}{45}$ c) $\frac{3 \cdot 12}{8 \cdot 9}$ d) $\frac{25}{30}$ e) $\frac{21}{49}$ f) $\frac{77}{132}$

2. Lavenna samannimisiksi a) 5 ja $\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{6}$ ja $\frac{3}{8}$ c) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ja $\frac{5}{6}$ d) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ ja $\frac{3}{4}$ e) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{8}{9}$ ja $\frac{11}{12}$

3. a) $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$ b) $\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ d) $\frac{3}{5} + \frac{7}{9}$

4. a) $4 - 1\frac{2}{3}$ b) $4\frac{5}{6} - 7$ c) $2\frac{3}{4} + 5\frac{7}{8}$ d) $2\frac{1}{3} - 3\frac{5}{6}$ e) $2\frac{1}{5} - 4\frac{1}{3} + 1\frac{1}{6}$

5. a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$ b) $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7}$ c) $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{5}$ d) $\frac{3}{5} \cdot 6$ e) $\frac{3}{5} \cdot 1\frac{2}{3}$

6. a) $-\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$ b) $-2\frac{1}{4} \cdot (-\frac{2}{9})$ c) $4\frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{2}$ d) $3\frac{5}{6} \cdot (-3)$

7. a) $5 : \frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{4} : 5$ c) $\frac{5}{6} : \frac{2}{3}$ d) $5\frac{1}{3} : 2\frac{2}{3}$ e) $-3\frac{1}{3} : 1\frac{1}{9}$

8. Laske murtolukujen $\frac{5}{6}$ ja $-\frac{7}{12}$ a) summa b) erotus c) tulo d) osamäärä.

9. a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10} - \frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{3} \cdot (\frac{9}{10} - \frac{1}{5})$ c) $\frac{2}{3} : \frac{9}{10} - \frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{3} : (\frac{9}{10} - \frac{1}{5})$

10. a) $(4\frac{1}{5} - 3\frac{1}{10}) \cdot \frac{5}{11}$ b) $1\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} - 1\frac{1}{3} : 2\frac{1}{6}$ c) $(-\frac{1}{6} - \frac{3}{4}) : \frac{5}{6} - \frac{4}{15}$

11. $\frac{1 - \frac{2}{3}}{2 - \frac{1}{4}} : 1\frac{2}{7}$

12. Laske lausekkeen $\frac{2x - 1}{x + 1}$ arvo, kun $x = \frac{3}{5}$

13. Laske lausekkeen $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ arvo, kun koordinaatiston pisteet (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) ovat $(\frac{1}{3}, -2)$ ja $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$

14. Laske tulo $(1 + 1) \cdot (1 + \frac{1}{2}) \cdot (1 + \frac{1}{3}) \cdot \dots \cdot (1 + \frac{1}{98}) \cdot (1 + \frac{1}{99})$

15. Laske lausekkeen $a(a - 2) : (2a + 1)$ arvo, kun a saa arvon a) $\frac{1}{2}$ b) $1\frac{2}{3}$ c) $-\frac{3}{4}$.

5. Desimaaliluvut

5.1. Desimaalilukujen laskut suoritetaan yleensä laskimella

5.2. Murtoluvun muuttaminen desimaaliluvuksi
Suoritetaan murtoluvun mukainen jakolasku.

5.3. Päättävän desimaaliluvun muuttaminen murtoluvuksi
Osoittajaksi laitetaan desimaaliosa.
Nimittäjäksi se luku mitä osia on viimeinen numero.

5.4. Tarkkuus yhteen- ja vähennyslaskussa
Vastaus niin monen *desimaalin* (yksikön) tarkkuudella, mitä on desimaaleja huonoimmassa lähtöarvossa.

5.5. Tarkkuus kerto- ja jakolaskussa
Vastaus niin monen *numeron* tarkkuudella, mitä on numeroita huonoimmassa lähtöarvossa.

1. a) $1,2345 + 12,345$ b) $1,23 \cdot 12,345$ c) $1,23 : 12,34$

2. a) $9,34 + 6,73 \cdot 7,18$ b) $(9,26 + 16,2) : 7,5$

3. a) $\frac{3,24}{2,1 + 13,4}$ b) $\frac{2}{3,14} + \frac{5}{6,78}$

4. Luvun x likiarvo on 3,28, jolloin sen tarkka arvo on välillä $3,275 < x < 3,285$ ja luvun y likiarvo on 0,56. Mitä arvoja voi saada tarkkojen arvojen x ja y a) summan kaksidesimaalinen likiarvo b) tulon kaksinumeroisen likiarvo?

5. a) $12,34 + 0,567$ b) $12,34 \cdot 0,567$ c) $12,34 : 0,567$

6. a) $3,72 \cdot 4,7 + 5,2 \cdot 2,76$ b) $2,98 \cdot 2,9 - 3,8 : 8,19$

7. Olkoon $x = 0,0283$ ja $y = 5,030$. Laske a) $x + y$ b) $x \cdot y$ c) $\frac{1}{x}$ d) $\frac{1}{y}$ e) $\frac{x}{y}$

8. Muuta murtoluku desimaaliluvuksi a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{1}{13}$ d) $\frac{8}{7}$.

9. Muuta murtoluvuksi a) 0,333 b) 0,333... c) 1,23 d) 3,070 e) 2,0031

6. Tehtäviä yleistietoudesta

6.1. Sanallisia laskutehtäviä

Lasketaan kuten ala-asteelta lähtien on tehty, joskin lopullista ja yhtä ainoaa laskua ei ole pakko muodostaa. Voi laskea myös tarpeellisia välivaiheita ja kannattanee merkitä mitä mikin luku tarkoittaa.

6.2. Keskiarvo

Keskiarvo = Lukujen summa / lukujen lukumäärällä

6.3. Matka, aika, nopeus

Matka = aika x nopeus , nopeus = matka / aika , aika = matka / nopeus

6.4. Massa, tiheys, tilavuus

Massa = tiheys x tilavuus , Tiheys = massa / tilavuus , tilavuus = massa / tiheys

1. Laske lukujen 34, 21, 63, 49 ja 52 keskiarvo.
2. Lukujen keskiarvo on 8,75 ja lukujen summa 70. Monestako luvusta keskiarvo laskettiin?
3. Lukujen keskiarvo oli 7,50 ja lukuja oli 12. Mikä oli lukujen summa?
4. Viiden luvun keskiarvo on 8,2. Miten suureksi tulee keskiarvo, jos näihin lukuihin lisätään luku 10?
5. Matin kolmen kalan painojen keskiarvo oli 560 g ja Villen 4 kalan 650 g. Mikä oli kaikkien kalojen painon keskiarvo?
6. Mitä saadaan, kun pienin positiivinen kolminumeroinen kokonaisluku kerrotaan itsellään ja saadusta tulosta vähennetään suurin kaksinumeroinen kokonaisluku itsellään kerrottuna?
7. Kun eräs luku kerrottiin 35:llä ja tulo jaettiin 32:lla saatiin vaillinaiseksi osamääräksi 144 ja jakojäännökseksi 12. Mikä oli alkuperäinen luku?
8. Vaatekauppias osti 24388 mk:n arvosta kangasta, jonka hinta oli 6,50 mk/m. Kuinka monta 28 metriä sisältävää pakkaa ostos käsitti?
9. Kuinka monta kirjainta on tietosanakirjassa, jossa on 15 osaa, joka niteessä 1375 palstaa, joka palstassa 66 riviä ja joka rivillä 40 kirjainta? Kuinka monta päivää kuluu 5 latojalta teoksen latomiseen, jos heidän 8-tuntisia työpäivinä oletetaan latovan 100 kirjainta minuutissa?
10. Maatilan pinta-ala on 2505 ha, josta metsää on $\frac{2}{3}$ ja muu osa peltoa. Siitä myytiin $\frac{1}{5}$ metsän alasta ja $\frac{1}{4}$ pellon alasta. Mikä on tilan pinta-ala myynnin jälkeen?
11. Kun erääseen lukuun lisätään $2\frac{5}{6}$ ja saatu summa kerrotaan $2\frac{2}{13}$:lla, saadaan tulokseksi $16\frac{1}{3}$. Mikä oli alkuperäinen luku?
12. Asukasluku on 4 215 900 josta 2 020 400 on miehiä. Montako naista on 1000 miestä kohden?
13. Eräs metalliseos valmistettiin sulattamalla yhtä suuret painomäärät kahta metallia, joiden tiheydet olivat $7,2 \text{ kg/dm}^3$ ja $8,8 \text{ kg/dm}^3$. Mitään tilavuuden muutosta ei tapahtunut. Mikä oli seoksen tiheys?
14. Rauta- ja lyijypallolla on sama tilavuus, mutta edellinen painaa 9,60 kg ja jälkimmäinen 14,7 kg. Raudan tiheys on $7,50 \text{ kg/dm}^3$. Mikä on lyijyn tiheys?
15. Eräs pullo painaa rikkihapolla täytettynä 12,8 kg ja tyhjänä 2,335 kg. Mitä se painaa vedellä täytettynä, kun rikkihapon tiheys on $1,82 \text{ kg/dm}^3$?
16. Meijeriin tuotiin eräänä päivänä 2060 kg maitoa, jonka tiheys oli 1,03 kg/l. Mikä oli tämän maitomäärän hinta, kun litra maksoi 32 p?

17. Juna kulkee 72 km matkan 1 tunnissa 36 minuutissa. Kuinka pitkä on toinen asemaväli, jonka sama juna kulkee yhtä suurella nopeudella 25 minuutissa 20 sekunnissa?

18. Polkupyöräilijä lähtee ajamaan klo 6.20 ja saapuu perille klo 13.40 ajettuaan keskimäärin 21 km tunnissa. Klo 7.50 lähtee auto samalle matkalle ajaen vauhdilla 35 km/h. Milloin auto saapuu perille?

19. Auto kulkee erään matkan 2 tunnissa 15 minuutissa, kun sen nopeus on 48 km/h. Kuinka paljon on nopeutta lisättävä, jotta samaan matkaan kuluisi aikaa vain 1 tunti 48 minuuttia?

20. Pyöräilijän ja auton nopeudet suhtautuvat kuin 3:7, mutta edellinen ajaa 12 tuntia ja jälkimmäinen 9 tuntia päivässä. Missä ajassa pyöräilijä ajaa saman matkan, jonka auto kulkee 6 päivässä?

21. 16 miestä oli ottanut suorittaakseen erään työn 8-tuntisin työpäivin. Kun puolet työstä oli tehty, sairastui 4 miestä. Kuinka monta tuntia päivässä pitää jäljelle jääneiden miesten tehdä työtä päivässä saadakseen lopun työstä suoritetuksi alkuperäisessä aikataulussa?

7. Neliöjuuri

7.1. Neliöjuuri miettimällä

Mietitään mikä luku toiseen korotettuna antaa tulokseksi juurettavana olevan luvun.

Huom. juurettava ei voi olla negatiivinen luku

Huom. juuren arvo ei voi olla negatiivinen luku.

7.2. Neliöjuuren arvo laskimella

Tutki laskimesi toiminta. Tavallisesti paina ja → . Muunlaisiakin laskimia on.

1. a) $\sqrt{9}$ b) $\sqrt{16}$ c) $\sqrt{49}$ d) $\sqrt{81}$ e) $\sqrt{100}$ f) $\sqrt{169}$

2. a) $\sqrt{400}$ b) $\sqrt{900}$ c) $\sqrt{2500}$ d) $\sqrt{10\,000}$ e) $\sqrt{1\,000\,000}$

3. a) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ b) $\sqrt{\frac{1}{36}}$ c) $\sqrt{\frac{49}{81}}$ d) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ e) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$

4. a) $\sqrt{0,25}$ b) $\sqrt{0,01}$ c) $\sqrt{1,96}$ d) $\sqrt{2,25}$ e) $\sqrt{0,0009}$

5. Kuinka pitkä on neliön sivu, kun ala on a) 64 m^2 b) 25 m^2 c) 25 a d) 8100 m^2 ?

6. Mikä luku sopii luvuksi a, kun a) $\sqrt{a} = 5$ b) $\sqrt{a} = 10$ c) $\sqrt{a} = 100$ d) $\sqrt{a} = 0,2$ e) $\sqrt{a} = \frac{2}{5}$

7. Kuinka pitkä on neliön piiri, kun sen ala on 121 cm^2 ?

8. Anna kolmidesimaaliset likiarvot a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{300}$ d) $\sqrt{1000}$ e) $\sqrt{3,14}$

9. Mikä luku sopii x:n paikalle a) $\sqrt{x} = 9$ b) $\sqrt{x-1} = 9$ c) $\sqrt{9} = x$ d) $\sqrt{9} = x-1$ e) $\sqrt{x+1} = 6$

10. Paljonko aitaa tarvitaan sellaisen neliönmuotoisen alueen aitaamiseen, jonka ala on 30 m^2 ?

11. Kuinka pitkästi lattialistaa tarvitaan neliönmuotoiseen huoneeseen, jonka ala on 32 m^2 ?

12. Tutkimuksen mukaan auton nopeus ennen jarrutusta voidaan laskea jarrutusjäljen pituuden mukaan kaavasta $v = 14 \cdot \sqrt{s}$, missä v on nopeus yksikköinä km/h ja s on jarrutusjälkien pituus metreinä. Laske nopeus, kun jarrutusjälkien pituus on a) 16 m b) 32 m c) 50 m.

8. Lauseke

8.1. Lauseke

Lauseke on jonkin laskutoimituksen tulos, kun jokin tai useampi laskettavista on esitetty kirjaimen avulla.

8.2. Lausekkeen teko sanallisista tiedoista

Valitse jokin kirjain pitämään paikka sellaiselle luvulle, jota ei tunneta tai jonka arvo voi muuttua. Lausekkeen saat merkitsemällä millainen lasku on laskettava.

8.3. Lausekkeen arvon laskeminen

Sijoitetaan lausekkeeseen kirjaimen paikalle sen arvoksi tuleva luku ja lasketaan lopputulos.

- Muodosta kolmion alan lauseke korkeuden h ja kannan a avulla.
- Muodosta ympyrän pinta-alan lauseke säteen r avulla.
- Muodosta ostoksen hinta kilohinnan 16 mk/kg ja määrän $x \text{ kg}$ avulla.
- Muodosta maksun suuruus, kun ostetaan $x \text{ kg}$ mustikoita hintaan 25 mk/kg ja $y \text{ kg}$ mansikoita 30 mk/kg .
- Muodosta suunnikkaan kannan lauseke alan A ja korkeuden h avulla.
- Muodosta lastenlipun hinnan lauseke, kun aikuisten lipun hinta on x ja 2 aikuisen ja kolmen lapsen kokonaismaksu on M .
- Laske lausekkeen $2,3x + 4,5$ arvo, kun a) $x = 3$ b) $x = 5,2$.
- Laske lausekkeen $2x + 3y$ arvo, kun $x = 7$ ja $y = -3$.
- Laske lausekkeen $x^2 - y^2$ arvo, kun $x = 7,2$ ja $y = 2,8$.
- Laske lausekkeen $3x - 1 - \frac{x}{x-1}$ arvo, kun $x = -\frac{1}{2}$

9. Potenssit

9.1. a^n

$= a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ eli tulo, jossa on eksponentin osoittama määrä kantaluvun suuruisia tekijöitä

9.2. a^1

$= a$.

9.3. a^0

$= 1$, kun $a \neq 0$

ei ole määritelty, jos $a = 0$. Ts. 0^0 on epämääräinen

9.4. a^{-n} , kun $-n$ on negatiivinen kokonaisluku

$= \left(\frac{1}{a}\right)^n$ eli ota ensin luvusta käänteisluku ja korota se sitten potenssiin $+n$ TAI

$= \frac{1}{a^n}$ eli korota ensi kantaluku a potenssiin $+n$ ja ota sitten tästä käänteisluku

9.5. $(ab)^n$

$= a^n \cdot b^n$ eli kumpikin tekijä korotetaan eksponentin osoittamaan potenssiin ja nämä sitten kerrotaan

9.6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n$

$= \frac{a^n}{b^n}$ eli korotetaan osoittaja ja nimittäjä eksponentin osoittamaan potenssiin ja sitten nämä jaetaan

9.7. $(a^n)^m$

$= a^{n \cdot m}$ eli kerro eksponentit ja korota sitten kantaluku tämän tulon osoittamaan potenssiin TAI

$= (a^m)^n$ eli vaihda eksponenttien järjestystä

$$9.8. a^m \cdot a^n$$

= a^{m+n} eli kun tulon tekijöillä on sama kantalukey, tämä voidaan kertoa siten, että yhteinen kantalukey korotetaan eksponenttien summan osoittamaan potenssiin.

$$9.9. a^m : a^n$$

= a^{m-n} eli kun jaettavilla on sama kantalukey, nämä voidaan jakaa siten, että yhteinen kantalukey korotetaan eksponenttien erotuksen osoittamaan potenssiin

$$9.10. x^m \cdot y^m$$

= $(xy)^m$ eli kun tulon tekijöillä on sama eksponentti, voidaan kantaluvut ensin kertoa ja sitten tämä tulo korottaa yhteisen eksponentin osoittamaan potenssiin

$$9.11. \frac{x^m}{y^m}$$

= $\left(\frac{x}{y}\right)^m$ eli kun osamäärän jaettavilla on sama eksponentti, voidaan kantaluvut ensin jakaa ja sitten tämä osamäärä korottaa yhteisen eksponentin osoittamaan potenssiin.

$$9.12. x^{m \cdot n}$$

= $(x^m)^n = (x^n)^m$ eli jos eksponenttina on tulo, voidaan kantalukey korottaa ensin toisen tekijän osoittamaan potenssiin ja sitten tämä potenssi toisen tekijän osoittamaan potenssiin.

$$9.13. x^{m+n}$$

= $x^m \cdot x^n$ eli, kun eksponentissa on summa, voidaan kantalukey korottaa kummankin yhteenlaskettavan osoittamaan potenssiin ja sitten nämä potenssit kertoa.

$$9.14. x^{m-n}$$

= $\frac{x^m}{x^n}$ eli, kun eksponenttina on erotus, voidaan kantalukey korottaa kummankin yhteenlaskettavan osoittamaan potenssiin ja sitten nämä potenssit jakaa. Osoittajaan se eksponentti, jonka edessä on + merkki ja nimittäjään se eksponentti, jonka edessä on - merkki

9.15. Luvun 10-potenssiesitys

Jokainen luku abxxx,xxx voidaan esittää muodossa $a,xxxxxx \cdot 10^n$, missä edessä oleva kerroin on lukujen 1 ja 10 välissä ja eksponentti n sitä 10:n potenssia, mitä on luku a.

9.16. Laskut 10-potenssiluvuilla

Suoritetaan käyttäen laskinta.

Syötetään laskimeen , senjälkeen normaalit laskutoimitusmerkit mitä laskussa on.

1. a) 2^3 b) -2^3 c) $(-2)^3$ d) 2^1 e) 2^0 f) 0^2

2. a) 2^4 b) -2^4 c) $(-2)^4$ d) 2^5 e) -2^5 f) $(-2)^5$ g) $-(-2)^5$

3. a) $(2x)^2$ b) $(-2x)^2$ c) $(-2x)^3$ d) $(2xy)^4$ e) $(-2xy)^4$

4. Mikä luku sopii sulkeisiin a) $()^3 = 2^3x^3$ b) $()^3 = 64x^3$ c) $()^5 = a^5x^5y^5$?

5. a) $5^2 \cdot 2^2$ b) $4^5 \cdot \frac{1}{2}^5$ c) $25^3 \cdot 4^3$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4$ e) $\left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^5$ f) $4^{102} \cdot 0,25^{99}$

6. a) $\left(\frac{x}{2}\right)^3$ b) $\left(\frac{a}{x}\right)^4$ c) $\left(-\frac{3}{x}\right)^2$ d) $\left(\frac{2x}{3}\right)^4$ e) $\left(-\frac{3x}{4y}\right)^3$

7. a) Mikä luku sopii sulkeisiin a) $()^3 = \frac{a^3}{64}$ b) $()^3 = -\frac{27}{x^3}$ c) $()^4 = \frac{16x^4}{y^4}$

8. a) $\frac{8^3}{4^3}$ b) $\frac{33^4}{3^4}$ c) $\frac{8^5}{4^5}$ d) $\frac{8^5}{16^5}$ e) $\frac{8^5 \cdot 6^4}{2^5 \cdot 12^4}$

9. a) $x^3 \cdot x^4$ b) $a^6 \cdot a^7$ c) $x^5 \cdot x^4$ d) $x^5 \cdot x^6 \cdot x^7$ e) $x^3 y^4 \cdot x^5 y^6$ f) $2x^4 \cdot 3x^5$ g) $3x^2 \cdot (-4x)$

10. a) $\frac{x^5}{x^3}$ b) $\frac{x^3}{x}$ c) $\frac{a^7}{a^2}$ d) $\frac{x^6}{x^4}$

11. a) $\frac{x^3}{x^5}$ b) $\frac{x^4}{x^9}$ c) $\frac{x^5}{2x^3}$ d) $\frac{x^{15} \cdot x^{10}}{x^5}$ e) $\frac{15x^4}{3x^2}$ f) $\frac{36x^3 y^4}{-9x^2 y}$

12. a) $\frac{a^6 \cdot a^4}{a^3}$ b) $\frac{10^7 \cdot 10^6}{10^5}$ c) $\frac{5 \cdot 5^1 \cdot 5^2 \cdot 5^3}{5^4 \cdot 5^5}$

13. a) $\frac{8^{1002}}{8^{1003}}$ b) $\frac{2^{1004}}{2^{1002}}$ c) $\frac{2^{1002} \cdot 3^{1003}}{3^{1004} \cdot 2^{1003}}$ d) $\frac{4^5 \cdot 5^5}{10^3 \cdot 10^2}$

14. a) $(a^3)^4$ b) $(b^4)^5$ c) $(c^2)^3$ d) $(-x^3)^4$ e) $(2x^4)^3$ f) $(-3x^2)^3$ g) $(x^2 y^3)^4$

15. a) $(-xy^2)^3$ b) $(2a^2 b^3 c^4)^0$ c) $[(x^2)^3]^4$ d) $(x^2)^n$ e) $(x^n)^n$ f) $[(x^n)^n]^n$

16. a) $(23 + 45)^0$ b) $23 + 45^0$ c) $1^0 + 0^1 + (-1)^0 + (-1)^1$ d) $\frac{x^n x^{n+1}}{x^{2n}}$ e) $\frac{x^{n-2} x^n x^2}{x^{2n}}$

17. a) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ c) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-3}$ d) $\left(2\frac{3}{4}\right)^{-2}$

18. a) $x^5 \cdot (x^6)^2$ b) $\left(\frac{5x^4}{y^3}\right)^2$ c) $x^n \cdot x^n \cdot x$ d) $(x^n)^3 \cdot x^n$ e) $\frac{x^{5n}}{x^{3n}}$

19. a) $\frac{3^4 \cdot 3^6}{3^{12}}$ b) $\frac{10^2 \cdot 10^2}{10^4}$ c) $\frac{x^n \cdot x}{x^2}$ d) $\frac{8x^{n+1}}{x^n}$ e) $\frac{2x^{n+1} \cdot 4x^{n+1}}{x^n}$

20. a) $\frac{3^{1001}}{3^{999}}$ b) $\frac{2^6 \cdot 4^5}{8^4}$ c) $\frac{6^5}{3^4 \cdot 2^3}$ d) $x^{24} : x^8$ e) $24^x : 8^x$ f) $\frac{8 \cdot 2^{4x}}{4^x}$

21. Ilmoita suuruusjärjestyksessä $a = 8^{88}$, $b = (8^8)^8$, $c = 8^{8^8}$

22. Esitä 10-potenssimuodossa a) 1234567890987654321 b) 123456,789 c) 0,00001234567

23. Esitä 10-potenssimuodossa a) 574832920000 b) 0,00000000000123 c) 1231233,0987

24. Esitä desimaalilukuna a) $1,234 \cdot 10^8$ b) $3,2617 \cdot 10^{-6}$ c) $9,876 \cdot 10^5$ d) $4 \cdot 10^{-3}$

25. a) $4,1 \cdot 10^{17} \cdot 7,45 \cdot 10^6$ b) $6,87 \cdot 10^7 : 8,23 \cdot 10^{-6}$ c) $(2,34 \cdot 10^{13})^4$ d) $\sqrt{5,67 \cdot 10^{13}}$

26. a) 0,000000000000054 · 34 250 000 000 b) 340 000 000 000 · 52 100 000 000 000

27. Ihmisen hiuksen leveys on $2,3 \cdot 10^{-5}$ m. Montako hiusta sopii vierekkäin 1 m levyiselle alueelle?

28. Valon nopeus on 300 000 000 m/s ja matka Auringosta Jupiteriin on $778 \cdot 10^9$ m. Kuinka kauan kestää valon kulkea Auringosta Jupiteriin?

29. Lotossa on noin 15 000 000 erilaista lottoriviä. Jos yhden rivin kirjoittaminen kestää 10 s, niin kauanko kestää kaikkien lottorivien kirjoittaminen?

30. 20 oppilasta voi muodostaa 20·19·18·...·3·2·1 erilaista jonoa. Jos yhden jonon tekeminen kestää 30 s, niin kauanko kestää kaikkien jonojen muodostaminen?

10. Polynomi

10.1. Polynomi

Polynomi on luvuista ja kirjaimista yhteen-, vähennys- ja kertolaskuja käyttäen saatu lauseke. Jakolaskuja voi esiintyä, mutta jakajana ei saa olla kirjain.

10.2. Polynomien arvon laskeminen

Sijoitetaan kohtana oleva luku/luvut polynomien kirjainmuuttujan/ien paikalle.

10.3. Samanmuotoisten termien yhteen- ja vähennyslasku

Yhteinen kirjainosa tulee kirjainosaksi.

Kertoimeksi tulee kertoimien summa.

10.4. Polynomien yhteen- ja vähennyslasku

Vain samanmuotoisia termejä voi laskea keskenään yhteen (edellä olevalla tavalla).

Jos polynomi on sulkeissa, poistetaan sulkeet, jolloin - merkki sulkeiden edessä muuttaa kaikkien sulkeissa olevien termien etumerkin. + merkki ei muuta

10.5. Monomien kertolasku

Merkki tulon merkkisäännön perusteella

Kertoimeksi tulee kertoimien tulo.

Kirjainosaksi kirjainosien tulo. Huomioi samankantaisten potenssien kertolasku 9.8.

10.6. Polynomien kertolasku

Jokaisella ensimmäisen tekijäpolynomien termillä kerrotaan jokainen toisen tekijäpolynomien termi

10.7. Monomin jakaminen monomilla

Merkki osamäärän merkkisäännön perusteella.

Kertoimeksi tulee kertoimien osamäärä.

Kirjainosaksi kirjainosien osamäärä. Huomioi samankantaisten potenssien jakolasku 9.9.

Jakolaskua voi pitää myös murtolausekkeena, jolloin sitä voi supistaa kuten murtolausekkeitä.

10.8. Polynomien jakaminen monomilla

Jokainen jaettavapolynomien termi jaetaan jakajamonomilla. Tämä kuten edellä.

- Mikä on polynomien $3x^2 - 4x - 5$ asteluku, termit, kertoimet ja vakiotermit?
- Mitkä ovat polynomien $2x^3 - 4x^2 - 5x + 6$ ja $5x^2 - 7x + 9$ samanmuotoiset termit?
- Olkoon $P(x) = x^2 - 2x - 3$. Laske a) $P(1)$ b) $P(-2)$ c) $P(3) + P(4)$
- Olkoon $P(x) = 2x^2 - 4x + 1$ ja $Q(x) = 2x - x^2$. Laske a) $P(2)$ b) $Q(-3)$ c) $P(4) - Q(5)$
- a) $2m + 3m$ b) $7kg - 3kg$ c) $12,5a + 5,7a - 3,8a$ d) $5m^2 + 6m^2 + 8m$ e) $2\sin x + 3\sin x - 4\cos x + \cos x$
- a) $2x + 3x - 4x$ b) $2x + (5x - 3x)$ c) $2x - (5x - 3x)$ d) $(2x - 4x) - (5x - 8x)$
- a) $2a + 3b - 5a + 6b$ b) $(2a + 3b) - (b - 5a)$ c) $3a + [2b - (4a - 6b)]$ d) $3 - [2a + 4 - (5a - 6)]$
- a) $(x^2 - 2x + 3) + (3x^2 + 4x - 5)$ b) $(x^2 - 2x + 3) - (3x^2 + 4x - 5)$ c) $2x^2 - [(x^2 - 2x + 3) - (3x^2 + 4x - 5)]$
- Vähennä binomien $5x - 6$ ja $3 - 4x$ erotuksesta binomi $4 - 3x$.
- Sievennä lauseke $x^2 - (3x^2 + 2x - 5) + (4x^2 - x - 3)$ ja laske sen arvo, kun $x = -\frac{1}{2}$.
- a) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{4}x + 3x - (\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2 - 2)$ b) $1 - \{-2 - [-3 - (-4 + 2x) - x] + 3x\}$
- a) $3 \cdot 2x - 4$ b) $3(2x - 4)$ c) $x(2x - 4)$ d) $3x^2(2x - 4)$ e) $-4x^3(2x - 4)$
- a) $2(3x - 4) - 5(6 - 7x)$ b) $x^2(2x - 3) + x(3x^2 - 4x)$ c) $(a^2 - 3ab + 4b^2)(-5a^2b)$
- a) $(x - 2)(3x - 4)$ b) $(2x - 3)(2x + 3)$ c) $(x^2 - 2x + 3)(4x - 5)$
- a) $(x - 2)^2$ b) $(2x - 1)^2$ c) $(3x - 2)^2$ d) $(2a + 3b)^2$ e) $(x - 1)^3$
- a) $(x - 2)(x + 2) - x(x - 3)$ b) $(x - 2)(x + 2) - (3 - x)(3 + x)$

17. Kerro monomien x^2 ja $-2x$ erotus monomien $3x$ ja $-4x^2$ summalla.

18. Vähennä binomien $2x + 3$ ja $4 - x$ tulosta jälkimmäisen neliö.

19. a) $\frac{30m + 18cm}{3}$ b) $\frac{30x + 18y}{3}$ c) $\frac{30x - 18}{6}$ d) $\frac{2x^2 - 4x + 6}{2}$

20. a) $(8x^2 - 12x^3):4x$ b) $8x^2 - 12x^3:4x$ c) $(24x^3y^4 + 16x^4y^3):8xy^2$

21. a) $\frac{3(x-2)}{x-2}$ b) $\frac{3x-6}{x-2}$ c) $\frac{3x-6}{4x-8}$ d) $\frac{3x^2-6x}{x-2}$

22. Mikä on puuttuva polynomi a) $\frac{P(x)}{2} = 3x^2 - 4x + 5$ b) $\frac{P(x)}{5x^2} = 2x - 3$ c) $\frac{12x - 21}{P(x)} = 3$ d) $\frac{4x^2 - 6x}{P(x)} = 2x$

23. Laske lausekkeen $\frac{6x^3 - 12x^2}{3x^2}$ arvo, kun $x = -2$.

24. Mikä on se polynomi, joka jaettaessa binomilla $(2x - 1)$ antoi vaillinaiseksi osamääräksi $(x^2 - x - 2)$ ja jakojäännökseksi 3?

11. I asteen yhtälö

11.1. I asteen yhtälön ratkaiseminen

Poista nimittäjät. Kerro yhtälön jokainen termi luvulla, joka voidaan jakaa kaikilla nimittäjillä.

Poista sulkeet.

Siirrä x:t vasemmalle ja vakiot oikealle puolelle yhtälöä (tai päinvastoin). Siirretyn termin etumerkki vaihtuu.

Laske yhteenlasku molemmilla puolilla.

Jaa yhtälön molemmat puolet x:n kertoimella.

1. a) $4x - 6 = 10$ b) $4x - 6 = 4 - x$ c) $3x + 5 = 7x - 11$

2. a) $3(x - 2) = x + 6$ b) $3(x - 2) = 2(7 - x)$ c) $4(x - 2) + 5 = 2(1 - x)$

3. a) $3(x - 2) + 2 = -2x$ b) $5x - 3(x + 1) = 0$ c) $5x - (2 - x) = 4$

4. a) $\frac{x}{3} = 4$ b) $\frac{x-1}{3} = 2 - x$ c) $\frac{x-1}{3} = \frac{x}{2}$

5. a) $\frac{2x-5}{3} + \frac{x}{2} = 3$ b) $\frac{x-3}{4} + \frac{2x}{3} = \frac{3x-7}{6}$ c) $\frac{x}{2} - \frac{x-5}{6} = 1$

6. a) $\frac{x-1}{4} + \frac{2x}{5} = \frac{x}{2}$ b) $8 - \frac{x}{3} = \frac{x+12}{9}$ c) $\frac{8-5x}{12} - \frac{5+7x}{6} + \frac{6+5x}{4} = 0$

7. a) $\frac{x-3}{6} - \frac{x+2}{4} + \frac{x-1}{2} = 3$ b) $\frac{x-2}{0,5} - \frac{x-3}{0,2} = 0,8$

8. a) $2x^2 - 4x = 2x(x - 3) + 4$ b) $(x - 1)(2x - 1) = x(2x + 1) - 11$ c) $x^2 - 2(x - 3) = x(x + 1)$

9. Millä a:n arvolla $x = 2$ on yhtälön $ax - 3 = 5(1 + x)$ ratkaisu?

10. Ilmoita yhtälön $\frac{1}{360} \cdot 6,28x = 40$ ratkaisu 3 numeron tarkkuudella.

11. Millä x:n arvolla polynomit $2x^2 - 6x + 5$ ja $2x^2 + 9x - 25$ saavat saman arvon?

12. a) $5x - 3(x + 1) = 2x - 1$ b) $5(x - 2) - 2(2x - 5) = x$

13. a) $\frac{x}{3} + \frac{x+1}{6} = \frac{x+1}{2}$ b) $\frac{3x+8}{4} - \frac{x-2}{4} = \frac{x+5}{2}$

14. Osoita, että $x = -1$ on yhtälön $(2x - 1)^2 = (x + 3)^2 + 5$ ratkaisu.

15. Tutki, toteuttaako $x = -1\frac{1}{2}$ yhtälön $2(x + 1)^2 - x = 2$.

16. Määritä luku a siten, että yhtälöillä $\frac{2x - 1}{3} = \frac{x}{2}$ ja $\frac{ax + 1}{2} = x$ on sama ratkaisu.

17. Millä vakion a arvolla yhtälöllä $a(x - 2) = 4 - 2x$ on ratkaisu $x = 1$. Onko yhtälöllä tällöin muita ratkaisuja?

18. a) $3a - x + b = 2a - 3b$ b) $7a - [5x - (2x + 4a)] = (8x - 11a) - 22$

19. a) $\frac{1}{x} = 3$ b) $\frac{1}{2x} = 3$ c) $\frac{1}{2x - 1} = 3$ d) $\frac{x}{2} = \frac{x - 3}{5}$ e) $\frac{x}{x - 1} = \frac{x - 2}{x}$

12. Probleema

On sanallinen tehtävä, josta on itse tehtävä yhtälö ja sitten ratkaistava tämä.

- 1) Lue tehtävä
- 2) Piirrä mahdollinen kuvio
- 3) Valitse jokin suure x :ksi. Yleensä se mitä kysytään, mutta muukin suure voi olla tuntemattomana.
- 4) Lausu kaikki esiintyvät ja tarvittavat suureet x :n ja annettujen lukujen avulla.
- 5) Tee suureiden yhteyttä kuvaava yhtälö. Esim. jokin asia on esitetty kahdella tavalla, jolloin nämä ovat yhtä suuret ja tästä yhtälö. Tai kokonaisuus on osiensa summa tms.
- 6) Ratkaise tekemäsi yhtälö
- 7) Pohdi ratkaisun järkevyyttä ja mielekkyyttä.
- 8) Anna vastaus.

1. Kun luku x kerrotaan 4:llä ja tuloon lisätään 5 saadaan luku 41. Mikä on luku x ?

2. Kun lukuun lisätään 48 saadaan alkuperäinen luku viisinkertaisena. Mikä on alkuperäinen luku?

3. Kun luku kerrotaan 4:llä ja tulosta vähennetään 60 saadaan alkuperäisen luvun vastaluku. Mikä on alkuperäinen luku?

4. Villellä on 34 jääkiekkokorttia enemmän kuin Kallella. Montako korttia on kummallakin, kun kortteja on yhteensä 752?

5. Villellä on 34 jääkiekkokorttia enemmän kuin Kallella ja 14 vähemmän kuin Ollilla. Montako korttia on kullakin pojalla, kun heillä on yhteensä 1021 korttia?

6. Suorakulmion kanta on $x + 6$ ja korkeus $x + 1$. Laske sivujen pituudet, kun piiri on 22?

7. Tasakylkisen kolmion kanta on 6 kylkeä lyhempi. Laske sivujen pituudet, kun piiri on 51?

8. Kolmion kulma on 15° ja toinen on kaksi kertaa niin suuri kuin kolmas. Laske kulmat.

9. Kolmion kulma on 15° suurempi kuin toinen ja 18° pienempi kuin kolmas. Laske kulmat.

10. Kalle on 16 vuotta vanha ja 24 vuotta isäänsä nuorempi. Miten monen vuoden kuluttua Kallen ikä on puolet isän iästä?

11. Millä luvulla on se ominaisuus, että jos siitä vähennetään $1\frac{1}{2}$ ja erotus jaetaan luvulla $1\frac{1}{2}$ saadaan $1\frac{1}{2}$ kertaa alkuperäinen luku?

12. Ville kysyi Kallelta: "Mikä luku on mielessäni, kun kerron sen 7:llä ja lisään tuloon 3, puolitan saadun summan ja osamäärästä vähennän 4, niin saan luvun 15?"

13. Minkä kolmen peräkkäisen kokonaisluvun summa on 513?

14. Minkä kolmen peräkkäisen parittoman luvun summa on 513?

15. Mikä luku on lisättävä murtoluvun $\frac{3}{8}$ osoittajaan ja nimittäjään, jotta murtoluvun arvoksi tulisi $\frac{1}{2}$?

16. Mikä luku on vähennettävä murtoluvun $\frac{9}{13}$ osoittajasta ja nimittäjästä, jotta arvoksi tulisi $\frac{1}{3}$?
17. Lukujen 20, 28 ja erään kolmannen luvun keskiarvo on kolme kertaa niin suuri kuin tämä kolmas luku. Mikä luku on?
18. Jos desimaaliluvun pilkkua siirretään yhden numeron yli oikealle, saadaan luku, joka on 59,4 suurempi kuin alkuperäinen luku. Mikä on alkuperäinen luku?
19. Jos desimaaliluvun pilkkua siirretään kahden numeron yli vasemmalle, saadaan luku, joka on 0,792 pienempi kuin alkuperäinen luku. Mikä on alkuperäinen luku?
20. Kuinka pitkälle Ville voi ajaa mopolla, kun hänen täytyy kävellä takaisin ja olla kotona 2 tunnin kuluttua lähdöstä? Mopon vauhti on 45 km/h ja kävelyvauhti 5 km/h.
21. Ville ja Kalle asuvat 12 km:n päässä toisistaan. He lähtevät samanaikaisesti toisiaan vastaan. Ville pyöriilee vauhdilla 18 km/h ja Kalle kävelee 6 km/h. Miten nopeasti lähdöstä he kohtaavat?
22. Ville ja Kalle lähtivät kaupunkiin yhtäaikaan samasta paikasta. Ville pyöriili vauhdilla 18 km/h ja Kalle käveli 6 km/h. Kuinka pitkä matka oli lähtöpaikasta kaupunkiin, kun Ville oli 3 h ennen Kallea?
23. Villen todistuksen keskiarvo oli 6,82. Seuraavassa todistuksessa oli kolme numeroa noussut yhdellä ja keskiarvo oli 7,09. Montako numeroa oli Villen todistuksessa?
24. Kun erään kokonaisluvun loppuun kirjoitettiin numero 6, oli syntynyt luku 222 suurempi kuin alkuperäinen luku. Mikä oli alkuperäinen luku?
25. Isä on 24 vuotta vanhempi kuin poikansa. Neljäsosa isän iästä on pojan ikä. Kuinka vanha isä on?
26. Ville osti sukset, jotka maksoivat $\frac{1}{6}$ hänen rahoistaan ja kellon, joka maksoi $\frac{1}{4}$ hänen alkuperäisistä rahoistaan. Paljonko Villellä oli alunperin rahaa, kun hänellä ostosten jälkeen oli 126 mk?
27. A ja B kulkevat samaan suuntaan, A edellä. Milloin B saavuttaa A:n, kun A:n vauhti on 4 km/h ja B:n vauhti 6 km/h ja alkuperäinen väli oli 12 km?
28. Kahden henkilön vauhdit ovat 5 m/s ja 3 m/s. He liikkuvat radalla, joka on 400 m pitkä. Milloin he kohtaavat, jos he lähtevät yhtäaikaan maaliviivalta ja he kulkevat a) samaan b) vastakkaiseen suuntaan?
29. Kolmiossa on 5,2 ja 4,5 pituiset sivut. Edellisen vastainen korkeus on 3,6. Mikä on jälkimmäisen vastainen korkeus?
30. Villellä on tapana ajaa moottoritiellä 100 km/h ja muulla maantiellä 60 km/h. Mikä on hänen keskivauhtinsa, jos hän ajaa moottoritietä puolet a) matkasta b) ajasta?

13. Prosentti

13.1. Prosenttilaskut tekemällä kaavan mukainen yhtälö ja ratkaisemalla se

$$b = \frac{p}{100} \cdot a \quad \text{tai} \quad b = 0,0p \cdot a$$

p on prosenttiluku, sen tunnistaa % merkistä

b on prosenttiarvo. p ja b kuvaavat samaa asiaa, toinen prosentteina, toinen arvona.

a on perusarvo. Sen tunnistaa -sta, -stä päätteestä, kuin ... sanan jälkeinen asia, alkuperäinen suure ...

Sijoita annetut luvut ja kysyty asia x:änä kaavaan ja ratkaise saatu yhtälö

13.2. Prosenttilaskut järjeilemällä yhden prosentin kautta

A. Paljonko on p % a:sta?

$$100\% = a \Leftrightarrow 1\% = a/100 \Leftrightarrow p\% = a/100 \cdot p$$

B. Mistä luvusta p % on b?

$$p\% = b \Leftrightarrow 1\% = b/p \Leftrightarrow 100\% = 100 \cdot b/p$$

C. Montako % on b a:sta?

$$100\% = a \Leftrightarrow 1\% = a/100 \Leftrightarrow \text{näitä mahtuu b:hen } b / (a/100)$$

$$\text{TAI } b \text{ on a:sta } b \text{ a:s-osaa} \Leftrightarrow b/a, \text{ jossa on sadasosia} \Leftrightarrow b/a \cdot 100$$

13.3. Prosenttilaskut muistamalla eri tilanteisiin sopivat kaavat.

A. Paljonko on p % a :sta? : $x = p/100 \cdot a$ tai $x = 0,0p \cdot a$

B. Mistä luvusta p % on b ? : $x = b/p \cdot 100$ tai $x = b / 0,0p$

C. Montako prosenttia b on a :sta? : $x = b/a \cdot 100$ tai b/a :n sadasosista saadaan prosentit

13.4. Muuttuneen arvon laskeminen muutosprosentin avulla.

Olkoon kasvuprosentti (muutos-, suuremmuus-, kasvu-, ...) p .

Kasvanut arvo on $(100 + p)$ % lähtöarvosta (siitä mihin verrataan) eli $x = (100 + p)/100 \cdot a = \alpha \cdot a$

Jos kyseessä on pienemmyys, alennettu hinta yms. on p otettava negatiivisena.

- Mitä on desimaalilukuna a) 35% b) 2% c) 20% d) 0,5% e) 105%
- Mitä on prosentteina a) 0,21 b) 0,75 c) 0,05 d) 0,001 e) 0,321 f) 1,34
- Mitä on prosentteina a) $\frac{23}{100}$ b) $\frac{4}{100}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{23}{34}$ f) $\frac{2,5}{7,6}$?
- Paljonko on a) 35% 25 kg:sta b) 4% 205 mk:sta c) 54% 15 400 mk:sta d) 0,7% 1200 mk:sta e) 6% x :stä?
- Montako prosenttia on a) 23 mk 75 mk:sta b) 5,3 kg 120 kg:sta c) 35 g 1,56 kg:sta d) 6 x :stä e) x y :stä?
- Mistä luvusta a) 5,6% on 67 mk b) 34% on 51 mk c) 0,7% on 147 d) 8% on x e) x % on 10 f) p % on x ?
- Lukioon tuli 98 uutta oppilasta, joista 55 oli tyttöjä. Montako % oli tyttöjä?
- Villen palkka on 7400 mk ja Kallen 12 400 mk. Kumpikin saa 280 mk:n palkankorotuksen. Kuinka monta prosenttia kummankin palkka nousi?
- Vetelissä on 4000 asukasta ja Halsualla 1600. Kuinka monta prosenttia kummankin kunnan väkiluku muuttuu, kun 120 halsualaista muuttaa Veteliin?
- 420 mk jaetaan kolmeen osaan siten, että ensimmäinen osa on 15% koko rahamäärästä ja 70% toisesta osasta. Kuinka suuri oli kolmas osa?
- Paljonko on alennus, kun 180 mk:n korvalappustereioista saadaan 8 % alennus?
- Paljonko on maksettava, kun 990 mk rullaluistimista saadaan 12% alennus?
- Mistä hinnasta 7,5% alennus on 45 mk?
- Mikä oli alentamaton hinta, kun Maija maksoi 120,70 mk saadessaan 15% alennuksen?
- Tavaran hintaa oli alennettu 20%. Kun sitä alennettiin vielä 25%, se myytiin 150 mk:lla. Mikä oli alkuperäinen hinta?
- Kauppias maksoi tavarasta 104 mk. Mikä hänen tulisi laittaa hinnaksi, jotta hän myöntäessään 10% alennuksen saisi voittoa 15%?
- Tavara myytiin 150 mk:lla, jolloin saatiin 20% voittoa. Mikä olisi ollut hintana, jos olisi tyydytty 10% voittoon?
- Jäätelö maksaa kaupassa A 4,90 mk. Mikä on hinta kaupassa B, jossa se on 15% halvempi?
- Jäätelö maksaa kaupassa B 4,90 mk ja se on 15% halvempi kuin kaupassa A. Mikä on hinta A:ssa?
- Halsualla on 1600 asukasta ja Vetelissä 4000. Montako prosenttia on a) Vetelissä enemmän asukkaita kuin Halsualla b) Halsualla vähemmän asukkaita kuin Vetelissä?
- Montako asukasta on Kaustisella, jossa asukasmäärä on 5% suurempi kuin Vetelin 4000 asukasta?
- Montako asukasta on Vetelissä, jonka asukasmäärä on 4% pienempi kuin Kaustisen 4200 asukasta?

23. Uusista 98 oppilaasta on 55 tyttöjä. a) Kuinka monta % tyttöjä on enemmän kuin poikia? b) Kuinka monta prosenttia poikia on vähemmän kuin tyttöjä?
24. Luokassa on tyttöjen määrä 15% suurempi kuin poikien määrä. Montako tyttöä luokassa oli, kun oppilaita oli kaikkiaan 43?
25. 6 kg painava 5-prosenttinen suolaliuos on vettä haihduttamalla saatava 10-prosenttiseksi. Kuinka paljon vettä on haihdutettava?
26. Mikä on seoksen suolapitoisuusprosentti, kun 12 kg 5%:sta ja 8 kg 10%:sta liuosta sekoitetaan?
27. Laske seoksen pitoisuus, kun 10 kg 5%:sta, 15 kg 10%:sta ja 20 kg 15%:sta liuosta yhdistetään.
28. Kuinka paljon vettä on lisättävä 20 kg:aan 15%:sta suolaliuosta, jotta siitä tulisi 10%:sta?
29. Paljonko 8%:sta suolaliuosta on lisättävä 600 g:aan 16%:sta suolaliuosta, jotta saataisiin 10%:sta suolaliuosta?
30. Manne oli ostanut kaksi hevosta samalla hinnalla. Hän myi toisen 25% voitolla ja toisen 25% tappiolla. Voittiko Manne vai hävisi kaupassaan?
31. Manne oli ostanut kaksi hevosta, joista toisen ostohinta oli kaksinkertainen toiseen verrattuna. Hän myi kalliimman 15% voitolla ja halvemman 25% tappiolla. Miten Mannelle kävi kokonaisuudessaan?
32. Kauppias myi 20% tavaroistaan 10% voitolla 30% tavaroista 15% voitolla ja loput 25% voitolla. Miten monen prosentin voiton kauppias sai kaikkiaan?
33. Inflaatioaikaan tontin hinta nousi 15% alkuvuonna ja 25% loppuvuonna. Montako prosenttia hinta muuttui sinä vuonna?
34. Kahvin hinta nousi 15%. Montako prosenttia pitää kulutuksen pienentyä, jotta kokonaismenot pysyisivät samana?
35. Vanhempien talolainan korkoprosentti muuttui 7,5%:sta 8,5%:iin? Kuinka monta prosenttia enemmän rahaa vanhemmilta kuluu lainan korkoihin?
36. Tavarahan hinta nousi 20%. Ostaja sai kuitenkin 15% alennuksen. Monenko prosentin korotuksen alkuperäisestä hinnasta ostaja joutui maksamaan?
37. Tavarahan valmistuskuluista on 20% työkustannuksia ja 50% raaka-ainekustannuksia. Miten tavarahan hinnalle käy kun palkat kasvavat 10% ja raaka-aineet 5%?
38. Luku on 50% suurempi kuin toinen. Kuinka monta % jälkimmäinen on pienempi kuin edellinen?

14. Yhtälöpari

14.1. I asteen yhtälöparin ratkaiseminen "sijoituskeinolla"

Tavoitteena on saada yhtälö, jossa on vain yksi tuntematon!

Ratkaise helpommasta yhtälöstä y . (Siirtämällä $x:t$ ja vakiot oikealle ja jakamalla $y:n$ kertoimella)

Sijoita saatu $y:n$ lauseke toiseen yhtälöön $y:n$ paikalle. (Saat yhtälön, jossa on vain x tuntemattomana)

Ratkaise tästä yhtälöstä x .

Sijoita saatu $x:n$ arvo helpompaan yhtälöön saadaksesi $y:n$ arvon.

Anna vastaus

14.2. I asteen yhtälöparin ratkaiseminen "kerro sopivilla luvuilla ja laske yhteen"-keinolla

Laita ryhmä normaalimuotoon, ts. $x:t$ alekkain, $y:t$ alekkain ja vakiot toisella puolella yhtälöitä alekkain

Kerro yhtälöt niin, että $y:n$ kertoimet ovat vastalukuja

Laske yhtälöt puolittain yhteen, jää vain x tuntemattomaksi

Ratkaise x saadusta yhtälöstä

Sijoita saatu x toiseen yhtälöön, johon jää vain y tuntemattomaksi

Ratkaise tästä yhtälöstä y

Anna vastaus

$$1. a) \begin{cases} y = 2x \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} b) \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x + 5y = 7 \end{cases} c) \begin{cases} x = 3y - 4 \\ 3x - 4y = 3 \end{cases}$$

$$2. a) \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases} b) \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} c) \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$$

$$3. a) \begin{cases} 2x + y = 8 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} b) \begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + 2y = 14 \end{cases} c) \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x + y = 20 \end{cases}$$

$$4. a) \begin{cases} 5x - 4y = -1 \\ 7x - 5y = -1 \end{cases} b) \begin{cases} 0,4x + 2y = 2 \\ x - 5y = 5 \end{cases} c) \begin{cases} 6x - 8y = -2 \\ 14x - 5y = 50 \end{cases}$$

$$5. a) \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 3x + 5y = 5 \end{cases} b) \begin{cases} 4x + 5y = 22 \\ 5x - 4y = 3 \end{cases} c) \begin{cases} 28x + 39y = 95 \\ 21x - 26y = 16 \end{cases}$$

$$6. a) \begin{cases} 2(x - y) + 3(x + y) = 16 \\ 3(x + 2y) - 2(x - y) = 11 \end{cases} b) \begin{cases} x + \frac{x + y}{3} = 7 \\ y - \frac{x + y}{9} = 4 \end{cases}$$

$$7. a) 2x + y = 3x - y = 10 \quad b) 4x + 2y = 3x - y = 10$$

8. Mitkä ovat ne a ja b, jotka toteuttavat yhtälöt $3(a - 1) + 2b = 10$ ja $2a + 3(b - 2) = 6$?

14.3 Yhtälöpariprobleemoja

Lue tehtävä

Piirrä mahdollinen kuvio

Valitse jokin suure x:ksi ja toinen y:ksi

Lausu kaikki esiintyvät ja tarvittavat suureet x:n, y:n ja vakiolukujen avulla

Muodosta kaksi yhtälöä annetuista tiedoista

Ratkaise yhtälöparista x ja y

Pohdi vastauksen mielekkyyttä

Anna vastaus

9. Mitkä ovat ne kaksi lukua, joiden summa on 16 ja erotus 6?

10. Mitkä ovat ne kaksi lukua, joiden summa on 9 ja osamäärä 2?

11. Jaa luku 10 kahteen osaan, joiden suhde on 1:3

12. Leirintäalueella on 2 ja 4 henkilön mökkejä yhteensä 20. Niissä voi yöpyä yhteensä 66 henkilöä. Montako kahden ja neljän henkilön mökkiä alueella oli?

13. Isä on kolme kertaa niin vanha kuin poikansa, mutta viisi vuotta sitten hän oli neljä kertaa niin vanha kuin poikansa. Kuinka vanhoja he ovat nyt?

14. Kallen kukkarossa oli yhteensä 25 seteliä yhteisarvoltaan 1930 mk. Montako 50 mk:n seteliä siinä oli, kun 100 mk:n seteleitä oli neljä kertaa niin paljon kuin 20 mk:n seteleitä eikä isompia seteleitä ollut?

15. Pesäpallo-otteluun myytiin 800 lippua ja tuloja saatiin 38 000 mk. Aikuisten lipun hinta oli 60 mk ja lastenlipun 20 mk. Montako aikuisten ja montako lasten lippua myytiin?

16. Koulun muusikoiden ensimmäiseen konserttiin myytiin 75 aikuisten ja 120 lasten lippua, jolloin tulot olivat 1080 mk. Toiseen konserttiin myytiin 80 aikuisten ja 115 lasten lippua, joista saatiin 1100 mk. Mitkä olivat aikuisten ja lasten lippujen hinnat?

17. Kun murtoluvun osoittajaan ja nimittäjään lisätään 3, saadaan $\frac{3}{4}$. Kun molemmista vähennetään 2, saadaan $\frac{1}{3}$. Mikä on kyseinen murtoluku?

18. Isä oli 4 vuotta sitten 5 kertaa niin vanha kuin poika. 17 vuoden kuluttua isä on 2 kertaa niin vanha kuin poika. Kuinka vanhoja he ovat tällä hetkellä?

19. Laboratoriossa on 10% ja 25% suolaliuosta. Paljonko kumpaakin on otettava, jotta saataisiin 30 kg 15% liuosta?
20. Kahden luvun suhde on 1:2. Jos pienempään lisätään 1 ja suuremmasta vähennetään 1, on lukujen suhde 3:5. Määritä luvut.
21. Kaksinumeroisen luvun numeroiden summa on 11. Jos numeroiden järjestys vaihdetaan, niin luku suurenee 45:llä. Määritä alkuperäinen luku.
22. Kaksinumeroisen luvun numeroiden summa on 9. Jos luvussa vaihdetaan numeroiden paikkaa, saadaan luku, joka on $\frac{4}{7}$ alkuperäisestä luvusta. Mikä on alkuperäinen luku?

15. Funktion kuvaaja

15.1. Yhtälön (funktion) kuvaajan piirtäminen

Tee lukuparitaulukko

Anna x:lle sopivat arvot, esim. 0, 1, 2, ...

Laske näillä x:illä funktion (y:n) arvot ja merkitse ne vastaavan x:n viereen lukuparitaulukkaan

Merkitse lukuparit pisteinä koordinaatistoon

Piirrä viiva pisteiden kautta.

15.2. Nollakohta funktion kuvaajasta

Nollakohta on sen pisteen x-koordinaatti, missä kuvaaja leikkaa x-akselin

15.3. Funktion merkit kuvaajasta

Funktio saa positiivisen arvon niillä x:illä, joilla kuvaajan pisteet ovat x-akselin yläpuolella

15.4. Suoran yhtälö ja kuvaaja

Yhtälössä $y = kx + b$

b kertoo millä korkeudella suora leikkaa y-akselin

k on kulmakerroin, joka kertoo montako ruutua on mentävä ylös tai alas, kun siirrytään yksi ruutu oikealle

15.5. Yhtälöparin ratkaisu kuvaajista

Piirretään kummankin yhtälön kuvaajat koordinaatistoon

Katsotaan leikkauspisteen x ja y, jotka ovat yhtälöparin ratkaisut

1. Päivälämpötilat eräällä paikkakunnalla lokakuussa olivat seuraavat

pv	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
t/°C	8	10	4	3	7	9	3	-1	-4	5	-2	1	3	4	3

a) Piirrä havaintojen perusteella lokakuun lämpötilakäyrä. b) Milloin lämpötila oli korkein? c) Milloin lämpötila oli matalin? d) Milloin lämpötila oli nollassa? e) Milloin lämpötila oli pakkasen puolella? f) Milloin lämpötila oli +6 °C?

2. Piirrä suorat a) $y = 2x - 1$ b) $y = 3x - 4$ c) $y = -2x + 3$ d) $y = -4x + 5$

3. Piirrä suora $y = 3x - 2$. Mikä on kuvaajan perusteella nollakohta? Millä x:illä arvo on negatiivinen?

4. Piirrä samaan koordinaatistoon suorat $y = 2x + 1$ ja $y = -x + 4$. Missä pisteessä suorat leikkaavat?

5. Ratkaise graafisesti yhtälö $5x - 4 = 0$.

6. Ratkaise graafisesti yhtälöpari $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ y = x - 1 \end{cases}$

16. Tasogeometrian kuvioiden pinta-aloja ja viivojen pituuksia

16.1. Kolmion ala

$A = \frac{ah}{2}$, missä a = kanta ja h = korkeus

16.2. Neliön ala

$A = a^2$, missä a on neliön sivu

16.3. Suunnikkaan ala

$A = ah$, missä a = kanta ja h = korkeus

16.4. Puolisuunnikkaan ala

$A = \frac{a+b}{2} \cdot h$, missä a ja b ovat kantasivut (yhdensuuntaiset sivut) ja h on korkeus

16.5. Ympyrän kehän pituus

$p = 2\pi r$, missä r on ympyrän säde

16.6. Ympyrän kaaren pituus

$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$, missä α on kaaren (ja vastaavan keskuskulman) asteluku ja r on säde

16.7. Ympyrän pinta-ala

$A = \pi r^2$, missä r on ympyrän säde

16.8. Ympyräsektorin pinta-ala

$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$, missä α on sektorin keskuskulma ja r on säde

16.9. Pythagoraan teoreema

Suorakulmaisessa kolmiossa pätee : $\text{kateetti}^2 + \text{kateetti}^2 = \text{hypotenuusa}^2$

1. Suorakaiteen sivut ovat 3,7 cm ja 1,8 cm. Laske pinta-ala.
2. Suunnikkaan ala on $2,73 \text{ m}^2$ ja korkeus 18 dm. Laske kanta.
3. Neliön sivu on 16,3 dm. Laske pinta-ala.
4. Neliön ala on $23,75 \text{ m}^2$. Laske sivu ja piiri.
5. Kolmion kanta ja korkeus ovat 6,8 cm ja 4,9 cm. Laske pinta-ala.
6. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 2,6 cm ja 4,7 cm. Laske ala.
7. Puolisuunnikkaan yhdensuuntaiset sivut ovat 2,4 cm ja 5,3 cm sekä korkeus 3,7 cm. Laske ala.
8. Puolisuunnikkaan kannat ovat 4,6 cm ja 3,8 cm sekä ala 20 cm^2 . Laske korkeus.
9. Ympyrän halkaisija on 4,6 cm. Laske piiri ja ala.
10. Ympyrän piiri on 23,4 cm. Laske ala.
11. Ympyrän sektorin keskuskulma on 45° ja säde 5,2 cm. Laske ala.
12. Ympyrän sektorin ala on $30,2 \text{ cm}^2$ ja säde 4,3 cm. Laske sektorin keskuskulma.
13. Lammas on kiinni navetan ulkopuolella nurkkalautaan kiinnitetyn narun päässä. Miten suurelta alalta lammas pystyy syömään ruohoa, kun narun pituus on 6 m ja navetan mitat ovat 8 m x 10 m?
14. Lammas on kiinni navetan ulkopuolella nurkkalautaan kiinnitetyn narun päässä. Miten suurelta alalta lammas pystyy syömään ruohoa, kun narun pituus on 6 m ja navetan mitat ovat 4 m x 8 m?
15. Urheilukenttä muodostuu keskellä olevasta suorakaiteesta ja päissä on puoliympyrän muotoinen alue. Miten pitkä on kentän ympärysmitta, kun suurin leveys on 80 m ja suurin pituus 140 m?

16. Leijän tukikepit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja pituudeltaan 100 cm ja 60 cm. Kangas on laitettu keppien päistä muodostuneelle nelikulmion alalle. Paljonko on leijakangasta?

17. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 6 cm ja 8 cm. Laske hypotenuusa.

18. Suorakulmaisen kolmion pisin sivu on 13 m ja lyhin 5 m. Laske keskimmäisen sivun pituus.

19. Kuinka leveä teräslevy mahtuu ovesta, jonka mitat ovat 90 cm x 200 cm?

20. Tasakylkisen puolisuunnikkaan kantasivut ovat 1,30 m ja 70 cm sekä kyljet 50 cm. Laske puolisuunnikkaan ala.

17. Avaruuskappaleiden tilavuuksia ja pinta-aloja

17.1. Kuution tilavuus

$V = a^3$, missä a on kuution sivun pituus

17.2. Särmiön tilavuus

$V = Ah$, missä A = pohjan ala ja h = korkeus TAI

$V = abh$, missä a = pituus, b = leveys ja h = korkeus

17.3. Pyramidin tilavuus

$V = \frac{1}{3} \cdot Ah$, missä A on pohjan pinta-ala ja h = korkeus

17.4. Lieriön tilavuus

$V = Ah$, missä A on pohjan pinta-ala ja h on korkeus

$V = \pi r^2 h$, jos kyseessä ympyrälieriö, jossa r = pohjaympyrän säde ja h = korkeus

17.5. Suoran ympyrälieriön vaipan ala

$A = 2\pi rh$, missä r = pohjaympyrän säde ja h = korkeus

17.6. Kartion tilavuus

$V = \frac{1}{3} \cdot Ah$, missä A = pohjan pinta-ala ja h = korkeus

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$, jos kartio on suora ympyräkartio, jonka pohjaympyrän säde on r ja korkeus h

Vaipan ala $A = \pi rs$, missä r on suoran ympyräkartion pohjan säde ja s on sivujanan pituus

17.7. Pallon tilavuus

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$, missä r = pallon säde

17.8. Pallon ala

$A = 4\pi r^2$, missä r = pallon säde

1. Suorakulmaisen särmiön särmät ovat 6 cm, 7 cm ja 8 cm. Laske ala ja tilavuus.

2. Suorakulmaisen särmiön pituus on 8 cm, korkeus 5 cm ja tilavuus 240 cm^3 . Laske leveys.

3. Suorakulmaisen särmiön pituus on 4 cm, korkeus 2 cm ja pinta-ala 52 cm^2 . Laske tilavuus.

4. Kuution särmä on 2,4 cm. Laske pinta-ala ja tilavuus.

5. Kuution pinta-ala on 24 cm^2 . Laske tilavuus.

6. Suorakulmaisen särmiön sivutahkojen alat ovat 20, 24 ja 30 cm^2 . Laske tilavuus.

7. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin pohjasärmä on 4 cm ja korkeus 6 cm. Laske tilavuus.

8. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin pohjasärmä on 6 cm ja tilavuus 48 cm^3 . Laske korkeus.

9. Suoran ympyrälieriön muotoisen öljysäiliön pituus on 5 m ja läpimitta 2 m. Laske tilavuus.
10. Suoran ympyrälieriön korkeus on 3,6 cm ja vaipan ala 50 cm^2 . Laske tilavuus.
11. Suoran ympyräkartion pohjaympyrän säde on 4 cm ja korkeus 3 cm. Laske tilavuus ja vaipan ala.
12. Suoran ympyräkartion pohjaympyrän säde on 8 cm ja sivujana 10 cm. Laske tilavuus.
13. Pallon säde on 4 cm. Laske tilavuus ja pinta-ala.
14. Pallon ympärysmitta on 15,7 cm. Laske tilavuus.
15. Kuinka suuri on maapallon ympäri pingotetun 0,2 mm läpimittaisen kuparilangan tilavuus, kun maapallon läpimitta on 12 700 km? Paljonko lanka painaa, kun kuparin tiheys on 9 kg/dm^3 ?
16. Uima-altaan pohja on ympyrä, jonka läpimitta on 2,0 m. Reunat ovat joka kohdassa 10 cm paksut ja korkeus joka kohdassa 30 cm. Mikä on reunuksen tilavuus?

18. Trigonometriaa

18.1. Trigonometrinen funktioiden määrittely suorakulmaisessa kolmiossa

$$\sin \alpha = \frac{\text{kulman } \alpha \text{ vastainen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{kulman } \alpha \text{ viereinen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{kulman } \alpha \text{ vastainen kateetti}}{\text{kulman } \alpha \text{ viereinen kateetti}}$$

18.2. Trigonometrinen funktioiden arvot laskimesta

→ . (Katso laskimesi ohjekirjaa, menetelmä voi vaihdella)

18.3. Kulma laskimesta, kun trigonometrisen funktion arvo tunnetaan

→ . (Katso laskimen ohjekirja)

18.4. Suorakulmaisen kolmion ratkaiseminen

Piirrä kuvio.

Katso, että käytät suorakulmaista kolmion

Merkitse siihen tunnettujen osien suuruudet

Merkitse kirjaimella x , α tms. se osa mitä kysytään

Mieti millä paikalla sivut ovat kulmaan nähden

Mieti mikä trigonometrinen funktio näistä muodostuu

Tee ko. trigonometrisen funktion määrittelyn mukainen yhtälö

Ratkaise yhtälöstä tuntematon.

- Piirrä suorakulmainen kolmio ja merkitse kateettien pituuksiksi 15 ja 20 sekä hypotenuusan pituudeksi 25. Kulma α on sivujen 15 ja 25 välinen kulma. Mitä on $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ ja $\tan \alpha$?
- Suorakulmaisen kolmion sivut ovat 5, 12 ja 13 sekä pienin kulma α . Mitä on $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ ja $\tan \alpha$?
- Anna 3 desimaalin tarkkuudella a) $\sin 27,4^\circ$ b) $\cos 74,1^\circ$ c) $\tan 56,9^\circ$.
- Määritä terävä kulma α , kun a) $\sin \alpha = 0,75$ b) $\cos \alpha = 0,276$ c) $\tan \alpha = 0,543$.
- Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on 21,3 cm ja yksi terävä kulma 35° . Laske lyhimmän sivun pituus.
- Suorakulmaisen kolmion kateetti on 3,6 cm ja viereinen terävä kulma 51° . Laske toisen kateetin pituus.
- Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 3,2 ja 4,5. Laske terävät kulmat.

8. Suorakulmaisen kolmion kateetti on 6,4 ja hypotenuusa 12,5. Laske terävät kulmat.
9. Suorakulmaisen kolmion kateetti on 3,8 cm ja vastainen kulma 41° . Laske hypotenuusa.
10. Suorakulmion sivut ovat 3,7 ja 4,5. Laske kannan ja lävistäjän välinen kulma.
11. Tasakylkisen kolmion kanta on 4,6 ja kylki 7,5. Laske kantakulma.
12. Tasakylkisen kolmion huippukulma on 36° ja kylki 4,3 cm. Laske kannan pituus.
13. Mikä on tasasivuisen kolmion sivun pituus, kun korkeus on 10 cm?
14. Tutkan mukaan lentokone on 3 600 m päässä ja 28° korkeudella. Kuinka korkealla kone on?
15. Majakan korkeus on 36 m ja sen huippu näkyy veneestä 5° korkeudella. Veneen tultua lähemmäksi majakkaa näkyy majakan huippu 7° korkeudella. Kuinka pitkä matka soudettiin tällä välillä?
16. Ville suunnisti koilliseen 2 km ja senjälkeen pohjoiseen 1 km. Miten kaukana ja missä suunnassa on lähtöpaikka?
17. Kolmion kulma on 32° ja viereiset sivut 2,4 cm ja 4,1 cm. Laske kolmion ala.
18. Suunnikkaan kulma on 64° ja sivut 4,6 cm ja 7,2 cm. Laske ala.
19. Ympyrässä, jonka säde on 6 cm, on jänne 8 cm. Suuriko on jännettä vastaava keskuskulma?
20. Säännöllisen 9 kulmion sivu on 5 cm. Laske sen ala.

Vastauksia:

- 1.1. a) N, Z, Q, R b) Z, Q, R
c) Z, Q, R d) Q, R e) N, Z, Q, R
f) R
2. a) N b) Z c) Q d) Z e) R
- 2.1. a) -2 b) 3 c) $-\frac{2}{3}$ d) $\frac{5}{6}$
e) -2,3 f) $-1\frac{2}{3}$ g) $-\sqrt{2}$ h) 0
2. a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $-\frac{6}{5}$ e) $\frac{1}{2,3}$
f) $\frac{3}{5}$ g) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ h) ei ole
3. a) 28 b) 130 c) 25 d) 45
4. a) 140 b) 80 c) 123
5. a) 151 b) 151 c) 251
d) 15100 e) 6800
6. a) 869 b) 39200 c) 39592
d) 45600
7. - 8
8. $1\frac{1}{30}$
- 3.1. a) 13 b) -3 c) 3 d) -13
e) 13 f) -13 g) 3 h) -3
2. a) -4 b) 6
3. a) 42 b) -42 c) -42 d) 42
e) -42
4. a) -120 b) 120 c) -120 d) 120
5. a) 8 b) -8 c) 16 d) -16 e) -32
f) -32
6. a) 24 b) 24 c) 48 d) -48 e) 48
f) -72

7. a) 35 b) 50 c) 14 d) 70
8. a) 28 b) 28 c) 13 d) -12
9. a) 360 b) -5 c) -17 d) $1\frac{1}{9}$
e) 40
10. a) -9 b) 9
11. a) 7 b) 7
12. $y < 0$
13. -12
14. -16
15. $a = d = e$, $b = c = f$
16. a) ± 15 , ± 9 b) ± 15 , ± 9
c) ± 36 d) ± 4
17. Molemmat negatiivisia
18. Erimerkkiset, itseisarvoltaan suurempi on positiivinen.
- 4.1. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{5}{6}$ e) $\frac{3}{7}$
f) $\frac{7}{12}$
2. a) $\frac{15}{3}$, $\frac{2}{3}$ b) $\frac{20}{24}$, $\frac{9}{24}$ c) $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$
 $\frac{10}{12}$ d) $\frac{6}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$ e) $\frac{27}{36}$, $\frac{30}{36}$, $\frac{32}{36}$
 $\frac{33}{36}$
3. a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $1\frac{17}{45}$
4. a) $2\frac{1}{3}$ b) $-2\frac{1}{6}$ c) $8\frac{5}{8}$ d) $-1\frac{1}{2}$
e) $-\frac{29}{30}$

5. a) $\frac{8}{15}$ b) $\frac{12}{35}$ c) 8 d) $3\frac{3}{5}$ e) 1
6. a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $16\frac{1}{3}$ d) $-11\frac{1}{2}$
7. a) 20 b) $\frac{1}{20}$ c) $1\frac{1}{4}$ d) 2 e) -3
8. a) $\frac{1}{4}$ b) $1\frac{5}{12}$ c) $-\frac{35}{72}$ d) $-1\frac{3}{7}$
9. a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{7}{15}$ c) $\frac{73}{135}$ d) $\frac{20}{21}$
10. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{7}{52}$ c) $-1\frac{11}{30}$
11. $\frac{4}{27}$
12. $\frac{1}{8}$
13. 6
14. 100
15. a) $-\frac{3}{8}$ b) $-\frac{5}{39}$ c) $-4\frac{1}{8}$
- 5.1. a) 13,580 b) 15,2
c) 0,0997
2. a) 57,7 b) 3,4
3. a) 0,209 b) 1,37
4. a) $3,83 < x + y < 3,85$
b) $1,82 < xy < 1,86$
5. a) 12,91 b) 7,00 c) 21,8
6. a) 32 b) 8,2
7. a) 5,058 b) 0,142 c) 35,3
d) 0,1988 e) 0,00563
8. a) 0,75 b) 0,833...
c) 0,076923076923...

d) 1,142857142857...

9. a) $\frac{333}{1000}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $1\frac{23}{100}$ d) $3\frac{7}{100}$ e) $2\frac{31}{10000}$

6.1. 43,8

2. 8

3. 90

4. 8,5

5. 610 g

6. 199

7. 132

8. 134

9. 54,45 milj. ; 227 pv

10. 1962 ha

11. $4\frac{3}{4}$

12. 1087

13. 7,9 kg/dm³14. 11,5 kg/dm³

15. 8,085 kg

16. 640 mk

17. 19 km

18. klo 12.14

19. 12 km/h

20. 10½ pv

21. 10 h 40 min

7.1. a) 3 b) 4 c) 7 d) 9 e) 10
f) 132. a) 20 b) 30 c) 50 d) 100
e) 10003. a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{7}{9}$ d) $1\frac{1}{4}$ e) $1\frac{1}{3}$ 4. a) 0,5 b) 0,1 c) 1,4 d) 1,5
e) 0,035. a) 8 m b) 5 m c) 50 m
d) 90 m

6. a) 25 b) 100 c) 10000 d) 0,04

e) $\frac{4}{25}$

7. 44 cm

8. a) 1,732 b) 2,236 c) 17,321

d) 31,623 e) 1,772

9. a) 81 b) 82 c) 3 d) 4 e) 35

10. 21,9 m

11. 22,6 m

12. a) 56 km/h b) 79 km/h

c) 99 km/h

8.1. A = ½ah

2. A = πr²

3. H = 16x

4. M = 25x + 30y

5. a = $\frac{A}{h}$ 6. l = $\frac{M - 2x}{3}$

7. a) 11,4 b) 16,46

8. 5

9. 44

10. $-2\frac{5}{6}$

9.1.a) 8 b) -8 c) -8 d) 2 e) 1 f) 0

2. a) 16 b) -16 c) 16 d) 32

e) -32 f) -32 g) 32

3. a) 4x² b) 4x² c) -8x³ d) 16x⁴y⁴e) 16x⁴y⁴

4. a) 2x b) 4x c) axy

5. a) 100 b) 32 c) 1000000 d) 1

e) $\frac{5}{6}$ f) 646. a) $\frac{x^3}{8}$ b) $\frac{a^4}{x^4}$ c) $\frac{9}{x^2}$ d) $\frac{16x^4}{81}$ e) $-\frac{27x^3}{64y^3}$ 7. a) $\frac{a}{4}$ b) $-\frac{3}{x}$ c) $\pm \frac{2x}{y}$ 8. a) 8 b) 11⁴ c) 32 d) $\frac{1}{32}$ e) 649. a) x⁷ b) a¹³ c) x⁹ d) x¹⁸e) x⁸y¹⁰ f) 6x⁹ g) -12x³10. a) x² b) x² c) a⁵ d) x²11. a) $\frac{1}{x^2}$ b) $\frac{1}{x^5}$ c) $\frac{x^2}{2}$ d) x²⁰e) 5x² f) -4xy³12. a) a⁷ b) 10⁸ c) $\frac{1}{25}$ 13. a) $\frac{1}{8}$ b) 4 c) $\frac{1}{6}$ d) 3214. a) a¹² b) b²⁰ c) c⁶ d) x¹²e) 8x¹² f) -27x⁶ g) x⁸y¹²15. a) -x³y⁶ b) 1 c) x²⁴ d) x²ⁿe) xⁿ f) xⁿ

16. a) 1 b) 24 c) 1 d) x e) 1

17. a) $\frac{25}{16}$ b) 27 c) $\frac{27}{64}$ d) $\frac{16}{121}$ 18. a) x¹⁷ b) $\frac{25x^8}{y^6}$ c) x²ⁿ⁺¹ d) x⁴ⁿe) x²ⁿ19. a) $\frac{1}{9}$ b) 1 c) xⁿ⁻¹ d) 8xe) 8xⁿ⁺²20. a) 9 b) 16 c) 12 d) x¹⁶ e) 3^xf) 2^{2x+3}

21. b < a < c

22. a) 1,23·10¹⁸ b) 1,23·10⁵c) 1,23·10⁻⁵23. a) 5,7·10¹¹ b) 1,23·10⁻¹²c) 1,23·10⁶

24. a) 123 400 000

b) 0,000032617 c) 987600

d) 0,004

25. a) 3,05·10²⁴ b) 8,35·10¹²c) 3,0·10⁵³ d) 7 530 00026. a) 0,018 b) 1,77·10²⁵

27. 43500

28. 43 min

29. 4,75 v

30. 2,3 bilj. vuotta

10.1. 2; 3x², -4x, -5; 3, -4, -5; -52. -4x² ja 5x², -5x ja -7x, 6 ja 9

3. a) -4 b) 5 c) 5

4. a) 1 b) -15 c) 32

5. a) 5m b) 4 kg c) 14,4a

d) 11m² + 8m e) 5sinx - 3cosx

6. a) x b) 4x c) 0 d) x

7. a) -3a + 9b b) 7a + 2b

c) -a + 8b d) 3a - 7

8. a) 4x² + 2x - 2 b) -2x² - 6x + 8c) 4x² + 6x - 8

9. 12x - 13

10. 2x² - 3x + 2, 411. a) ½x² + 1¾x + 2 b) 4 - 6x12. a) 6x - 4 b) 6x - 12 c) 2x² -4x d) 6x³ - 12x² e) -8x⁴ + 16x³13. a) 41x - 38 b) 5x³ - 7x²c) -5a⁴b + 15a³b² - 20a²b³14. a) 3x² - 10x + 8 b) 4x² - 9c) 4x³ - 13x² + 22x - 1515. a) x² - 4x + 4 b) 4x² - 4x + 1c) 9x² - 12x + 4 d) 4a² + 12ab +9b² e) x³ - 3x² + 3x - 116. a) 3x - 4 b) 2x² - 1317. -4x⁴ - 5x³ + 6x²18. -3x² + 13x - 4

19. a) 10m + 6cm b) 10x + 6y

c) 5x - 3 d) x² - 2x + 320. a) 2x - 3x² b) 5x²c) 3x²y² + 2x³y

21. a) 3 b) 3 c) ¾ d) 3x

22. a) 6x² - 8x + 10 b) 10x³ -15x² c) 4x - 7 d) 2x - 3

23. -8

24. 2x³ - 3x² - 3x + 5

11.1. a) 4 b) 2 c) 4

2. a) 6 b) 4 c) $\frac{5}{6}$ 3. a) $\frac{4}{5}$ b) 1½ c) 1

4. a) 12 b) 1¾ c) -2

5. a) 4 b) -1 c) ½

6. a) $1\frac{2}{3}$ b) 15 c) 4

7. a) 10,8 b) 3,4

8. a) 2 b) 3 c) 2

9. 9

10. 2290

11. 2

12. a) ei ratk. b) kaikilla x

13. a) ei ratk. b) kaikilla x

14. sijoita!

15. kyllä

16. 1½

17. -2 ; on

18. a) x = a + 4b b) x = 2a + 2

19. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{3}$ d) -2 e) $\frac{2}{3}$

12.1. 9

2. 12

3. 12

4. K = 359, V = 393

5. $K=313$, $V=347$, $O=361$

6. 3 ja 8

7. 19, 19 ja 13

8. 15° , 55° ja 110°

9. 59° , 44° ja 77°

10. 8

11. -1,2

12. 5

13. 170, 171 ja 172

14. 169, 171 ja 173

15. 2

16. 7

17. 6

18. 6,6

19. 0,8

20. 9 km

21. $\frac{1}{2}$ h

22. 27 km

23. 11

24. 24

25. 32

26. 216 mk

27. 6 h

28. a) 3 min 20 s b) 50 s

29. 4,16

30. a) 75 km/h b) 80 km/h

13.1. a) 0,35 b) 0,02 c) 0,20

d) 0,005 e) 1,05

2. a) 21% b) 75% c) 5%

d) 0,1% e) 32,1% f) 134%

3. a) 23% b) 4% c) 20% d) 75%

e) 68% f) 33%

4. a) 8,75 kg b) 8,20 mk

c) 8316 mk d) 8,40 mk e) $0,06x$

5. a) 31% b) 4,4% c) 2,2%

d) $600/x$ e) $100x/y$

6. a) 1196 mk b) 150 mk

c) 21 000 mk d) $100x/8$

e) $1000/x$ f) $100x/p$

7. 56%

8. $V + 3,8\%$, $K + 2,3\%$

9. $V + 3\%$, $H - 7,5\%$

10. 267 mk

11. 14,40 mk

12. 871,20 mk

13. 600 mk

14. 142 mk

15. 250 mk

16. 132,90 mk

17. 137,50 mk

18. 4,17 mk

19. 5,76 mk

20. a) 150% b) 60%

21. 4200

22. 4032

23. a) 28% b) 22%

24. 23

25. 3 kg

26. 7%

27. 11%

28. 10 kg

29. 1800 g

30. ei kumpaakaan

31. voitti 1,7%

32. 19%

33. 44%

34. 13%

35. 13,3%

36. 2%

37. +4,5%

38. 33%

14.1. a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

2.a) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

3.a) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 7 \\ y = -8 \end{cases}$

4. a) $\begin{cases} x = 1/3 \\ y = 2/3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$

5. a) $\begin{cases} x = -5 \\ y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 103/41 \\ y = 98/41 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

6. a) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$

7. a) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

8. $a = 3$, $b = 2$

9. 11 ja 5

10. 6 ja 3

11. 2,5 ja 7,5

12. 7 ja 13

13. 45 ja 15

14. 5

15. 550 aik. ja 250 last.

16. 8 mk ja 4 mk

17. $\frac{3}{5}$

18. 39 v ja 11 v

19. 20 kg ja 10 kg

20. 8 ja 16

21. 38

22. 63

15.1. b) 3. pv c) 17. pv

d) 14., 18., 20., 22. pv

e) 15. - 17. pv, 21.-22. pv

f) 4., 8., 12. pv g) 6°C

3. $x \approx 0,7$, $x < 0,7$

4. (1,3)

5. $x \approx 0,8$

6. $x = 3y = 2$

16.1. $6,7 \text{ cm}^2$

2. 1,5 m

3. $2,66 \text{ m}^2$

4. $s = 4,87 \text{ m}$; $p = 19,5 \text{ m}$

5. 17 cm^2

6. $6,1 \text{ cm}^2$

7. 14 cm^2

8. 4,8 cm

9. $p = 14 \text{ cm}$, $A = 17 \text{ cm}^2$

10. $43,6 \text{ cm}^2$

11. $10,6 \text{ cm}^2$

12. 190°

13. 85 m^2

14. 88 m^2

15. 370 m

16. $0,3 \text{ m}^2$

17. 10 cm

18. 12 m

19. 219 cm

20. $0,40 \text{ m}^2$

17.1. $V = 336 \text{ cm}^3$

$A = 292 \text{ cm}^2$

2. 6 cm

3. 24 cm^3

4. $A = 35 \text{ cm}^2$, $V = 14 \text{ cm}^3$

5. 8 cm^3

6. 120 cm^3

7. 32 cm^3

8. 4 cm

9. 16 m^3

10. 55 cm^3

11. $V = 50 \text{ cm}^3$, $A = 63 \text{ cm}^2$

12. 400 cm^3

13. $V=270 \text{ cm}^3$, $A=200 \text{ cm}^2$

14. 65 cm^3

15. $V = 1,3 \text{ m}^3$, $m = 11 \text{ tn}$

16. $0,20 \text{ m}^3$

18.1. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, \tan

$\alpha = \frac{4}{3}$

2. $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\cos \alpha = \frac{12}{13}$,

$\tan \alpha = \frac{5}{12}$

3. a) 0,460 b) 0,274 c) 1,534

4. a) $48,6^\circ$ b) $74,0^\circ$ c) $28,5^\circ$

5. 12,2 cm

6. 4,4 cm

7. 35° ja 55°

8. $30,8^\circ$ ja $59,2^\circ$

9. 5,8 cm

10. 39°

11. 72°

12. 2,7 cm

13. 11,5 cm

14. 1700 m

15. 120 m

16. 2,8 km 30° etelästä länteen

17. $2,6 \text{ cm}^2$

18. 30 cm^2

19. $83,6^\circ$

20. 150 cm^2