PITKÄ

MATEMATIIKKA

KURSSI MAs4

KERTAUSKURSSI

Markku Männikkö
2022

Teoriatiivistelmä

Luku 1. Luvut ja laskutoimitukset

1. Parilliset ja parittomat kokonaisluvut
Parillinen luku on muotoa $2 \cdot n$, missä $n \in Z$
Pariton kokonaisluku on muotoa $2 \cdot n + 1$, missä $n \in Z$

1.1.1. Osoita, että jos k on pariton, niin luku $k^2 + 1$ on parillinen.
L: 95K3a, 30.9b

2. Rationaaliluvut
$Q = \{ x \mid 1° \; x = \frac{m}{n}, \; 2° \; m \in Z, \; 3° \; n \in Z \text{ ja } 4° \; n \neq 0 \}$
eli luku on murtolukumuotoinen, osoittaja ja nimittäjä ovat kokonaislukuja ja nimittäjä ei ole nolla.

1.2.1. Osoita: Jos x on rationaaliluku, niin x + 1 on myös rationaalinen.
L: 4, 97K8a, 27.6a, 28.4, 28.9

3. Itseisarvo $| x | \geq 0$ eli itseisarvot ovat arvoltaan aina nolla tai enemmän (positiivinen)

1.3.1. Mitä voi sanoa yhtälön $| x | + 1 = 0$ ratkaisuista?
L: 03S10

4. Itseisarvon lauseke ilman itseisarvoja
$$| x | = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x, & \text{kun } x < 0 \end{cases}$$
eli niillä muuttujan arvoilla, joilla itseisarvojen sisällä oleva lauseke ≥ 0, itseisarvo on sama kuin sisustan lauseke
ja niillä muuttujan arvoilla, joilla itseisarvojen sisällä oleva lauseke < 0, itseisarvo on sisustan lausekkeen vastaluku.

1.4.1. Esitä ilman itseisarvoja a) $| 2x - 4 |$ b) $| x^2 - 4 |$

5. Potenssi
$x^m = x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ eli tulo, jossa on kantaluvun suuruisia tekijöitä eksponentin osoittama määrä. (eksponentti $m \geq 2$)
$x^1 = x$ ja
$x^0 = 1$, kun $x \neq 0$

1.5.1. Esitä lyhyesti $n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n$.
L: 25.6a, 30.5b

6. Neliöjuuri $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow 1° \; x^2 = a$ ja $2° \; x \geq 0$

1.6.1. Onko $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$?
L: 95S5a, 03K1a

7. n:s juuri $\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow 1° \; x^n = a$ (ja jos n on parillinen $2° \; x \geq 0$)

1.7.1. Onko $\sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} = \sqrt{2} - 1$?
L: 36.1b

8. Murtopotenssi $x^{m/n} = (\sqrt[n]{x})^m$ $(= \sqrt[n]{x^m})$ $\boxed{x \geq 0}$

1.8.1. Laske $16^{3/4}$
L: 14c, 15c, 36.1b

9. Negatiivinen potenssi $x^{-r} = \left(\frac{1}{x}\right)^r$

1.9.1. Laske $27^{-2/3}$
L: 15a

10. Negatiivisen potenssin toinen esitys on $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$
eli potenssi(tekijä)n saa siirtää osoittajasta nimittäjään (tai päinvastoin), jos vaihtaa eksponentin etumerkin

1.10.1. Sievennä $\frac{a^{-2}b^{-3}}{a^{-4}b^5}$

11. Logaritmi
$\log_k a = x \Leftrightarrow k^x = a$
eli logaritmin arvo (=x) tarkoittaa sitä eksponenttia, mihin kantaluku (=k) on korotettava, jotta saataisiin logaritmoitavana oleva luku (=a)

1.11.1. Esitä yhtälö a) $\log_2 x = 3$ potenssimuodossa b) $3^{x+1} = 4$ logaritmimuodossa.
L: 26.5a, 36.1c

12. Logaritmin arvon laskeminen
JOKO tehdään edellisen kohdan mukaisesti eksponenttiyhtälö, joka ratkaistaan
TAI käytetään seuraavan kohdan kaavaa.

1.12.1. Laske $\log_4 \sqrt[3]{32}$
L: 16, 18

13. Logaritmi kantaluvun potenssista
$\log_k k^x = x$ eli kun logaritmoitavana on kantaluvun potenssi, on logaritmin arvo ko. potenssin eksponentti

1.13.1. Laske $\log_3 81$

14. Prosentti
$b = \frac{p}{100} \cdot a$ tai $b = 0{,}0p \cdot a$ (jos p 1-numeroinen)
a = se luku, jo<u>sta</u> prosentit otetaan (johon verrataan)
b = sama asia määränä mitä p on prosentteina

1.14.1. Paljonko on 15% alennus 129€ hinnasta?
2. Mistä hinnasta on 8% alennus 24 €?
L: 92K5b, 95S1, 96K3, 24.1b, 26.1c, 29.9, 32.2a, 33.4a

15. Prosenttiluku
saadaan jakamalla $\frac{\text{minkä prosenttiosuutta kysytään}}{\text{mistä luvusta prosentit otetaan}}$. Prosentit ovat sadasosien määrä.

1.15.1. Montako prosenttia on 10 € alennus 149€ hinnasta?
2. 400 g 5 % etikkaa ja 1000 g 20 % etikkaa yhdistetään. Mikä on syntyneen liuoksen väkevyys?
3. Auton hinnasta on 60 % tehtaan hintaa 10 % myyjän katetta ja 30 % veroa. Montako prosenttia muuttuu auton hinta, kun tehdashinta nousee 10 %, myyjän palkkio-% pysyy ennallaan ja autovero pienenee 25 %:iin?
L: 11, 12, 90S1b, 91K1b, 91S3b, 92S3a, 93K2, 93S4a, 94K3b, 95K2, 96S2b, 96S4, 97K3a, 97S3, 98K4, 98S2, 99S4b, 00K4, 00S3, 02K3, 02S2, 03S5, 04K3, 04S3, 21.7a, 23.2, 25.3b, 26.1b, 27.2a, 28.2b, 34.2

16. Suuremmuusprosentti
Jos laskettaessa prosenttilukua saadaan 1,23 on luku 23 % suurempi.
Jos ko. suhde on 0,87 on luku 13 % pienempi.

1.16.1. Kaustisella on 4450 ja Vetelissä 3750 asukasta. Montako % Kaustisen väkiluku on suurempi?
2. Vetelin väkiluku oli 10 vuotta sitten 4050, nyt 3750. Montako % väkiluku on pienentynyt?
L: 90K1a, 99K2, 30.4

Luku 2. Lausekkeet

1. Binomikaavat $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ JA $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

2.1.1. Sievennä a) $(x^2 - 3x)(x^2 + 3x)$ b) $(x + 2y)^2$ c) $(2\sqrt{3} - 5)^2$
L: 20, 97S6a, 99S7b, 00S5, 02S4, 26.5c, 27.1a, 36.1a

2. Polynomien tekijöihin jako binomikaavoilla
Käytetään edellä olevia kaavoja oikealta vasemmalle.

2.2.1. Jaa tekijöihin a) $4a^2 - 25$ b) $x^2 + 6x + 9$ c) $9x^3 - 12x^2 + 4x$

3. Jakojäännöslause $\frac{P(x)}{x - a} \Rightarrow$ jakojäännös = P(a)
eli kun polynomi jaetaan 1. asteen polynomilla, on jakojäännös polynomin arvo jakajan nollakohdassa.

2.3.1. Mikä on jakojäännös, kun polynomi $x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ jaetaan binomilla $x - 2$?
2. Mikä on a, kun jaettaessa polynomi $x^4 - 2x^2 + ax - 1$ binomilla $x + 1$ on jakojäännös 3?
L: 24, 25, 26.3a

4. Tekijälause
(x - a) on P(x):n tekijä $\Leftrightarrow$ P(a) = 0 $\Leftrightarrow$ P(x) on jaollinen (x - a):lla
$\Leftrightarrow$ x = a on polynomin nollakohta
$\Leftrightarrow$ x = a on yhtälön P(x) = 0 ratkaisu

2.4.1. Onko polynomin $x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ tekijänä $x + 1$?
2. Mikä on a, kun polynomin $x^4 - ax^3 + 2x^2 - 3x + 4$ tekijänä on $x + 1$?
3. Onko polynomi $5x^{100} + 6x^{70} + 10x^9 - 1$ jaollinen (x + 1):llä?
4. Mikä on a, kun polynomi $8x^3 + 4x^2 + 3x + a$ on jaollinen (2x - 1):llä?
L: 21, 02K5, 25.2a, 32.2b

5. Murtolausekkeen määrittelyjoukko
$\frac{P(x)}{Q(x)}$: n määrittelyjoukkoon kuuluvat kaikki x:t, joilla $Q(x) \neq 0$

2.5.1. Mikä on lausekkeen $\frac{2x + 3}{x^2 - 4x}$ määrittelyjoukko?

L: 37.1

6. Laskut murtolausekkeilla
kuten murtoluvuilla
+/- laskut. Lavennetaan samannimisiksi, osoittajaksi osoittajien summa, nimittäjäksi yhteinen nimittäjä
x lasku. Osoittajaksi osoittajien tulo, nimittäjäksi nimittäjien tulo. Supistetaan.
/ lasku. Kerrotaan jakajan käänteisluvulla ja jatko kuten kertolaskussa

2.6.1. Laske $\frac{2}{x + 2} + \frac{4}{x^2 + 2x}$

2. Laske $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x} : \frac{x^2 + x}{x^2 - 4}$

L. 22, 26, 27, 03S1b

7. Potenssin laskusäännöt
$(ab)^n = a^n \cdot b^n$ $(a / b)^n = a^n / b^n$ $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m / a^n = a^{m-n}$

2.7.1. Sievennä a) $(x^2y^3)^4 : (xy^2)^3$ b) $2^6 \cdot 5^6$ c) $2^{2002} \cdot 5^{2003}$

L: 31, 32, 39, 00S1, 21.2a

8. Logaritmien laskusäännöt
$\log (ab) = \log a + \log b$ $\log (a / b) = \log a - \log b$
$\log (a^m) = m \cdot \log a$ $n = \log_k k^n$
$\log_k x = \frac{\log_u x}{\log_u k} = \frac{\lg x}{\lg k}$

2.8.1. Sievennä a) $\lg 10x - \lg 100x$ b) $2\lg x + \lg \sqrt{x}$
2. Esitä yhtenä logaritmina $2 + \lg 4x - 2\lg 2x$.
3. Esitä 10-kantaisena logaritmina $\log_2 a + \log_4 a$
L: 34, 37, 91K5a, 01S8, 36.1c

Luku 3. Yhtälöt ja epäyhtälöt.

1. I asteen yhtälön ratkaiseminen :
1) nimittäjät pois2) sulut pois3) siirrot 4) laskut 5) jaa x:n kertoimella

3.1.1. Ratkaise yhtälö $\frac{x - 1}{2} + \frac{5x - 4}{3} = 2x$

L: 40a, 97S4b, 98K1, 00K3, 21.3b, 25.6b, 34.1a

2. I asteen yhtälö, jossa kirjainkerroin
Kun jaetaan (tai kerrotaan) kirjainparametrin sisältävällä lausekkeella, jakaantuu ratkaisu kahteen osaan
1) lauseke $\neq 0$, jolloin jaetaan
2) lauseke = 0, jolloin sijoitetaan se kirjaimen arvo, jolla lauseke = 0 yhtälöön.
Yhtälö aina tosi tai epätosi.

3.2.1. Ratkaise yhtälö $a(x - 2) = 3(x - 4)$
L: 93K5

3. I asteen yhtälön $Ax = b$ ratkaisujen lukumäärä
1) $A \neq 0$: 1 ratkaisu
2) $A = 0$ ja $B = 0$: kaikki määrittelyjoukon x:t kelpaavat ratkaisuksi
3) $A = 0$ ja $B \neq 0$: ei yhtään ratkaisua

3.3.1. Millä a:n arvoilla yhtälöllä $ax + 2 = 3x - 4a$ on täsmälleen yksi ratkaisu?
2. Millä a:n ja b:n arvoilla yhtälöllä $ax + 2b = 3x - 4a$ on a) äärettömän monta b) ei yhtään ratkaisua?

4. I asteen epäyhtälö
Ratkaistaan samoin periaattein kuten I asteen yhtälöt.
Lisäys: kun jaetaan (tai kerrotaan) negatiivisella luvulla, niin epäyhtälön järjestys vaihtuu.

3.4.1. Ratkaise epäyhtälö $\frac{2x + 3}{5} - \frac{x - 3}{10} > x - 4$
L: 42a, 93S2, 99S3, 04S1a, 31.1, 31.4b

5. I asteen epäyhtälö, jossa kirjainkerroin
Kun epäyhtälö kerrotaan (tai jaetaan) kirjainparametrin sisältävällä lausekkeella jaetaan tehtävä 3 osaan
1) Lauseke > 0: Saa jakaa ja järjestys säilyy
2) Lauseke < 0: Saa jakaa ja järjestys kääntyy
3) Lauseke = 0: Sijoitetaan lausekkeen nollaksi tekevä kirjaimen arvo epäyhtälöön. Katsotaan totuusarvo.

3.5.1. Ratkaise epäyhtälö $a(x - 1) > x + a$

6. Epäyhtälön $Ax > B$ ratkaisut
1) $A > 0$ tai $A < 0$: Jaa. Muista mahdollinen järjestyksen vaihtuminen
2) $A = 0$ ja $B \geq 0$: $L = \emptyset$
3) $A = 0$ ja $B < 0$: $L = R$ (tai Mj)

3.6.1. Millä a:n arvoilla epäyhtälöllä $a(2 - x) > 2x + a$ a) on b) ei ole ratkaisuja?

7. II asteen yhtälö $ax^2 + c = 0$
1) Ratkaise x^2 2) ota neliöjuuri 3) laite eteen ± merkki

3.7.1. Ratkaise yhtälö $2x^2 - 3 = 0$
L: 96S1, 35.4

8. II asteen yhtälö $ax^2 + bx = 0$
1) Ota x yhteiseksi tekijäksi 2) Merkitse tulon tekijät nolliksi 3) Ratkaise molemmat tulo = 0 yhtälöt

3.8.1. Ratkaise yhtälö $(2x - 3)^2 = 3(x + 3)$

9. II asteen yhtälöiden ratkaiseminen yleisesti
1) Laita yhtälö normaalimuotoon $ax^2 + bx + c = 0$ 2) Käytä ratkaisukaavaa

3.9.1. Ratkaise yhtälö $\frac{1}{2}(x - 1)^2 - 2(x - 2) = 0$
L: 46a, 63, 90S1a, 92K5a, 93S3a, 94S5a, 96K2b, 97S1, 97S4a, 99K6a, 01S2, 03S1, 04K1, 31.7b, 34.1b, 35.2

10. II asteen yhtälön ratkaisujen lukumäärä
1) $D > 0$: 2 erisuurta reaalista ratkaisua 2) $D = 0$: 2 yhtä suurta reaalista ratkaisua
3) $D < 0$: Ei reaalisia ratkaisuja

3.10.1. Montako reaalista ratkaisua on yhtälöllä $x^2 - 3x + 4 = 0$
2. Millä a:n arvolla yhtälöllä $a(x^2 - x) + 1 = 0$ on kaksinkertainen ratkaisu?
3. Osoita, että yhtälön $ax^2 + (a + 1)x - a = 0$ ratkaisut ovat reaalisia kaikilla a:n arvoilla.
L: 59, 34.5

11. II asteen ratkaisujen summa ja tulo : $x_1 + x_2 = - b/a$ $x_1 \cdot x_2 = c / a$

3.11.1. Olkoon x_1 ja x_2 yhtälön $x^2 - 3x - 7 = 0$ ratkaisut.
Mitä on a) $x_1 + x_2$ b) $x_1 \cdot x_2$ c) $x_1^2 + x_2^2$?
L: 62

12. II asteen polynomin jakaminen tekijöihin
1) Ratkaise nollakohdat x_1 ja x_2 2) Tekijöiksi $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

3.12.1. Jaa tekijöihin lauseke $2x^2 - 5x - 3$.
2. Supista $\dfrac{2x^2 - 3x - 9}{3x^2 - 4x - 15}$

13. II asteen epäyhtälön ratkaiseminen
1) Normaalimuotoon 2) Nollakohdat 3) Paraabeli 4) Vastaus

3.13.1. Ratkaise epäyhtälö $2x^2 - 7x > 4$
L: 46b, 02K7, 04S1b, 23.3b, 26.1a, 28.1, 34.1c

14. Korkeamman asteen yhtälön ratkaisutapoja
A) Tulo = 0: Merkitse tekijät = 0 ja ratkaise nämä yhtälöt
B) Tekijöihin jaolla tulo = 0: Jaa tekijöihin ja jatka kuten edellä
C) Molemmilla puolilla yhteinen tekijä: Jaa yhteisellä tekijällä. Tee 2 yhtälöä. Jakamalla saatu yhtälö on toinen ja yhteinen tekijä = 0 on toinen yhtälö. Sekä ratkaise nämä
D) Yksi nollakohta annettu tai hoksataan: Yksi tekijä on (x - NK). Toinen tekijä jakamalla. Saatu yhtälö:Tulo = 0 ratkaistaan kuten kohdassa A.
E) Parillisia potensseja: 1) Merkitse $x^2 = a$ 2) Korvaa x^2:t a:lla. 3) Ratkaise a
4) Korvaa a x^2:lla. 5) Ratkaise x
F) Yksi nollakohta löytyy kokonaislukuehdokkaista: x = ± jokin vakiotermin kokonaislukutekijä. Jatko kuten D-kohdassa
G) Yksi nollakohta löytyy rationaalilukuehdokkaista: x = ± Jokin vakiotermin tekijä/ jokin korkeimman asteen termin kertoimen tekijä. Jatko kuten D-kohdassa.
Kohdissa F) ja G) kertoimet oltava kokonaislukuja!
H) Huomataan, että termit, joissa x, on vakioa vaille binomin potenssi $(x-a)^n$

3.14.1. Ratkaise yhtälö $(x^2 - 2x)(x^2 - 5)(2x - 3) = 0$
2. Ratkaise yhtälö $x^3 - 4x^2 - 5x = 0$
3. Ratkaise yhtälö $x^3 - 4x = 3(x - 2)$
4. Yhtälön $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ yksi ratkaisu on $x = 2$. Ratkaise muut.
5. Ratkaise yhtälö $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
L: 41b, 47a, 48a, 49a, 92K8, 93S1, 94K2a, 96K1, 99K1, 24.2, 30.1, 37.2

15. Korkeamman asteen epäyhtälöt
1) Normaalimuotoon 2) Nollakohdat 3) Kuvaajat 4) Vastaus kuvaajan perusteella.

3.15.1. Ratkaise epäyhtälö $x^3 - 4x^2 + 3x > 0$

L: 43a, 47b, 04S1c

16. Murtoyhtälö
1) Katso määrittelyjoukko (nim $\neq$ 0) 2) Ratkaise yhtälö 3) Tarkista kuuluuko x määrittelyjoukkoon

3.16.1. Ratkaise yhtälö $\frac{x - 2}{x - 1} + \frac{x + 3}{x} + \frac{1}{x^2 - x} = 0$

L: 51a, 93K1, 98S1, 01K1, 21.1, 25.1

17. Murtoepäyhtälö
1) Muuta EY muotoon, jossa 1 murtolauseke vasemmalla ja 0 oikealla puolella. 2) Laske OS:n ja NIM:n merkit (NK + KUV) 3) Laita MERKIT lukusuorataulukkoon 4) Päättele ML:n merkit 5) Anna vastaus.

3.17.1. Ratkaise epäyhtälö $\frac{2x}{x + 1} > \frac{2 - x}{x}$

L: 50b, 98K3a, 21.2b, 33.1

18. Neliöjuuriyhtälö
1) Muuta yhtälö muotoon juuri yksi toisella puolella ja muut termit toisella. 2) Korot molemmat puolet toiseen $(\ )^2$ 3) Ratkaise 4) Tarkista joko sijoittamalla saadut x:t alkuperäiseen yhtälöön tai asettamalla ehtoja reaalisuudelle (neliöönkorotukselle)

3.18.1. Ratkaise yhtälö $\sqrt{2x + 3} - x = 0$

L: 52a, 91K1a, 94S1, 00S2, 32.1, 36.6

19. Itseisarvoyhtälö
A: $| P(x) | = Q(x) \Leftrightarrow [P(x) = Q(x)$ TAI $P(x) = - Q(x)]$ JA $Q(x) \geq 0$
B: $| P(x) | = | Q(x) | \Leftrightarrow P(x) = Q(x)$ TAI $P(x) = - Q(x)$ (ei ehtoja)
C: Ratkaisut alueittain: Esitä itseisarvot ilman itseisarvoja. Ratkaise. Tarkista onko x voimassaoloalueella.

3.19.1. Ratkaise yhtälö $| 2x - 3 | = x - 4$
2. Ratkaise yhtälö $| x^2 - 3 | = | 5x + 3 |$
3. Ratkaise yhtälö $| 2x | + | x - 2 | = 3$
L: 40b, 94K1, 97K2, 28.5b

20. Itseisarvoepäyhtälö
A: $| P(x) | < Q(x) \Leftrightarrow - Q(x) < P(x) < Q(x)$
B: $| P(x) | > Q(x) \Leftrightarrow P(x) > Q(x)$ TAI $P(x) < - Q(x)$
C: $| P(x) | > | Q(x) | \ \ || (\ )^2 \ \Leftrightarrow [P(x)]^2 > [Q(x)]^2$
(HUOM: Neliöön korotetussa yhtälössä ei enää itseisarvoja

3.20.1. Ratkaise epäyhtälö $| 2x - 3 | < x - 4$
2. Ratkaise epäyhtälö $| x^2 - 2 | > 3x + 2$
3. Ratkaise epäyhtälö $| 2x - 3 | < | 4x - 5 |$
L: 45a, 90K6a, 95S2

21. Kaksoisepäyhtälö : $a < P(x) < b \Leftrightarrow a < P(x)$ JA $P(x) < b$

3.21.1. Ratkaise $2x - 3 < 4x - 5 < 6x + 7$

22. "JA"-epäyhtälöryhmän ratkaiseminen
1) Ratkaise molemmat 2) Lukusuorataulukkoon TOTEUTUMISALUEET
3) Ota ratkaisujoukkoon yhteinen osa (leikkausjoukko) 4) Vastaus

3.22.1. Millä x:n arvoilla toteutuu epäyhtälö $x^2 - 4 < 0$ ja epäyhtälö $3x - 4 < 0$?
L: 97K3b, 98S3, 29.3, 35.6

23. "TAI"-ryhmän ratkaiseminen
1) Ratkaise molemmat 2) Lukusuorataulukkoon TOTEUTUMISALUEET
3) Ota ratkaisujoukkoon kaikki alueet (yhdiste, unioni) 4) Vastaus

3.23.1. Millä x:n arvoilla toteutuu $x^2 - 4x > 0$ tai $5x - 6 < 0$?

24. Eksponenttiyhtälö
A: Sama kantaluku: $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$
B: Eri kantaluku: $a^x = b^y$ || lg( ) $\Leftrightarrow \lg a^x = \lg b^y \Leftrightarrow x \cdot \lg a = y \cdot \lg b$ … ratkaise x.
C: Sama x-lauseke: 1) Merkitse lauseke = a 2) Korvaa nämä lausekkeet a:lla
3) Ratkaise a 4) Korvaa a x-lausekkeella 5) Ratkaise x.

3.24.1. Ratkaise yhtälö $4^{x-1} = \sqrt{8}$
2. Ratkaise yhtälö $3^{x+1} = 4^{1-x}$
3. Ratkaise yhtälö $2 \cdot 4^x - 2^{x+1} = 4$
L: 53c, 54a, 54b, 56a, 90K1a, 02K2, 03K5a, 25.5, 26.3c

25. Eksponenttiepäyhtälö
A: Sama kantaluku > 1. $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$
B: Sama kantaluku $\in \,]0,1[$. $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$ (HUOM järjestys kääntyy)
C: Eri kantaluku: $a^x > b^y$ || lg ( ) $\Leftrightarrow x \cdot \lg a > y \cdot \lg b$
D: Sama x-lauseke: 1) Merkitse lauseke = a 2) Ratkaise a epäyhtälöstä
3) Sijoita x-lauseke takaisin a:n paikalle 4) Ratkaise x

3.25.1. Ratkaise epäyhtälö $9^{x+1} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
2. Ratkaise epäyhtälö $(½)^{2x+3} < (½)^{1-2x}$
3. Ratkaise epäyhtälö $3^x > 2^{x+1}$
4. Ratkaise epäyhtälö $9^x - 3^x - 6 < 0$
L: 96K4a, 25.6a

26. Logaritmiyhtälö
1) MJ (logaritmoitava > 0) 2) Yksi log-lauseke mol. puolille log x = log y 3) $\Leftrightarrow$ x = y 4) Ratkaise x 5) Tarkista kuuluuko MJ:oon

3.26.1. Ratkaise yhtälö $2\log_3 x = \log_3 (2x + 1) - 1$
L: 58, 23.6b

27. Logaritmiepäyhtälö
1) MJ 2) Muotoon log x > log y 3) $\Leftrightarrow$ x > y (kantaluku > 1) 4) Ratkaise x 5) Laita lukusuorataulukkoon MJ ja saadusta epäyhtälöstä tuleva alue 6) Vastauskeksi yhteinen osa (leikkausjoukko)

3.27.1. Ratkaise epäyhtälö $\lg (x - 2) > 1 + \lg (5 - x)$

28. Epäyhtälön oikeaksi osoittaminen
Tee alkuperäisen epäyhtälön kanssa yhtäpitäviä epäyhtälöitä ($\Leftrightarrow$). Pyri saamaan viimeinen varmasti todeksi.

3.28.1. Osoita, että $(a + b)^2 \geq 4ab$
L: 64, 92S5b

Luku 4. Funktiot

1. Funktio
on yhteys $f:x \to y$, jos jokaiseen määrittelyjoukon x:ään liittyy yksi ja vain yksi arvojoukon y

2. Määrittely- ja arvojoukot
Mj = {x} eli kaikkien x:ien joukko   Aj = {y} eli kaikkien arvoina olevien y:itten joukko

3. Funktio f on kasvava $\Leftrightarrow \forall\, x_1 < x_2$ pätee $f(x_1) < f(x_2)$

L: 96K8

4. Funktio f on vähenevä $\Leftrightarrow \forall\, x_1 < x_2$ pätee $f(x_1) > f(x_2)$

5. Pystysuora asymptootti on suora " x = nimittäjän nollakohta " kun sama x ei ole myös osoittajan nollakohta

4.5.1. Mikä on käyrän $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$ pystysuora asymptootti?
L: 69b

6. Muu asymptootit ovat käyriä " y = vaillinainen osamäärä"

4.6.1. Mikä on käyrän $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$ vino asymptootti?
L: 69b, 96S7a

7. Raja-arvon "määritelmä"
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, jos $|f(x) - A| <$ vaikka kuinka vähän kaikilla x:illä, joilla $|x - a|$ tarpeeksi pieni

4.7.1. Miten pieni $|x - 1|$ on oltava, jotta kaikilla x:n arvoilla, jotka toteuttavat tämän ehdon funktion $f(x) = 2x + 3$ arvot poikkeaisivat arvosta 5 vähemmän kuin 0,01?

8. Raja-arvon laskeminen, kun sijoittamalla $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \to \dfrac{0}{0}$
Jaa P(x) ja Q(x) tekijöihin ((x - a) on tekijä). Supista "nollatekijät" (x - a). Sijoita rajakohta.

4.8.1. Laske $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{3x^2 + 4x - 20}$
L: 97K5, 22.4b

9. Jatkuvuus kohdassa x = a
1° f(a) on olemassa 2° $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ on olemassa (ts. $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x)$)

3° $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$
HUOM! YTL:n mukaan jatkuvuutta tutkitaan vain funktion määrittelyjoukossa.
Jos f(a) ei ole olemassa (x = a ei kuulu määrittelyjoukkoon), ei jatkuvuutta tutkita.

4.9.1. Onko funktio $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, \text{ kun } x \neq 1 \\ 4, \text{ kun } x = 1 \end{cases}$ jatkuva kohdassa x = 1?

2. Miten f(1) on määriteltävä, jotta funktio $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 2x - 3}$ olisi jatkuva kohdassa x = 1?

3. Määritä a siten, että funktio $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, \text{ kun } x < 1 \\ 4{,}4x + a, \text{ kun } x \geq 1 \end{cases}$ on jatkuva kaikkialla.

L: 01S13, 23.7b, 37.8

10. Funktio on jatkuva avoimella välillä]a,b[, jos funktio on jatkuva kaikilla välin x ∈]a,b[

11. Jatkuvuus suljetulla välillä [a,b]
jos funktio on jatkuva avoimella välillä]a,b[sekä oikealta jatkuva a:ssa ja vasemmalta jatkuva b:ssä

12. Funktion nollakohdan olemassaolo
1° f on jatkuva 2° f(a) < 0 ja 3° f(b) > 0 ⇒ ∃ nollakohta x ∈]a,b[ts. f(x) = 0

4.12.1. Osoita, että funktiolla $f(x) = e^x + x - 2$ on ainakin yksi nollakohta välillä [0,1]. Määritä se 0,001 tarkkuudella.
L: 80, 91S10

13. Yhdistetyn funktion arvo, kun x = a
(f o g)(a) = f(A), missä A = g(a)

4.13.1. Olkoon f(x) = 2x + 3 ja $g(x) = 4x^2 - 5x + 6$. Määritä yhdistetyn funktion g o f arvo, kun x = -1.

14. Yhdistetyn funktion lausekkeen muodostaminen
(f o g)(x) = f(g(x)) ts. sijoita g(x):n lauseke f:ään muuttujan x paikalle

4.14.1. Olkoon f(x) = 2x + 3 ja $g(x) = 4x^2 - 5x + 6$. Määritä yhdistettyjen funktioiden g o f ja f o g lausekkeet.
L: 98K5a, 23.9b, 24.3, 34.4

15. Käänteisfunktio f^{-1}
Funktion f käänteisfunktio on f^{-1}, jos $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$ ja f^{-1} on funktio

4.15.1. Funktiolla $f(x) = x^3 + 2x$ on käänteisfunktio. Millä x:n arvolla $f^{-1}(x) = 3$?
Mitä on $f^{-1}(3)$?

16. Käänteisfunktion lausekkeen laskeminen
1° Ratkaise x yhtälöstä f(x) = y. 2° vaihda x ↔ y. 3° Kirjoita $y = f^{-1}(x)$

4.16.1. Laske funktion f(x) = 2x - 3 käänteisfunktion lauseke.
L: 82, 93K10, 03K9, 34.4

17. Käänteisfunktion olemassaolo
JOKO f on aidosti monotoninen
TAI ratkaistaessa x yhtälöstä f(x) = y saadaan vain yksi mahdollinen x
TAI ei ole kahta lukua a ja b siten, että f(a) = f(b)

4.17.1. Osoita, että funktiolla $f(x) = e^{x} + e \cdot x$ on käänteisfunktio.
L: 24.9b

18. Polynomifunktioiden ($y = ax^n + \dots$) kuvaajat
I asteen kuvaaja on suora. Nouseva, jos a > 0
II asteen kuvaaja on paraabeli (yksi ääriarvo). Ylöspäin aukeava jos a > 0.
III asteen kuvaaja (2 tai 0 ääriarvoa tai ääriarvot "yhtyneet"). Alhaalta vasemmalta ylös oikealle, jos a > 0
IV asteen kuvaaja (3 tai 2 tai 1 ääriarvoa). Ylöspäin aukeava, jos a > 0

19. Itseisarvofunktion kuvaaja
Saadaan hajottamalla funktio paloittain määritellyksi. Itseisarvot korvataan sillä, mitä ne ovat ilman itseisarvon määritelmän mukaan. Ts. sisusta tai sen vastalauseke riippuen siitä onko sisus positiivinen vai negatiivinen.
Piirretään sitten tämän paloittain määritellyn funktion kuvaaja. (Osat oikeille alueilleen)

4.19.1 Piirrä funktion a) $f(x) = |x - 2|$ b) $f(x) = |x - 2| + x$ c) $f(x) = |x^2 - 4|$ kuvaaja
L: 66b, 93S4b

19.a. Paloittain määritellyn funktion kuvaaja
Piirretään osafunktioiden kuvaajat siten, että kuvaajasta tulee vain ne pisteet, joiden x-koordinaatit kuuluvat kyseisen osan määrittelyjoukkoon.

L: 04S9

20. Murtofunktion kuvaaja
Asymptootit kohtien 5 ja 6 mukaisesti. Ääriarvot derivaatoilla. Nollakohdat yhtälön ratkaisusta.

22. Neliöjuurifunktion kuvaaja on oikealle/vasemmalle aukeavan paraabelin ylä- tai alaosa

22. Eksponenttifunktion kuvaaja
1° x-akselin yläpuolella eli arvot positiivisia 2° Kulkee pisteen (0,1) kautta
3° kasvava, kun a > 0 4° vähenevä, kun 0 < a < 1
5° ”kasvavalla” puolella nopeasti äärettömyyteen
6° ”vähenevällä” puolella asymptoottina x-akseli.

23. Logaritmifunktion kuvaaja
1° y-akselin oikealla puolella ts. MJ = R_+ = {x > 0} 2° kulkee pisteen (1,0) kautta 3° kasvava, kun kantaluku>1
4° asymptoottina y-akseli 5° kasvaa äärettömän korkealle, mutta HYVIN HITAASTI

24. Sinifunktion kuvaaja on aaltofunktio, origosta kasvaen, arvot välillä [-1,1], jaksona 2π

25. Kosinifunktion kuvaaja on aaltofunktio, (0,1):stä väheten, arvot välillä [-1,1]. jaksona 2π

26. Tangenttifunktion kuvaaja välillä $]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$ tulee $-\infty$:stä ja menee $+\infty$:een koko ajan kasvaen, kulkee origon kautta, MJ: $x \neq \frac{1}{2}\pi + n\pi$, jaksona π

4.26.1.Mikä on funktion $f(x) = \tan(2x - \frac{1}{4}\pi)$ määrittelyjoukko?

27. Neliöjuurifunktion määrittelyjoukko on $R_{0+} = \{x \geq 0\}$ ts. juurrettava ≥ 0

4.27.1. Mikä on funktion $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ määrittelyjoukko?
L: 72, 73

28. Logaritmifunktion määrittelyjoukko on $R_+ = \{x > 0\}$ ts. logaritmoitava > 0

4.28.1. Mikä on funktion $f(x) = \ln(x - 1) + \sqrt{2 - x}$ määrittelyjoukko?
L: 77, 93K10, 04S6

29. Eksponenttifunktion arvojoukko on R_+ ts. $a^x > 0$

30. Yhdistetyn funktion f o g määrittelyjoukko $= \{ x \mid x \in Mj(g)$ JA $g(x) \in Mj(f) \}$

4.30.1. Olkoon $f(x) = 2x + 3$, $x \in [0,5]$ ja $g(x) = x^2 + 3x + 4$, $x \in [5,17]$. Mikä on yhdistetyn funktion g o f määrittelyjoukko?

31. Käänteisfunktion määrittely- ja arvojoukot : $Mj(f^{-1}) = Aj(f)$, $Aj(f^{-1}) = Mj(f)$

L: 27.10a

32. Funktion ja sen käänteisfunktion kuvaajat ovat peilikuvia suoran $y = x$ suhteen.

4.32.1. Laske funktion $f(x) = x^2 - x - 3$, $x \in [\frac{1}{2}, \infty[$ ja sen käänteisfunktion leikkauspiste.
L: 96S10a, 24.9b

Luku 5. Funktio matemaattisena mallina

1. Suoraan verrannollisuus verrantona :
Jos A on suoraan verrannollinen B:hen, on $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$

5.1.1. Bensan kulutus autossa on suoraan verrannollinen vauhdin toiseen potenssiin. Mikä on bensan kulutus vauhdissa 120 km/h, kun se on vauhdissa 80 km/h 6 l/100 km?

2. Suoraan verrannollisuus funktiona :
Jos A on suoraan verrannollinen B:hen, on $B = k \cdot A$, missä $k = \frac{B_1}{A_1}$

5.2.1. Suure y on suoraan verrannollinen suureeseen x. Esitä y x:n funktiona, kun tiedetään, että x:n ollessa 5 oli y:n arvo 6.

3. Kääntäen verrannollisuus verrantona :
Jos A on kääntäen verrannollinen B:hen, on $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_2}{B_1}$

5.3.1. Sähkön kulutus on kääntäen verrannollinen absoluuttisen lämpötilan toiseen potenssiin. Mikä on sähkön kulutus lämpötilan ollessa 243K (= -30°C), kun se on 20 kWh/vrk lämpötilan ollessa 273K (= 0°C)?

4. Kääntäen verrannollisuus funktiona

Jos A on kääntäen verrannollinen B:hen, on $B = k \cdot \frac{1}{A}$, missä $k = A_1 \cdot B_1$

5.4.1. Suure y on kääntäen verrannollinen suureeseen x. Esitä y x:n funktiona, kun tiedetään, että x:n ollessa arvoltaan 5 oli y = 6.
L: 83

5. Sama määrällinen muutos, lisäys monta kertaa

$A_n = A_0 + n \cdot m$, missä A_0 on alkuarvo, m on lisäys ja A_n on suureen A arvo n:n lisäyksen jälkeen

5.5.1. Metsästä on viety puuta jo 100 m^3. Rekkaan mahtuu 20 m^3. Esitä viedyn puumäärän lauseke rekkalastien n funktiona. Monenko rekkakuormallisen jälkeen koko puutavaraerä 500 m^3 on viety metsästä pois?

6. Sama suhteellinen muutos, moninkertaistuminen monta kertaa

$A_n = A_0 \cdot \alpha^n$, missä A_0 on alkuarvo, α on suhteellinen muutos ja A_n on suureen A arvo n:n muutoksen jälkeen

5.6.1. Bakteerikanta tulee 1,8-kertaiseksi vuorokaudessa. Suuriko on 1000 bakteerin kanta viikon kuluttua?
L: 27.6b

7. Sama prosentuaalinen muutos monta kertaa

$A_n = A_0 \cdot \alpha^n$, missä $\alpha = 1 + p/100$. $p > 0$, jos lisäystä ja $p < 0$, jos pienenemistä

5.7.1. Suodatin poistaa ilman epäpuhtauksista 60 %. Kuinka paljon epäpuhtauksia pääsee tehdassaliin, jos sisään tuleva ilma johdetaan 5 tällaisen suodattimen kautta?
L: 93, 95S7b, 23.4

8. Radioaktiivinen hajoaminen puoliintumisajasta

$m = m_0 \cdot 2^{-t/T}$, missä m_0 = radioaktiivisen aineen määrä alussa, T = puoliintumisaika, ja t = kulunut aika.

5.8.1. Radioaktiivisen aineen puoliintumisaika on 20 vrk. Miten kauan kestää, että aineen määrä on pienentynyt 10 prosenttiin?

9. Sama jatkuva, suhteellinen muutos

$A_x = A_0 \cdot \alpha^{x/d}$, missä α on suhteellinen muutos = (1 + p/100) d-mittaisella välillä

5.9.1. Tiiliseinän läpi pääsevä säteily pienenee eksponentiaalisesti seinän paksuuden funktiona. Kun 10 cm paksun seinän läpi pääsee säteilystä 30 %, niin kuinka paljon säteilyä pääsee 25 cm paksun tiiliseinän läpi?
L: 31.8

10. Jaksollinen muutos

$A_x = A_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \omega\right)$, missä A_0 = amplitudi ja T = jaksoaika sekä t = kulunut aika ja ω = kulma alussa.

11. Funktio yleisesti

Muodostetaan funktiolle lauseke annettujen muuttujien ja vakioiden avulla

L:84, 86, 89, 91, 92, 91S9, 92K6b, 93K8, 36.4

Luku 6. Geometrian peruskäsitteitä, aloja, tilavuuksia.

1. Ristikulmat ovat yhtä suuret

6.1.1. Kulman suuruus on $10° + 2\alpha$ ja ristikulma $70° - \alpha$. Kuinka suuri on kulma?

2. Jos suora leikkaa kahta yhdensuuntaista suoraa niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret

6.2.1. M-kirjaimen muotoisen kuvion reunimmaiset kulmat ovat 30° ja 40°. Suuriko on keskimmäinen kulma?

3. Jos suora leikkaa kahta suoraa ja samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret
niin nämä kaksi suoraa ovat yhdensuuntaisia

4. Kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta

6.4.1. Jänteen päätepisteet ovat A ja B. B:n kautta kulkevalla tangentilla on piste C, joka on eri puolella suoraa AB kuin keskipiste K. Laske kulma ABC, kun kulma AKB = 60°.
L: 97, 96S7b

5. Keskuskulman ja vastaavan kaaren asteluvut ovat samat

6. Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora

6.6.1. Ympyrän säde on 5. Piste A on etäisyydellä 6 erään halkaisijan toisesta päätepisteestä. Kuinka kaukana A on saman halkaisijan toisesta päätepisteestä?

7. Ympyrän tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan

6.7.1. Ympyrän kaari AB on asteluvultaan 100°. Pisteeseen B on piirretty tangentti. Kuinka suuri on kulma ABK, missä K on ympyrän keskipiste?

8. Pythagoraan lause: $a^2 + b^2 = c^2$ eli kateettien neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan neliö

6.8.1. Tasakylkisen kolmin kanta on 6 ja kylki 5. Kuinka suuri on korkeusjana?
L: 90S10b, 91K10, 92S8, 94K2b, 00K1, 04S2, 30.7, 32.8b, 33.3a

9. Pituudet, alat ja tilavuudet katsotaan taulukkokirjasta

L:100, 102, 105, 107, 90K6b, 92S7a, 93S9, 94K4a, 94S2, 95K5b, 95S3b, 95S5b, 95S8a, 96K10a, 96S3, 97K1, 97S7a, 98K6, 99S2, 01K5, 01S6, 02K7, 02S7, 03K13, 04S3, 04S7, 21.7b, 23.8b, 26.6b, 29.6b, 29.7b, 31.6a, 34.8, 36.3, 37.7

Luku 7. Yhtenevyys ja yhdenmuotoisuus.

1. Kolmiot ovat yhteneviä,
jos niissä on kolme paria yhtä suuria osia (s,s,s), (s,s,k,e), (s,k,s), (k,s,k) tai (k,k,s)

2. Sivujen tai kulmien todistaminen yhtä suuriksi
Todistetaan kaksi kolmiota yhteneviksi. Jos todistettavat osat ovat vastinosia, niin ne ovat yhtä suuret.

7.2.1. Ympyrässä on kaksi halkaisijaa AB ja DE. Jänteet AC ja DF ovat yhtä suuret. Todista, että myös jänteet BC ja EF ovat yhtä suuret.

L; 108, 109, 113

3. Kolmiot ovat yhdenmuotoisia,
jos niissä on kaksi paria yhtä suuria kulmia (tämä useimmiten). Myös kohdan 1 tapaisia lauseita.

4. Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinsivujen suhteet
ovat samansuuruisia, joten tuntemalla 4 vastinsivusta 3 voidaan puuttuvan arvo laskea.

7.4.1. Kolmion kanta on 6 ja korkeus 5. Kolmion sisään on piirretty neliö siten, että yksi sivu on kannalla ja kaksi kärkeä on eri kyljillä. Miten pitkä on neliön sivu?
L: 111, 114, 115, 117, 99S5, 04K7, 37.3

5. Yhdenmuotoisten kuvioiden mittakaava on vastinjanojen suhde

6. Yhdenmuotoisten kuvioiden alojen suhde on mittakaava toiseen eli k^2

7.6.1. Kolmion kylkiä jatketaan kannan yli niin, että pituus tulee kaksinkertaiseksi. Jatkeiden päätepisteet yhdistetään jolloin syntyy puolisuunnikas. Miten suuri on puolisuunnikkaan ala kolmion alaan verrattuna?
L: 92K4a

7. Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaava kolmanteen eli k^3

7.7.1. Lieriön tilavuus on kaksinkertainen toisen samanmuotoisen lieriön kanssa. Lieriöiden seinämillä on sama paksuus. Montako prosenttia on pienemmän lieriön kuoren massa suuremman kuoren massasta?
L: 112, 99K5a, 02K4, 33.8

8. Kulmanpuolittajan piste on yhtä kaukana kummastakin kulman kyljestä

7.8.1. Todista, että kulmanpuolittajan piste on yhtä kaukana kummastakin kyljestä.

9. Janan keskinormaalin piste on yhtä etäällä kummastakin janan päätepisteestä

7.9.1. Todista, että jos piste on yhtä kaukana janan päätepisteestä, niin se on janan keskinormaalilla.

10. Kolmion kulmien summa on = 180°

7.10.1. Tasakylkisen kolmion huippukulma on 50°. Laske kantakulman suuruus.
L: 92S2b, 93K4a

11. Kolmion kahden kulman summa on = kolmannen kulman vieruskulma

7.11.1. Suoralla on peräkkäin pisteet A, B ja C. Suoran ulkopuolella on piste D siten, että $\angle DAB = 40°$ ja $\angle DBC = 75°$. Laske $\angle ADB$.

12. Kolmion kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa

7.12.1. Kolmion sivut ovat 7, 8 ja 9. Miten suuriin osiin suurimman kulman puolittaja jakaa suurimman sivun?

13. Kolmion sivun (puolisuunnikkaan kannan) suuntainen suora jakaa muut sivut osiin samassa suhteessa

7.13.1. Puolisuunnikkaan kyljet ovat 5 ja 6. Kannan suuntainen suora erottaa lyhemmästä 2 ja 3 suuruiset osat. Miten suuret osat erottuu pitemmästä kyljestä?

14. Kolmion keskijanojen leikkauspiste jakaa keskijanat suhteessa 1:2

7.14.1. Kolmion ABC keskijanat AD ja BE leikkaavat pisteessä F. Miten suuria ovat kolmioiden ABF, AEF ja BDF sekä nelikulmion CDFE alat koko kolmion alaan verrattuina?
L: 116, 28.8a

15. Kolmion keskipiste = kolmion painopiste = keskijanojen leikkauspiste

16. Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kulmanpuolittajien leikkauspiste

17. Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on sivujen keskinormaalien leikkauspiste

04S2

18. Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhtä suuret

19. Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret

20. Suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa

21. Nelikulmio on suunnikas, jos A. Vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset B. Vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät C. Toinen pari vastakkaisia sivuja ovat yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset D. Lävistäjät puolittavat toisensa

22. Vinoneliön lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan

7.22.1. Vinoneliön lävistäjät ovat 6 ja 8. Miten pitkä on vinoneliön sivu?
L: 03S2

Luku 8. Trigonometria

1. Kulma radiaaneina on t = b / r , missä b = kulman kylkien välissä oleva ympyrän kaari ja r = säde

8.1.1. Ympyrän säde on 5 ja kaaren pituus 6. Laske kaarta vastaavan keskuskulman suuruus radiaaneina.

2. Kulman sini : sin t = y , missä y on kulman kehäpisteen y-koordinaatti yksikköympyrässä

3. Kulman kosini : cos t = x, missä x on kulman kehäpisteen x-koordinaatti

L: 94K9

4. Kulman tangentti : tan t = y / x , missä x ja y ovat kulman kehäpisteen koordinaatit

8.2-4.1. Kulman kehäpiste on (-3/5, -4/5). Mitä on kulman sini, kosini ja tangentti?
2. Mikä on 150° kulman kehäpiste.

5. sin α = kulman vastainen kateetti / hypotenuusa

6. cos α = kulman viereinen kateetti / hypotenuusa

7. tan α = kulman vastainen kateetti / viereinen kateetti
L: 97K7, 98K2, 99K3, 99S1, 00S4, 29.4a

8. Mj(sin) = Mj(cos) = R

9. Mj(tan) = $\{x \mid x \neq \frac{1}{2}\pi + n\pi\}$
8.9.1. Mikä on funktion f(x) = tan 3x määrittelyjoukko?

10. Aj(sin) = Aj(cos) = [-1,1]
8.10.1. Mikä on funktion $f(x) = 2 + 3\cdot\sin 4x$ suurin ja pienin arvo?
2. Mikä on funktion $f(x) = 4 + 2\cdot\cos x$ suurin ja pienin arvo välillä $[\pi/6, 2\pi/3]$?
L: 119, 123, 91K3b, 01K6

11. Aj(tan) = R

12. Sinifunktion kuvaaja on aaltofunktio, lähtee origosta kasvaen, arvot välillä [-1,1], jaksona 2π

13. Kosinifunktion kuvaaja on aaltofunktio, lähtee (0,1):stä väheten, arvot välillä [-1,1]. jaksona 2π

14. Tangenttifunktion kuvaaja välillä $]-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi[$ tulee $-\infty$:stä ja menee $+\infty$:een koko ajan kasvaen, kulkee origon kautta, MJ: $x \neq \frac{1}{2}\pi + n\pi$, jaksona π

15. Trigonometristen funktioiden merkit eri neljänneksissä

SINI		KOSINI		TANGENTTI	
	+ +		- +		- +
	- -		- +		+ -

16. Kulman trigonometristen funktioiden tarkat arvot, kun yhden tarkka arvo tunnetaan.
1° Piirrä suorakulmainen kolmio
2° Merkitse kolmioon annetusta trigonometrisesta funktiosta kahden sivun pituudet
3° Laske Pythagoraalla kolmas sivu
4° itseisarvot saa kolmion sivuista 5° etumerkki kulman neljänneksestä

8.16.1. Laske sin x ja cos x, kun tan x = $-\sqrt{3}$ ja kulma $x \in [\pi,2\pi]$
L: 94S3, 03S5b, 22.4a, 25.2a, 32.5a

17. Trigonometrian peruskaavat
A. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ B. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ C. $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$
L: 93K6a

18. sin (x ± y), cos (x ± y) ja tan (x ± y) kaavat saa taulukkokirjasta

8.18.1. Esitä lausekkeena, missä on kulmana α lauseke sin (α + 30°)
2. Laske lausekkeen cos (x + y) arvo, kun sin x = -3/5 ja cos y = - 1/3 sekä 180° < x < 270° ja 90° < y < 180°.
L: 120, 90K8b, 03K6, 33.5

19. sin 2x = 2sin x · cos x

8.19.1. Esitä kulman x lausekkeena sin 4x.
L: 97S6b

20. cos 2x ja tan 2x saa taulukkokirjasta

8.20.1. Olkoon sin x = ½ ja kulma x $\in$ [½π,π]. Mitä on cos 2x ja tan 2x?
L: 90S9, 92K9b, 94K3a

20a. Kaavojen käyttö todistustehtävissä.
JOKO lähdetään vasemmasta puolesta ja sen lauseke esitetään jonkin kaavan perusteella toisessa muodossa ja näin jatkaen päädytään oikean puolen lausekkeeseen.
TAI tehdään annetun kaavan kanssa yhtäpitäviä (epä)yhtälöitä pyrkien varmasti toteen (epä)yhtälöön

L: 04S8

21. Kulmat, joilla trigonometrisen funktion itseisarvo on sama
α , 180° - α , 180° + α , 360° - α ja - α

8.21.1. Olkoon sin x = a. Mitä on sin x + sin (180° - x) - sin (180° + x)?

22. Yhtälö sin x = sin y
$\Leftrightarrow$ x = y + n·360° TAI x = 180° - y + n·360° (eli kulmat samoja tai suplementtikulmia, + jaksoja)

8.22.1. Ratkaise yhtälö sin (2x - 20°) = sin (40° - x)
L: 124, 127b, 128a, 99S4a, 30.2b

23. Yhtälö cos x = cos y
$\Leftrightarrow$ x = y + n·360° TAI x = - y + n·360° (eli kulmat samoja tai vastalukuja, + jaksoja)

8.23.1. Ratkaise yhtälö cos (x + 10°) - cos (20° + 2x) = 0
L: 127a, 92S3b, 29.7a

24. Yhtälö tan x = tan y
$\Leftrightarrow$ x = y + n·180° JA x $\neq$ 90° + n·180° JA y $\neq$ 90° + n·180°

8.24.1. Ratkaise yhtälö tan 3x = tan x
L: 128b

25. Homogeeninen yhtälö saman kulman sinin ja kosinin suhteen a·sin x + b·cos x = 0
Jaa cos x:llä , jolloin saat yhtälön a·tan x + b = 0

8.25.1. Ratkaise yhtälö 2·sin 2x - 3·cos 2x = 0
2. Ratkaise yhtälö $\sin^2 x + 2\cdot\sin x \cdot \cos x - 3\cdot\cos^2 x = 0$
L: 127c, 91S4

26. Suorakulmaisen kolmion ratkaiseminen
Käytä perustrigonometriaa kahteen sivuun ja kulmaan, joista yksi on tuntematon

8.26.1. Tasakylkisen kolmion kanta on 5 ja huippukulma 40°. Laske kylki, korkeus ja ala.
2. Torni näkyy 20° kulmassa ja 50 m lähempänä 50° kulmassa. Laske tornin korkeus.
L: 04K6

27. Sinilause : $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ TAI $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = 2R$, missä R on kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde.

8.27.1. Kolmion kaksi pienintä kulmaa on 40° ja 60° sekä suurin sivu on 10. Laski pienin sivu.
2. Kolmion kaksi sivua on 4 ja 5 sekä jälkimmäisen vastainen kulma 50°. Laske muut kulmat ja sivut.
L: 130, 02S6, 03S9, 21.4a, 25.8

28. Kosinilause : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

8.28.1. Kolmion kaksi sivua on 3 ja 4 sekä niiden välinen kulma 50°. Laske muut sivut ja kulmat.
2. Kolmion sivut ovat 6, 7 ja 8. Laske kolmion kulmat.
L: 132, 134, 90S4, 97S2b, 99S8a, 00K5, 24.7b

29. Kolmion ala trigonometrialla $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, missä γ on sivujen a ja b välinen kulma

8.29.1. Kolmion kaksi sivua on 4 ja 5 sekä välinen kulma 60°. Laske kolmion ala.
2. Kolmion ala on 10 sekä kaksi sivua 5 ja 6. Laske tunnettujen sivujen välinen kulma.
L: 95K6, 31.7a

Luku 9. Vektorit

1. Yleisesti vektorit samoja $\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$ ja $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$

2. Yleisesti vektorit yhdensuuntaisia $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \exists\, t: \mathbf{b} = t\mathbf{a}$.
Jos $t > 0$, on $\mathbf{a} \uparrow\uparrow$ b. Jos $t < 0$, on $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$

9.2.1. Olkoon $\mathbf{u} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ ja $\mathbf{v} = 12\mathbf{b} - 8\mathbf{a}$. Mitä tiedetään vektorien **u** ja **v** suunnista?

3. Vektorin suuntainen yksikkövektori $\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$

9.3.1. Olkoon vektorin **a** pituus 4. Mitkä ovat **a**:n kanssa yhdensuuntaiset yksikkövektorit?
L: 138, 92S2a, 00K6, 24.4b

4. Vektorien yhteenlasku $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AC}$ eli ensimmäisen alusta toisen loppuun kun toinen alkaa siitä mihin ensimmäinen päättyi

5. Vektorien vähennyslasku $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ eli lisätään **a**:han **b**:n vastavektori

6. Vektori kertaa reaaliluku $t\cdot a$ on vektori, jolla on ominaisuudet
1° $|t\cdot\mathbf{a}| = |t|\cdot|\mathbf{a}|$ 2° $t\cdot\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$, jos $t > 0$ tai $t\cdot\mathbf{a} \uparrow\downarrow$ a, jos $t < 0$ tai $t\cdot\mathbf{a} = \mathbf{0}$, jos $t = 0$

9.6.1. Vektori $\mathbf{b} = -3\mathbf{a}$. Mitä tiedetään vektorista **b** vektoriin **a** verrattuna?

7. Pistetulo $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})$

9.7.1. Vektoreista tiedetään, että | **a** | = 3 ja | **b** | = 4 sekä $\angle$(**a**,**b**) = 120°. Laske **a · b**.
2. Laske | **b** | , kun | **a** | = 5, **a · b** = 6 ja $\angle$(**a**,**b**) = 60°.

8. Pituus pistetulon avulla. $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$

9.8.1. Olkoon | **a** | = 3 , | **b** | = 4 ja $\angle$(**a**,**b**) = 120°. Laske | 2**a** - 3**b** |.
2. Olkoon | **a** | = 6, | **b** | = 7 ja **a · b** = 7. Laske | **a** - **b** |.
3. Olkoon | **a** | = 10, | **b** | = 12 ja | **a** + **b** | = 15. Laske | **a** - 2**b** |

9. Vektorien välinen kulma pistetulon avulla $\cos(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$

9.9.1. Olkoon | **a** | = 16, | **b** | = 18 ja **a · b** = 21. Laske vektoreiden **a** ja **b** välinen kulma.
L: 136, 90S7a, 96S5a, 02K6, 31.2b

10. Vektorien kohtisuoruus : $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ $(\mathbf{a},\mathbf{b} \neq \mathbf{0})$

9.10.1. Olkoon | **a** | = 2, | **b** | = 3 ja **a · b** = 4. Mikä on x, kun vektorit **a** + x**b** ja 2**a** - ½x**b** ovat kohtisuorassa?
L: 137, 91K4b, 91S6a, 92S2a, 98K3b, 02K11, 21.6b, 25.9, 27.2b, 33.9a, 34.7

11. Uuden vektorin lauseke annettujen vektoreiden avulla
1° Mene tunnettua kiertotietä alkupisteestä loppupisteeseen
2° Kunkin tiesuunnan vektori kerrotaan jollakin luvulla
3° Jos mennään myötävirtaan, on kerroin positiivinen, jos vastavirtaann, niin negatiivinen
4° Kertoimen itseisarvo = tieosan pituus / tiesuunnan vektorin pituus

9.11.1. Olkoon kolmion ABC sivuina vektorit **AB** = **a** ja **AC** = **b**. Olkoon D sivun BC keskipiste ja piste E jakaa sivun AB suhteessa 2:3. Muodosta vektorit **BD**, **CE** ja **DE** vektorien **a** ja **b** avulla.
L: 142, 99K7b

12. Pisteen paikkavektori on origosta pisteeseen menevä vektori.
P = (x,y,z) , jolloin **OP** = x**i** + y**j** + z**k**

9.12.1. Mikä on pisteen (1,2,-3) paikkavektori?
L: 03S4

13. Pisteen koordinaattien selvittäminen vektoreilla.
Laske pisteen paikkavektori

9.13.1. Mikä on piste, jos sen paikkavektori on 2**i** - 3**k**?
2. Määritä piste, joka jakaa janan A(1,2,-3) B(4,-4,6) sisäpuolisesti suhteessa 1:2.
L: 139, 141, 144, 92K4b, 01K3, 04K4

14. **ijk**-vektorin pituus **r** = x**i** + y**j** + z**k** . $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

9.14.1. Laske vektorin 4**i** - 2**j** - 4**k** pituus.
2. Mikä on x, kun vektorin x**i** + 2**j** + 3**k** pituus on 7?
L: 95S3a, 99S6, 30.3, 33.2a

15. **ijk**-vektorit samoja $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ JA $y_1 = y_2$ JA $z_1 = z_2$

9.15.1. Määritä x ja y , kun vektorit **a** = x(**i** + 2**j**) + y(3**i** - 4**j**) ja **b** = 9**i** - 2**j** ovat samoja.
L: 03S4, 04S4

16. **ijk**-vektorit yhdensuuntaisia $\mathbf{r}_1 \parallel \mathbf{r}_2 \Leftrightarrow x_1 / x_2 = y_1 / y_2 = z_1 / z_2$, jos suhde > 0, niin ↑↑, jos < 0, niin ↑↓

9.16.1. Määritä x ja y, kun vektorit **a** = x**i** + 2**j** - 3**k** ja **b** = 2**i** - y**j** + 6**k** ovat yhdensuuntaisia. Ovatko ne silloin saman- vai vastakkaissuuntaisia?
L: 135, 96K5b, 21.6b

17. Koordinaatiston pisteestä toiseen menevä vektori **AB** = $(x_B - x_A)$**i** + $(y_B - y_A)$**j** + $(z_B - z_A)$**k**

9.17.1. Mikä vektori **AB**, kun A = (1,2,-3) ja B = (4, -5, 6)?

18. **ijk**-vektoreiden pistetulo. $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

9.18.1. Muodosta **a · b**, kun **a** = 2**i** - 3**j** + 4**k** ja **b** = 5**i** + 6**j** - 7**k**.
2. Mikä arvo on luvulla x, kun **a** = x**i** + 2x**j** + 3**k**, **b** = x**i** - **j** - **k** ja **a** ⊥ **b**?
3. Laske kulma ABC, kun A = (1,2,-3), B = (4,3,2) JA C = (5,-6,7).

19. Vektorin jako komponentteihin eli vektori = komponentti1 + komponentti2

20. Vektorin (**c**) jako vektoreiden (**a** ja **b**) suuntaisiin komponentteihin 1° Merkitse **c** = x**a** + y**b** 2° ratkaise x ja y yhtälöparista **i**:n kertoimet samoja JA **j**:n kertoimet samoja

9.20.1. Jaa vektori **a** = 2**i** + 5**j** vektorien **u** = 2**i** + 3**j** ja **v** = 4**i** - 5**j** suuntaisiin komponentteihin.
2. Mikä on se vektorin **a** = **i** suuntainen vektori, jonka toinen komponentti on **b** = **i** + 2**j** ja toinen komponentti on vektorin **c** = 2**i** - **j** suuntainen?
L: 23.9a, 36.8, 37.13

21. Kolme pistettä (A, B, C) samalla suoralla ⇔ **AB** || **AC**

9.21.1. Ovatko pisteet A(1,2,3) , B(4,8, -3) ja C(10,20,-15) samalla suoralla?
L: 92S6

22. Kaksi tason vektoria on tason kantavektoreita, jos ne ovat erisuuntaiset

9.22.1. Ovatko vektorit **a** = **i** + 2**j** ja **b** = 4**i** + 7**j** tason kantavektoreita?

23. Kolme vektoria samassa tasossa, jos ∃ x ja y : **c** = x**a** + y**b**

9.23.1. Ovatko vektorit **a** = **i** + 2**j** - **k**, **b** = 2**i** + 3**j** + **k** ja **c** = **i** + 5**k** samassa tasossa?
L: 145, 147

24. Neljä pistettä (A, B, C ja D) samassa tasossa, jos ∃ x ja y : **AB** = x**AC** + y**AD**

9.24.1. Ovatko pisteet A(1,2,1), B(2,1,-1) C(-1,-1,2) ja D(0,-1,5) samassa tasossa?

25. Kolme vektoria avaruuden kantavektoreita, jos ne eivät samassa tasossa ∄ x,y : **c** = x**a** + y**b**

9.25.1. Ovatko vektorit **a** = **i** + **j** - **k**, **b** = 2**i** - **j** + **k** ja **c** = -**i** + 2**j** + 2**k** avaruuden kantavektoreita?

Luku 10. Suorat ja tasot

1. Janan pituus $\lvert P_1P_2 \rvert = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

10.1.1. Mikä on janan A(1,2,3) B(-1,0,-1) pituus?
2. Mikä z-akselin piste on pisteestä (1,-1,1) etäisyydellä 3?
3. Mikä suoran y = 2x + 3 piste on pisteestä (1,3) etäisyydellä 5?
L: 154, 03S3

2. x-akselin suuntaisen janan pituus $d = | x_2 - x_1 |$

10.2.1. Laske janan A(2,1) N(-3,1) pituus.

3. Janan keskipiste $x_K = ½(x_A + x_B)$ $y_K = ½(y_A + y_B)$ $z_K = ½(z_A + z_B)$

10.3.1. Laske janan A(1,2,3) B(-1,0,-1) keskipiste.
2. Janan AB keskipiste on (1,2) Laske B, kun A = (-3,4).

4. Kulmakerroin 2 suoran pisteestä $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

10.4.1. Laske pisteiden (1,2) ja (3, -4) kautta kulkevan suoran kulmakerroin.
2. Määritä a, kun pisteiden (a,2) ja (3,-4) kautta kulkeva suora on suoran y = 3x suuntainen.

5. Kulmakerroin suoran suuntakulmasta $k = \tan \alpha$

10.5.1. Suoran suuntakulma on 30°. Mikä on suoran kulmakerroin?
2. Laske suoran y = 3x + 4 ja y-akselin välinen kulma.

6. Kulmakerroin suoran suuntavektorista $\mathbf{s} = s_x\mathbf{i} + s_y\mathbf{j}$ $k = \frac{s_y}{s_x}$

10.6.1. Mikä on vektorin $\mathbf{s} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ suuntaisen suoran kulmakerroin?

7. Kulmakerroin suoran yhtälöstä ax + by + c = 0
1° Ratkaise y 2° k = x:n kerroin

10.7.1. Mikä on suoran 2x + 3y - 4 = 0 kulmakerroin?

8. Suoran yhtälö, kun tunnetaan piste P_0 ja kulmakerroin k : $y - y_0 = k(x - x_0)$

10.8.1. Laske suoran yhtälö, kun sen kulmakerroin on 2 ja se kulkee pisteen (3, -4) kautta.
L: 152, 93S3b, 02K1

9. Pystysuoran suoran yhtälö (jolla ei kulmakerrointa) : $x = x_0$

10.9.1. Mikä on pisteen (4, -5) kautta kulkevan y-akselin suuntaisen suoran yhtälö?

10. Suuntavektori kulmakertoimesta : $\mathbf{s} = \mathbf{i} + k\mathbf{j}$

10.10.1. Anna jokin suoran y = 4 - 5x suuntavektori.

11. Suoran ax + by + c = 0 normaalivektori : $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$

10.11.1. Anna jokin suoran 2x - 3y + 4 = 0 normaalivektori.

12. Suoran ax + by + c = 0 suuntavektori : $\mathbf{s} = b\mathbf{i} - a\mathbf{j}$

10.12.1. Anna jokin suoran 3x - 4y = 5 suuntavektori.

13. Suorien yhdensuuntaisuus
JOKO $k_1 = k_2$ tai molemmat suorat y-akselin suuntaisia
TAI $\alpha_1 = \alpha_2$
TAI $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$
TAI $\mathbf{s}_1 \parallel \mathbf{s}_2$
TAI $a_1 / a_2 = b_1 / b_2$

10.13.1. Mikä on pisteen (3,-2) kautta kulkeva suoran $y = 5x + 6$ suuntaisen suoran yhtälö?
2. Määritä a, kun suorat $ax + 2y = 3$ ja $5x - 6y = 7$ ovat yhdensuuntaisia.
L: 150a

14. Suorien kohtisuoruus
JOKO $k_1 \cdot k_2 = -1$ tai toinen suora x-akselin ja toinen y-akselin suuntainen
TAI $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$

10.14.1. Mikä on pisteen (2,1) kautta kulkevan, suoran $y = 3x - 4$ normaalin yhtälö?
2. Määritä a, kun suorat $ax + 2y = 3$ ja $(a - 1)x - y = 1$ ovat kohtisuorassa.
L: 150b, 01K8

15. Suorien välinen kulma kulmakertoimien avulla $\tan \alpha = \left| \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1} \right|$

10.15.1 Laske suorien $y = 2x + 3$ ja $y = 2\frac{1}{2}x - 4$ välinen kulma.
2. Määritä origon kautta kulkeva suora, joka muodostaa suoran $y = 3x - 4$ kanssa 45° kulman.

16. Suorien välinen kulma vektoreilla $\cos \alpha = \left| \dfrac{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1| \cdot |\mathbf{s}_2|} \right| = \left| \dfrac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} \right|$

10.16.1. Laske suorien $2x + 3y = 4$ ja $3x - 4y = 5$ välinen kulma.

17. Ensimmäisen asteen yhtälöparin ratkaiseminen
SIJOITUSKEINOLLA: Ratkaise 1. yhtälöstä y:n lauseke x:n ja vakioiden avulla. Sijoita tämä lauseke 2. yhtälöön y:n paikalle. Ratkaise saatu "x-yhtälö". y:n arvon saat sijoittamalla x:n 1. yhtälöön
YHTEENLASKUKEINOLLA: Kerro yhtälöt niin, että y:t ovat toistensa vastalukuja. Laske yhtälöt puolittain yhteen. Ratkaise saadusta yhtälöstä x. y:n arvon ratkaiset helpommasta yhtälöstä sijoittamalla saatu x siihen.

10.17.1. Ratkaise yhtälöpari a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x + 3y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 5x + 7y = 117 \end{cases}$
L: 90S2, 00K2, 01S1, 25.10b

18. Suorien leikkauspisteen laskeminen : Ratkaise suorien yhtälöiden muodostama yhtälöpari

10.18.1 Laske suorien $y = 3x - 4$ ja $2x - y = 1$ leikkauspiste.
2. Missä pisteessä pisteen (1,2) kautta piirretty suoran $y = 2x + 3$ normaali leikkaa tämän suoran?
L: 02S1, 28.5a

19. Suorien $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ja $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ keskinäinen asema

1° $L_1 = L_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ 2° $L_1 \parallel L_2$ mutta erillään $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ 3° $L_1 \nparallel L_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

10.19.1. Määritä a ja b, kun yhtälöt $ax + 2y = 3$ ja $3x - by = 6$ esittävät samaa suoraa.

20. Monikulmion alan laskeminen
Muodosta suorakulmio piirtämällä ylimmän ja alimman pisteen kautta vaakasuorat sivut sekä oikean ja vasemman puoleisimman pisteen kautta pystysuorat sivut. Vähennä suorakulmion alasta kysytyn alan ulkopuolelle jääneiden kolmioiden (osien) alat.

10.20.1. Laske monikulmion A(1,2) B(7,3) C(5,6) D(0,4) ala.
L: 155,35.9

21. Suoran $y = kx$ suuntaisten suorien parvi : $y = kx + c$, $c \in R$

10.21.1. Muodosta suoran $y = 3x + 4$ suuntaisten suorien parvi.

22. Suoran $ax + by = 0$ suuntaisten suorien parvi : $ax + by + c = 0$, $c \in R$

10.22.1. Muodosta suoran $2x + 3y = 4$ suuntaisten suorien parvi.

23. Suoran $ax + by = 0$ normaalien parvi : $bx - ay + c = 0$, $c \in R$

10.23.1. Muodosta suoran $3x + 4y - 5 = 0$ normaalien parvi.

24. Pisteen (x_0,y_0) kulkevien suorien parvi : $y - y_0 = k(x - x_0)$ tai $x = x_0$

10.24.1. Muodosta pisteen (2, -1) kautta kulkevien suorien parvi.

25. Suoran yhtälön laskeminen suoraparvia apuna käyttäen
1° Muodosta toisesta annetusta tiedosta sen tiedon toteuttavien suorien parvi
2° Ratkaise suoraparven parametrille arvo toisesta annetusta tiedosta

10.25.1. Muodosta suoran $y = 2x + 3$ suuntaisen suoran yhtälö, joka kulkee pisteen (2,3) kautta.
2. Mikä suoran $x + 2y = 3$ suuntainen suora erottaa koordinaattiakselien kanssa kolmion, jonka ala on 4?
3. Koordinaattiakselit erottavat pisteen (2,3) kautta kulkevasta suorasta janan, jonka päätepisteiden koordinaattien keskiarvo on -½. Mikä on suoran yhtälö?

26. Pisteen (x_0,y_0) etäisyys suorasta $ax + by + c = 0$: $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

10.26.1. Laske pisteen (1,2) etäisyys suorasta $3x + 4y = 5$?
2. Laske pisteen (3,4) etäisyys suorasta $y = 0{,}75x + 1{,}5$?
3. Laske suorien $2x + 3y = 4$ ja $y = x - 3$ leikkauspisteen etäisyys suorasta $x + y = 1$.
L: 02S5, 02S8, 21.5

27. Annetun ehdon täyttävän suoran yhtälön muodostaminen
1° Oletetaan, että suoralla on mielivaltainen piste (x,y)
2° Annetusta ehdosta saadaan yhtälö, jonka mielivaltainen piste (x,y) toteuttaa (ja siis kaikki suoran pisteet)

10.27.1. Laske suorien $y = 2x + 3$ ja $2x + 4y = 5$ välisten kulmien puolittajien yhtälöt.
2. Muodosta janan A(1,2) B(3,-4) keskinormaalin yhtälö.
3. Muodosta sen suoran yhtälö, jonka pisteistä on suoralle $y = 2x + 1$ kaksi kertaa niin pitkä matka kuin suoralle $y = ½x - 1$.

L: 94S6b

28. Avaruussuoran vektorimuotoinen yhtälö
OP = $\mathbf{OP}_0$ + t**s** = x_0**i** + y_0**j** + z_0**k** + t(s_x**i** + s_y**j** + s_z**k**) , missä P_0 on suoran piste ja s suuntavektori

10.28.1. Muodosta pisteen (1,2,3) kautta kulkevan, vektorin 3**i** - 2**j** + **k** suuntaisen suoran yhtälö.
2. Muodosta pisteiden (1,2,3) ja (4, -5, -6) kautta kulkevan suoran yhtälö.
3. Mikä on suoran a) **OP** = **i** + 2**j** - **k** + t(2**i** + **j** + 2**k**) b) **OP** = (1 + 2t)**i** + (3 - 4t)**j** + 5**k** suuntavektori?

29. Avaruussuoran parametrimuotoinen yhtälö(ryhmä)
$P = \begin{cases} x = x_0 + ts_x \\ y = y_0 + ts_y \\ z = z_0 + ts_z \end{cases}$, missä (x_0,y_0,z_0) on suoran piste ja s_x**i** + s_y**j** + s_z**k** on suoran suuntavektori

10.29.1. Muodosta pisteen (1,2,3) kautta kulkevan, vektorin 3**i** - 2**j** + **k** suuntaisen suoran yhtälö.
2. Muodosta pisteiden (1,2,3) ja (4, -5, -6) kautta kulkevan suoran yhtälö.
L: 90K10a, 97K8b, 33.9a

30. Kahden suoran välinen kulma saadaan laskemalla niiden suuntavektoreiden välinen kulma

10.30.1. Laske pisteiden A(1, 2, 3) ja B(3, -2, 1) kautta kulkevan suoran ja suoran **OP** = **i** + t(2**i** - 3**j** + 4**k**) välinen kulma.
L: 160

31. Avaruussuorien leikkauspisteen laskeminen.
Laita suorien parametrit eri muuttujiksi. Merkitse suorien x-koordinaatit yhtä suuriksi. Samoin y-koordinaatit. Ratkaise tästä parista suorien parametrit. Suorat leikkaavat, jos z-koordinaatit ovat myös yhtä suuret näillä parametrin arvoilla.

10.31.1. Leikkaavatko suorat **OP** = **i** + t(2**i** - 3**j** + 4**k**) ja **OP** = -2**k** + t(**i** - **j** + 2**k**)?
L: 93K7a, 26.7a

32. Tason yhtälön muoto ax + by + cz + d = 0

10.32.1. Onko piste (1,2,3) tasolla 2x - 3y + z = 4?
2. Määritä vakio a siten, että piste (1, -1, -2) on tasolla $a^2x + 2ay + 3z = 2$.

33. Pisteen (x_0,y_0,z_0) kautta kulkevan tason yhtälö : $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

10.33.1. Mikä on pisteen (1,2,3) kautta kulkevan, tason 2x - 3y - 4z = 0 suuntaisen tason yhtälö?

34. Tason ax + by + cz = d normaalivektori on a**i** + b**j** + c**k**

10.34.1. Mikä on tason 2x - 3y + 4z = 5 normaalivektori?

35. Tason yhtälö, kun tunnetaan piste P_0 ja normaalivektori **n** = a**i** + b**j** + c**k**
1° Muodosta n:n avulla ensin yhtälö ax + by + cz = d

2° Laske d:lle arvo sijoittamalla P_0 yhtälöön.

10.35.1. Mikä on pisteen (1, -2, 3) kautta kulkevan tason yhtälö, kun sen normaalivektori on 2**i** + 3**j** - **k**?
L: 25.9

36. Tason vektorimuotoinen yhtälö, kun tunnetaan P_0 ja **n**, on $\mathbf{PP_0} \cdot \mathbf{n} = 0$.

10.36.1. Mikä on sen tason vektori- ja koordinaattimuotoinen yhtälö, joka kulkee pisteen (1, -2, 3) kautta ja jonka normaalivektori on **n** = 3**i** - 4**j** + 5**k** ?

37. Kahden tason välinen kulma $\angle(T_1,T_2) = \angle(\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2)$, joten lasketaan normaalivektoreiden välinen kulma

10.37.1. Laske tasojen x + 2y - 3z = 4 ja 2x - 3y + z = 0 välinen kulma.
L: 159

38. Suoran ja tason välinen kulma $\angle(l,T) = 90° - \angle(l,\mathbf{n})$

10.38.1. Missä kulmassa suora (x = 2 + 3t, y = 1 + 2t, z = -4t) leikkaa tason x - y + z = 10 ?

39. Suoran ja tason leikkauspisteen laskeminen
Sijoita yhtälöstä 10.29. x, y ja z tason yhtälöön sekä ratkaise t.
Sijoita t yhtälöön 10.29 saadaksesi pisteen.

10.39.1. Missä pisteessä suora (x = 2 + 3t, y = 1 + 2t, z = -4t) leikkaa tason x - y + z = 10 ?
L: 98S8b, 03K7, 22.10b, 30.5a, 32.5b, 35.11

40. Kahden tason leikkaussuoran laskeminen
1° Tee tasojen yhtälöiden muodostama yhtälöpari. 2° siirrä z-termit vakioiden puolelle.
3° Ratkaise x ja y vakioiden ja z:jen avulla.
4° Tee 27 mukainen yhtälöryhmä suoralle x = x(z) JA y = y(z) JA z = z

10.40.1. Mikä on tasojen x + 2y - z = 3 ja 2x - 2y - 7z = 6 leikkaussuora?
2. Mitä suoraa pitkin taso x + 2y - z = 3 leikkaa a) xy-tason b) xz-tason c) yz-tason?
L: 158

41. Kolmen tuntemattoman ratkaiseminen kolmesta ensimmäisen asteen yhtälöstä
Eliminoi kahdella eri tavalla z pois. Ratkaise saadusta yhtälöparista x ja y. Sijoittamalla x ja y ratkaistaan z.

10.41.1. Ratkaise yhtälöryhmä $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ 4x - 3y + z = 14 \end{cases}$
L: 91S6b, 22.3a, 36.2

42. Kolmen tason yhteisen pisteen laskeminen
Ratkaise tason yhtälöiden muodostama yhtälöryhmä

10.42.1. Missä pisteessä tasot 2x + 3y - z = 3 , 3x + 4y - 2z = 5 ja x + y + z = 6 leikkaavat toisensa?
L:90K4

43. Kahden tuntemattoman epäyhtälön ratkaiseminen

Ratkaisujoukko on jokin tasoalue. Piirrä ensin reunoina olevat yhtäsuuruusviivat. Valitse viivojen rajoittamista tasoalueista piste ja kokeile toteutuuko epäyhtälö tässä pisteessä. Jos toteutuu, niin kaikki tässä tason osassa olevat pisteet toteuttavat epäyhtälön. Jos ei, niin tämä alue ei kuulu ratkaisujoukkoon.

10.43.1. Esitä epäyhtälön $2x - y + 1 > 0$ ratkaisujoukko.
L: 94S4b

44. Lineaarinen optimointi
Valitse optimoitavalle suureelle muuttujat x ja y sekä epäyhtälöt näiden välisistä ehdoista. Piirrä ehtojen määräämä tasoalue ja laske nurkkapisteet. Laske optimoitavan suureen arvot nurkkapisteissä. Näistä suuri arvo on suurin arvo koko tasoalueessa.

L: 156, 161

Luku 11. II asteen käyrät ja pinnat.

1. Ylös/alas aukeavan paraabelin yhtälö : $y = ax^2 + bx + c$.
Jos $a > 0$, aukeaa ylös, jos $a < 0$, aukeaa alas.

11.1.1. Määritä vakio a siten, että piste (2, -1) on paraabelilla $ax^2 + 3x - 2 = 0$.

2. Ylös/alas aukeavan paraabelin huippumuotoinen yhtälö : $y - y_0 = a(x - x_0)^2$. $H = (x_0,y_0)$

11.2.1. Mikä on sen ylöspäin aukeavan paraabelin yhtälö, jonka huippu on (1,2) ja joka kulkee pisteen (3,6) kautta.

3. Oikealle/vasemmalle aukeavan paraabelin yhtälö : $x = ay^2 + by + c$.
Jos $a > 0$, aukeaa oikealle.

11.3.1. Paraabeli $x = y^2 + 2y + c$ kulkee pisteen (-1, -2) kautta. Määritä c.

4. Oikealle/vasemmalle aukeavan paraabelin huippumuotoinen yhtälö : $x - x_0 = a(y - y_0)^2$.
$H = (x_0,y_0)$.

11.4.1. Paraabelin akseli on $y = 2$. Mikä on paraabelin yhtälö, kun se kulkee pisteiden (2,1) ja (4,4) kautta?

5. Paraabeli ja suoran/toisen paraabelin leikkauspisteen laskeminen :
Ratkaise yhtälöpari (sijoituskeino)

11.5.1. Laske paraabelin $y = x^2 - 2x - 3$ ja suoran $2x + 3y = 6$ leikkauspiste.
2. Laske paraabelien $y = x^2 + 3x - 4$ ja $y = x - x^2$ leikkauspisteet.
L: 165

6. Kolmen pisteen kautta kulkevan paraabelin yhtälön selvittäminen
1° Oleta yhtälöksi $y = ax^2 + bx + c$. 2° Sijoita pisteiden koordinaatit yhtälöön.
3° Ratkaise saadusta yhtälöryhmästä a, b ja c.

11.6.1. Laske pisteiden (0, -1), (1, 0) ja (3, -4) kautta kulkevan, alaspäin aukeavan paraabelin yhtälö.
2. Siltakaari on alaspäin aukeavan paraabelin muotoinen. Leveys on 50 m, reunat ovat rannalla 3 m korkeudella ja korkein kohta on 10 m veden pinnasta. Miten korkea on 10 m rannasta oleva tukipilari?
L: 91K6, 93K6b, 97S5, 98S5a, 32.4, 33.3b

7. Ympyrän yhtälö, kun tunnetaan keskipiste K = (x_0,y_0) ja säde = r
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

11.7.1. Mikä on ympyrän $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$ keskipiste ja säde?
2. Ympyrän keskipiste on (a,2a) ja säde 3a. mikä on ympyrän yhtälö?

8. Ympyrän keskipiste yhtälöstä $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$: Täydennä neliömuotoon (7)

11.8.1. Mikä on ympyrän a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 7$ b) $x^2 + y^2 + x - 2y - 1 = 0$ keskipiste ja säde?
L: 168, 170, 173, 04S7, 37.4

9. Yhtälön $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ kuvaaja : Jos neliöön täydentämisen jälkeen
1° OP > 0, on kuvaaja ympyrä 2° OP = 0, on kuvaaja piste 3° OP < 0, ei yhtälöllä reaalista kuvaajaa.

11.9.1. Millä a:n arvoilla yhtälö $x^2 + y^2 + 2ax - 4y + 3a = 0$ kuvaa ympyrää?
2. Millä vakion a arvoilla yhtälö $x^2 + y^2 + 2x - 4y = a$ kuvaa ympyrää, jonka ulkopuolella on origo?
L: 171, 98S7a, 04K8

10. Ympyrän yhtälön muodostaminen annetuista tiedoista :
Yksi tapa: Laske annetuista tiedoista keskipiste ja säde. Käytä sen jälkeen yhtälöä (7)
Toinen tapa: Oleta yhtälöksi (9) tai (7). Muodosta 3 yhtälöä, josta ryhmästä ratkaise A, B ja C tai x_0, y_0 ja r

11.10.1. Mikä on sen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on (1,2) ja joka sivuaa suoraa $2x + y + 3 = 0$?
2. Mikä on sen ympyrän yhtälö, jonka säde on 3 ja joka sivuaa y-akselia pisteessä (0,4)?
3. Mikä on ympyrän yhtälö, kun keskipiste on suoralla $y = 2x + 3$ ja ympyrä sivuaa x-akselia pisteessä (5,0)?
167, 169, 99S6, 24.4a

11. Kolmen pisteen kautta kulkevan ympyrän yhtälön laskeminen.
1° Oleta yhtälöksi $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. 2° Sijoita tähän pisteiden koordinaatit
3° Ratkaise yhtälöryhmästä A, B ja C.

11.11.1. Mikä on pisteiden (0,2), (3,3) ja (4,0) kautta kulkevan ympyrän yhtälö?
L: 01S10

12. Ympyrän tangentin yhtälön laskeminen, kun tunnetaan sivuamispiste
1° Laske k_r 2° Muodosta siitä k_T 3° Tee suoran yhtälö sivuamispisteestä ja k_T:stä

11.12.1. Mikä on ympyrän $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$ pisteen (1,2) kautta piirretyn tangentin yhtälö?
L: 172a

13. Ympyrän tangentin yhtälön laskeminen muissa tilanteissa
1° Muodosta toisen ehdon täyttävien suorien parvi
2° Ratkaise suoraparven parametri yhtälöstä " keskipisteen etäisyys suoralle = säde "

11.13.1. Mitkä ovat ympyrän $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ ne tangentit, jotka ovat suoran $y = 2x$ suuntaisia?
2. Määritä ympyrän $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$ ne tangentit, jotka kulkevat pisteen (4,3) kautta.
L: 172b

14. Paraabelin tangenttien laskeminen helpoiten derivaattoja käyttäen

11.14.1. Laske paraabelin $y = x^2 + 2x + 3$ se tangentti, joka kulkee pisteen (1,6) kautta.

15. Osoitus, että jonkin parven kaikki käyrät kulkevat saman pisteen kautta
1° Valitse parvesta kaksi käyrää helpoilla parametrin arvoilla (esim. 0 ja 1)
2° Ratkaise näiden kahden käyrän leikkauspiste(et)
3° Sijoita saatu leikkauspiste käyräparven yhtälöön, ja osoita, että se on totta kaikilla parametrin arvoilla

11.15.1. Osoita, että suorat $ax + 2y + 3a - 4 = 0$ kulkevat saman pisteen kautta.
2. Osoita, että paraabelit $y = ax^2 - 4a + 3$ kulkevat kaikki kahden yhteisen pisteen kautta.
L: 151, 166, 91S8b, 95S4, 96S9

16. II asteen yhtälöparin ratkaiseminen (toisen asteen käyrien leikkauspisteen laskeminen)
JOKO sijoituskeinolla (tai yhteenlaskukeinolla) toinen tuntematon eliminoidaan, jonka jälkeen toinen koordinaatti voidaan ratkaista. Sijoittamalla saadaan sitten yhtälö toiselle koordinaatille.
TAI yhteenlaskukeinolla eliminoidaan toisen asteen termit, jolloin saadaan ensimmäisen asteen yhtälö. Otetaan tämän pariksi helpompi toisen asteen yhtälöistä ja ratkaistaan tämä yhtälöpari.

11.16.1. Laske ympyrän $x^2 + y^2 = 10$ ja paraabelin $y = 4 - x^2$ leikkauspisteet.
2. Laske ympyröiden $x^2 + y^2 = 5$ ja $x^2 + y^2 + x - 2y - 5 = 0$ leikkauspisteet.
L: 174, 175, 96K5a, 22.5b

17. Pallon yhtälö, kun tunnetaan keskipiste (x_0,y_0,z_0) ja säde r :
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$

11.17.1. Mikä on origon etäisyys pallon $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 4$ pinnalle?
L: 177, 178

18. Käyrän yhtälö parametrimuotoa käyttäen
Muodosta lausekkeet x:lle ja y:lle jonkin parametrin avulla. Eliminoi parametri niin saat koordinaattimuotoisen yhtälön

11.18.1. Janan toinen päätepiste on (0, -2) ja toinen päätepiste on paraabelilla $y = x^2$. Millä viivalla on janan keskipiste?
L: 91K8, 36.11

Luku 12. Derivaatta ja integraali

1. Derivaatta kohdassa x = a : $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

12.1.1. Olkoon $f(1) = f'(1) + 2 = 3$. Laske $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 3}{x - 1}$

L: 91K9, 04S10

2. Derivaatta kohdassa x = a toinen muoto : $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$

12.2.1. Olkoon $f(1) = f'(1) + 2 = 3$. Laske $\lim_{h \to 0} \dfrac{[f(1 + h)]^2 - 9}{h}$

3. Raja-arvon laskeminen derivaatan avulla.
Huomaa raja-arvon lausekkeessa erotusosamäärä. Tämän raja-arvo derivaatan arvo lähestymiskohdassa.

12.3.1. Laske $\lim_{x \to 1} \frac{x^{2003} - 1}{x - 1}$.

4. Derivaatan geometrinen merkitys : $f'(a) = k_T$, missä $x = a$ on tangentin sivuamiskohta

12.4.1. Mikä on käyrän $y = f(x) = x^2$ kohtaan $x = 10$ piirretyn tangentin kulmakerroin?
L: 92K2, 95S4, 04S13

5. Derivaatan fysikaalinen merkitys:
$f'(a)$ on funktion hetkellinen kasvuvauhti kohdalla $x = a$

12.5.1. Mikä on funktion $f(x) = x^3$ kasvuvauhti kohdassa $x = 2$?
L: 94K7

6. $D(x^n) = nx^{n-1}$

12.6.1. Derivoi a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = x^{10}$ d) $f(x) = a^{20}$ e) $f(x) = x^{-2}$ f) $f(x) = \frac{1}{x}$
g) $f(x) = \sqrt{x}$

7. $D(f + g) = f' + g'$

12.7.1. Derivoi a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ b) $f(x) = (2x - 3)(4x^2 - 5x)$
L: 188, 03S1, 32.6, 34.10

8. $D(f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$

12.8.1. Mikä on funktion $f(x) = \sin x \cdot \ln x$ derivaatan arvo kohdassa $x = 1$
L: 181, 182a, 184

9. $D(\frac{f}{g}) = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

12.9.1. Millä x:n arvolla funktion $f(x) = \frac{x^2 - 2}{3x - 4}$ derivaatta on nolla?

L: 179b, 95S10

10. $D(f^n) = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$

12.10.1. Millä x:n arvoilla funktion $f(x) = (x^2 - 3x)^4$ derivaatta on positiivinen?
L: 180

11. $D[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

12.11.1. Määritä a, kun $f(x) = \sqrt{2x + a}$ ja $f'(0) = 2$.
L: 99K4

12. $D(\ln x) = \frac{1}{x}$

12.12.1. Mikä on käyrän $y = \ln(2x - 3)$ kohtaan $x = 2$ piirretyn tangentin kulmakerroin?

13. $D(e^x) = e^x$

12.13.1. Laske funktion $f(x) = e^{2x} + e^{-½x}$ derivaatan arvo kohdassa $x = 0$.
L: 02S3, 03S3, 24.5a

14. $D(\sin x) = \cos x$, $D(\cos x) = - \sin x$, $D(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

12.14.1. Ratkaise a ja b, kun $f(½\pi) = 1$ ja $f'(½\pi) = 2$ sekä $f(x) = a\cdot\sin x + b\cdot\cos x$.
L: 183, 92S1, 99S4a, 29.2, 35.1

15. $D(f^{-1}(y_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

12.15.1. Laske funktion $f(x) = x^3 + 4x + 5$ käänteisfunktion derivaatta kohdassa $x = 10$.
L: 90S10a, 37.10

16. Oikean (ja vasemman) puoleinen derivaatta
Varma tapa on laskea erotusosamäärän oikeanpuoleinen raja-arvo, joka on oikean puoleinen derivaatta.
Jos funktio on oikealta jatkuva, lasketaan oikealla puolella olevasta derivaattafunktiosta raja-arvo.

12.16.1. Laske $f_+'(0)$ ja $f_-'(0)$, kun $f(x) = x^2 + |x|$

17. Paloittain määritellyn funktion derivaatta liitoskohdassa.
Lasketaan tässä kohtaa f_+' ja f_-'. Jos ne ovat yhtä suuret, niin varsinainen derivaatta on olemassa ja se on tämä yhteinen arvo.

12.17.1. Onko funktiolla $f(x) = |x|x + 2x + 3$ derivaattaa kohdassa $x = 0$?
L: 185, 187, 95K10, 99S10a, 35.8

18. $F(x)$ on $f(x)$:n integraalifunktio, jos $\forall x : F'(x) = f(x)$

12.18.1. Onko $F(x) = 3x^2 + 4x + 5$ funktion $f(x) = x^3 + x^2 + 5x$ integraalifunktio?
2. Minkä funktion integraalifunktio on $F(x) = \sin x + e^{2x}$?
3. Määritä jokin funktion $x^3 + \cos x + e^x$ integraalifunktio.
L: 189, 190, 91S2, 93S10a, 96K2a, 36.7

19. $f(x)$:n kaikki integraalifunktiot ovat $F(x) + C$, jos $F(x)$ on yksi integraalifunktio

12.19.1. Määritä kaikki funktion $f(x) = 1 + e^x + \tan^2 x$ integraalifunktiot.

20. Tietyn integraalifunktion määrittäminen
1° Muodosta kaikki integraalifunktiot 2° Ratkaise integroimisvakion C arvo annetusta ehdosta ($F(a) = b$) 3° Sijoita saatu C:n arvo integraalifunktioon

12.20.1. Määritä funktion $f(x) = 3x^2 - 4x$ se integraalifunktio, jolle pätee $F(1) = 2$.
2. Mikä on funktion $f(x) = \sin x + \cos 2x$ se integraalifunktio, jonka nollakohta on $½\pi$?
3. Mikä funktion $f(x) = 2x + 3$ integraalifunktioista sivuaa suoraa $y = 5$?
4. Määritä funktion $f(x) = 4x - 8$ integraalifunktioista se, jonka pienin arvo on 3?
L: 191, 92K1, 04K10, 23.1

21. $\int x^n\,dx = \dfrac{1}{n+1} x^{n+1} + C$

12.21.1. Laske a) $\int x^2\ dx$ b) $\int x^{-2}\ dx$ c) $\int \frac{1}{x^3}\ dx$ d) $\int \sqrt{x}\ dx$

L: 193ab

22. $\int (f + g)\ dx = \int f\ dx + \int g\ dx \qquad \int k \cdot f(x)\ dx = k \cdot \int f(x)\ dx$

12.22.1. Laske $\int (2x^3 + 4x^{½})\ dx$

L: 192ab

23. $\int \frac{1}{x}\ dx = \ln \lvert x \rvert + C$

12.23.1. Laske $\int \frac{2x + 3}{x}\ dx$

L: 192.c

24. $\int e^x\ dx = e^x + C$

12.24.1. Laske $\int (3e^x - 4x)\ dx$

25. $\int \sin x\ dx = -\cos x + C \quad \int \cos x\ dx = \sin x + C \quad \int (1 + \tan^2 x)\ dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = \tan x + C$

12.25.1. Laske $\int (2\sin x + 3\cos x - \tan^2 x - 1)\ dx$

26. $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = F(g(x)) + C$ Huomaa: Integroitavassa ulkofunktio, jolla sisäfunktio. Kerrottuna sisäfunktion derivaatalla. Integraalifunktio on ulkofunktion integraalifunktio, jolla sama sisäfunktio. Jos ei oikeaa vakiotekijää, se voidaan lisätä tekijäksi käänteislukunsa kanssa (joka eteen)

12.26.1. Laske $\int 2x(x^2 + 3)^4\ dx$

L: 193cd, 194, 195

27. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \ln \lvert f(x) \rvert + C$

12.27.1. Laske $\int \frac{3x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2 + 3}\ dx$

28. Osamurtohajoitelma murtofunktion integroimiseksi
Jos osoittaja on korkeampaa astetta kuin nimittäjä, niin suorita jakolasku ja tee jakoyhtälö, jota integroit.
Jos osoittaja on alempaa astetta kuin nimittäjä, tutki onko osoittajaan saatavissa nimittäjän derivaatta (ks.27)
Jos tämäkään ei auta, laita nimittäjä tuloksi, ja esitä lauseke kahden murtoluvun summana, joissa on nimittäjänä kumpikin nimittäjän tekijä ja osoittajan toisella A ja toisella B. Lavenna samannimisiksi ja määritä A ja B siitä että saatu osoittaja on oltava sama kuin alkuperäinen osoittaja kaikilla x:n arvoilla.
Integroi lopuksi kumpikin osamurtolauseke.

12.28.1. Laske $\int \frac{x + 1}{x^2 - 2x}\,dx$

L:192d

29. OSITTAISINTEGROINTI : $\int f\,' \cdot g\,dx = f \cdot g - \int f \cdot g\,'\,dx$

12.29.1. Laske $\int 2x \cdot \sin x\,dx$

L: 196

30. INTEGROIMINEN SIJOITUKSELLA : $x = x(t) \int f(x)\,dx = \int f(x(t)) \cdot x\,'(t)\,dt$

12.30.1. Laske $\int x\sqrt{x + 1}\,dx$

31. Integroimistavan ajattelu : 1° onko suoraa integroimiskaavaa
2° Suoritetaan lasku integroitavassa sieventäen se muotoon jota integroitavissa kaavaa käyttäen
3° Onko mahdollista käyttää yhdistetyn funktion integroimissääntöä
4° Saako lisäämällä vakiotekijän käytettyä yhdistetyn funktion integroimissääntöä
5° Voiko murtolausekkeen hajottaa osamurtolausekkeisiin
6° Osittaisintegroiminen
7° Integroiminen sijoituksella

12.31.1. a) $\int (x^4 + \sin x)\,dx$ b) $\int \sqrt{x}(x - 1)\,dx$ c) $\int \frac{2}{(2x + 3)^2}\,dx$ d) $\int (x + 1)(2x^2 + 4x)^3\,dx$ e) $\int \frac{2}{x(x + 1)}\,dx$ f) $\int 3xe^x\,dx$ g) $\int x(1 + x)^9\,dx$

32. Paloittain määritellyn funktion integraalifunktio
Jos funktio ei ole jatkuva, integroidaan osat ja laitetaan niihin eri integroimisvakiot C ja D. Se on siinä.
Jos funktio on jatkuva, on integraalifunktiokin jatkuva. Määritetään C:n ja D:n yhteys siitä, että raja-arvot oikealta ja vasemmalta on oltava yhtä suuret.

12.32.1. Määritä integraalifunktio funktiolla $f(x) = 2x$, kun $x > 1$ ja $f(x) = x + 1$, kun $x \leq 1$.
L: 198

33. Jos funktio on derivoituva, niin se on jatkuva

34. Jos funktio ei ole jatkuva, se ei ole derivoituva

35. Funktio ei ole derivoituva kärki- tai taitekohdassa

36. $f'' = D(f')$ $f''' = D(f'')$

12.36.1 Laske f', f'', f''' ja $f^{(4)}$, kun $f(x) = x^3 + \sin 2x$
L: 93S7a

Luku 13. Differentiaalilaskentaa

1. Tangentin kulmakerroin : $k_T = f'(x_0)$, kun (x_0,y_0) on käyrän $y = f(x)$ sivuamispiste.

13.1.1. Mikä on käyrän $y = e^x + \ln(x + 1)$ kohtaan $x = 0$ piirretyn tangentin kulmakerroin?
L: 01S4

2. Normaalin kulmakerroin $k_N = -1 / k_T$

13.2.1. Mikä on käyrän $y = \sqrt{2x + 1}$ kohtaan $x = 4$ piirretyn normaalin kulmakerroin?
L: 200

3. Tangentin yhtälön laskeminen, kun sivuamispiste tunnetaan : 1° Laske k_T (1) 2° Muodosta suoran yhtälö.

13.3.1. Laske käyrän $y = \sin 2x + \cos x$ kohtaan $x = \pi/6$ piirretyn tangentin yhtälö?
L: 92S4a, 98K9a, 01K2, 03S3, 04K5, 25.7a

4. Tangentin yhtälön laskeminen, kun tunnetaan tangentin suunta 1° Ratkaise yhtälöstä $f'(x) = k_T$ sivuamispisteen x 2° Sijoita x käyrän yhtälöön saadaksesi y:n 3° Laske saadusta pisteestä ja kulmakertoimesta tangentin yhtälö

13.4.1. Määritä käyrän $y = x^2 - 3x + 4$ sen tangentin yhtälö, joka on suoran $y = x$ suuntainen.
L: 202, 205, 95K5a

5. Tangentin yhtälön laskeminen, kun tunnetaan piste käyrän ulkopuolelta 1° Oleta, että sivuamispisteen x-koordinaatti on a. 2° Laske sivuamispisteen y-koordinaatti sijoittamalla a käyrän yhtälöön. 3° Muodosta $k_T = f'(a)$ 4° Muodosta k_T annetun ja sivuamispisteen koordinaateista 5° Tee yhtälö merkitsemällä tavoilla 3º ja 4º saadut kulmakertoimet yhtä suuriksi 6° Ratkaise tästä yhtälöstä a 7° k_T:n saat $f'(a)$:sta 8° Laske suoran yhtälö k_T:n ja annetun pisteen avulla.

13.5.1. Laske paraabelin $y = x^2 + x + 1$ sen tangentin yhtälö, joka kulkee pisteen (1, 2) kautta.

6. Funktion monotonisuus : f on kasvava, jos $f'(x) \geq 0$ ja = 0 vain yksittäisissä kohdissa

13.6.1. Millä alueella funktio $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ on aidosti kasvava?

L: 206, 207, 208, 219, 91K7a, 93S5a, 97S7b, 03S10, 28.3, 37.9

7. Funktion mahdolliset ääriarvokohdat : 1° f ' :n nollakohta 2° alueen reuna 3° funktion epäjatkuvuuskohta 4° derivaatan epäjatkuvuuskohta

13.7.1. Määritä funktion $f(x) = |x^2 - 4x|$, $x \in [-1, 5[$ mahdolliset ääriarvokohdat.

8. Ääriarvon laadun perusteleminen f ' :n nollakohdassa ja f ' :n epäjatkuvuuskohdassa
Jos derivaatan merkki muuttuu + $\rightarrow$ -, on maksimi jos - $\rightarrow$ + on minimi ja jos merkki ei muutu, ei ole ääriarvoa

13.8.1. Määritä funktion $f(x) = x^3 - 4\frac{1}{2}x^2 - 30x$ ääriarvot.
L: 206, 210, 212, 91K3a, 03S11, 04S6, 23.6a, 26.6a, 31.5

9. Ääriarvon perusteleminen muissa tilanteissa : Tehdään funktion kulkukaavio, josta asia järkeillään

13.9.1. Määritä funktion $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1\frac{1}{2}x^2, & x \le 2 \\ x^2 - 6x + 9, & x > 2 \end{cases}$ ääriarvot.

10. Funktion suurimman arvon olemassaolo :
on varmaa, jos funktio on jatkuva suljetulla välillä.

11. Suurimman arvon laskeminen jos funktio on jatkuva suljetulla välillä
1° Mainitaan, että funktio on jatkuva suljetulla välillä
2° Lasketaan f ' :n NK (ja mahdollinen EJK)
3° Lasketaan funktion arvot näissä kohdissa ja alueen reunoilla
4° Suurin arvo on näistä luvuista suurin

13.11.1. Laske funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4$ suurin ja pienin arvo välillä $[\frac{1}{2},2]$.
L: 209, 215, 91S8a, 92K7, 93K9b, 95K9b, 96S6, 22.6, 23.3a, 26.6c, 30.10, 32.10a, 33.2b

12. Suurimman arvon perustelu muissa tilanteissa :
Tehdään funktion kulkukaavio, josta päättelyt

13.12.1. Laske funktion $f(x) = x^3 - x^2 - x$, $x \ge -1$ pienin arvo.
L: 213, 216, 90S2a, 00K7, 27.8, 29.5a, 34.6

13. Funktiolla on ainakin yksi nollakohta :
1°f JVA JA 2° $f(a) > 0$ JA 3° $f(b) < 0 \Rightarrow$ ainakin yksi NK välillä]a,b[

13.13.1. Osoita, että funktiolla $f(x) = \sin x + \ln x$ on ainakin yksi nollakohta.
L: 31.9

14. Funktiolla on täsmälleen yksi nollakohta:
1° f JVA JA 2° $f(a) > 0$ JA 3° $f(b) < 0$ JA 4° f aidosti monotoninen

13.14.1. Osoita, että funktiolla $f(x) = e^x + x^3 + 4$ on täsmälleen yksi nollakohta.
L: 211, 214, 98S8a

15. Yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu :
Kirjoitetaan yhtälö muotoon $f(x) = 0$ ja tutkitaan f:ää kuten edellä

13.15.1. Osoita, että yhtälöllä $e^x = \cos x + 2$ täsmälleen yksi positiivinen ratkaisu.
L: 92S5a, 22.8, 24.5b

16. Funktion arvot ovat positiivisia : jos pienin arvo on positiivinen

17. Osoittaminen, että epäyhtälö on aina tosi : Kirjoitetaan epäyhtälö muotoon $f(x) > 0$ ja näytetään, että vasemman puolen määrittämän funktion pienin arvo on > 0

13.17.1. Osoita, että epäyhtälö $1 + x \leq e^x$ toteutuu kaikilla x:n arvoilla.
L: 217, 91S7a, 93S8, 04K11, 21.10, 30.8a, 34.9

18. Kahden käyrän leikkauskulma
= leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien välinen kulma.

13.18.1. Missä kulmassa käyrät $y = x^2$ ja $y = 5 - \frac{1}{4}x^2$ leikkaavat toisensa?
L: 199, 204

Luku 14. Differentiaalilaskennan sovelluksia

1. Funktion arvojen keskimääräinen muutosvauhti = Erotusosamäärä EOM = $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

14.1.1. Öljyvuodon saastuttaman alueen ala on $A(t) = \frac{10t}{t + 5}$, missä t on tunteja. Miten paljon saastunut ala lisääntyi 3. ja 4. tunnin aikana?

2. Funktion arvojen hetkellinen muutosvauhti = lim EOM = $f'(x_0)$

14.2.1. Öljyvuodon saastuttaman alueen ala on $A(t) = \frac{10t}{t + 5}$, missä t on tunteja. Mikä oli alueen hetkellinen muutosvauhti ajanhetkellä 3 tuntia alusta?
L: 221, 222

3. Nopeuden laskeminen kappaleen sijaintifunktiosta s(t) : $v = s'(t_0)$

14.3.1. Kappaleen sijainnin x-akselilla kertoo funktio $x(t) = 2t^2 + 3t$. Mikä on kappaleen vauhti kun $t = 2$?
L: 220

4. Kiihtyvyyden laskeminen : $a = v'(t) = s''(t)$

14.4.1. Kappaleen sijainnin x-akselilla kertoo funktio $x(t) = 2t^2 + 3t$. Mikä on kappaleen kiihtyvyys?
L: 220

5. Ääriarvoprobleeman ratkaisemisesta
1° Lue tehtävä
2° Piirrä mahdollinen kuvio
3° Mieti mikä pitää maksimoida, sille olisi saatava funktio
4° Valitse x.
5° Laske kaikki maksimoitavan funktion lausekkeeseen tarvittavat osat x:n ja annettujen tietojen avulla
6° Tee funktio maksimoitavalle suureelle
7° Selvitä funktion määrittelyjoukko
8° Etsi tämän funktion suurin arvo määrittelyjoukossa
9° Pohdi järkevyyttä
10° Anna vastaus

14.5.1. Farmarilla on 60 m köyttä. Hän haluaa tehdä suorakulmion muotoisen aitauksen, jonka yhtenä sivuna on joki, jolle ei tarvitse laittaa köyttä. Mikä on suurin mahdollinen ala aitaukselle?
2. Tehtailija haluaa tehdä neliöpohjaisen avonaisen laatikon. Mitkä ovat laatikon mitat, kun ala on 108 cm^2 ja tilavuus on suurin?
3. Mikä käyrän $y = 4 - x^2$ piste on lähinnä pistettä (0,2)?
L: 225, 226, 227, 90K7, 91S7b, 92K9a, 93K7b, 93S7b, 94S6a, 94S7b, 96K6, 97K9, 97S10, 98K8a, 99S8b, 00S9, 02K10, 03K8, 21.9b, 22.7, 24.8, 25.10a, 26.8a, 29.5a, 29.8, 32.7, 33.10b, 34.6, 36.10, 37.12, 37.14

Luku 15. Määrätty integraali

1. Määrätyn integraalin laskeminen $\int_a^b f(x)\,dx = \Big/_a^b F(x) = F(b) - F(a)$

15.1.1. $\int_{-1}^{2} (3x^2 - 4x)\,dx$
L: 233, 234, 235, 236, 237, 239, 240, 242, 90K2, 90S3, 90S6, 90S9, 91K2, 91S3a, 92S7b, 92S10, 93S5b, 95K7b, 96S2a, 97S2a, 02K8, 03K10, 04K2, 04K12, 21.3, 24.1a, 25.2a, 26.2, 27.3, 28.2a, 29.1, 30.2a, 32.3b, 32.10a, 34.12

1.a Määrätyn integraalin laskeminen, kun rajana + tai – ääretön tahi rajalla funktiota ei määritelty. Lasketaan määrätty integraali ”lähelle” rajaa ja katsotaan mikä on saadun määrätyn integraalin raja-arvo, kun tämä ”lähellä” oleva arvo lähestyy ääretöntä tai määrittelemättömyysrajaa.

L: 04S11

2. Määrätty integraali porrassummana $\int_a^b f(x)\,dx = \sum f(x_k)\,\Delta x$, missä $x_k \in$ k:s osaväli

15.2.1. Laske $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$ jakamalla integroimisväli 4 osaan ja laskemalla funktion arvo välin keskipisteessä.
L:231

3. Määrätty integraali ala- ja yläsummien avulla $\sum m_k \cdot \Delta x \le \int_a^b f(x)\,dx \le \sum M_k \cdot \Delta x$, missä m_k ja M_k ovat k:nnen osavälin pienin ja suurin arvo

15.3.1. Laske $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$ jakamalla väli 4 osaan ja laskemalla ala- ja yläsummat sekä niiden keskiarvo.
L: 232

4. Määrätty integraali pinta-alan avulla: Jos $f(x) \geq 0$, on $\int_a^b f(x)\,dx$ = ala funktion ja x-akselin välisestä alueesta, ja jos $f(x) \leq 0$, on $\int_a^b f(x)\,dx$ = - ala,

15.4.1. Laske $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\,dx$ tulkitsemalla funktio geometrisesti.

L: 26.10a

5. Summafunktion määrätty integraali $\int_a^b (f + g)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

15.5.1. Olkoon $\int_1^2 f(x)\,dx = 3$ ja $\int_1^2 g(x) = 4\,dx$. Mitä on $\int_1^2 [f(x) + g(x)]\,dx$?

6. Vakion siirtosääntö : $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

15.6.1. Olkoon $\int_1^2 f(x)\,dx = 3$. Mitä on $\int_1^2 4 \cdot f(x)\,dx$?

7. Integroimisrajojen vaihto $\int_a^b f(x)\,dx = - \int_b^a f(x)\,dx$

15.7.1. Olkoon $\int_1^2 f(x)\,dx = 3$. Mitä on $\int_2^1 f(x)\,dx$?

8. Parillinen funktio origon suhteen symmetrisellä välillä $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)\,dx$

15.8.1. Laske $\int_{-3}^3 (x^2 + 4)\,dx$

9. Pariton funktio origon suhteen symmetrisellä välillä $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

15.9.1. Laske $\int_{-\pi}^{\pi} (x^5 + \sin x)\,dx$.

10. Paloittain määritellyn funktion integrointi $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

15.10.1. Laske $\int_{-1}^{3} \lvert 2x - 4 \rvert\,dx$

L: 238, 243, 01K9, 35.10

11. Epäyhtälön integrointi : $f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

15.11.1. Osoita, että $\int_{-½}^{0} 2e^{x^2}\,dx > 1$

12. Kertymäfunktio : $K(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ on ylärajafunktio (tihesfunktiolla f)

15.12.1. Määritä kertymäfunktio $\int_1^x (2t + 3)\,dt$

13. Ylärajafunktion derivaatta $D(\int_a^x f(t)\,dt) = f(x)$

15.13.1. Derivoi funktio a) $f(x) = \int_1^x (t^3 + \sin t)\,dt$ b) $f(x) = \int_1^{x^2} (t^3 + \sin t)\,dt$ c) $f(x) = \int_x^1 (t^3 + \sin t)\,dt$.

L: 00S13

14. Kertymäfunktio on yksi f(x):n integraalifunktioista. Se, jonka arvo alussa on nolla.

15.14.1. Laske funktion $f(x) = 3x^2 + 4x$ kohdasta $x = 1$ alkava kertymäfunktio.

L: 241

Luku 16. Integraalilaskennan sovelluksia

1. Käyrän ja x-akselin välisen alueen ala

A. Käyrä x-akselin yläpuolella : $A = +\int_a^b f(x)\,dx$

B. Käyrä x-akselin alapuolella : $A = -\int_a^b f(x)\,dx$

C. Käyrää molemmilla puolilla x-akselia: $A = +\int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$, jos käyrä yläpuolella välillä [a,c] ja alapuolella välillä [c,b]

Kaikissa kohdissa A. - C. on laskettava rajat ja selvitettävä sijainti x-akseliin nähden

16.1.1. Laske x-akselin, käyrän $y = e^x + 1$ ja suorien $x = -1$ ja $x = 2$ rajoittaman alueen ala.
2. Laske käyrän $y = x^2 - 4x - 5$ ja x-akselin rajoittaman äärellisen alueen ala.
3. Laske käyrän $y = x^3 - 4x$ ja x-akselin rajoittaman kaksiosaisen alueen ala.
L: 244, 245, 246, 247, 94S7a, 22.2, 29.5b, 37.11

2. Kahden reunakäyrän välinen ala

$A = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$, jos $f(x) \geq g(x)$ välillä [a,b]

On laskettava rajat ja selvitettävä, kumpi käyrä on korkeammalla.

16.2.1. Laske paraabelien $y = x^2$ ja $y = 3x - 2x^2$ rajoittaman äärellisen alueen ala.
L: 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 95K4, 98K7, 99K8, 21.8, 23.5, 24.6

3. Käyrän ja y-akselin välinen ala voidaan laskea
JOKO $x \leftrightarrow y$, jolla muutetaan ala käyrän ja x-akselin väliseksi
TAI $A = +\int_a^b x(y)\,dy$, missä käyrä y-akseli oikealla puolella ja $y \in [a,b]$

16.3.1. Laske käyrän $x = 6 - y - y^2$ ja y-akselin rajoittaman äärellisen alueen ala.

4. Pyörähdyskappaleen tilavuus

A. Pyörähdys x-akselin ympäri $V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$

B. Pyörähdys y-akselin ympäri $V = \pi\int_a^b [x(y)]^2\,dy$

16.4.1. Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy kun käyrän $y = 4 - x^2$ ja x-akselin rajoittama alue pyörähtää x-akselin ympäri.
2. Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy kun käyrän $y = \ln x$ sekä suorien $y = 0$ ja $y = 1$ välinen alue pyörähtää y-akselin ympäri.
L: 255, 256, 257, 261, 262, 90S7b, 91S5b, 96K7a, 97K10a, 03S13, 36.11

5. Onton pyörähdyskappaleen tilavuus
Lasketaan ulkopinnan sisäpuolinen tilavuus, josta vähennetään sisäpinnan sisäpuolinen tilavuus

16.5.1. Paraabelin $y = x^2$ ja suoran $y = x$ välinen alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.
L: 258, 259, 260, 94K8

6. Tilavuuden laskeminen, kun tunnetaan pyörähdysakselia vastaan kohtisuorien poikkileikkausten alat

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

16.6.1. Kappaleen x-akselia vastaan kohtisuorien poikkileikkausten ala on jokaisella kohdalla x lausekkeen $3x^2 + 4x$ suuruinen. Laske tasojen $x = -1$ ja $x = 2$ välillä olevan kappaleen osan tilavuus.
2. Kappaleen x-akselia vastaan kohtisuorat poikkileikkauksen ovat neliöitä, joiden xy-tasolla olevan sivun päätepisteet ovat käyrällä $4y^2 = 3x$. Laske välillä $x = 0$ ja $x = 4$ olevan osan tilavuus.
L: 01S12, 02S12, 33.6

Luku 17. Todennäköisyyslaskentaa

1. Klassinen todennäköisyys : $P(A) = \dfrac{k}{n} = \dfrac{\text{suotuisten alkeistapausten lukumäärä}}{\text{kaikkien alkeistapausten lukumäärä}}$ (alkeistapaukset symmetrisiä)

17.1.1. Millä todennäköisyydellä 15 ensimmäisestä alkuluvusta valittu luku sisältää numeron 3?

2. Lukumäärät alkeistapauksille saa
A. Luettelemalla kaikki alkeistapaukset
B. Kahden nopan heitossa tee 6 x 6 ruudukko
C. Käyttäen jotain laskusääntöä lukumäärän selvittämiseksi
D. Tapausten lukumääränä voi pitää kulmaa, janaa, alaa, …

17.2.1. Rahaa heitetään 4 kertaa. Millä todennäköisyydellä saatiin 3 kertaa kruunu?
2. Millä todennäköisyydellä kahden nopan heitossa nopan silmäluku on vähintään 2 kertaa toisen silmäluku?
3. Arvotaan luvut x ja y satunnaisesti väliltä [0,1]. Millä todennäköisyydellä $x + y < 3/4$?
L: 264, 265, 266, 90S8a, 93K9a, 95K7a, 95S9, 97K4, 98K5b, 02K9, 03K4, 21.8b, 28.6a, 29.4b

3. Lukumäärät tuloperiaatteella : $n(A \text{ ja } B) = n(A) \cdot n(B)$

17.3.1. Uuden vuoden vastaanottajaisissa oli tarjolla 7 juustolaatua ja 5 viinilaatua. Montaako eri makuyhdistelmää saattoi kokeilla?
2. Edellisen tehtävän juustolaaduista oli 3 kevytjuustoja ja 3 punaviinejä. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valitut juusto ja viini olivat kevytjuusto ja punaviini?
L: 267

4. Lukumäärät k-kombinaatioilla : $\binom{n}{k}$ = nCk = $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ = monellako tapaa n:stä alkiosta voidaan valita k-alkioinen osajoukko

17.4.1. Monellako tapaa voidaan 9 oppilaskunnan jäsenestä valita 3 toimihenkilöä?
2. Laatikossa on 4 valkoista ja 5 mustaa palloa. Niistä otetaan satunnaisesti kolme. Millä todennäköisyydellä saadaan 2 mustaa palloa?
L: 91K4a, 91S5a, 92S4b, 27.9b, 35.5

5. Permutaatioiden lukumäärä = n! = n:n alkion erilaisten järjestysten lukumäärä

17.5.1. Oppilasryhmässä on 16 oppilasta. Montako erilaista ruokajonoa heistä voi syntyä?
2. Oppilaista on 10 tyttöjä. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti syntyneessä jonossa on pojat ensin?

6. k-permutaatioiden lukumäärä = nPk = $\frac{n!}{(n - k)!}$ = n(n - 1)(n - 2) …(n - (k - 1))
= n-alkioisesta joukosta otettujen k-alkioisten osajoukkojen alkioiden erilaiset järjestykset

17.6.1. Monellako tavalla voidaan 16 oppilaasta valita pj, vpj ja sihteeri?
2. Oppilaista 10 on tyttöjä. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti syntynyt virkailijajoukko on tyttöjoukko?

7. Komplementtisääntö : P($\overline{A}$) = 1 - P(A) käytetään usein kun kysymyksessä "ainakin", "enintään" tms. tapahtuma sekä vastakohdassa on vähemmän mahdollisuuksia kuin kysytyssä tapahtumassa

17.7.1. Rahaa heitetään 4 kertaa. Millä todennäköisyydellä kaikki neljä eivät ole kruunuja?
2. Laatikossa on 4 valkoista ja 5 mustaa palloa. Otetaan niistä satunnaisesti kolme. Millä todennäköisyydellä ainakin yksi pallo oli musta?
L: 269, 00K8, 04K9, 24.7a

8. Yhteenlaskusääntö : P(A tai B) = P(A) + P(B), tapahtumat A ja B ovat erillisiä (ei yhteisiä alkeistapauksia)

17.8.1. Laatikossa on 4 mustaa ja 5 valkoista palloa. Niistä otetaan kolme. Millä todennäköisyydellä siinä on molempia värejä?

9. Yleinen yhteenlaskusääntö : P(A tai B) = P(A) + P(B) - P(A ja B)

17.9.1. Millä todennäköisyydellä 2-numeroinen luonnollinen luku on jaollinen kolmella tai neljällä?

10. Kertolaskusääntö : P(A ja B) = P(A) · P(B), kun A ja B ovat toisistaan riippumattomia tapahtumia

17.10.1. Tehdään lottokuponkiin yksi rivi ja samalla yksi jokeri. Jokerissa arvotaan 7-numeroiseen lukuun kaikki numerot. Millä todennäköisyydellä saadaan kummatakin päävoitto?
268, 90K8a, 04S5, 34.11, 36.12, 37.6

11. Ehdollinen todennäköisyys : P(A|B) = $\frac{P(A \text{ ja } B)}{P(B)}$

17.11.1. Laatikossa on 4 mustaa ja 5 valkoista palloa. Otetaan niistä kolme. Niistä yksi on musta. Millä todennäköisyydellä kaksi muuta ovat erivärisiä?

L: 03K4

12. Kertolaskusääntö toisistaan riippuville tapahtumille : P(A ja B) = P(A) · P(B|A)

17.12.1. Laatikossa on 4 mustaa ja 5 valkoista palloa. Otetaan niistä peräkkäin 2 laittamatta ensiksi otettua takaisin. Millä todennäköisyydellä a) ensimmäinen on musta ja toinen valkoinen b) ne ovat eri värisiä?
L: 272, 98S5a

13. Mutkikkaamman todennäköisyyden laskeminen.
JOKO lausu kysytty tapahtuma "TÄYDELLISESTI" ”ja” sekä ”tai” sanojen avulla ja käytä laskusääntöjä
TAI tee oksamalli, josta oksaa jatkettaessa tdn:t kerrotaan ja haarautuessa lasketaan yhteen

17.13.1. Oppilas tietää vastauksen todennäköisyydellä 0,8, jos hän on tiennyt edellisen kysymyksen vastauksen ja todennäköisyydellä 0,5, jos hän ei ole tiennyt edellisen kysymyksen vastausta. Opettaja kysyy häneltä yllättäen kolme kertaa. Ensimmäisen vastauksen oppilas tiesi. Millä todennäköisyydellä hän tiesi tasan 2 vastusta?
L: 270, 271, 94K5, 94S5b, 01S5, 22.9b, 25.7b, 26.7c, 29.6a

14. Binomitodennäköisyys : P(n:stä toistosta on k suotuisaa tapausta) = nCk · $p^k \cdot (1 - p)^{k-1}$

17.14.1. Syntyneistä lapsista on 51,8 % poikia. Millä todennäköisyydellä laitoksen 6 lapsesta oli 4 poikaa?
L: 273, 274, 93S6, 99S7a, 00S7, 21.9a, 33.4b

Luku 18. Todennäköisyysjakaumia

1. Keskiarvo $\overline{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$, joten lukujen summa $\Sigma x_i = n \cdot \overline{x}$

18.1.1. Matematiikan kokeessa oli poikien keskiarvo 7,1 ja tyttöjen 8,2. Mikä oli koko luokan keskiarvo, kun luokalla oli 12 tyttöä ja 18 poikaa?

2. Keskihajonta $s = \sqrt{\frac{\Sigma (x_i - \overline{x})^2}{n}}$. Otoskeskihajonnassa on nimittäjässä n-1, muuten kaava on sama.

18.2.1. Kokeessa 3 oppilasta sai 10, 7 oppilasta 9, 12 oppilasta 8 ja 8 oppilasta 7. Mikä oli kokeen keskiarvo ja keskihajonta?
L: 275, 276

3. Satunnaismuuttujan jakauma ≈ muuttujan arvot sekä niiden tulemisen todennäköisyys $p_i = P(x_i)$

18.3.1. Laatikossa on 3 valkoista ja 4 mustaa palloa. Niistä otetaan kolme. Laske valkoisten pallojen lukumäärän jakauma.
L: 278

4. Diskreetin satunnaismuuttujan odotusarvo $E\underline{x} = \sum p_i \cdot x_i = \mu$

18.4.1. Pelissä heitetään kahta rahaa. Voittosumma euroina on kruunujen lukumäärän neliö. Mikä pitäisi pelimaksun olla, jotta peli kannattaisi pelin pitäjälle?
L: 277, 278, 279, 280, 96K9, 30.6b

5. Diskreetin jakauman keskihajonta $D\underline{x} = \sqrt{p_1(x_1 - \mu)^2 + p_2(x_2 - \mu)^2 + \ldots} = \sigma$

18.5.1. Heitetään sinistä ja punaista noppaa. Pelissä voitto (tai tappio) on sinisen ja punaisen nopan silmälukujen erotus. Mikä on voiton odotusarvo ja keskihajonta?
L: 277, 280

6. Binomijakauma = tdn lasketaan binomitdn:enä $p_i = P(\underline{x} = x_i) = nCi \cdot p_i \cdot (1 - p)^{n-i}$

7. Binomijakauman odotusarvo $E\underline{x} = np$ (n = toistojen lukumäärä, n = suotuisan tapahtuman tdn)

18.7.1. Syntyneistä lapsista on poikia 51,8 %. Montako lasta on laitoksessa syntynyt, kun tyttöjä oli 420?
L: 99K5b, 26.7b

8. Binomijakauman keskihajonta $D\underline{x} = \sqrt{np(1 - p)}$

18.8.1. Mikä oli edellisessä laitoksessa poikien lukumäärän keskihajonta?
L: 26.7b

9. Jatkuva jakauma : kaikki arvot joltakin väliltä ovat mahdollisia satunnaismuuttujan arvoja

10. Jatkuvan jakauman tiheysfunktio on f(x), jos se täyttää seuraavat ehdot
1° $f(x) \geq 0$ 2° f on jatkuva (paloittain)   3° $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

18.10.1. Osoita, että $f(x) = ¼x + ¼$, $x \in [0,2]$ on erään jatkuvan jakauman tiheysfunktio.
2. Määritä vakio a siten, että $f(x) = ax^2 + ¼$, $x \in [0,2]$ on erään jatkuvan jakauman tiheysfunktio.
L: 281

11. Todennäköisyyden laskeminen jatkuvassa jakaumassa :
$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\,dx$, missä f(x) jatkuvan satunnaismuuttujan x tiheysfunktio

18.11.1. Olkoon erään jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio $f(x) = 0{,}08x$, $0 < x < 5$. Laske todennäköisyys $P(\underline{x} > 3)$
L: 03S8

12. Jatkuvan jakauman odotusarvo $E\underline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \mu$

18.12.1. Olkoon erään jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio $f(x) = 0{,}08x$, $0 < x < 5$. Laske jakauman odotusarvo.
L: 283, 284, 23.8a

13. Jatkuvan jakauman keskihajonta $Dx = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x)\,dx}$

18.13.1. Olkoon erään jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio $f(x) = 0{,}08x$, $0 < x < 5$. Laske jakauman keskihajonta.
L: 283

14. Kertymäfunktio $F(x) = P(\underline{x} < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

18.14.1 Olkoon erään jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio $f(x) = 0{,}08x$, $0 < x < 5$. Mikä on jakauman kertymäfunktio?
L: 282, 284

15. Toinen tapa laskea kertymäfunktion lauseke 1° Lasketaan tiheysfunktion f(x) integraalifunktiot F(x) + C 2° Integroimisvakion C arvo saadaan joko ehdosta F(alussa) = 0 tai F(lopussa) = 1

18.15.1. Olkoon erään jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio $f(x) = 0{,}02x - 0{,}04$, $2 < x < 12$. Mikä on jakauman kertymäfunktio?
L: 282, 284, 97K10b, 97S9a

16. Todennäköisyyden laskeminen kertymäfunktion avulla. $P(\underline{x} < a) = F(a)$ $P(\underline{x} > a) = 1 - F(a)$ $P(a < \underline{x} < b) = F(b) - F(a)$

18.16.1. Olkoon erään jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio $f(x) = 0{,}02x - 0{,}04$, $2 < x < 12$. Mikä on jakauman kertymäfunktio? Laske todennäköisyys $P(5 < \underline{x} < 6)$.

17. Normaalijakauma : satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktiona on Gaussin "kellokäyrä"

18. Todennäköisyydet jakaumassa N(0,1) $P(\underline{x} < a) = \Phi(a)$ $P(\underline{x} > a) = 1 - \Phi(a)$ $P(a < \underline{x} < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$ $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$

18.18.1. Satunnaismuuttuja $\underline{x} \sim N(0,1)$. Laske a) $P(\underline{x} < 0{,}75)$ b) $P(\underline{x} > 1{,}25)$ c) $P(\underline{x} < -0{,}6)$ d) $P(0{,}1 < \underline{x} < 1{,}1)$
L: 285

19. Todennäköisyyksien laskeminen jakaumassa $N(\mu,\sigma)$ 1° Muodostetaan normeerattu muuttuja $\underline{z} = \frac{x - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ 2° $P(x < a) = P(z < \frac{a - \mu}{\sigma}) = F(\frac{a - \mu}{\sigma})$ jne

18.19.1. Lakritsapussien paino on jakautunut normaalisti N(250g, 10g). Millä todennäköisyydellä saadaan pussi jossa lakritsoja on yli 270g?
L: 286, 287, 288, 96S8b, 01K7, 26.7b, 28.8b

20. Kun n on suuri ja $\underline{x} \sim Bin(n,p)$ voidaan todennäköisyyksiä laskea normaalijakauman avulla olettaen, että $\underline{x} \sim N(\,np, \sqrt{np(1 - p)}\,)$

18.20.1. Poikia syntyy 51,8 % lapsista. Suomessa syntyi viime vuonna 55 000 lasta. Millä todennäköisyydellä poikia oli yli 28 500?

Luku 19. Lukujonot

1. Induktiotodistus 1° Näytetään, että väite on tosi kun n = 1 2° Oletetaan, että väite on tosi n:n arvoon k aste 3° Todistetaan kohtaa 2° hyväksi käyttäen, että väite on tosi myös seuraavalla n:n arvolla, eli kun n = k + 1

19.1.1. Osoita täydellisellä induktiolla, että $1 + 5 + 9 + \ldots + (4n - 3) = 2n^2 - n$
L: 290, 291, 98K8b, 00S10, 32.9a

2. Lukujono funktiona : $a_n = f(n)$, joten termit saadaan laskemalla funktion arvo

19.2.1. Laske 5 ensimmäistä termiä jonossa $a_n = 2n^2 - n$

3. Lukujono rekursiivisesti :
Laske annettua sääntöä käyttäen termi kerrallaan eteen tai taaksepäin

19.3.1. Jono (a_n) määritellään : $a_1 = 2$ ja $a_{n+1} = 2a_n - 3n$. Määritä jonon viisi ensimmäistä termiä.
L: 289

4. Aritmeettinen jono : $\forall n : a_{n+1} - a_n = d$ = vakio, jonka arvo ei riipu n:n arvosta

19.4.1. Osoita, että jono $a_n = 3n + 4$ on aritmeettinen.
2. Määritä x, kun jono $2, 3 + x, 10 - x$ on aritmeettinen.
L: 298, 21.4b, 23.7a

5. Aritmeettisen jonon termin laskeminen : $a_n = a_1 + (n - 1)d$

19.5.1. Laske 20 termi jonossa 3, 7, 11, …

6. Aritmeettisen jonon määrittäminen :
Selvitetään a_1 ja d. Ne saadaan ratkaisemalla yhtälö tai yhtälöpari

19.6.1. Aritmeettisessa jonossa $a_5 = 6$ ja $a_{10} = 21$. Määritä a_{100}.
L: 294, 295, 296, 297

7. Aritmeettinen summa : $S_n = ½(a_1 + a_n)\cdot n$

19.7.1. Laske summa S_{20} jonossa 3, 7, 11, …
2. Aritmeettiselle summalle pätee $a_2 = 5$ ja $S_5 = 35$. Laske summa S_{10}.
L: 294, 21.6a, 26.5b, 30.6a, 35.3

8. Geometrinen jono : $\forall n : a_{n+1} : a_n = q$ = vakio, jonka arvo ei riipu n:n arvosta

19.8.1. Osoita, että jono $a_n = 2\cdot 3^n$ on geometrinen.
2. Määritä x, kun jono $2, 3 + x, 10 - x$ on geometrinen.
L: 00K13, 01K11

9. Geometrisen jonon termin laskeminen : $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

19.9.1. Laske 10. termi jonossa ½, - 1, 2, -4, …

10. Geometrisen jonon määrittäminen :
Selvitetään a_1 ja q. Ne saadaan ratkaisemalla yhtälö tai yhtälöpari.

19.10.1. Geometrisessa jonossa $a_3 = 5$ ja $a_7 = 80$. Määritä a_{10}.
L: 299

11. Geometrinen summa : $S_n = \dfrac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \dfrac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ (jälkimmäinen näppärämpi, jos $q > 1$)

19.11.1. Laske 10 ensimmäisen termin summa ½ - 1 + 2 - 4 + …
L: 301, 03K12, 22.9a

12. Lukujonon raja-arvo : $\lim_{n \to \infty} a_n = A$, jos $|a_n - A|$ on vaikka kuinka pieni, kunhan n on tarpeeksi suuri ja kaikilla tätä rajaa suuremmilla n:n arvoilla.

19.12.1. Mistä termistä lähtien jonon $a_n = \frac{3n - 4}{2n + 1}$ termit poikkeavat raja-arvostaan vähemmän kuin 0,01?

13. Yleisohje lukujonon raja-arvon laskemiseksi :
Raja-arvo lasketaan kuten vastaavat funktion raja-arvot

14. Raja-arvon laskeminen $\frac{\infty}{\infty}$-tilanteessa : Supista sillä termillä, joka nimittäjässä menee voimakkaimmin äärettömyyteen. (esim. korkein potenssi)

19.14.1. Laske a) $\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 - 3n}{4 - 5n^2}$ b) $\lim_{n \to \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$ c) $\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 3n}}{n + 2}$

15. Raja-arvon laskeminen $\sqrt{\infty} - \sqrt{\infty}$ tilanteessa : Lavenna $\sqrt{} + \sqrt{}$. Jatko kuten 14:ssa

19.15.1. Laske $\lim_{n \to \infty} (2n - \sqrt{3n + 4n^2})$

16. Geometrisen jonon raja-arvo : $a_n = aq^{n-1} \to 0$, kun $|q| < 1$ ja $a_n \to a$, kun $q = 1$

19.16.1. Mikä jonoista $a_n = 2^n$, $b_n = 3^{4n}$, $c_n = 4^{-n}$, $d_n = (½)^{2n}$ suppenee?

17. Suppeneva jono : on rajoitettu (ts. ei-rajoitettu jono ei suppene)

19.17.1. Miksi jono $a_n = 2 - 0{,}001n^2$ ei suppene?

18. Lukujonon monotonisuuden osoitus erotuksella :
Osoita, että $a_{n+1} - a_n > 0 \ \forall\ n$, jolloin (a_n) on kasvava

19.18.1. Osoita, että jono $a_n = \frac{2n + 1}{3n - 1}$ on vähenevä.

19. Lukujonon monotonisuuden osoitus derivaatoilla :
Siirry tutkimaan $a_n = f(n)$ asemasta funktiota $y = f(x)$ ja osoita tämä funktio monotoniseksi.

19.19.1. Osoita, että jono $a_n = \frac{2n + 1}{n^2 + 1}$ on vähenevä.

L: 96S8a, 33.10a

20. Varma suppenemisehto:
Jos jono on ylhäältä rajoitettu ja ei-vähenevä, niin se suppenee

19.20.1. Osoita täydellisellä induktiolla, että jono $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$ on kasvava ja ylhäältä rajoitettu. Mikä on raja-arvo?

21. I kertaluvun rekursioyhtälö : $y_{n+1} = c \cdot y_n + d$

22. I kertaluvun rekursioyhtälön ratkaisu : $y_n = y_0 \cdot c^n + \frac{d(1 - c^n)}{1 - c}$, $c \neq 1$

19.22.1. Laske jonon $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + 4$ termi a_{10}.

L: 302, 303, 92S9, 94S9b

Luku 20. Sarjat

1. Sarja : on päättymätön summa $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$

2. Sarja suppenee : jos osasummien S_1 , S_2 , S_3 , …jono suppenee.

20.2.1. Sarjan $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots$ osasumma $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ (Voit osoittaa sen täydellisellä induktiolla). Osoita. että sarja suppenee.

3. Suppenevan sarjan termit :
$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ (ts. jos termit ei lähesty nollaa, ei sarja suppene)

20.3.1. Osoita, että sarja $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{n}{3n-1} + \ldots$ ei suppene.

L: 04K14, 04S12

4. Geometrinen sarja : termit muodostavat geometrisen jonon

5. Geometrinen sarja suppenee : kun $|q| < 1$

20.5.1. Osoita, että a) sarja $½ + (½)^2 + (½)^3 + \ldots$ suppenee b) sarja $1 + (½)^{-1} + (½)^{-2} + (½)^{-3} + \ldots$ hajaantuu.

2. Millä x:n arvoilla sarja $1 + \frac{x}{2+x} + \left(\frac{x}{2+x}\right)^2 + \ldots$ suppenee?

L: 307, 309, 312, 01S9

6. Suppenevan geometrisen sarjan summa : $S = \frac{a}{1-q}$

20.6.1. Laske a) $1 + (¾) + (¾)^2 + \ldots$ b) $1 - ¾ + (¾)^2 - (¾)^3 + \ldots$

L: 310, 311, 314, 316, 317, 94S9a, 00S11, 01S9, 02K13, 02S9, 04K12

7. Teleskooppisarja : $(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \ldots = \sum(b_n - b_{n+1})$

20.7.1. Osoita, että sarjat a) $\sum (2^{n+1} - 2^n)$ b) $\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ on teleskooppisarja

8. Teleskooppisarjan suppeneminen : jos $\lim b_n = b$ on olemassa

9. Suppenevan teleskooppisarjan summa : $S = b_1 - b$, missä $b = \lim b_n$

20.9.1. Laske $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

10. Harmoninen sarja : $\sum \frac{1}{n}$

11. Harmoninen sarja hajaantuu

20.11.1. Tutki sarjan $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ suppenemista.

12. Aliharmoninen sarja : $\sum \frac{1}{n^s}$, missä $s < 1$

13. Aliharmoninen sarja hajaantuu

20.13.1. Tutki sarjan $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$ suppenemista.

14. Yliharmoninen sarja : $\sum \frac{1}{n^s}$, missä $s > 1$

15. Yliharmoninen sarja suppenee

20.15.1. Tutki sarjan $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$ suppenemista.

16. Sarjan $\sum (a_n)$ majoranttisarja : on sarja $\sum (b_n)$, jos $b_n \geq a_n$, kun $n \geq n_0$

20.16.1. Osoita, että sarja $\frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \ldots$ on harmonisen sarjan majoranttisarja.

17. Sarjan $\sum (a_n)$ minoranttisarja : on sarja $\sum (b_n)$, jos $b_n \leq a_n$, kun $n \geq n_0$

20.17.1. Osoita, että $\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \ldots$ on sarjan $\frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + (\frac{3}{4})^3 + \ldots$ minoranttisarja.

18. Positiiviterminen sarja suppenee : jos sillä on suppeneva majoranttisarja

20.18.1. Osoita, että sarja $\sum \frac{1}{n \cdot 2^n}$ suppenee.

L: 308

19. Positiiviterminen sarja hajaantuu, jos sillä on hajaantuva minoranttisarja

20.19.1. Osoita, että sarja $\sum \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ hajaantuu.

20. Potenssisarja : on $\sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$

20.20.1 Onko sarja $2 + 3x + 4x^2 + 5x^3 + \ldots$ potenssisarja?

21. Potenssisarjan suppenemisalue : on $-R < x < R$, missä $R = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$

20.21.1. Millä alueella sarja $2 + 3x + 4x^2 + 5x^3 + \ldots$ suppenee?

L: 313

Vastauksia esimerkkitehtäviin

1.3.1. L = ∅
1.4.1.a) |2x - 4| =
$\begin{cases} 2x - 4, & x \geq 2 \\ -2x + 4, & x < 2 \end{cases}$
b) $| x^2 - 4 |$ =
$\begin{cases} x^2 - 4, & x \leq -2 \\ -x^2 + 4, & -2 < x < 2 \\ x^2 - 4, & x \geq 2 \end{cases}$
1.5.1. n^5
1.6.1. on
1.7.1. on
1.8.1. 8
1.9.1. 1/9
1.10.1 a^2 / b^8
1.11.1. a) $2^3 = x$
b) $\log_3 4 = x + 1$
1.12.1. x = 5/6
1.13.1. 4
1.14.1. 19,35€
1.14.2. 300€
1.15.1. 6,7 %
1.15.2. 15,7 %
1.16.1. +18,7 %
1.16.2. 7,4 %

2.1.1. a) $x^4 - 9x^2$ b) $x^2 + 4y + 4y^2$ c) $37 - 20\sqrt{5}$
2.2.1. a) (2a + 5)(2a - 5)
b) $(x + 3)^2$ c) $x(3x - 2)^2$
2.3.1. -4
2.3.2. a = -5
2.4.1. Ei
2.4.2. a = -10
2.4.3. on
2.4.4. a = -3½
2.5.1. x ≠ 0 ja x ≠ 4
2.6.1. 2/x
2.6.2. $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$
2.7.1. a) x^5y^6 b) 1 000 000
c) $5 \cdot 10^{2002}$
2.8.1. a) -1 b) 2½·lg x
2.8.2. $\lg \frac{25}{x}$
2.8.3. $\frac{3\lg a}{2\lg 2}$

3.1.1. x = 11
3.2.1. a ≠ 3, $x = \frac{2a - 12}{a - 3}$
a = 3 , L = ∅
3.3.1. a ≠ 3
3.3.2. a = 3 ja b = -6
3.4.1. x < 7
3.5.1. a > 1, $x > \frac{2a}{a - 1}$
a = 1 , L = ∅
a < 1, $x < \frac{2a}{a - 1}$
3.6.1. a) a ≠ 2 b) a = -2
3.7.1. $x = \pm\sqrt{1½}$
3.8.1. x = 0 tai x = 3¾
3.9.1. $x_1 = x_2 = 3$
3.10.1. ei yhtään
3.10.2. a = 4
3.11.1. a) 3 b) -7 c) 37
3.12.1. (x - 3)(2x + 1)
3.12.2. $\frac{2x + 3}{3x + 5}$
3.13.1. x < -½ tai x > 4
3.14.1. x = 2, $x = \pm\sqrt{5}$, x = 1½
3.14.2. x = 5, x = -1
3.14.3. x = 1, x = -3
3.14.4. x = 1
3.14.5. x = ±3, x = ±2
3.15.1. 0 < x < 1 tai x > 3
3.16.1. x = -1
3.17.1. x < -1
tai -2/3 < x < 0
tai x > 1
3.18.1. x = 3
3.19.1. x = 7/3
3.19.2. x = 0 , x = -5
3.19.3. x = -1/3 , x = 1
3.20.1. L = ∅
3.20.2. x < 0 tai x > 4
3.20.3. x < 1 tai x > 4/3
3.21.1. x > 1
3.22.1. -2 < x < 4/3
3.23.1. x < 1,2 tai x > 4
3.24.1. x = 1¾
3.24.2. lg (4/3) : lg 12
3.24.3. x = 1
3.25.1. x < -1¼
3.25.2. x < -½
3.25.3. x > lg 2 : lg 1½
3.25.4. x < 1
3.26.1. x = 1
3.27.1. 4 8/11 < x < 5

4.5.1. x = 1
4.6.1. y = x + 1
4.7.1. | x - 1 | < 0,005
4.8.1. 5/16
4.9.1. ei jatkuva
4.9.2. ¼
4.9.3. a = 0,6
4.12.1. x ≈ 0,443
4.13.1. 5
4.14.1. gof: $16x^2 + 38x + 25$
fog: $8x^2 - 10x + 15$
4.15.1. x = 33, x = 1
4.16.1. $f^{-1}(x) = ½x + 1½$
4.26.1.x ≠ ¾π + n·½π
4.27.1. -3 ≤ x ≤ 3
4.28.1. 1 < x ≤ 2
4.30.1. 1 ≤ x ≤ 5
4.32.1. (3, 3)

5.1.1. 13,5 l/100km
5.2.1. y = 1,2x
5.3.1. 25 kWh/vrk
5.4.1. 30/x
5.5.1. f(n) = 100 + 20n, n = 20
5.6.1. 61 200
5.7.1. 1 %
5.8.1. 66 vrk
5.9.1. 41 %

6.1.1. 50°
6.2.1. 60°
6.4.1. 30°
6.6.1. 8
6.7.1. 40°

6.8.1. h = 4

7.4.1. 30/11
7.6.1. 3·A
7.7.1. 63 %
7.10.1. 65°
7.11.1. 35°
7.12.1. 4,2 ja 4,8
7.13.1. 2,4 ja 3,6
7.14.1. 1/6·A, 1/6·A, 1/3·A, 1/3·A
7.22.1. 5

8.1.1. 1,2
8.4.1. sin α = -4/5, cos α = -3/5, tan α = 4/3
8.4.2. sin 150° = ½, cos 150° = $-½\sqrt{3}$, tan 120° = $-1/\sqrt{3}$
8.9.1. $x \neq \pi/6 + n\cdot\pi/3$
8.10.1. S = 5 , p = -1
8.10.2. S = $4 + \sqrt{3}$, p = 3
8.16.1. sin x = $-½\sqrt{3}$, cos x = ½
8.18.1. $½\sqrt{3}\sin\alpha + ½\cos\alpha$
8.18.2. $(4 + 6\sqrt{2})/15$
8.19.1. $\cos x(4\sin x - 8\sin^3 x)$
8.20.1. cos 2x = ½, tan 2x = $-\sqrt{3}$
8.21.1. 3a
8.22.1. x = 20° + n·120° tai x = 160° + n·360°
8.23.1. x = -10° + n·120°
8.24.1. x = n·180°
8.25.1. x = 28,2° + n·90°
8.25.2. x = 45° + n·180° x = 71,6° + n·180°
8.26.1. kylki = 7.3, korkeus 6,9, ala = 17
8.26.2. 26,2 m
8.27.1. 6,5
8.27.2. 37,8°, 92,2°, 6,5
8.28.1. 3,1, 48°, 82°
8.28.2. 75,5°, 57,9°, 46,6°
8.29.1. A = $5\sqrt{3}$
8.29.2. 41,8° tai 138,2°

9.2.1. **v** ↑↓ **u**
9.3.1. ± ¼ · **a**
9.6.1. **b** ↑↓ **a** ja **| b |** = 3 · **| a |**
9.7.1. -6
9.7.2. **| b |** = 2,4
9.8.1. $3\sqrt{26}$
9.8.2. $\sqrt{71}$
9.8.3. $\sqrt{426}$
9.9.1. 48,2°
9.10.1. $2/3 \cdot (\pm\sqrt{5} - 1)$
9.11.1. **BD** = ½(**b** - **a**) **CE** = 0,4**a** - **b** , **DE** = -0,1**a** - 0,5**b**
9.12.1. **i** + 2**j** - 3**k**
9.13.1. (2, 0, -3)
9.13.2. (2, 0, 0)
9.14.1. 6
9.14.2. 6
9.15.1. x = 3, y = 2
9.16.1. x = -1 , y = 4
9.17.1. 3**i** - 7**j** + 9**k**
9.18.1. -36
9.18.2. x = 3 tai x = -1
9.18.3. 108,1°
9.20.1. **a** = 1/11·(15**u** - 2**v**)
9.20.2. 5**i**
9.21.1. ovat
9.22.1. ovat
9.23.1. ovat
9.24.1. eivät
9.25.1. ovat

10.1.1. $2\sqrt{6}$
10.1.2. $(0,0,\pm\sqrt{7})$
10.1.3. (2,4 , 7,8) tai (-2, -1)
10.2.1. 5
10.3.1. (0,1,1)
10.3.2. (5,0)
10.4.1. -3
10.4.2. a = 5
10.5.1. $1/\sqrt{3}$
10.5.2. 18,4°
10.6.1. -1½
10.7.1. -2/3
10.8.1. y = 2x - 10
10.9.1. x = 3
10.10.1. **s** = **i** - 5**j**
10.11.1. **n** = 2**i** - 3**j**
10.12.1. **s** = 4**i** + 3**j**
10.13.1. y = 5x - 17
10.13.2. a = -5/3
10.14.1. x + 3y = 5
10.14.2. a = 2 tai a = -1
10.15.1. 7,1°
10.15.2. y = 2x tai y = ½x
10.16.1. 70,6°
10.17.1. a) (5, -7) b) (8, 11)
10.18.1. (3,5)
10.18.2. (-0,6 , 1,8)
10.19.1. a = 1½ , b = -4
10.20.1. A = 15
10.21.1. y = 3x + c, $c \in R$
10.22.1. 2x + 3y + c = 0 , $c \in R$
10.23.1. 4x - 3y + c = 0 , $c \in R$
10.24.1. y = kx - 2k - 1 , $k \in R$ tai x = 2
10.25.1. y = 2x - 1
10.23.2. x + 2y = ±4
10.23.3. y = 3x - 3 tai y = ½x + 2
10.26.1. 1
10.26.2. 0,2
10.26.3. $0,6\cdot\sqrt{2}$
10.27.1. 2x - 6y + 11 = 0 tai 6x + 2y + 1 = 0
10.27.2. x - 3y = 5
10.27.3. 4x - 5y = 3 tai y = -5/3
10.28.1. **OP** = (**i** + 2**j** + 3**k**) + t(3**i** - 2**j** + **k**)
10.28.2. **OP** = (**i** + 2**j** + 3**k**) + t(3**i** - 7**j** - 9**k**)
10.28.3. a) **s** = 2**i** + **j** + 2**k** b) **s** = 2**i** - 4**j**
10.29.1. x = 1 + 3t, y = 2 - 7t, z = 3 - 9t
10.29.2. x = 1 + 3t, y = 2 - 2t, z = 3 + t
10.30.1. 72,3°
10.31.1. Kyllä, P (3, -3, 4)
10.32.1. ei
10.32.2. a = 4 tai a = -2
10.33.1. 2x - 3y - 4z + 16=0
10.34.1. **n** = 2**i** - 3**j** + 4**k**
10.35.1. 2x + 3y - z + 1 = 0
10.36.1. [(x - 1)**i** + (y + 2)**j** + (z - 3)**k**]·(3**i** - 4**j** + 5**k**) = 0 3x - 4y + 5z = 26

10.37.1. 60°
10.38.1. 18,8°
10.39.1. (-7, -5, 12)
10.40.1. x = 3 - 2t, y = 1½t, z = t

10.40.2. x + 2y = 3, x - z = 3, 2y - z = 3
10.41.1. x = 2, y = -1, z = 3
10.42.1. (7, -3, 2)
10.43.1. Suoran y = 2x + 1 alapuolinen alue

11.1.1. a = -1
11.2.1. $y = x^2 - 2x + 3$
11.3.1. c = -1
11.4.1. $x = y^2 - 4y + 4$
11.5.1. (3,0) tai (-5/3, 28/9)
11.5.2. (1,0) tai (-2,-6)
11.6.1. $y = -x^2 + 2x - 1$
11.6.2. 7,48 m
11.7.1. K = (1,2) $r = \sqrt{3}$
11.7.2. $(x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 9a^2$
11.8.1. a) K = (-3,3) $r = 2\sqrt{5}$
b) K =(-½,1) r = 1½
11.9.1. kaikilla a:n arvoilla
11.9.2. -5 < a < 0
11.10.1. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9,8$
11.10.2. $(x \pm 3)^2 + (y - 13)^2 = 9$
11.11.1. $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$
11.12.1. y = 2x
11.13.1. y = 2x ± 5
11.13.2. x - 3y + 5 = 0 tai y = -3x + 15
11.14.1. y = 4x + 2
11.16.1. (±1,3) ja $(\pm\sqrt{6}, -2)$
11.16.2. (±2,±1)
11.17.1. $\sqrt{14} - 2$
11.18.1. $y = 2x^2 - 1$

12.1.1. 1
12.2.1. 6
12.3.1. 2003
12.4.1. 20
12.5.1. 12
12.6.1. a) 1 b) 2x c) $10x^9$
d) 0
e) $-2x^{-3}$ f) $-1/x^2$ g) $1/(2\sqrt{x})$
12.7.1. a) $6x^2 - 8x + 5$
b) $24x^2 - 44x + 15$
12.8.1. sin 1
12.9.1. ei nk
12.10.1. 0 < x < 1½ tai x>3
12.11.1. a = ¼
12.12.1. 2
12.13.1. 1½
12.14.1. a = 1, b = -2
12.15.1. 1/7
12.16.1. $f_+'(0) = 1$, $f_-'(0) = -1$
12.17.1. f '(0) = 1
12.18.1. ei ole
12.18.2. $\cos x + 2e^{2x}$
12.18.3. ¼x4 + sin x + e^x
12.19.1. $\tan x + e^x + C$
12.20.1. $x^3 - 2x^2 + 3$
12.20.2. ½sin 2x - cos x
12.20.3. $x^2 + 3x + 7¼$
12.20.4. $2x^2 - 8x + 11$
12.21.1. a) $1/3\cdot x^3 + C$
b) - 1/x + C c) $-1/(2x^2) + C$
d) $2/3\cdot x\sqrt{x} + C$
12.22.1. $½x^4 + 8/3\cdot x\sqrt{x} + C$
12.23.1. 2x + 3ln |x| + C
12.24.1. $3e^x - 2x^2 + C$
12.25.1. 3sin x - 2cos x - tan x+C
12.26.1. $1/5\cdot(x^2 + 3)^5 + C$
12.27.1. $\ln |x^3 + 2x^2 + 3| + C$
12.28.1. F(x) = 1½ln|x - 2| - ln|x| + C
12.29.1. 2sin x - 2xcos x+C
12.30.1. $2/5(x + 1)^2\sqrt{x + 1} - 2/3(x + 1)\sqrt{x + 1} + C$
12.31.1. a) $1/5\cdot x^5 - \cos x + C$
b) $2/5x^2\sqrt{x} - 2/3x\sqrt{x} + C$
c) -1/(2x + 3) + C
d) $1/16(2x^2 + 4x)^4 + C$
e) 2ln |x| - 2ln |x + 1| + C
f) $3xe^x - 3e^x + C$
g) $1/11(1 + x)^{11} - 1/10(1 + x)^{10} + C$
12.32.1. $F(x) = x^2 + C$, kun x > 1 $F(x) = ½x^2 + x - ½ + C$, kun x ≤ 1
12.36.1. $f'(x) = 3x^2 + 2\cos 2x$
f ''(x) = 6x - 4sin 2x
f '''(x) = 6 - 8cos 2x
$f^{(4)}(x) = 16\sin 2x$

13.1.1. 2
13.2.1. -3
13.3.1. $y = ½x + \sqrt{3} - \pi/12$
13.4.1. y = x
13.5.1. y = x+1 tai y =5x - 3
13.6.1. x ≤ 0 tai x ≥ 2
13.7.1. x = -1, x = 0, x = 4 , x = 2
13.8.1. Max = 34 , min = -137,5
13.9.1. Max. f(0) = 0 ja f(2) = 2 Min. f(1) = -½ ja f(3) = 0
13.11.1. p = f(1) = -4, S = f(2) = -2
13.12.1. -1
13.18.1. 59,0°

14.1.1. 0.19
14.2.1. 0.78
14.3.1. 11
14.4.1. 4
14.5.1. 450 m^2
14.5.2. 108 cm^3
14.5.3. $½\sqrt{17}$

15.1.1. 3
15.2.1. 5,38
15.3.1. 5,146
15.4.1. 4π
15.5.1. 7
15.6.1. 12
15.7.1. -3
15.8.1. 42
15.9.1. $-(x^5 + \sin x)$
15.10.1. 10
15.12.1. $x^2 + 3x - 4$
15.13.1. a) $x^3 + \sin x$
b) $2x^7 + 2x\sin x^2$
c) $-(x^3 + \sin x)$
15.14.1. $x^3 + 2x^2 - 3$

16.1.1. $e^2 - e^{-1} + 3$
16.1.2. 36
16.1.3. 8
16.2.1. ½

16.3.1. 20 5/6
16.4.1. $\frac{1}{2}\pi(e^2 - 1)$
16.5.1. $2\pi/15$
16.6.1. 15
16.6.2. 24

17.1.1. 0,4
17.2.1. ¼
17.2.2. ½
17.2.3. 9/32
17.3.1. 35
17.3.2. 9/35
17.4.1. 84
17.4.2. 10/21
17.5.1. $2{,}09 \cdot 10^{13}$
17.5.2. 0,00012
17.6.1. 3360
17.6.2. 0,214
17.7.1. 15/16
17.7.2. 20/21
17.8.1. 5/6
17.9.1. 0,49
17.10.1. $6{,}50 \cdot 10^{-15}$
17.11.1. 15/37
17.12.1. a) 5/18 b) 5/9
17.13.1. 0.26
17.14.1. 0,25

18.1.1. $\overline{x} = 7.54$
18.2.1. $\overline{x} = 8{,}2$, $\sigma = 0{,}93$
18.3.1. $p_0 = 4/35$, $p_1 = 18/35$
$p_2 = 12/35$, $p_3 = 1/35$
18.4.1. yli 1,50€
18.5.1. $E\underline{x} = 0$, $D\underline{x} = 2{,}42$
18.7.1. n = 870
18.8.1. $D\underline{x} = 14{,}8$
18.10.2. a = 3/16
18.11.1. 0,64
18.12.1. 10/3
18.13.1. $D\underline{x} = 1{,}39$
18.14.1. $F(x) = 0{,}04x^2$
18.15.1. $0{,}01x^2 - 0{,}04x + 0{,}04$
18.16.1. 0,07
18.18.1. a) 0,7734 b) 0,1056
c) 0,2743 d) 0,3245
18.19.1. 0,0228
18.20.1. 0,4641

19.2.1. 1, 6, 15, 28 ja 45
19.3.1. 2, 1, -4, -17 ja -46
19.4.2. x = 2
19.5.1. 79
19.6.1. 291
19.7.1. 820
19.7.2. 120
19.8.2. $x = -4 \pm 3\sqrt{3}$
19.9.1. -256
19.10.1. 640
19.11.1. -170½
19.12.1. a_{275} lähtien
19.14.1. a) -0,2 b) 1 c) 2
19.15.1. -¾
19.16.1. c ja d
19.17.1. ei
19.20.1. $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{13})$
19.22.1. 78 730

20.5.2. x > -1
20.11.1. hajaantuu
20.13.1. suppenee
20.20.1. on
20.21.1. -1 < x < 1

Preliminääritehtäviä 90-luvulta lähtien.

OP90 = 21.

1. Lauseke $k + 1 + \dfrac{2}{k - 1}$ saa saman arvon kahdella peräkkäisellä k:n kokonaislukuarvolla. Mitkä nämä k:n arvot ovat?

2. a) Tutki käyttämättä likiarvoja, kumpi luvuista 3^{3000} ja 2^{4500} on suurempi.

b) Ratkaise epäyhtälö $\dfrac{x - 3}{2x + 5} \leq 1$.

3. Laske $\displaystyle\int_{-1}^{2} x(2x^2 + 1)^2\,dx$

4. a) Laivan kulkusuunta on 48° pohjoissuunnasta itään. Laivasta havaitaan saari 15° pohjoissuunnasta itään. Laivan vauhti on 15 km/h. Saari on 8 minuutin kuluttua suoraan pohjoisessa. Kuinka kaukana saari on jälkimmäisessä tilanteessa?

b) Millä x:n arvoilla ln2, ln(2x - 2) ja ln(2x + 2) ovat aritmeettisen jonon kolme peräkkäistä termiä?

5. Kolmion kanta on suoralla $3x + 4y = 2$ ja huippu on suoralla $y = -x + 1$. Kolmion kanta on 8 ja ala 12. Määritä huipun koordinaatit.

6. a) Kun summasta $1 + 2 + 3 + ... + n$, missä n on kokonaisluku, lasketaan erikseen parillisten ja parittomien lukujen summat, niin niiden erotus on 1000. Määritä n.

b) Olkoon origosta alkavat vektorit $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ja $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + r\mathbf{j} + s\mathbf{k}$. Määritä r ja s, kun 1° kaikki vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan 2° kaikkien kärjet ovat samalla suoralla.

7. a) Apteekin varastossa on 100 l säiliö täynnä 100 % (!) alkoholia. Kiusasta vastustamaton varastonhoitaja ottaa kerran viikossa säiliöstä litran nestettä ja korvaa sen vedellä. Mikä on säiliössä olevan alkoholin prosenttiosuus vuoden kuluttua, kun sieltä ei oteta alkoholia muuhun tarkoitukseen? (Vuodessa 52 viikkoa)

b) Neliöstä leikataan nurkat pois niin, että muodostuu säännöllinen 8-kulmio. Kun tämän joka toinen kärkipiste yhdistetään, syntyy uusi neliö. Laske tämän neliön alan suhde alkuperäisen neliön alaan.

8. a) Määritä y-akselin sekä käyrien $y = (e^x - 1)^2$ ja $y = (e - 1)^2$ rajoittaman alueen pinta-ala.

b) Monellako eri tavalla voidaan numeroista 0, 1, 2, ... , 9 valita kolme numeroa x, y ja z siten, että $x < y < z$?

9. a) Lentoyhtiö tietää kokemuksesta, että 5 % matkustajista jää tulematta. Siksi yhtiö myy 52 lippua 50 matkustajan koneeseen. Millä todennäköisyydellä jokainen saapuja saa paikan, kun tilaajia pidetään toisistaan riippumattomina?

b) Määritä käyrän $x^4 + 2y^4 = 1$ pienin ja suurin etäisyys origosta.

10. Osoita, että jos $x > y > 1$, niin $x - y > \ln x/y$.

MP90 = 22.

1. Määritä yhtälön $x^5 + x^3 = x^4 + x^2$ kaikki juuret.

2. Laske käyrän $y = \sqrt{x + 2}$ ja koordinaattiakselien rajoittaman äärellisen alueen pinta-ala.

3. a) Muodosta se toisen asteen polynomi P, jolle $P(2) = P'(2) = P''(2) = 2$.

b) Kaupan kassoista kokopäiväiset työskentelevät 7,5 tuntia ja osapäiväiset 4 tuntia päivässä. Kassojen keskimääräinen työaika on 6 tuntia päivässä. Määritä koko- ja osapäiväisten kassojen lukumäärän suhde.

4. a) Laske $\tan 2x$, kun $\sin x = -½$.

b) Määritä vakio a siten, että $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + a}{x^3 - x}$ on äärellisenä olemassa. Laske myös tämä raja-arvo.

5. a) Kolmion kahden mediaanin pituudet ovat 3,0 cm ja 9,0 cm. Mediaanien välinen kulma on 30°. Laske kolmion ala.

b) Osoita, että suorat $x + a^2y = 2a$ ovat kaikilla a:n ($\neq 0$) reaaliarvoilla hyperbelin $xy = 1$ tangentteja.

6. Tutki saako lauseke $| x^3 - 2x^2 + 0,4 |$ arvoa 0,7, kun $0 \leq x \leq 2$.

7. Yhden litran vetoinen suoran ympyrälieriön muotoinen kanneton tölkki valmistetaan kahdesta eri materiaalista. Pohjamateriaalin hinta pinta-alayksikköä kohti on kaksinkertainen vaippamateriaaliin verrattuna. Tölkin mittasuhteet valitaan siten, että materiaalikustannukset tulevat mahdollisimman pieniksi. Mikä on tällöin tölkin korkeuden ja pohjan halkaisijan suhde?

8. Osoita, että yhtälöllä $e^{x^2} + e^{-x} - 2 = 0$ on täsmälleen kaksi reaalijuurta. Määritä positiivisen juuren likiarvo 0,01 tarkkuudella.

9. a) Maapallon öljyvarojen arvioidaan riittävän nykyisellä kulutuksella 100 vuotta. Kuinka kauan ne riittävät, jos kulutusta vähennettäisiin vuosittain 1° 0,5 %:lla 2° 1,0 %:lla?

b) Todennäköisyys sille, että abilla on hauskaa penkkareissa, arvioidaan 80 %:ksi. Myönteisessä tapauksessa oletetaan, ettei hän kuitenkaan 10 % todennäköisyydellä muista sitä. Mikä on todennäköisyys sille, että enemmistö seitsemästä abista muistaa penkkarit hauskoina?

10. a) Taideteos muodostuu neljästä samankokoisesta pallosta. Ylin pallo on kolmen muun päällä ja kaikki pallot koskettavat toisiaan. Kuinka korkea taideteos on, kun pallon halkaisija on 1,0 m?

b) Suora s kulkee pisteiden A(1,2,3) ja B(4,5,6) kautta. Missä pisteessä se kohtaa tason, joka leikkaa positiiviset koordinaattiakselit kolmen yksikön etäisyydellä origosta?

OP91 = 23.

1. Määritä funktion $f(x) = x(x + 4)$ se integraalifunktio, jonka kuvaaja leikkaa x-akselin kohdassa -3.

2. Tomaateista pilaantuu 15 %. Montako prosenttia kauppiaan on nostettava hintaa, jotta pilaantumisesta aiheutuneet tappiot tulevat korvatuiksi?

3. a) Määritä funktion $f(x) = x^3 - 3x + 3$ suurin ja pienin arvo välillä [0,2]
b) Ratkaise epäyhtälö $x^2 - ax - x + a < 0$, kun $a < 0$.

4. Montrealin sopimuksen ratifioineet valtiot sitoutuivat vähentämään otsonille haitallisten kloorifluorihiilivetyjen (cfc-yhdisteiden) käytön vuoteen 1998 mennessä puoleen vuoden 1986 tasosta. Montako prosenttia vähintään täytyy näiden yhdisteiden käyttöä vähentää vuosittain?

5. Käyrät $y = x^2 + x$ ja $y = x^3 - x$ rajoittavat äärellisen kaksiosaisen alueen. Laske sen pinta-ala.

6. a) Määritä funktion $f(x) = x^2 - | 2x - 1 |$ ääriarvot.

b) Määritä ne kaksi lukua, joiden suhde ja logaritmien suhde on 3.

7. a) Osoita, että lukujono a_n, jolle pätee kaikilla n = 1, 2, 3, ..., että n:n ensimmäisen termin summa on aina $s_n = 2n^2 - n$, on aritmeettinen. Mikä on 50. termi lukujonossa?

b) Olkoon $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + a}{x^2 - 5x + 6}$. Miten f(2) on määriteltävä, jotta funktio olisi jatkuva kohdassa x = 2?

8. a) Kalle odottamat bussit saapuvat pysäkille 10 minuutin välein. Hän on todennut, että bussin tulemisen odotusaikaa kuvaava jatkuva funktio lähtee nollasta ja kasvaa tasaisesti välillä 0..8 minuuttia ja vähenee tasaisesti nollaan 8 ja 10 minuutin välillä. Millä todennäköisyydellä bussi tulee 5 minuutin kuluessa Kallen tulosta pysäkille? Mikä on Kallen keskimääräinen bussin odotusaika?

b) Puolipallon sisään asetetaan suurin mahdollinen kuutio. Kuinka monta prosenttia kuution tilavuus on puolipallon tilavuudesta?

9. a) Laske pisteen P(2,1,-3) etäisyys suorasta, joka kulkee pisteiden A(4,2,-1) ja B(-2,-1,1) kautta.

b) Olkoon $f(x) = 2x + 1$, kun $-1 \leq x \leq 2$ ja $g(x) = x^2 + x + 2$, kun $0 \leq x \leq 10$. Määritä yhdistetty funktio g o f, sen määrittely- ja arvojoukot.

10. Ellipsin $x^2 + 4y^2 = 4$ sisään on piirretty kaksi yhtä suurta ympyrää, joiden keskipisteet ovat isoakselilla ja jotka sivuavat toisiaan ulkopuolisesti ja käyrää sisäpuolisesti. Laske ympyröiden yhteenlasketun pinta-alan suhde ellipsin pinta-alaan.

MP91 = 24.

1. a) Laske $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos 2x \, dx$

b) Pankkiin talletetaan vuoden alussa 50 000 mk. Pankki maksaa 11,5 % mukaan vuosikorkoa, joista valtio perii 10 % lähdeveroa. Kuinka paljon tililtä on nostettavissa rahaa kahden vuoden kuluttua, kun korkotuotto lisätään vuosittain pääomaan?

2. Ratkaise yhtälö $8x^3 - 1 = (2x - 1)(2x^2 + 3x + 7)$

3. Olkoon $f(x) = 2x + 1$ ja $g(x) = \dfrac{-3x}{x + 1}$. Missä kohdissa funktiot f o g ja g o f saavat saman arvon?

4. a) Määritä yhtälö ympyrälle, joka kulkee pisteiden (5,3) ja (-1,1) kautta ja jonka keskipiste on suoralla $2x - 3y = 9$.

b) Vektorit **a**, **b** ja **c** muodostavat positiivisen x-akselin kanssa suunnatut kulmat +30°, +60° ja -120° vastaavassa järjestyksessä. Laske |**a** + **b** + **c**|, kun |**a**| = 2, |**b**| = 4 ja |**c**| = 6.

5. a) Olkoon funktio $f(x) = xe^x$ ja $g(x) = (x^2 + a)e^x$. Määritä vakio a siten, että f' ja g' saavat saman arvon kohdassa 2. Missä muissa kohdissa f' ja g' ovat yhtä suuret kyseisellä a:n arvolla?

b) Osoita, että yhtälöllä $\ln x + 2x = 0$ on täsmälleen yksi reaalijuuri. Laske sen likiarvo kahden desimaalin tarkkuudella.

6. Ympyrä $x^2 + y^2 = 2$ ja positiiviset koordinaattiakselit rajoittavat ympyräneljänneksen, jonka käyrä $y = x^3$ jakaa kahteen osaan. Laske näiden osien pinta-alojen suhde.

7. a) Eräässä tietokonekielessä muuttuja on yhden, kahden tai kolmen kirjaimen muodostama jono. Vastaavat iso ja pieni kirjain katsotaan samaksi. 1° Kuinka monta eri muuttujaa voidaan muodostaa, kun käytettävissä on 26 kirjainta? 2° Millä todennäköisyydellä umpimähkään valitussa kolme kirjainta käsittävässä muuttujassa on täsmälleen kaksi samaa kirjainta?

b) Lentotukialus USS Enterprisen tutka havaitsee irakilaisen lentokoneen lähestyvän luoteesta 40,2° korkeuskulmassa ja 22 km etäisyydellä tutkasta. Samaan aikaan on amerikkalainen lentokone länsisuunnassa 9,6° korkeuskulmassa ja 12 km etäisyydellä tutkasta. Laske lentokoneiden etäisyys toisistaan tuolla hetkellä.

8. Pohjoiseen nopeudella 12 km/h kulkevan laivan edessä 15 km etäisyydellä siitä havaitaan toinen laiva, joka kulkee itää kohti nopeudella 9 km/h. Kuinka pitkän ajan kuluttua laivat ovat lähimpänä toisiaan ja kuinka kaukana toisistaan ne silloin ovat?

9. a) Suorakulmaisen särmiön muotoiseen laatikkoon on pakattu yhtä pitkiä suoran ympyrälieriön muotoisia metallitankoja. Kaksi isointa sivuaa kolmea seinää ja toisiaan. Neljä pienintä on nurkissa sivuten kahta seinää ja isointa lieriötä. Keskellä kaksi sivuten kumpaakin isoa lieriötä ja seinää. Kuinka monta % tankojen yhteinen tilavuus on laatikon tilavuudesta, kun laatikolla ja tangoilla on sama pituus?

b) Osoita, että funktiolla $f: R \to A_f$, $f(x) = x^3 + 3x + 12$ on käänteisfunktio. Laske missä kulmassa funktion ja käänteisfunktion kuvaajat leikkaavat toisensa.

10. Pisteet A(-2,4) ja B(3,1) ovat ellipsin $3x^2 + y^2 = 28$ pisteitä. Määritä ellipsin piste C siten, että kolmion ABC ala on mahdollisimman suuri.

MP92 = 25

1. Ratkaise yhtälö $\frac{x}{x-1} + \frac{2}{x+1} = 2$

2. a) Määritä $\int_4^9 \left(\frac{1}{3}x^2 - 2\sqrt{x}\right)dx$

b) Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 2 ja 3 sekä pienin kulma on α. Määritä $\sin 2\alpha$ ja $\cos 2\alpha$.

3. a) Polynomi $2x^3 - 7x^2 - 5x + a$ on jaollinen binomilla $x - 4$. Millä muilla binomeilla se on jaollinen?

b) Auton ostohinta muodostuu pääpiirteittäin auton tuontihinnasta ja autoverosta, joka on 122 % tuontihinnasta. Devalvaation vuoksi auton tuontihinta nousi 14 %. Kuinka monta prosenttiyksikköä autoveroa olisi pitänyt alentaa, jotta auton ostohinta olisi pysynyt ennallaan?

4. Paraabeli $y = x^2$, x-akseli ja suora $x = 3$ rajoittavat äärellisen alueen. Määritä luku a niin, että suora $x = a$ jakaa kyseisen alueen kahteen yhtä suureen osaan.

5. Ratkaise yhtälö $(3x^2 + 7x + 3)^{9x^2 - 6x - 3} = 1$.

6.a) Määritä pienin kokonaisluku, jonka osoittamaan potenssiin luku 5 on korotettava, että tuloksena olisi vähintään 1000-numeroinen luku.

b) Traktorin eturenkaan halkaisija on 1,04 m ja takapyörän 1,42 m. Kuinka pitkän matkan traktori on kulkenut silloin, kun eturengas on pyörinyt yhden kierroksen enemmän kuin takapyörä?

7. a) Käyrän $y = e^{2x}$ mielivaltaisen pisteen kautta piirretään tangentti ja y-akselin suuntainen suora. Osoita, että niiden x-akselista erottaman janan pituus ei riipu pisteen valinnasta.

b) Laatikossa on 3 sinistä ja 7 valkoista palloa. Sieltä otetaan umpimähkään yksi pallo ja asetetaan tilalle toisen värinen pallo. Tämän jälkeen laatikosta otetaan pallo. Mikä on todennäköisyys, että viimeksi otettu pallo on sininen?

8. Nelikulmion sivut ovat järjestyksessä 2, 3, 4 ja 5 cm. Kahden pisimmän sivun välinen kulma on 60°. Laske nelikulmion ala.

9. Olkoon A(6,-1,7) ja B(4,8,8) sekä O origo. Pisteen A kautta kulkeva taso on kohtisuorassa vektoria **OB** vastaan ja se leikkaa x-akselin pisteessä P ja z-akselin pisteessä Q. Osoita, että vektorit **BP** ja **BQ** ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

10. a) Neliön ABCD sivun pituus on a. Kärjen A kautta kulkeva suora leikkaa sivua CD. Suoralle piirretään pisteeseen P normaali, joka kulkee kärjen C kautta. Kaukanako piste P voi enintään olla sivusta CD?
b) Määritä positiiviset kokonaisluvut x ja y, jotka toteuttavat yhtälön $x^2 - y^2 = 339$.

OP93 = 26

1.a Ratkaise epäyhtälö $(2x - 3)^2 > 5(2x - 3)$.

1.b Sekoitetaan 500 g 25-prosenttista etikkahappoa 350 grammaan 12-prosenttista etikkahappoa. Mikä on syntyneen liuoksen väkevyysprosentti?

1.c Saadakseen suuremman kansansuosion päätti pääministeri antaa alamaisilleen avustusta, 10 mk miehille ja 4 mk naisille. Hän lensi helikopterillaan Veteliin (asukasluku 4085) keskipäivällä, jolloin tiesi 60 % miehistä olevan hirvimetsällä. Paljonko hän jakoi avustusta veteliläisille?

2. Laske $\int_{-1}^{3} 6x \cdot |x - 1|\, dx$

3.a Mikä on se kolmannen asteen polynomi $x^3 + ax^2 + bx + c$, jolla on jakojäännöksenä 1, 2 ja 3, kun polynomi jaetaan vastaavasti binomeilla $(x - 2)$, $(x - 3)$ ja $(x - 4)$?

3.b Koululla on käytössä 400 mk pikkujoululahjojen ostamista varten 100 koulutyöntekijälle. Kanslisti lähti asialle ja päätti ostaa pitkäaikaisimmille työntekijöille 50 mk maksavan viinipullon, vähän vähemmän aikaa olleille 10 mk hintaisen korkkiruuvin ja nuorimmille 1 mk arvoisen korkin tuoksua antamaan. Montako viinipulloa, korkkiruuvia ja korkkia kanslisti osti, kun jokainen sai lahjan ja yhteishinta oli 400 mk?

3.c Ratkaise yhtälö $(7 + 2\sqrt{3})^x - 4(2 + \sqrt{3})^x + 1 = 0$.

4. Paraabeli saadaan paraabelista $y = x^2$ siirtämällä sitä kaksi yksikköä positiivisen y-akselin suuntaan. Suora kulkee pisteiden (2,2) ja (3,1) kautta. Laske ko. suoran ja paraabelin välisen alueen ala

5.a Mitä on neljän desimaalin tarkkuudella log 5 siinä logaritmijärjestelmässä, missä log 6 = 0,6543?

5.b Mikä on miljoonas luku jonossa 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,....?

5.c Numerologien mielestä luvut 2, 5, 8, 10 jne. ovat pyhiä, koska ne ovat kahden kokonaisluvun neliöiden summia. Osoita, että kahden pyhän luvun tulo on myös pyhä.

6.a Onko mahdollista valita positiiviset vakiot a ja b siten, että käyrän $y = ax^3 - bx$ maksimi- ja minimikohta olisi kumpikin kahden nollakohdan puolivälissä?

6.b Katkaistu suora ympyräkartio, jonka pohjaympyröiden säteet ovat 3 ja 4 sekä korkeus 12, vierii kyljellään suoran ympyrälieriön tasaisella pohjalla. Miten suuri on pohjaympyrän halkaisijan oltava, että kartio voi kiertää vapaasti seinään törmäämättä yhden täyden kierroksen?

6.c Määritä funktion $f(x) = 2\sin \tfrac{1}{2}x + \cos x$ suurin ja pienin arvo.

7.a. Osoita, että pisteen (3,2,3) kautta kulkeva, vektorin $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ suuntainen suora leikkaa pisteen (1,0,-1) kautta kulkevan, vektorin $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ suuntaisen suoran. Mikä on leikkauspiste?

7.b Matematiikan yo-kokeeseen suunnitellaan osaa, jossa on 60 väitettä ja niihin vastataan vain onko väite tosi vai ei. Arvaamalla saatujen oikeiden vastausten lukumäärä noudattaa binomijakaumaa, mutta kun kysymysmäärä on suuri, noudattaa oikeiden vastausten lukumäärä kutakuinkin normaalijakaumaa samalla odotusarvolla ja keskihajonnalla. Mikä oikeiden vastausten lukumäärä on laitettava sen arvosanan rajaksi, jota paremman tuloksen saa arvaamalla korkeintaan 10 % kokelaista?

7.c Vangille annettiin 5 valkoista ja 5 mustaa palloa laitettavaksi kahteen laatikkoon. Sen jälkeen teloittaja valitsisi sattumanvaraisesti laatikon ja siitä umpimähkään pallon. Jos pallo on valkoinen, pääsisi vanki vapaaksi, jos musta hänet teloitettaisiin. Miten vangin pitäisi laittaa pallot, jotta hänellä olisi suurin mahdollisuus päästä vapaaksi?

8.a Lieriön muotoisesta puusta, jonka halkaisija on d, on sahattava palkki, jonka poikkileikkaus on suorakulmio, niin että syntyneen parrun kantokyky olisi paras mahdollinen. Kantokyky on suoraan verrannollinen palkin leveyteen ja korkeuden neliöön. Mikä on tällöin palkin leveys ja korkeus?

8.b Missä kompleksitason osassa toteutuu yhtälö $z\overline{z} = |z + 1 + i|^2$?

9. Mikä on sen laskevan suoran yhtälö, joka kulkee pisteen (a,b) kautta (a,b>0) ja joka rajoittaa koordinaattiakselien kanssa pinta-alaltaan mahdollisimman pienen kolmion?

10.a Laske $\int_0^2 \left(\sqrt{4 - x^2} - (2 - x) \right)dx$

10.b Esitä sata peräkkäistä kokonaislukua, joista mikään ei ole alkuluku ts. se on jaollinen muullakin kokonaisluvulla kuin itsellään ja ykkösellä.

MP93 = 27.

1. a) Sievennä lauseke $(a - b) : \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right)$ ja määritä sen tarkka arvo, kun $a = \frac{3}{5}$ ja $b = -\frac{5}{3}$.

b) Mikä seuraavista näyttää katsojasta suurimmalta ja mikä pienimmältä?

Aurinko	säde	$6{,}96\cdot 10^8$ m	keskipisteen etäisyys	$1{,}50\cdot 10^{11}$ m
Kuu	”	1740 km	” ”	384 000 km
Jalkapallo	”	11 cm	” ”	24 m

2. a) Perheen vuokramenot ovat viidesosa tuloista. Kuinka monta prosenttia vähemmän rahaa perheellä jää muuhun käyttöön, kun vuokrat nousevat 20 %?

b) Määritä vektorin $2\mathbf{i} + x\mathbf{j} - x\mathbf{k}$ pituus, kun se on kohtisuorassa vektoria $4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ vastaan.

3. Määritä $\int_0^1 x(1 - \sqrt{x})^2\,dx$

4. Mitkä seuraavista lausekkeista ovat suurempia kuin x, olipa x mikä tahansa nollasta eroava reaaliluku?

i) $x^2 + 1$ ii) $2x$ iii) x^{100} iv) $x + \frac{1}{|x|}$

5. Tien viereen on asennettu nopeuden näyttötaulu. Urpo testaa autonsa nopeusmittarin näyttöä ajamalla taulun ohi nopeuksilla 35 km/h, 50 km/h, ja 70 km/h. Taulu näyttää oikeiksi nopeuksiksi vastaavasti 35 km/h 47 km/h ja 63 km/h. Millä nopeudella auton mittarin mukaan saa ajaa nopeusrajoitusalueella 100 km/h rikkomatta nopeusrajoitusta. Oletetaan, että mittarin lukema poikkeaa oikeasta nopeudesta saman säännön mukaan mittarin koko näyttöalueella.

6. a) Osoita, että kahden peräkkäisen kokonaisluvun neliöiden keskiarvo ei ole kokonaisluku.

b) IBM julkisti ensimmäisen mikrotietokoneensa 1981. Sen jälkeen mikrotietokoneiden teho on kasvanut eksponentiaalisesti siten, että vuoden 1992 lopussa teho oli 65-kertainen vuoteen 1981 loppuun verrattuna. Jos tehon kasvu jatkuu samanlaisena, minä vuonna teho on 1000-kertainen?

7. Sylinteri, jonka pituus voi vaihdella 0,50 metristä 1,00 metriin, on kiinnitetty toisesta päästä niveleen A ja toisesta päästään tangon BD keskiosassa olevaan niveleen C. Tanko BD on kiinnitetty toisesta päästä niveleen B, joka on 0,50 m A:n yläpuolella. Miten alhaalla tangon vapaana oleva pää D voi sijaita mitattuna A:n tasosta? BC = 0,70 m ja CD = 0,50 m.

8. Määritä funktion $f(x) = e^{-x} \cdot \sin x$, $x \geq 0$, suurin ja pienin arvo.

9. a) Öljysäiliö on lieriön muotoinen tankki, jonka korkeus on 5,90 m ja pohjan halkaisija 6,50 m. Säiliön ulkoreunaa pitkin on rakennettava kierreportaat, joiden (vakio)nousukulma ei saa olla suurempi kuin 15°. Portaita pitää kyetä nousemaan 2,00 m pituinen henkilö kyyristymättä. Portaiden tulee päättyä säiliön katon tasalle, suoraan aloituskohdan yläpuolelle. Mikä on portaiden pituus mitattuna pitkin lieriön pintaa?

b) Jääkiekkojoukkueella on 12 hyökkääjää, 6 puolustajaa ja 2 maalivahtia. Pelin alussa joukkue ilmoittaa, mitkä ovat pelissä olevat hyökkäysketjut (3 pelaajaa/ketju), puolustajaparit ja maalivahdit. Kuinka monta erilaista aloituskokoonpanoa voidaan ilmoittaa, kun kukin pelaaja voi esiintyä vain yhdessä ketjussa tai puolustajaparissa? (Hyökkäysketjun tai puolustajaparin sisäisiä paikanvaihtoja ei katsota uusiksi kokoonpanoiksi)

10. a) Olkoon $f(x) = \sin x$, $x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ ja f^{-1} käänteisfunktio. Määritä funktion $h(x) = f^{-1}(\sin x)$, $x \in [0, 2\pi]$ lauseke algebrallisessa muodossa ja piirrä funktion h kuvaaja.

b) Reaalikertoimisen yhtälön $x^2 + px + q = 0$ juuret ovat $t \pm ti$, missä i on imaginaariyksikkö ja $t \neq 0$. Minkä käyrän piirtää paraabelin $y = x^2 + px + q$ huippu?

MP94 = 28.

1.Ratkaise epäyhtälö $2(1 - x) \leq x^2 - 1$

2. a) Määritä $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} \sin(\pi - x)\,dx$.

b) Apteekista voi ostaa kapseleihin pakattuja maitohappobakteereja normalisoimaan vatsan toimintaa esimerkiksi ulkomaanmatkoilla. Pakkauksen kyljessä on teksti: ”1 kapseli sisältää $2 \times 10^8 - 2 \times 10^9$ maitohappobakteeria”. 1° Kuinka monta bakteeria on yhdessä kapselissa keskimäärin? 2° Kuinka monta % annettu yläraja poikkeaa keskimääräisestä arvosta ja kuinka paljon alarajasta?

3. Millä x:n arvoilla funktio $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2}$ on aidosti kasvava?

4. Laman aiheuttaman kysynnän heikkenemisen vuoksi tehtaan johto suunnittelee kulujen vähentämistä työaikaa lyhentämällä, mutta pitämällä tuntipalkan ennallaan. Jos jatketaan 40-tuntisella työviikolla, on irtisanottava 100 työntekijää. Jos muutetaan työviikko 30-tuntiseksi, on irtisanottava 50 työntekijää. Kuinka monituntiseksi on työviikko lyhennettävä, että yhtään työntekijää ei tarvitse irtisanoa?

5. a) Millä vakion k arvoilla suorien $x - y = 1$ ja $kx + y = 3$ leikkauspiste on neliössä, jonka kärjet ovat (0,0), (3,0), (3,3) ja (0,3)?

b) Ratkaise yhtälö $|x - 5|^2 + 2|x - 5| = 3$.

6. a) Pizzeriassa voi pizzan täytteen valita seuraavista aineksista: jauheliha, kinkku, tonnikala, tomaatti, ananas, valkosipuli, anjovis, herkkusieni ja oliivi. Kuinka monta erilaista pizzaa voidaan valmistaa, jos täytteessä on vähintään kolme em. aineksista?

b) Lyijylaskeuma tien varressa (mg/m^2/vuosi) etäisyydellä x (metriä) riippuu ajoneuvotiheydestä A (tuhatta ajoneuvoa/vrk) seuraavan kaavan mukaan $L(x) = 12 \cdot A \cdot e^{\alpha x} + 3{,}6 \cdot \sqrt[3]{A}$, α on vakio. Jos laskeuma on yli 10 mg/m^2/vuosi, ei alueen kasveja suositella syötäväksi. Kun ajoneuvotiheys on 3000 ajoneuvoa/vrk, turvallisuusraja on 20 m. Mikä on turvallisuusraja, jos ajoneuvotiheys on 5000 ajoneuvoa/vrk?

7. Osoita, että saadaan neliö, kun säännöllisen tetraedrin neljän särmän keskipisteet yhdistetään niin, että mitkään kolme pistettä eivät ole samalla tahkolla.

8. a) ABC on tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on 2. Sivua BC jatketaan omalla pituudellaan C:n yli pisteeseen D. Olkoon E sivun AB keskipiste ja F janojen AC ja DE leikkauspiste. Määritä nelikulmion BEFC ala.

b) Normitetun normaalijakauman tiheysfunktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ kuvaaja rajoittaa x-akselin kanssa välillä [0,1] alueen A. Käyrä $y = f(x)$ korvataan alaspäin aukeavalla, y-akselin suhteen symmetrisellä paraabelilla siten, että käyrät leikkaavat y-akselin samassa pisteessä ja toisensa kohdassa 1. Merkitään paraabelin ja x-akselin välistä pinta-alaa välillä [0,1] B:llä. Kuinka monta % B poikkeaa A:sta?

9. Laske lausekkeen $\frac{m - n}{m + n}$ suurin arvo, kun m ja n ovat kokonaislukuja väleiltä $19 \le m \le 51$ ja $49 \le n \le 101$?

10. a) 1000 m pitkä ratakisko on päistään hitsattu kiinni. Se katkaistaan keskeltä ja väliin liitetään 1,0 metrin mittainen pala kiskoa. Tällöin kisko nousee irti maasta ympyrän kaarelle. Kuinka korkealla maasta on kiskon ylin kohta? (Tehtävän ratkaisu vaatii yhtälön numeerisen ratkaisun)

b) Määritä funktio f, kun se toteuttaa kaikilla reaaliarvoilla ehdon $f(1 - x) + 2f(x) = x^2$.

MP95 = 29.

1. Laske integraali $\int_1^3 (x^2 + \frac{1}{x^2})\,dx$.

2. Olkoon $f(x) = a \cdot \sin x + bx$. Määritä vakiot a ja b siten, että funktio f toteuttaa ehdot $f'(0) = 1$ ja $f'(\pi) = -1$.

3. Mitkä epäyhtälön $|x + 3| < 2x$ kokonaislukuratkaisuista ovat myös epäyhtälön $9x > x^2$ ratkaisuja?

4. a) Kaksi 210 m korkeaa radiomastoa ovat tasaisella maalla 150 m etäisyydellä toisistaan. Niiden välisellä nurmikolla on nuoripari piknikillä. Lentokone lentää heidän ylitseen pitkin mastojen määräämää linjaa. Ruokailijat havaitsevat vaakasuoraan lentävän koneen siirtyvän taivaalla toisen maston määräämältä linjalta toiselle 6,6 sekunnissa. He arvelevat koneen nopeudeksi 300 km/h. Kuinka korkealla kone lensi?

b) Pulmakulma-palapelissä on 10 erilaista palasta, joista voidaan koota suorakulmion muotoinen levy. Mikrotietokone, joka pystyy tekemään 10 milj. kokeilua sekunnissa, ohjelmoidaan kokoamaan palapeli kokeilemalla. Kuinka kauan tietokoneelta kuluu kaikkien mahdollisuuksien kokeiluun, kun se kokeilee jokaista palasta 10 eri paikalle neljään eri asentoon?

5. a) Ympyrän halkaisijan päätepisteet ovat (5a,4a+9) ja (a+2,1). Miten luku a on valittava, jotta ympyrän keskipiste olisi mahdollisimman lähellä origoa? Mikä on tällöin ympyrän yhtälö?

b) Määritä se funktion $f(x) = -\frac{1}{2x^2}$, $x > 0$, integraalifunktio, jonka kuvaaja rajoittaa x-akselin ja suorien $x = 1$ ja $x = e$ kanssa x-akselin yläpuolelle yhtenäisen alueen, jonka ala on ½e.

6. a) Urpo ja Yrjö pelaavat tivolissa pelin seuraavin säännöin: Urpolle annetaan Yrjön näkemättä kaksi valkoista ja kaksi mustaa palloa sekä kaksi laatikkoa. Urpo saa laittaa pallot laatikoihin haluamallaan tavalla. Tämän jälkeen Yrjö saa valita laatikon ja sieltä yhden pallon. Jos pallo on valkoinen, voittavat kaverukset rahapalkinnon. Miten Urpon pitää sijoittaa pallot laatikoihin, jotta voiton todennäköisyys olisi mahdollisimman suuri?

b) Säännöllisen nelisivuisen pyramidin kaikki särmät ovat pituudeltaan 4 pituusyksikköä. Pyramidin sisällä on pallo, joka sivuaa pohjaa ja kaikkia sivutahkoja. Laske pallon säde.

7. a) Määritä pienin positiivinen reaaliluku, joka toteuttaa yhtälön
$8 \cdot \sin x \cdot \cos^5 x - 8 \cdot \sin^5 x \cdot \cos x = 1$.

b) Säännöllisen 6-kulmion päälle piirretään neliö niin, että neliön kaksi vastakkaista kärkeä yhtyy 6-kulmion vastakkaisiin kärkiin. Kuinka monta % 6-kulmion pinta-alasta jää neliön ulkopuolelle?

8. Kolmion OAB (O = origo) sivu AB on x-akselin suuntainen ja kärjet A ja B ovat käyrällä $y = -x^2 - 6x + 16$ x-akselin yläpuolella. Millä etäisyydellä x-akselista sivun AB on oltava, jotta kolmion pinta-ala olisi mahdollisimman suuri?

9. Oletetaan, että uuden auton hinta nousee 5 % vuodessa, kun taas käytetyn auton arvo alenee 10 % vuodessa. Matti ja Liisa ostavat yhtä aikaa uudet samanlaiset autot. Liisa vaihtaa uuden aina kolmen vuoden välein, kun taas Matti vaihtaa autoa neljän vuoden välein. 12 vuoden kuluttua molemmilla on taas uusi auto. Kumpi on käyttänyt auton hankintaan enemmän rahaa ja kuinka monta % enemmän näiden 12 vuoden aikana, kun he aina vaihdossa ostavat samanlaiset autot?

10. a) Esitä vektori **u** = -3**i** - 4**j** + **k** muodossa **u** = **a** + **b** siten, että **a** kuuluu vektoreiden **i** + **j** + **k** ja **j** määräämään tasoon ja **b** on pituudeltaan mahdollisimman pieni.

b) Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n siten, että $\sum_{k=1}^{n} k!$ on jonkin kokonaisluvun neliö.

MP96 = 30

1. Ratkaise yhtälö $x(x^2 - 9) = x^2 + 3x$

2. a) Laske $\int_1^2 \frac{dx}{(x+2)^2}$

b) Ratkaise yhtälö $\sin(2x + \pi/3) = ½$

3. Määritä reaaliluku t siten, että vektorin **a** + t**b** pituus on 10, kun **a** = 4**i** + 2**j** ja **b** = 3**i** - **j**. Mikä on tällöin vektorin **a** - t**b** pituus.

4. Hintavertailussa huomattiin, että erästä tuotetta myytiin kolmenlaisissa pakkauksissa A, B ja C. Pakkaus A oli 50 % kalliimpi kuin pakkaus C ja 20 % kevyempi kuin pakkaus B. B puolestaan oli 50 % painavampi kuin pakkaus C, mutta maksoi 25 % enemmän kuin pakkaus A. Minkä pakkauksen valinta oli edullisin?

5. a) Missä pisteessä pisteiden (2,-1,5) ja (-3,2,-3) kautta kulkeva suora leikkaa xy-tason?

b) Erästä bakteeriviljelmää kasvatetaan pullossa. Bakteerit lisääntyvät jakautumalla ja niiden määrä kaksinkertaistuu aina yhdessä minuutissa. Kello 11.00 pulloon pannaan 100 bakteeria. Pullo on täynnä kello 12.00. Milloin pullo oli puolillaan?

6. a) Yksinkertaisella taskulaskimella, jossa on kahdeksan numeron näyttö ilman eksponenttiesitystä, lasketaan yhteen peräkkäisiä kokonaislukuja alkaen luvusta 1. Montako laskua laskimella voidaan laskea?

b) Laatikossa on 100 arpaa, jotka on numeroitu 1,2,3,...,100. Arpojen hinta on 10 mk ja voittoarpoja ovat ne, joissa esiintyy numero 5. Muut arvat eivät voita. Kuinka suuri pitäisi voiton vähintään olla, jotta arpa kannattaisi ostaa?

7. Suorakulmaisen kolmion sivut ovat 6 cm, 8 cm ja 10 cm. Ympyrä, jonka säde on 1 cm, kiertää pyörien kolmion sisällä niin, että se koko ajan koskettaa jotakin kolmion sivua. Kuinka pitkän matkan ympyrän keskipiste on kulkenut, kun ympyrä on palannut takaisin lähtöpaikalleen?

8. a) Osoita, että $x - 1 - \frac{1}{2}(x - 1)^2 \leq \ln x \leq x - 1$, kun $x \geq 1$

b) Suoran ympyräkartion vaipan sisäpinta on peiliä ja kartion korkeus on 50 cm sekä akselileikkauksen huippukulma 36°. Valonsäde tulee akselin suuntaisesti ja osuu kartion vaipan sisäpintaan juuri ja juuri pohjaympyrän kehällä, josta se heijastuu kartion sisään. Säde jatkaa kulkuaan heijastuen yhä uudelleen kartion sisäpinnasta. Kuinka pitkän matkan valonsäde kulkee kaikkiaan kartion sisällä?

9. a) 24 m leveän rotkon yli riippuu 26 m pitkä köysi. Apina on oppinut ylittämään rotkon köyttä pitkin, jolloin se laskeutuu aluksi pystysuoraan pitkin rotkon seinää kunnes köysi kiristyy. Sen jälkeen se siirtyy köyttä pitkin toiselle puolelle. Minkä käyrän siirtymäreitti köyttä pitkin muodostaa? Määritä käyrän yhtälö koordinaatistossa, jossa x-akseli on rotkon yli poikittain ja origo on rotkon keskikohdalla.

b) Osoita, että kun p on jaoton kokonaisluku ja suurempi kuin 3, niin $p^2 - 1$ on aina jaollinen 12:lla.

10. Olkoot f ja g derivoituvia funktioita välillä [a,b] siten, että ne saavat samat arvot välin päätepisteissä. Osoita, että funktioiden kuvaajille piirretyt tangentit ovat yhdensuuntaiset siinä välin [a,b] pisteessä, jossa kuvaajien välinen pystysuora etäisyys on suurin.

MP97 = 31.

1. Ratkaise epäyhtälö $\frac{x}{10} - \frac{3x + 2}{4} < \frac{2}{5} + x$

2. a) Tornikellossa on viisareiden kärkien väli kello 12.00 on 21 cm ja kello 06.00 väli on 1,47 m. Mikä on kärkien väli kello 03.00?

b) Määritä kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella sen kulman suuruus, jonka vektori $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ muodostaa z-akselin kanssa.

3. Laske sen äärellisen alueen pinta-ala, jota rajoittavat suora $x = 1$ sekä käyrät $y = x + \sqrt{x}$ ja $y = x - \sqrt{x}$.

4. a) Kaksi lieriön muotoista säiliötä on vierekkäin. Toisen pohjan säde on 4,0 m ja siinä on vettä 12,5 m korkeudelta. Toisen pohjan säde on 3,0 m ja se on tyhjä. Ensin mainitusta säiliöstä pumpataan vettä toiseen nopeudella 10 m^3 minuutissa. Kuinka kauan on pumpattava, että veden pinnat olisivat yhtä korkealla kummassakin säiliössä?

b) Kuinka monta ratkaisua (x,y) on yhtälöllä $\frac{x}{19} + \frac{y}{95} = 1$, kun x ja y ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja?

5. Määritä vakio a siten, että funktion $f : f(x) = 2x^3 + 3a^2x^2 + 1$ maksimiarvo on kolme kertaa niin suuri kuin minimiarvo.

6. a) Pallon keskipiste on säännöllisen tetraedrin pohjatasossa ja pallo sivuaa tetraedrin muita tahkoja. Laske pallon säde, kun tetraedrin särmän pituus on a.

b) Opettaja opettaa todennäköisyyslaskennan kurssin 30 vuoden ajan joka vuosi kolmelle eri opetusryhmälle. Jokaiselle ryhmälle hän kertoo kolme keskenään erilaista vitsiä. Kuinka monta eri vitsiä hänen vitsivarastoonsa pitää kuulua, ettei hän kertoisi millekään kahdelle ryhmälle kolmea vitsiä, jotka kaikki olisivat samoja?

7. a) Kahdella kolmiolla on sama pinta-ala. Toisen kolmion sivut ovat 5, 5 ja 4 cm. Toisessakin kolmiossa on kaksi 5 cm mittaista sivua. Miten pitkä on tämän kolmion kolmas sivu, kun kolmiot eivät ole yhteneviä?

b) Missä lukujärjestelmässä 10-järjestelmän luku 7642 kirjoitetaan 1234?

8. Maapalloa suojaava otsonikerros pysäyttää normaalisti 95 % haitallisesta UV-säteilystä. Läpi päässeen säteilyn määrä vähenee eksponentiaalisesti kerroksen paksuuden funktiona. Viime vuoden keväällä huomattiin Pohjois-Suomen yläpuolella olevan otsonikerroksen ohentuneen 30 % normaalista. Kuinka monta prosenttia kyseessä olevan haitallisen UV-säteilyn määrä kasvoi tämän vuoksi Pohjois-Suomessa?

9. Mille välille $]0,\frac{1}{2}\pi[$ kuuluvilla h:n arvoilla yhtälöllä $\cos^2 x + \ln(\tan h) = 0$ on ratkaisuja?

10. a) Osoita, että kaikilla kokonaisluvuilla n > 1 toteutuu $\ln(n + 1) < \sum_{1}^{n} \frac{1}{k} < \ln(n) + 1$

b) Jääpalan sulamisnopeus $\frac{dv}{dt}$ on tietyssä lämpötilassa suoraan verrannollinen palan pinta-alaan. Kuinka kauan kestää sellaisen kuution muotoisen palan sulaminen, jonka särmä on 10 cm, kun tunnin kuluttua oli kuution tilavuudesta sulanut 25 %?

MP98 = 32.

1. Ratkaise yhtälö $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{-x^2 + 3x}$

2.a Henkilön A kuukausipalkasta pidätettiin heinäkuussa 38,0 % veroa. Kun elokuussa tuli 2,0 % palkankorotus veroprosentin pysyessä ennallaan, kasvoi A:n nettopalkka määrällä 130,20 mk. Määritä A:n brutto- ja nettopalkka korotuksen jälkeen.

2.b Supista lauseke $\frac{x^2 - 2\sqrt{3}\cdot x - 1}{x - \sqrt{3} - 2}$. Millä x:n arvolla lausekkeen arvo on $2 + \sqrt{3}$?

3.a Järvellä tarkkaillaan korkealla rantakalliolla kasvavaa puuta. Puun latva näkyy korkeuskulmassa 21° ja tyvi korkeuskulmassa 17°. Kun tullaan 100 m lähemmäksi, näkyy latva korkeuskulmassa 32°. Laske puun korkeus.

3.b Millä x:n arvoilla $\int_0^x (4t - t^2)dt \geq \int_0^{2x} (4t - t^2)dt$?

4. Muodosta sen käyrän yhtälö, jonka jokaisen pisteen lyhin etäisyys ympyrästä $x^2 + y^2 = 1$ on yhtä suuri kuin etäisyys suorasta y = -2. Piirrä tämä käyrä.

5.a Laske lausekkeen $(\sin^2 x + 1) : \cos^2 x$ tarkka arvo, kun $\tan x = 2/3$.

5.b Missä pisteessä pisteiden (-2,3,2), (1,-1,3) ja (-2,2,1) kautta kulkeva taso leikkaa z-akselin?

6. Määritä jokin polynomifunktio f, joka kaikilla x:n reaaliarvoilla toteuttaa yhtälön
$4 f(x) - (x + 1) f\,'(x) = x^3 + 6x - 7$.

7. Muovailuvahasta, jota on 1 dm^3, tehdään kaksi umpinaista kuutiota. Määritä näiden kuutioiden pinta-alojen summan suurin arvo.

8.a Automaattisorvi valmistaa metalliakseleita. Akseli on valmistustarkoitukseensa käyttökelvoton, jos sen halkaisija on alle 6,10 mm tai yli 6,30 mm. Tuotannossa valmistuvien akseleiden halkaisija on normaalisti jakautunut siten, että keskiarvo on 6,20 mm ja keskihajonta on 0,04 mm. Kuinka monta käyttökelvotonta akselia keskimäärin on 10 000 kappaleen valmistuserässä?

8.b Suoran ympyräkartion pohjan säde on r. Kartion sisään piirretyn suurimman mahdollisen pallon säde on ½r. Määritä kartion korkeus. Kuinka monta prosenttia pallon tilavuus on kartion tilavuudesta?

9.a Osoita, että $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n - 2)(3n + 1)} = \frac{n}{3n + 1}$, kun n = 1, 2, 3, …

9.b Polkupyöräilijä lähtee polkematta ja jarruttamatta noin 0,50 km pitkää loivaa alamäkeä. Pyöräilijän nopeus $v = v(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $v\,' = 0{,}66 - 0{,}060v$, missä matkan yksikkö on 1 m, ajan 1 s ja nopeuden 1 m/s. Määritä nopeus v ajan t funktiona, kun $v(0) = 0$, sekä osoita, että nopeus on yli 10 m/s.

10.a Määritä se välin [0,2] reaaliluku a, jolla integraalin $\int_0^2 | x^2 + (1 - a)x - a |dx$ arvo on pienin.

10.b Kompleksilukujoukossa määritellään jono z_n seuraavasti: $z_0 = 2i$, $z_{n+1} = \frac{z_n + i}{z_n - i}$, n = 0, 1, 2, 3, … Osoita, että summalla $z_{3n} + z_{3n+1} + z_{3n+2}$ on n:n arvosta riippumaton valioarvo.

MP99 = 33

1. Ratkaise yhtälö $\frac{x}{x + 1} - \frac{1}{3x - 3} = 1$.

2.a) Millä vakion a arvoilla vektorin $a(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + \mathbf{j}$ pituus on pienempi kuin 29?

2.b) Määritä funktion $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5$ suurin ja pienin arvo suljetulla välillä $-1 \le x \le 2$.

3.a) Suojatietä kuvaava liikennemerkki on neliö, jonka yksi sivu on 60 cm. Sen sisään on rajattu tasasivuinen kolmio, jonka yksi kärki on merkin yläreunan keskipisteessä ja kaksi muuta merkin pystysivuilla. Määritä neliön ja kolmion alojen suhteen tarkka arvo. Montako prosenttia neliön ala on suurempi kuin kolmion ala?

3.b) Paraabeli, jonka akseli on y-akselin suuntainen, kulkee pisteen (-1,3) kautta ja se sivuaa pisteessä (2,3) suoraa $y = x + 1$. Määritä paraabelin huippu.

4.a) Kuluttajahintaindeksi nousi eräänä ajanjaksona 125,6 pisteestä 138,5 pisteeseen. Henkilön bruttopalkka nousi samana ajanjaksona 14 500 mk:sta 16 800 mk:aan, mutta samalla verot nousivat 31 prosentista 33 prosenttiin. Miten muuttui henkilön nettoansion reaaliarvo?

4.b) Ammattioppilaitos ottaa 108 uutta opiskelijaa. Timo jää neljännelle varasijalle. Millä todennäköisyydellä Timo saa kuitenkin opiskelupaikan, kun 5 % opiskelijoista peruuttaa opiskelupaikkansa?

5. Osoita, että $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\sin(x - \pi/6)$. Määritä funktion $\sqrt{3}\sin x - \cos x$ suurin ja pienin arvo sekä niitä vastaavat muuttujien arvot.

6. Käyrä $y = 1 - 2e^{-x}$ sekä suorat $y = 1$, $x = \ln 2$ ja $x = a$ $(a > \ln 2)$ rajoittavat alueen. Alue pyörähtää suoran $y = 1$ ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuuden raja-arvo, kun luku a kasvaa rajatta.

7. Olkoon $y = f(x) = x^n e^{-x}$, $x \geq 0$, missä n on positiivinen kokonaisluku. Suorakulmion OABC yksi kärkipiste on origossa O, kärki A x-akselilla, B käyrällä $y = f(x)$ ja C y-akselilla. i) Muodosta suurimman mahdollisen suorakulmion OABC alan lauseke A(n) ii) Yhtälöllä $a(n) = 3125e^{-5}$ on täsmälleen yksi ratkaisu. Etsi tämä ratkaisu kokeilemalla.

8. Suoran neliöpohjaisen pyramidin pohjan särmä on 6 dm ja kokonaispinta-ala 96 dm^2. Pyramidi leikataan pohjan suuntaisella tasolla siten, että pyramidin tilavuus puolittuu. Laske leikkaustason etäisyys pohjatasosta millimetrin tarkkuudella.

9.a) Origon ja pisteen A(1,1,1) kautta kulkee suora S ja pisteiden B(1,0,0) ja C(0,0,1) kautta kulkee suora T. Laske suorien S ja T välinen lyhin etäisyys.

9.b) Mikä on kompleksitason pistejoukon $|z - (1 - 2i)| = 2$ pienin etäisyys origosta?

10.a) Luvusta ½ otetaan neliöjuuri, tästä neliöjuuri jne. Muodostuu rekursiivinen lukujono $x_1 = \sqrt{½}$ ja $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$, missä n = 1, 2, 3, … Millä arvoilla n on $0{,}99999 < x_n < 1$? Osoita, että lukujono (x_n) on aidosti kasvava.

10.b) Suorakulmaisen särmiön muotoisen laatikon pituuden ja leveyssuunnassa mitatun ympärysmitan summa saa olla enintään metri. Kuinka monta litraa on laatikon suurin mahdollinen tilavuus?

MP00 = 34

1. Ratkaise a) $8x + 2 = \frac{1}{2000}$ b) $x^2 + 289 = 34x$ c) $4x^2 < 1$

2. Pitkän matematiikan lukijoista 14 % ja lyhyen matematiikan lukijoista 40 % ei osallistu ylioppilastutkinnon matematiikan kokeeseen. Kaikista tutkintoon osallistujista matematii-

kan jättää kirjoittamatta 30 %. Luvut on esitetty prosenttiyksikön tarkkuudella. Kuinka monta prosenttia osallistujista on lukenut pitkän matematiikan?

3. Yleisurheilussa naiset kilpailevat 7-ottelussa, jossa osalajien tuloksen muutetaan pisteiksi. Tavoitteena on, että kunkin lajin huipputulos antaisi noin 1000 pistettä. 800 m juoksussa saavutettu aika t muutetaan pisteiksi P kaavalla $P = 0{,}11193(254 - t)^{1{,}88}$. Kaavan antama likiarvo katkaistaan lähinnä pienemmäksi kokonaisluvuksi. a) Kuinka monta pistettä antaa aika 2.15,00? b) Mikä on heikoin aika, joka antaa vielä 1000 pistettä?

4. Reaalilukujen joukossa on määritelty funktio $f(x) = 3x + 1$. Muodosta seuraavat funktiot määritysjoukkoineen: a) $(f(x))^{-1}$ b) $f(x^{-1})$ c) $f^{-1}(x)$ d) $(f \circ f)(x)$.

5. Millä vakion a arvoilla paraabeli $y = \frac{1}{a}x^2$ sivuaa ympyrää $x^2 + y^2 - 3y + a = 0$?

6. Mikä xy-tason suoran $y = x$ piste on lähinnä pistettä (3,4,5)?

7. Suuntaissärmiön ABCDA'B'C'D' kärjestä A lähtevät särmävektorit ovat $\mathbf{AB} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{AD} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ja $\mathbf{AA'} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Laske tahkojen ABCD ja A'B'C'D' välinen etäisyys.

8. Kuutio, jonka särmä on s, leikataan avaruuslävistäjän kautta kulkevalla tasolla, joka puolittaa kaksi kuution särmää. Laske leikkauskuvion ala.

9. Osoita, että epäyhtälö $e^{2x} > 1 + 2x + 2x^2$ toteutuu kaikilla x:n positiivisilla arvoilla.

10. Olkoon $f(x) = ax + b$ ja $g(x) = |\, f(x)\, |$. Osoita, että $g'(x) = \frac{a|ax + b|}{ax + b}$, kun $x \neq -\frac{b}{a}$

11. Kaksi henkilöä pelaa korttipeliä, jossa on kuusi korttia, mukana yksi pataässä. Kortit sekoitetaan ja asetetaan pöydälle kuvapuoli alaspäin ja arvotaan vuorot. Pelin aloittaja nostaa yhden kortin. Jos se on pataässä, hän on hävinnyt pelin. Muussa tapauksessa hän sekoittaa nämä 6 korttia ja asettaa ne takaisin pöydälle. Toinen pelaaja nostaa vuorostaan yhden kortin. Jos se on pataässä, hän on hävinnyt pelin. Muussa tapauksessa hän sekoittaa kortit ja asettaa ne pöydälle. Näin jatketaan vuorotellen, kunnes voittaja on selvinnyt. Laske todennäköisyys sille, että aloittaja voittaa pelin.

12. Määritä integraali $I(x) = \int_0^x |x\sin t|\, dt$, jossa $0 \leq x \leq 2\pi$.

13. Montako nollakohtaa on funktiolla $f(x) = x^2 - \ln(2 - x)$? Määritä nollakohtien likiarvot neljän desimaalin tarkkuudella käyttämällä jotain numeerista likiarvomenetelmää. Perustele käyttämäsi menetelmä.

14. Osoita, että Pascalin kolmion sen rivin, jonka toinen luku on n, lukujen summa on 2^n.

15. Määritä funktiot $y = y(x)$, joille pätee $y' \cdot x^2 = y^2$. Mikä yksittäisratkaisu toteuttaa ehdon $\lim_{x \to \infty} y(x) = -\frac{1}{3}$?

MP01 = 35

1. Derivoi lauseke a) $6x^2 - 2001$ b) $(6x + 2)^2$ c) $\cos(6x + 2)$.

2. Yhtälön $2x^2 - 3x - a = 0$ toinen juuri on 1. Laske toinen.

3. Matemaatikko Karl Friedrich Gauss laski 9-vuotiaana laskentotunnilla summan 81 297 + 81 495 + 81 693 + … + 100 693. Pystytkö samaan?

4. Television kuvaruudun koko ilmoitetaan tuumissa mitattuna ruudun lävistäjän pituutena. Uusimmissa malleissa on kuitenkin mahdollista valita eri muotoisia kuva-aloja. Kahdessa 32":n televisiossa on perinteisen mallin A ruudun muoto ilmoitettu suhdelukuna 3:4 ja laajakuvamallin B vastaavasti 9:16. Vertaa ruutujen pinta-aloja prosentuaalisesti toisiinsa.

5. Eräässä lukion opetusryhmässä on 15 tyttöä. Laske ryhmän poikien lukumäärä, kun umpimähkään valitut kaksi oppilasta ovat molemmat tyttöjä todennäköisyydellä 1/6.

6. Olkoon $x > 0$ sekä $A = [0,2x]$ ja $B = [3x - 2,\infty[$. Millä x:n arvoilla a) joukot A ja B ovat erilliset b) $A \cap B = A$ c) $6 \notin A \cup B$?

7. Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 15 \\ x - y = 15 \end{cases}$.

8. Olkoon $f(x) = \begin{cases} ax + b\,, & x \le 2 \\ x^2 - 6x + 9 + a, & x > 0 \end{cases}$. Määritä vakiot a ja b siten, että funktiot f ja f ’ ovat kaikkialla jatkuvia.

9. Kolmion sivujen keskipisteet ovat (0,0) , (4,8) ja (10,2). Laske kolmion pinta-ala.

10. Ratkaise yhtälö $\int_{-1}^{x} |t - 1|\,dt = x$.

11. Pisteet (1,1,1) , (3,1,0) ja (3,-2,-1) määräävät tason. Laske pallon $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 1$ pinnan lyhin etäisyys tästä tasosta.

12. Määritä sen pinta-alaltaan mahdollisimman pienen kolmion ala, jota rajoittavat koordinaattiakselit ja ellipsin $x^2 + 4y^2 = 1$ tangentti.

13. Isä menee poikiensa Nikon, Tomin ja Aleksin kanssa kauppaan. Pojat esittävät isälle kolme toivetta: Jos Niko ostaa jäätelön, niin Aleksi ostaa pikkukarkkeja ja Tomi ei osta suklaalevyä. Jos Tomi ostaa suklaalevyn, niin Niko ostaa jäätelön tai Aleksi ostaa pikkukarkkeja. Niko ostaa jäätelön ja sen lisäksi Tomi ostaa suklaalevyn tai Aleksi ostaa pikkukarkkeja. Onko näiden kolmen toiveen mahdollista toteutua yhtä aikaa? Jos on, niin miten?

14. Muodosta funktion $f(x) = \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$, jossa $-1 < x < 1$, kolmannen asteen Taylorin polynomi kohdassa $x = 0$. Laske sen avulla nelidesimaalinen likiarvo luvulle ln 3. Kuinka suuri suhteellinen virhe tällä tavoin syntyy, kun oikeana arvona käytetään laskimen antamaa lukua?

15. Olkoon kompleksiluku z = x + iy, jossa x ja y ovat reaalilukuja. Määritä funktion $f : C \to R : f(z) = zz^* + z + z^*$ suurin arvo kompleksitason alueessa $x^2 + y^2 \leq 4$. (z* on z:n liittoluku)

MP02 = 36

1. Sievennä a) $\frac{9 - x^2}{x^2 - 6x + 9}$ b) $\sqrt[5]{a^{-2}a^{2002}}$ c) $\log_5 4 + 2\log_5 \frac{\sqrt{5}}{2}$

2. Kouvolasta pääsee rautateitse itään Lappeenrantaan, pohjoiseen Mikkeliin sekä länteen Lahteen. Lahdesta Lappeenrantaan on matkaa 148 km, Lappeenrannasta Mikkeliin 176 km ja Mikkelistä Lahteen 152 km. Kuinka pitkä matka on Lahdesta Kouvolaan?

3. Muovailuvahasta tehty kuutio muovataan säännöllisen tetraedrin muotoiseksi. Kuinka monta prosenttia sen pinta-ala tällöin muuttuu?

4. Naisten 7-ottelussa korkeushypyn tulos h cm antaa $1{,}84523(h - 75{,}0)^{1{,}348}$ pistettä. a) Mikä tulos antaa 1000 pistettä? b) Tilastot osoittivat, että naisottelijoiden korkeushyppytulokset ovat parantuneet keskimäärin 5 cm. Miten kerrointa 1,84523 olisi muutettava, jotta tulos 195 cm antaisi saman pistemäärän kuin tulos 190 cm vanhalla asteikolla?

5. Osoita, että $\frac{a}{b} + \frac{1}{a} > \frac{1}{b} + 1$, kun a ja b ovat reaalilukuja ja $a > b > 1$.

6. Ratkaise yhtälö $p(x) = p(9)$, kun $p(x) = x - \sqrt[3]{x - 1}$.

7. Määritä vakiot a, b ja c siten, että funktio $(ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ on funktion $(3x^2 + x - 6)e^{-2x}$ integraalifunktio.

8. Kuinka kaukana piste P(2,3,1) on pisteiden A(-4,0,1) ja B(2,-3,7) kautta kulkevasta suorasta? Laske kolmion PAB pinta-ala.

9. Positiiviset koordinaattiakselit erottavat funktion y = y(x) kuvaajasta yhden yksikön pituisen janan. Osoita, että funktio y toteuttaa xy-tason I neljänneksessä Clairaut' in yhtälön $y' = (xy' - y)\sqrt{1 + y'^2}$.

10. Miten pitkät ovat lyhimmät tikkaat, jotka ylettyvät pystysuoralta seinältä 2,0 m korkean ja 1,0 m seinästä sijaitsevan pystysuoran aidan yli maahan?

11. Yhtälöpari $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$, missä parametri t saa kaikki reaaliarvot, määrittelee käyrän nimeltä astroidi. Osoita, että astroidin yhtälö koordinaattimuodossa on $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{16}$. Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy tämän astroidin pyörähtäessä x-akselin ympäri.

12. Jokeripelissä arvotaan seitsemän numeroa väliltä 0…9. Kerran oikeassa rivissä on esiintynyt peräkkäisinä numeroina 88888. Mikä on tällaisen täsmälleen viisi peräkkäistä kahdeksikkoa sisältävän rivin todennäköisyys?

13. Olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että syt(a,b) · pyj(a,b) = ab. Määritä edellistä tietoa käyttäen pyj(2125,2652).

14. Määritä integraalin $\int_0^2 \ln(x + 1)dx$ likiarvo puolisuunnikasmenetelmällä käyttäen viittä funktion arvoa. Määritä integraalin tarkka arvo. Kuinka suuri on likiarvon suhteellinen virhe?

15. Lämpömittari, jonka lukema on 10°C, tuodaan huoneeseen, jonka lämpötila on 18°C. Mittarin lämpötila nousee nopeudella, joka on suoraan verrannollinen huoneen ja lämpömittarin lämpötilaeroon. Minuutin kuluttua mittarin lukema on 14°C. Kuinka pitkän ajan kuluttua mittari ilmoittaa huoneen lämpötilan alle 0,1°C tarkkuudella?

MP03 = 37

1. Olkoon funktio $f(x) = \frac{2 - x}{x^2 - 4}$ a) Millä muuttujan x arvoilla funktio f on määritelty? b) Missä kohdissa funktio f saa arvon i) 0 ii) 1? c) Missä pisteessä suora y = x kohtaa käyrän y = f(x) ?

2. Oletetaan, että hinnat nousevat 3,4 % ja nettopalkat 4,2 % vuosittain. a) Kuinka monta prosenttia hinnat nousevat 12 vuodessa? b) Missä ajassa nettopalkat nousevat 42 %?

3. Suorakulmion toisen lävistäjän päätepisteistä toiselle lävistäjälle piirretyt normaalit jakavat tämän lävistäjän kolmeen osaan, joista jokaisen pituus on 1. Laske suorakulmion pinta-ala.

4. Laske pisteestä (3,3) ympyrälle $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ piirrettyjen tangenttien välinen kulma 0,1° tarkkuudella

5. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja f(n) = 102n+2. Osoita, että lauseke f(n+2) - f(n) on jaollinen luvulla 9. Millä muilla luvuilla tämä lauseke on jaollinen?

6. Pertti onnistuu koripallon vapaaheitossa todennäköisyydellä 62 %. Laske todennäköisyys, että hän viidellä vapaaheitolla saa täsmälleen kolme peräkkäistä koria.

7. Säännöllisen tetraedrin särmä on 3. Sen sisään on piirretty suora ympyräpohjainen kartio siten, että tetraedrin ja kartion korkeusjanat yhtyvät. Lisäksi kartion pohjaympyrä sivuaa tetraedrin pohjakolmion sivuja. Laske kartion tilavuus.

8. a) Miten määritellään funktion jatkuvuus kohdassa x = a? b) Anna esimerkki funktiosta, joka on kaikkialla määritelty ja epäjatkuva vain kohdassa x = 2. Piirrä kuvaaja. c) Määritä vakiot a ja b (b > a) siten, että funktio $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, \text{ kun } a \le x \le b \\ 2x^2 + x - 2, \text{ kun } x < a \text{ tai } x > b \end{cases}$ on kaikkialla jatkuva.

9. Olkoon funktio f derivoituva välillä I. Käyrä y = f(x) on välillä I alaspäin kupera, jos se on tällä välillä jokaisen tangenttinsa yläpuolella sivuamispistettä lukuunottamatta eli jos derivaatta f ’(x) on välillä I aidosti kasvava. a) Anna esimerkki funktiosta, jonka kuvaaja on alaspäin kupera kaikkialla

b) Millä muuttujan x arvoilla käyrä $y = f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$ on alaspäin kupera?

10. Olkoon funktio $f : [-7, -4] \to [1,31]$, $f(x) = 2x^2 + 12x + 17$. a) Osoita, että funktiolla on käänteisfunktio. b) Laske $f^{-1}(17)$ c) Laske $(f^{-1})'(7)$.

11. Käyrä $y = \cos 2x + \sin x - 1$ rajoittaa x-akselin kanssa välillä $[0, \frac{1}{2}\pi]$ kanssa kaksi aluetta. Laske näiden alueiden pinta-alojen summa.

12. Yksikkösäteisen puoliympyrän sisään on piirretty tasakylkinen kolmio ABC siten, että kärki A on puoliympyrän halkaisijan päätepiste. Toinen kylki on jänne AC ja toinen kylki AB sijaitsee puoliympyrän halkaisijalla. Laske kolmion ABC suurin mahdollinen pinta-ala.

13. Suuntaissärmiön avaruuslävistäjänä on vektori $\mathbf{AG} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, särmä AB on vektorin $\mathbf{k}$ suuntainen, särmä AD on vektorin $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ suuntainen ja särmä AE on vektorin $-2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ suuntainen. Määritä suuntaissärmiön avaruuslävistäjä HB sekä laske vektorien **AG** ja **HB** välinen kulma.

14. Klasu suunnittelee mahdollisimman suuren suorakulmaisen särmiön muotoisen tarvelaatikon siten, että särmien pituuksien summa on 8 m. Mikä on tarvelaatikon suurin mahdollinen tilavuus?

15.a) Osoita de Morganin toisen lain $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ paikkansapitävyys totuustaulukoiden avulla. b) Formalisoi lause: ”Jos maa kiertää aurinkoa, niin kuu kiertää maata, joten, jos maa ei kierrä aurinkoa, niin kuu ei kierrä maata”. Tutki tekemällä totuustaulukko onko lause lauselogiikassa pätevä eli tautologia.

MP04 = 38

1. Laske $f'(-1)$, kun a) $f(x) = (3x + 2)^4$, b) $f(x) = e^{3x+2}$.

2. Ratkaise x yhtälöstä a) $x^2 - 7x = 2x - 14$ b) $x^2 - rx = sx - rs$.

3. Suunnistuskartan mittakaava on 1:10 000. Kuinka pitkä on ympyränmuotoisen tekolammen ympärysmitta kartalla, kun lammen pinta-ala on 1,5 ha?

4. Presidentti Putin ilmoitti maansa taloudelliseksi tavoitteeksi 10,0 prosentin vuotuisen kasvun seuraavien 10 vuoden aikana. a) Montako prosenttia kasvun kaikkiaan tulisi olla tuona 10 vuoden aikana? b) Oletetaan, että ensimmäisenä viisivuotiskautena vuotuinen kasvu jää kuitenkin 5,0 prosenttiin. Kuinka suuren tulisi vuotuisen kasvun olla jälkimmäisellä viisivuotiskaudella, jotta Venäjällä päästäisiin alkuperäiseen tavoitteeseen?

5. Määritä vakiot t ja s siten, että epäyhtälö $x^2 - 5x + t > 0$ toteutuu kaikilla muilla x:n arvoilla, paitsi niillä, jotka kuuluvat väliin [s, 3].

6. Geometrisessa lukujonossa (a_i) on $a_4 = 2$ ja $a_6 = 8$. Laske $\sum_{i=1}^{10} a_i$.

7. Lahjakkaiden ihmisten yhdistys Mensa ry hyväksyy jäsenikseen pyrkijät, jotka ylittävät järjestetyssä testissä tietyn pisterajan. Laske tämä rajapistemäärä, jonka ylittää kaksi pro-

senttia pyrkijöistä, kun testipisteiden oletetaan jakautuvan normaalisti odotusarvon ollessa 100 ja keskihajonnan 24 pistettä.

8. Vesisäiliö täytetään hanojen A ja B kautta ja tyhjennetään viemäriputken C kautta. Jos molemmat hanat ja viemäriputki ovat auki samanaikaisesti, säiliö täyttyy tunnissa. Jos A ja C avataan yhtä aikaa, säiliö täyttyy kahdessa tunnissa. Jos taas B ja C ovat auki samanaikaisesti, säiliö täyttyy neljässä tunnissa. Missä ajassa täysi säiliö tyhjenee viemärin C kautta?

9. Pallon sisälle asetetaan suora ympyräkartio. Kuinka monta % tilavuudeltaan suurin kartio täyttää pallosta?

10. Vektorin $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ alkupiste on origo ja vektorin **b** alkupiste vektorin **a** kärjessä. Minkä käyrän vektorin **b** kärki piirtää, kun $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$?

11. Käyrän $y = f(x)$ yhtälö parametrimuodossa on $\begin{cases} x = 1 + \sin t \\ y = 2 - \cos 2t \end{cases}$, missä $t \in R$. Määritä funktion f ääriarvot.

12. Laske f(1) - f(-2), kun $f(x) = \int_{-1}^{x} |1 - e^t|\, dt$.

13. Määritä ne käyrät, joiden mielivaltaiseen pisteeseen asetetun tangentin kulmakerroin on yhtä suuri kuin sivuamispisteen y-koordinaatin neliö. Mikä käyristä kulkee pisteen (2, 3) kautta?

14. Olkoon x_1 jokin luvun $\sqrt{a}$, $a \geq 0$, likiarvo. Johda Newtonin menetelmään perustuva iteraatiokaava

$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$, n = 1, 2, 3, ... neliöjuuren likiarvon laskemiseksi. Laske kaavaa käyttäen luvun 322 004 neliöjuuren viisidesimaalinen likiarvo.

15. Muodosta käyrälle $\frac{x}{y} + \frac{y^3}{x^3} = 2$ pisteeseen (-1, -1) asetetun tangentin yhtälö.

Vastauksia preliminääritehtäviin

OP90 = 21
1. 2 ja 3 tai -1 ja 0
2.a) sama eksponentti!
2.b) $x \leq -8$, $x > -2\frac{1}{2}$
3. 58½
4.a) 4,2 km
4.b) lg 6 / lg 2
5. (-13,14), (17,-16)
6.a) 2000, 1999
6.b) 1° r = 7½, s = 19½,
2° r = -1/3, s = -1/3
7.a) 59,3 %
7.b) $2 - \sqrt{2}$
8.a) $\frac{1}{2}e^2 - 1\frac{1}{2} \approx 3{,}19$
8.b) 120
9.a) 74 %
9.b) $S = \sqrt[4]{1\frac{1}{2}}$, $p = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$
10. f kasvava

MP90 = 22
1. x = 1, x = 0, x = ± i
2. $4\sqrt{2}/3$
3.a) $P(x) = x^2 - 2x + 2$
3.b) 4/3
4.a) $\pm\sqrt{3}$
4.b) lim = 0 , a = 2
5.a) A = 9 cm^2
5.b) tang. ja ei lävistä
6. fkt:n kulku
7. 1:1
8. x = 0,61
9.a) 1° 138v, 2° äärettömiin
9.b) 0,90
10.a) $1 + \sqrt{6}/3 \approx 1{,}82$ cm
10.b) (0,1,2)

OP91 = 23
1. $F(x) = x^3/3 + 2x^2 - 9$
2. 17,6 %
3.a) S = 5, p = 1

3.b) $a < x < 1$
4. 5,6 %
5. A = 3 1/12
6.a) min f(-1)= -2 ja f(1)=0 Max f(½) = 1/4
6.b) $x = \sqrt{3}$, $y = 3\sqrt{3}$
7.a) 197
7.b) -8
8.a) p = 5/16, E$\underline{x}$ = 6 min
8.b) $100/\pi\cdot\sqrt{2/3}$ % ≈ 26 %
9.a) $8\sqrt{5}/7 = 2{,}56$
9.b) $4x^2 + 6x + 4$, Mj = [-½,2], Aj =[2,32]
10. 3:4

MP91 = 24
1.a) $-\sqrt{3}/4$
1.b) 60 885,60 mk
2. x = ½, x = 2, x = -1½
3. x = 5/4
4.a) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 20$
4.b) $2\sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 1{,}0$
5.a) x = -3
5.b) f aid. kasv., x ≈ 0,43
6. $(\pi + 1)/(\pi - 1) \approx 1{,}9$
7.a) i) 18 278, ii) 75/676 ≈ 0,111
7.b) 17 km
8. 48 min, 9 km
9.a) $25\pi/16(561-384\sqrt{2})$% ≈ 88,1 %
9.b) $\alpha = 82{,}4°$
10. (-1,-5)

MP92 = 25
1. x = 0, x = 3
2.a) 55 2/3
2.b) 12/13, 5/13
3.a) 2x - 1 ja x + 1
3.b) 27,3
4. $3/\sqrt[3]{2}$
5. x = -2, x = -1/3, x = ± 1
6.a) 1430
6.b) 12,2 m
7.a) |AB| = ½
7.b) 0,34
8. $5\sqrt{3} + \sqrt{5}$

9. Pistetulo = 0
10.a) $\frac{1}{2}a(\sqrt{2} - 1)$
10.b) $\begin{cases} x = 58 \\ y = 55 \end{cases}$ tai $\begin{cases} x = 170 \\ y = 169 \end{cases}$

OP93 = 26
1.a) x > 4 tai x < 1½
1.b) 19,6 %
1.c) 16 340 mk
2. 24
3.a) $P(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 25$
3.b) p = 3 ; r = 17 ja k = 80
4. 4½
5.a) 0,5877
5.b) 1414
6.a) Ei
6.b) 96,33 cm
6.c) S = 1½ , p = -3
7.a) (-1,-4,1)
7.b) 35 pistettä
7.c) {V} ja {VVVVMMMMM}
8.a) $a = d\sqrt{1/3}$, $h = d\sqrt{2/3}$
8.b) x + y + 1 = 0
9. bx + ay = 2ab
10.a) $\pi - 2$
10.b) 101! + 2, 101! + 3, ... , 101! + 101

MP 93 = 27.
1.a) - ab/(a+b) - 15/16
1.b) Suurin aurinko, pienin kuu
2.a) 5 %
2.b) 6
3. 1/30
4. i ja iv
5. 116 km/h
6.b) v. 2000
7. 0,34 m alapuolella
8. $S = f(\pi/4) = \frac{1}{2}e^{-\pi/4}\sqrt{2}$
$p = f(5\pi/4) = -\frac{1}{2}e^{-5\pi/4}\sqrt{2}$
9.a) 41,3 m
9.b) 462 000
10.a) h(x) =

$\begin{cases} x, \text{ kun } x \in [0,\frac{1}{2}\pi] \\ \pi - x, \text{ kun } x \in]\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi] \\ x - 2\pi, \text{ kun } x \in]1\frac{1}{2}\pi, 2\pi] \end{cases}$
10.b) $y=x^2$, josta pois origo

MP94 = 28.
1. $x \le -3$ tai $x \ge 1$
2.a) -1
2.b) 1° 1,1·109 2° 82 %, 900 %
3. $0 < x \le 2$
4. 24 tuntia/viikko
5.a) $1/3 \le k \le 3$
5.b) x = 6 tai x = 4
6.a) 466
6.b) 27 m
8.a) $2/3\cdot\sqrt{3}$
8.b) 1,6 %
9. 1/50
10.a) 19 m
10.b) $1/3\cdot x^2 + 2/3\cdot x - 1/3$

MP95 = 29.
1. 9 1/3
2. a = 1 , b = 0
3. 4, 5, 6, 7 ja 8
4.a) 770 m
4.b) 4,4 d
5.a) a=-1, $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$
5.b) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{2}$
6.a) {V} ja {V,M,M}
6.b) $r = \sqrt{6} - \sqrt{2}$
7.a) $\pi/24$
7.b) 24,4 %
8. 16 2/3
9. Liisa 3,2 % enemmän
10.a) (-**i** - 4**j** - **k**) + (-2**i** + 2**k**)
10.b) n = 1 tai n = 3

MP96 = 30
1. x = 0, x = -3 , x = 4
2.a) 1/12
2.b) $x=-\pi/12+n\pi$, $x=\pi/4+n\pi$
3. t = 2, jolloin | | = $2\sqrt{5}$, t = -4, jolloin | | = $2\sqrt{65}$

4. C
5.a) (-9/8,7/8,0)
5.b) 11.59
6.a) 14141 lukua
6.b) 53,70 mk
7. 12 cm
8. b) 1,0 m
9.a) $25x^2 + 169y^2 = 4225$

MP97 = 31
1. x > - 6/11
2.a) 1,05 m
2.b) 48,2°
3. A = 4/3
4.a) 22 min 37 s , 22,6 min tai 23 min
4.b) 20 ratkaisua
5. $a = \pm \sqrt[6]{2}$
6.a) $r = a\sqrt{6} / 9$
6.b) vähintään 10 vitsiä
7.a) $2\sqrt{21}$
7.b) 19-järjestelmässä
8. 146 %
9. $0{,}353 \le h \le \pi/4$
10.b) 11 tuntia.

MP98 = 32
1. x = 2
2.a 10 710 mk ja 6 640,20 mk
2.b $x - \sqrt{3} + 2$, $2\sqrt{2}$
3.a 20 m
3.b $x = 0$ tai $x \ge \frac{18}{7}$
4. $y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{2}$
5.a $1\frac{8}{9}$
5.b $(0,0,2\frac{1}{3})$
6. $f(x) = x^3 + 1½x^2 + 3x – 1$
7. 7,6 dm^2
8.a n. 120
8.b h = 4r/3 ; 37,5 %
9.b $v = 11 - 11e^{-0,060t}$
10. $a = \sqrt{5} - 1$

MP99 = 33
1. ½
2.a) -21 < a < 20
2.b) 37
3.a) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 131 %
3.b) (½, 2¼)
4.a) Noussut 2 %
4.b) 79 %
5. S = 2, p = -2
6. ½π
7. $A(n) = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}$; n = 4
8. 83 mm
9.a) $\sqrt{6} / 6$
9.b) $\sqrt{5} - 2 = 0{,}24$
10.a) n = 17, 18, 19, …
10.b) 250/27 = 9,3 l

MP00 = 34
1. a) -0,25 b) 17 c) -½ < x < ½
2. 38 %
3. a) 893 pistettä b) 2.07,63
4. a) $\frac{1}{3x+1}$, $x \ne -\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{x} + 1$, $x \ne 0$ c) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$, R d) 9x + 4, R
5. a = 1
6. (3½,3½,0)
7. $\frac{4\sqrt{30}}{15} \approx 1{,}46$
8. $½s^2\sqrt{6} \approx 1{,}22s^2$
11. $\frac{5}{11} \approx 0{,}45$
12. $I(x) = \begin{cases} x - x\cos x, & 0 \le x \le \pi \\ 3x + x\cos x, & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$
13. 2 kpl, -1,0571 ja 0,5876
15. $y = \frac{x}{Cx+1}$, $C \in R$, y = 0, $y = \frac{x}{1-3x}$

MP01 = 35
1. a) 12x b) 72x + 24 c) -6sin(6x + 2)
2. ½
3. 9 109 800
4. A on 12,3 % suurempi kuin B
5. 21
6. a) x > 2 b) 0 < x £ 2/3 c) 8/3 < x < 3
7. x = 64 , y = 49
8. a = -2 , b = 3
9. 144
10. $-\sqrt{3}$
11. 1/7
12. ½
13. Nikolle jäätelö, Aleksille pikkukarkkeja ja Tomille ei suklaalevyä
14. $P_3(x) = 2x + \frac{2x^3}{3}$; 1,4 %
15. 8.

MP02 = 36
1.a) $\frac{3+x}{3-x}$ b) a^{400} c)1
2. 62 km
3. 20 %
4. a) 182 cm b) 1,74235
6. 9
7. a = -1½, b = -2, c = 2
8. d = 6, A = 27
10. 4,16 m
11. 61,3 (ty)
12. $2{,}61 \cdot 10^{-5}$
13. 331 500
14. 1,2821, 3ln 3 - 2, 1,06 %
15. 6 min 20 s

MP03 = 37
1. a) $x \ne \pm 2$ b) i) ei ole ii) -3 c) (-1, -1)
2. a) 49,4 % b) 8,5 vuotta
3. $3\sqrt{2}$
4. 65,7°
5. $3^p \cdot 11^q \cdot 101^r \cdot 2^s \cdot 5^t$, missä p=0,1 tai 2, q ja r = 0 tai 1 s ja t = 0,1,…, 2n+2
6. 21,6%
7. $¼\pi\sqrt{6}$
8. b) f(x) = 1, kun x ≤ 2 ja

$f(x) = 3$, kun $x > 2$
9. a) $f(x) = x^2$ b) $x < -2$ tai $x > 2$
10. b) 6 c) - 1/8
11. $1 + \pi/6 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$
12. $4/9 \cdot \sqrt{3}$
13. $-5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, 151,3°
14. 8/27 m^3
15. b) ei ole

MP04 = 38

1. a) -12 b) $\frac{3}{e}$
2. a) $x = 2$ tai $x = 7$ b) $x = r$ tai $x = s$
3. 4,3 cm
4. a) 159 % b) 15,2 %
5. $t = 6$ ja $s = 2$ ($t = 6$ ja $s = 3$)
6. 255¾ tai 85¼
7. 149
8. 4 h
9. 29,6 %
10. Ympyrä, K = (9, 6) $r = \sqrt{13}$
11. MAX: $f(0) = f(2) = 3$. MIN: $f(1) = 1$
12. $e + e^{-2} - 1$
13. $y = \frac{1}{1 - C}$, $y = \frac{3}{7 - 3x}$
14. 567,45396
15. $y = x$

Matematiikan ylioppilastehtäviä

Ylioppilastehtäviä en julkaise. Viimeisen kymmenen vuoden tehtäviä löydät esimerkiksi netistä sivuilta matemaattinenyhdistys.fi/yo ja matta.hut.fi/matta/yoteht/index.html kirjoista, joihin on koottu niitä.

Ylioppilastutkintotehtävien jakautuminen kertauskirjan eri lukuihin

1. Luvut ja laskutoimitukset

21.7a	23.2	24.1b	25.3b	25.6a	26.1b	26.1c	26.5a	27.2a	27.6a	28.2b
28.4	28.9	29.4b	29.9	29.10b	30.4	30.5b	30.9b	31.7b	32.2a	33.4a
34.2	36.1	37.2	**1800**	75.4	77.4	79.9	83.1	83.9	84.1	84.2
85A.1	85A.5	86.1	86.2	86.8	87.1	87.2	87.3	88.2	88.3	89.2
89.3	90.1	90.3	91.1	91.5	92.1	93S4	94S1	95K1	95S1	96S1
96S2	97K1	97S1	97S5	98K5	98K6	98S1	99S1	03K1	04K1	04K8
05S1	07K1	97K7	08K1	08S7	09K1	09S1	10K6	10S1	11K1	11K6
11S1	12K1	12K6	12S1	12S5	13S1	14K1	14K3	14S1	14S2	15K1
15K3	15S1	16K2	16K4	16S1	16S2	17K1	17S1	17S2	17S3	19K1
19K7	19S1	19S5	20K1	20K8K	20S1	21K1	21S1	21S2K	22K2K	22K4
22K2R	22S1	22S2	22S3	23K2	23S1	23S2	24K1	24K2	24S1	24S2
25K1	25S1	25S2	26K1	26S1	27K1	27S1	27S3	28K1	28S1	29K1
29K3	29S1	30K1	30S1	31K1	31S1	32K2	33K1	34K1	34S1	35K1
35S1	36K1	36S1	37K1	38K1	38S1	39K1	39S1	41K1	41S1	43K1
43K2	43S1	43S2	44K1	44A1	44B1	44S1	45K1	45A1	45B1	45C1
45S1	46K1	46A1	46B1	46C1	46S1	47K1	47S1	48K1	48S1	49K1
49S2s	50K1	50S1	51K1	52K1	53K1	53S1	54K1	54S1	55K1	55S1
56K1	56S1	57K1	57S1	58K1	58S1	59K1	59S1	61K1	61S1	62K1
63K1	63S1	64S1	73S1	76S3	81S1	83K3b	84K6a	85K1b	85S1b	85S8b
86K1b	86K3a	86K6a	86S1b	87K1b	87S1b	88K1b	88K2a	89K2b	88K4b	89s1B
90K1b	90S1b	91K1b	91S3b	92K5b	92S3a	93K2	93S4a	94K3b	95K2	95K3
95S1	95S5a	96K3	96S2b	96S4	97K3a	97K8a	97S3	97S9b	98K4	98S2
99K2	99K6b	99S4b	00K4	00S3	02K3	02S2	03K1a	03S5	03S10	04K3
04S3	05K3	06K4	06S1a	06S5	07S4	08K4	09K3b	09S1c	11K2a	13S2c
15K3	15S1c	16K1	16K2b	16K10	16S1	16S3	18S2b	19K8	19K13	20K10
21K11	22S1.2	22S1.3	22S4							

2. Lausekkeet

21.2a	25.3a	26.3a	26.5c	27.1a	32.2b	36.1	37.1	37.5	**1800**	76.7
78.6	79.2	85B4	89.1	90.2	91.3	91.4	92.4	92.5	93K2	93K3
93S2	94K3	96K3	98S7	05K6	05S6	07S6	08K6	10K8	11S5	12K7
12S4	13K6	13K8	14K4	14S3	15S3	16K7	17K2	17K3	19K6	20K6
20S5	20S6R	20S7K	21S2R	22K1	27K4	37S1	37S3	42S3	44K3	44K5
44S3	44A2	45A3	45C2	46B2	47S2	47S5	49K3	52K3	52K10	56S3
58S3	59K10	60K5	62K5	62S3	64S3	65K1	65S2	66S10	67S3	67S6
68S4	69K8	69S4	74K8	74S6	75S6	77S2	79S5	80K3	80K8b	82S2
83S4a	84K5	90K9	91K5a	92K10a	93K3a	94S10	97S6a	99S7b	00S1	00S5
01S8	02K5	02S4	02S11	03K1b	03S10	05K2a	06K1c	06K2c	08K1c	08S1b
08S14	09K1a	09K11	10K1b	10K2c	10S1a	10S12	11K2c	11K13	11S2a	12K2
12S2	12S7	13S1c	14K1c	16K1D	16K2a	16s2a	17K1b	17K4a	17K5a	18K2
18S2a	19K3	20K8	20S2.1	21K3	21K13	22S1.1	22S6			

3. Yhtälöt ja epäyhtälöt

21.1	21.2b	22.3b	23.3b	23.6b	24.2	25.1	25.5	25.6	26.1	26.3c
27.4	28.1	28.5b	28.6b	29.3	30.1	31.1	31.4b	31.7b	32.1	33.1
34.1	34.3	34.5	35.2	35.4	35.6	36.6	37.2	**1800**	74.4	74.5
74.6	75.5	75.6	76.5	76.6	77.5	77.6	77.7	78.3	78.4	78.5
79.1	79.3	80.3	80.4	80.5	81.4	81.5	81.6	82.4	82.5	82.6
83.2	83.5	83.6	84.3	84.4	84.5	85A2	85A3	85A4	85A6	85B1
85B2	85B3	86.4	88.1	88.4	89.4	90.4	91.2	91.6	92.3	93K1
93K4	93S1	93S3	93S5	04K1	94S2	94S3	94S4	95K2	95S2	95S3
95S4	96K1	96K2	96S3	97K5	97K7	97S7	98S5	98S6	99K5	99K6
99K7	99K8	99S5	00K6	00K7	00S1	00S5	01K4	01K5	01K6	01K7
01S6	01S7	02K6	02K7	02S5	02S6	02S7	03K6	03K7	02K8A	03S1
03S6	03S7	03S8	04K6	04K7	04S6	04S7	04S8	05K7	05K8	05S7
05S8	06K1	06K6	06K7	06K8	06S6	06S7	06S8	07K6	07K8	07S7
07S8	08K7	08K8	08S1	08S6	08S8	09K7	09K8	09S6	09S8	10K5
10K7	10S3	10S4	11K7	12K5	13K1	13K7	13S5	13S6	14K2	15K6
15S5	15S6	16K1	16S6	17K4	17S4	19K8K	19S6	19S7	19S8	20S6K
20S8	21K7	21K8K	21K8R	21S4	22K3K	22K3R	24S3	25S3	26K2	26S3
27K2	27S2	28K3	28S3	29S3	31K3	31S3	31S4	32S1	32S3	33S1
33S3	34K3	35K3	35S3	36S2	37K3	38K3	38S3	43K3	43S3	44S3
44B3	45A2	45A4	45B2	45B3	45C3	46K3	46A2	46A3	46B3	46C3
47K2	47K2	47S3	48S3	49K10s	49S1	49S3	50K3	50S3	50S10	51K3
51S1	51S3	51S4	52S1	52S3	53K3	54K3	54K5	55K6	55K10	55S3
56K3	57K3	57S3	59S3	59S10	60K2	60K3	60S3	60S10	61K3	61S3
62K3	62S1	63K3	64K1	64K3	64S5	66K1	66S3	67K1	67S2	68K3
68K6	69S5	69S9	71K8	71S7	71K10	71S1	71S10	72K1	72K2	72S5
72S10	73K2	73K3	73K5a	73S8	74K2	74S1	74S2	75S1	76K3	76K5b
76K10	76S5	76S9	77K2	77S4a	77S4b	78K2	78K3	78K4	78S2	78S4
78S9a	79K2	80K4	80S1	81K2	81S2	81S8	82K1	82K3b	82K4	82K5
82S1	83K2	83K6	83S3a	83S3b	83S5a	83S8b	84K1	84K2	84K4	84K9a
84S2	84S3	84S6a	85K2	85K4b	85S1a	85S2	85S5a	86S2	86S6	86S7
87K1a	87K2	87K5b	87K6	87S2	87S3a	88K3	88K6	88S1	88S8	89S1a
89S6b	89S9b	90K1a	90K6a	90S1a	90S5	91K1a	91S1	92K3	92K5a	92K8
92S5b	93K1	93K3b	93K5	93S1	93S2	93S3a	94K1	94K2a	94S1	94S5a
95K1	95S2	96K1	96K2b	96K4a	96S1	97K2	97K3b	97S1	97S4a	97S4b

98K1	98K3a	98S1	98S3	99K1	99K6a	99S3	00K3	00S2	00S6	01K1
01S2	02K2	02K7	03K5a	03S1	04K1	04S1	05K1b	05K2a	05S1	06K1a
06K3	06S1b	07S1a	07S1c	08K1ab	08K2	08K7a	08S1a	08S2c	08S3b	08s7
09K1b	09K2b	09K4	09K5a	09S1a	091b	09S2ac	09S8	10K1a	10K1c	10K3b
10S2a	10S2c	10S4	10S12	11K1	11K3a	11A1a	11S1c	11S3a	11S3b	11S6b
12K1	12S1	12S7	13S1ab	14K1ab	14K4	15K 2b	15K4	15S1a	15S12	16K1E
16K2c	16S9.1	16s13	17K1a	17K1c	17S2	18S1	19S5	20K1	20S1	20S3
22S1.4	22S2.2	22S8								

4. Funktiot

22.4b	23.7b	23.9b	24.3	24.9b	27.10a	28.10b	34.4	37.8	23K3	23S4
25S4	29S4	32K4	34S4	68S5	70K3	70S8	72K5	76K5	77K3	77S1
78K7a	78S7a	79K8b	79S4	79S8b	80K2	80S3	80S7b	81S9a	82K7b	82S6b
87S5b	89K8b	91S10	93K10	93S4b	96K8	96S7a	96S10a	97K5	97K6a	97S8
98K5a	98S9	99K10a	01K10	01S13	02K8	03K9	11S6a	11S9b	11S9c	15K7a
17S3	18K4	18K11a	19S9	21K1	22S1.5					

5. Funktiot matemaattisena mallina

23.4	27.5	27.6b	31.8	36.4	**1800**	70.4	00K1	01K1	01S1	02K1
02S1	04S1	05K1	06S1	07S1	20S3R	21S5K	21S5R	23K1	26S2	85K6
88K2b	88S2b	91S9	92K6a	92K6b	93K8	95S7b	96S5b	01K4	04S9	11S7
15S3a	17K2	18S7	19S10	20S3						

6. Geometrian peruskäsitteitä, pinta-aloja ja tilavuuksia

21.7b	22.10a	23.8b	24.9a	26.6b	27.1b	27.9a	28.7	28.10a	29.6b	29.7b
30.7	31.4a	31.6a	32.8b	33.3a	34.8	35.4	36.3	37.7	**1800**	74.8
75.8	76.2	76.8	77.8	78.1	78.8	78.9	79.10	80.7	81.7	82.7
83.3	83.4	83.11	84.10	85A9	85B8	86.9	87.7	88.10	89.8	90.6
90.9	91.7	91.8	91.10	92.9	93K8	93S8	94K2	94K7	94S8	95K5
95K8	95S5	95S8	96K8	96S5	96S6	96S8	97K4	97K6	97S4	97S6
98K1	98K4	98S2	98S4	98S8	99K1	99S4	99S6	00K2	00K4	00K5
00S4	00S7	00S9	01K8	01S4	01S8	02K4	02K5	02K9A	02S3	02S4
03K4	03K5	03S4	03S5	04K4	04K5	04S4	04S5	05K4	05K5	05S4
05S5	06K4	06K5	06S4	06S5	07K3	07K4	07K5	07K9	07S2	07S4
07S5	08K4	08K5	08S4	08S5	09K4	09K6	09S4	09S7	10K3	10K4
10S2	10S6	11K3	11K4	11K8	11S2	11S6	11S7	12K3	12K8	12S3
12S6	13K2	13S3	13S4	14K5	14K8	14S6	14S7	15K7	15S2	16K5
16K8	16S3	17K5	17K6	17K7	17K8	17S7	17S8	19K4	19K9K	19S3
19S4	19S9R	20K5R	20K6K	20S4	21K4K	21K5	21K4R	21S7	22K7K	22K8
22K7R	22S8	23K5	23S5	23S7	23S9	24K8	24S6	24S8	25K2	25K7
26K5	26K7	26S5	26S7	26S8	27K7	27S7	27S8	28K6	28K8	28S7
28S8	29K7	29K8	29S8	30K5	30K8	30S5	30S6	30S8	31K7	31K8
31S5	31S7	31S8	32S8	33K7	33K8	33S8	34K8	34S6	34S8	35K8
35S8	35S7	36K7	36K8	37K7	37K8	37S5	37S7	37S8	38K7	38S5
38S6	38S7	38S8	39K6	39K7	39K8	39S7	41K7	41K8	41S7	41S8
43K6	43K7	43K8	43S7	43S8	44K7	44K8	44S7	44S8	44A8	44A9
44B5	44B7	44B8	45K8	45S8	45A7	45A8	45B7	45B8	45C7	45C8
46K7	46K8	46S7	46S8	46A7	46A8	46B7	46B8	46C7	46C8	47K7
47K8	47S7	48K7	48K8	48S7	48S8	49K7	49S7	49S8	50K7	50K8
50S7	50S8	51K7	51K8	51S8	52K6	52K7	52K8	52S6	52S8	53K7
53S7	54K6	54K8	54K9	54S6	54S8	55K5	55K7	55S7	55S8	56K7

56K8	56S6	56S7	57K7	57K8	57S7	57S8	58K7	58S7	58S8	58S9
59K7	59S8	60S7	60S8	60S9	61K8	61S8	62S5	62S7	62S8	63K6
63S7	64K7	64S7	65K6	65K7	65K8	65S8	66K2	66S2	66S8	67K4
67S5	68K2	69K4a	69S2	70K4a	70S5	71K6a	71S4a	72K6	72S8a	73K4a
73K5a	73S2	73S6a	74K5	74K6a	74K9a	75K5	76S6a	81K9	82S4a	83K4b
84S5a	87K5a	87S4	88S4b	89K6a	90K5	90K6b	90S10b	91K7a	91K10	92K10b
92S2b	92S7a	92S8	93K4a	93S9	94K2b	94K4a	94S2	95K3b	95K5b	95K8
95S3b	95S5b	95S6	95S8a	96K10a	08K15	96S3	96S7b	97K1	97K5	97S7a
98K6	98S6	99S2	00K1	00K10	01K5	01S6	02K7	02S7	03K6	03K13
03S2	03S7	04S3	05K7	05K11	05S2	05S5	06S3	06S9	08S4	08S5
09K3b	09K14	09S4	*09S15	10K4	10K10	10S9	*10S15	11S1b	12K9	12K15
*12S15	13S10	*14K14	15K8a	15S1b	15S3b	15S9	*15S15a	16K6	16K7	16K13
16S6	18K6	18S8	18S11	19S1	20K5	20S13	21K6	21K12	22S6	22S7

7. Yhtenevyys ja yhdenmuotoisuus

28.8a	33.8	37.3	**1800**	74.2	74.3	75.1	75.2	75.3	76.1	76.3
77.1	77.2	77.3	78.2	79.5	79.6	80.1	80.2	81.1	81.2	81.3
82.1	82.2	82.3	84.6	84.7	85A7	85A8	95B6	85B7	86.6	87.5
87.6	88.7	88.8	89.5	89.6	98.7	89.9	90.7	90.8	91.9	92.6
92.7	92.8	93K6	93K7	93S6	93S7	94K5	94K6	94S5	94S6	94S7
95K6	95K7	95S6	95S7	96K5	96K6	96K7	96S7	97K2	97K3	97S2
97S3	98K2	98K3	98S3	99K2	99K3	99K4	99S2	99S3	00K3	03S2
03S3	04K2	04K3	04S2	04S3	05K2	05K3	05S2	05S3	06K2	06K3
06S2	06S3	07K2	07S3	08K2	08K3	08S2	08S3	09K3	09K6	09S2
09S3	10K1	10K2	10S5	11K2	11K5	11S3	11S4	11K2	12K4	12S2
12S2	13K3	13K4	13K5	13S2	14K6	14K7	14S2	1455	15K2	15K4
15K5	15K9	15S4	16K3	16K6	16S4	16S5	17S5	17S6	19K2	19K3
19K5	19S2	20K2	20K3	20K4	20S2	21K2	21K3K	21K3R	21S6	21S8K
21S8R	22K5	22K6	22S5	22S6	22S7	23K6	23K7	23K8	23S6	23S8
24K5	24K6	24K7	24S7	25K5	25K6	25S5	25S6	25S7	25S8	26K5
26K6	26K8	26S4	26S6	27K6	27K8	27S5	27S6	28K5	28K7	28S5
28S6	29K5	29K6	29S5	29S6	29S7	30K6	30K7	30S8	31K5	31K6
31S8	32K5	32K6	32K7	32S6	33K5	33K6	33S5	33S6	33S7	34K6
34K7	34S5	34S7	35K5	35K7	35S5	35S6	36K5	36K6	36S6	36S7
36S8	37K5	37K6	37S6	38K5	38K6	38K8	39K5	39S5	39S6	39S8
41K5	41K6	41S5	41S6	43K5	43S5	43S6	44K6	44K7	44S5	44S6
44S7	44A5	44A6	44B6	45S5	45A5	45A6	45B5	45B6	45C5	45C6
46K5	46K6	46S5	46S6	45A5	46A6	46B5	46B6	46C5	46C6	47K5
47K6	47S6	48K5	48K6	48S5	48S6	49K6	49S5	49S6	50K6	50S5
51K5	51K6	51S5	51S6	52S5	53K6	53K8	53S5	53S6	54S5	55S5
56K5	56S5	57K5	57S5	57S6	58K5	58K6	58S5	59K6	59S6	59S7
60K6	60K9	60S5	60S6	61K5	61K6	61K10	61S6	61S7	62K6	62K7
62S6	63K7	64K6	65S5	65S6	66K6	66S9	70S4	74S5	76S2	81S6
86K3a	91K5b	92K4a	99K5a	99S5	02K4	03K7	04S2	04K7	05K6	*11S15
17K6	17K12	17S5	20S5							

8. Trigonometria

21.4a	22.4a	24.7b	25.2b	25.8	27.7	29.4a	29.7a	30.2b	30.8b	31.2a
31.7a	32.3	32.5a	33.5	**1800**	74.9	75.9	76.10	77.9	97.7	79.8
80.8	80.9	81.8	81.9	82.8	82.9	83.8	83.10	84.8	84.9	85A10
85A11	85A12	85B9	86.10	86.11	87.4	87.8	87.9	88.6	88.11	88.12

89.10 89.11 90.10 90.11 91.11 92.10 92.11 93K9 93S9 98K9 98S9
99K9 99K11 99S7 99S9 00K9 00K10 00S8 01K9 01S9 02K9 02S8
03K9 03K9A 03S9 04K9 04K9A 04S9 05K9 05S9 06K9 06S9 07S9
08K9 08S9 09K9 09S9 10K9 10S7 11K9 12K9 13K9 13S7 14K9
15K8 15S7 16K9 17K9 17S9 19K9 19S9K 20K9R 20K9K 20S9R 20S9K
21K9K 21K9R 21S9K 21S9R 22K9K 22K9R 22S9 23K9 24K9 24S5 24S9
25K8 25K9 25S9 26K9 26S9 27K9 27S7 28K9 28S9 29K5 29S9
30K9 30S9 31K9 31S9 32S8 32K9 32S7 32S9 33S9 34K9 34S9
35K9 35S9 36K9 36S9 37K9 37S9 38K9 38S9 39K9 39S9 41K9
41S9 43K9 43S9 44K9 44S9 44A7 44B9 45K9 45S9 45A9 45B9
45C9 46K9 46S9 46A9 46B9 46C9 47K9 47S9 48K9 48K10 48S9
48S10 48S10s 49K9 49K9s 49S9 49S9s 50K5 50K9 50S6 50S9 51K9
51S9 52K9 52S9 53K9 53K10 53S9 53S10 54S9 54S10 55K9 55S9
55S10 56K9 56K10 56S9 57K9 57S9 58K9 58S10 59K9 59S5 59S9
60K9 61K9 61S9 62K9 62S9 63K9 63S6 63S9 64K9 64S9 65K2
65K9 65S9 66K4 66S1 67K2 67S1 68K7a 68S2 68S10 69K1 70S3a
70S8 71K3 71S3 72S3 72S4 74K4 74S3 74S4 75K2 75S3 75S10
76K4 76K6b 76S7a 77K5a 77K6b 77K5b 78S5b 79S2 79S8a 80K5 81K1
81S7a 82S9b 83K3a 85K3 86K4 86S1a 86S3b 87K4 87K7a 87S5a 87S6b
88K5b 89K8a 89S3 90K8b 90S4 90S9 91K3b 91S4 92K9b 92S3b 93K6a
94K3a 94K9 94S3 95K6 97K7 97S2b 97S6b 98K2 99K3 99S1 99S4a
99S8a 00K5 00S4 01K6 02S6 03K6 03S6 03S9 04K6 04S8 05K2b
05K6 05S2 06K5 06S7 07S6 08K8 08K14a 08S5 09K9 09S2c 09S6ab
10K3a 10S1b 10S5 10S9 11K7 11S10 12K10 12S4 13S6 15K1 15K7b
15K8b *15S14 *15S15b17S5 18K3 18S4 19K10.220K13 20S2.4 20S2.6 20S11
22S12

9. Vektorit

21.6b 23.9a 24.4b 25.9 27.2b 29.10a 30.3 31.2b 33.2a 33.9a 34.7
36.8 37.13 68K7b 68S3b 69K4b 70K4b 70S3b 71K6b 71S4b 72K3b 72S8b
73K4b 73S6b 74K6b 74S7b 75K4b 75S4b 76K5a 76S6b 77K6a 77S5b 78K5a
78S5a 79K7 79S6 80K6a 81K6b 82S4b 83K4a 83K9b 83S4b 83S8a 84K9b
84S5b 85K5b 85S7b 86K5 86S4b 87K8b 87S10a88K4a 88K9b 88S4a 89K3
89S7b 90S7a 91K4b 91S6a 92K4b 92S2a 92S6 94K7b 95S3a 96K5b 96S5a
98K3b 99K7b 99S6 00K6 00S8 01K3 02K6 02K11 03S4 04K4 04S4
05K4 05S3 06K6 06S4 07S3 08K6 08S11 09K3a 09S5 09S6a 10K5
10S3a 11K8 11S5 12K3 12K4 12S9 13S3 13S5 14K8 15S4 *15S14
16K3a 16S12 17K3 17S11 18K10 18S5 19K2 19S3 20K2 20S6 21K2
22S5

10. Suorat ja tasot

21.5 22.3a 22.10b 25.9 25.10b 26.7a 28.5a 30.5a 32.5b 33.9a 35.9
35.11 36.2 20K7 22S4 24K4 28S4 29K4 30S4 32S4 33K4 33S4
35K4 36K4 37K4 38K4 38S4 39K4 39S4 41K4 41S4 43K4 43S4
44A4 44B4 45S4 45C4 46K4 46S4 46A4 46B4 47S4 48K4 49K10
49S4 50K4 51K4 52K5 55K4 56S4 57K4 58K4 61S4 64K5 65K3
68S3a 68S9 69S1 69S7 71S2 71S6 72K7 73K6 73K10 73S5 74K1
75K4a 75K6 75S4a 76K9 77S7a 79K3 80S5a 81K4 84S7 85K8b 90K4
90K10a90S2b 91S6b 93S3b 93K7a 94K6b 94K7a 94S4b 94S6b 94S8 96S9
97K8b 98S8b 00K2 00K9 01K8 01S1 01S7 02K1 02S1 02S5 02S8
03K7 03S3 06K1b 06S8 07S1b 08S1c 09K1c 09K8 11K2b 11S3c 14K9

15K5	15S2a	*15S14	16K8	16S12	17S11	20S1.4	20S2.2	20S13	21K2	22S2.1

11. Toisen asteen käyrät ja pinnat

22.5b	23.10	24.4a	24.10	30.9a	32.4	33.3b	33.9b	35.7	36.11	37.4
20S7R	21K6	21S3	24S4	26K4	27S4	28K4	31K4	34K4	35S4	36S4
37S4	44K4	44S4	45B4	46C4	47K4	48K3	48S4	49K4	50K10	50S4
52K4	52S4	53S3	53S4	54K4	54S4	56K4	57S4	58S4	60K4	62K4
62K10	62S4	63S5	65K4	66S5	67K6	67S4	67S7	68K10	68S6	69K5
70K6	70S1	71K2	71K7	72K3a	73K9	73S7	75S7	76K2	76K7a	77K7b
79K5	79S3	80K9a	81S2	84K8b	84S4a	87K9	87S3b	87S7	88K9a	89K4a
89S2	91K6	91K8	91S8b	93K6b	95S4	95S8b	96K5a	97S5	98S4	98S7a
99K9a	99S6	01S10	04K8	04S7	05K5	06K7	07S5	07S11	07S15	11K4
*11K15	11S2b	12K3	13S14	14K5	15K2a	15S2bc	15S5	16S7	18K5	18S6
19K4	19K5.1	19K12	19S6	20K6	22S2.3					

12. Derivaatta ja integraali

23.1	24.5a	29.2	32.6	34.10	35.1	35.8	36.7	37.10.	63K5	67K3
68K9	69K2	69S3	70K1	70K5	70S9	71S9	72S2	73K1	75K1	75K9
76S7a	77K1	77S1	77S3	78K10	79S1	81K10	81S4	81S9b	82K3a	82K10
83S2	83S7	84S1	85K1a	85K10	85S8a	85S10	86K2	86S3a	86S10a	87K8a
87K10b	87S1a	88K8	88S7a	89K1	90S10a	91K9	91S2	92K1	92K2	92S1
93S7a	93S10a	94K7a	95K10	95S4	95S10	96K2a	96K4b	96K8	98K10	98S5b
99K4	99S4a	99S10a	06K2ab	02S3	02S10	03S1	03S3	03S14	04K10	04S10
05K12	05S13	06K14	06S2a	07S2	08K3ab	08S2a	08S2b	08S12	08S13	09K2c
09K4	09S3a	10K2b	10S1c	10S3b	*10S14	11K3b	11S2c	11S4a	11S4b	12K2f
12S3a	12S13	13S2ab	14K3b	14K11	16K9.2	16S2b	17K10	17S1	17S4	17S12
18K1	18K11b	18K13	19S2	19S9	20K9	20S2.3	20S10	21K1	21K9	22S1.6
22S3.1	22S13									

13. Differentiaalilaskenta

21.10	22.6	22.8	23.3a	23.6a	24.5b	25.7a	26.6a	26.6c	27.8	28.3
29.5a	30.8a	30.10	31.5	31.9	32.10a	33.2b	34.6	34.9	37.9	33K3
34S3	48K2	52S10	53K4	54K10	55K3	55S4	56S10	57K10	57S10	58K3
58K10	59K3	59K4	59S4	60K10	60S4	61K4	61S10	63K10	63S4	64K4
64S4	64S10	65S3	65S4	66K7	66K10	66S7	67K7	67K10	68K4	68K5
69S10	70K8	71K1	71K11	71S9a	72K10	72S1	72S7	73K8	73S3	73S9
73S10	74K3	74S10a	75S5a	76S4	76S10	77K8	77K9	77S9	77S10	78S3
78S7b	79K4a	79K8a	79K9	79K10a	79K10b	80K6b	80K7	81K5	81K7a	81S5
81S10	82K8b	82K9	82K10a	82S5	83K7a	83S5b	83S9	84S9	84S10	85S4
85S5a	85S5b	86K8a	86K10a	86S9	86S10b	87S9	88K10	88S5	89K5	89S4
89S5	89S8	90S2a	91K3a	91K7b	91S7a	91S8a	92K7	92S4a	92S5a	93K9b
93S5a	93S8	95K5a	95K9b	96S6	97S7b	98K9a	98S8a	00K7	00K12	01K2
01S4	03K11	03S3	03S10	03S11	03S14	04K5	04S6	05K10	05K15	05S7
05S11	06S6	07S9	07S12	07S14	08K10	08K13a	08K14b	09S9	10S7	13S3
13S12	14K2	15K13	16K4	16s9.2	17S8	18K1	18K11b	18K13	22S9	

14. Differentiaalilaskennan sovelluksia

21.9b	22.7	24.8	25.10a	26.8a	26.9	29.5a	29.8	32.7	33.7	33.10b
34.6	35.12	36.10	37.12	37.14	09S5	25K4	25K2	30S3	32K3	32S2
34K2	35K6	36K3	36S5	39K3	39S3	41K3	44K2	44S2	44A3	44B2
45S2	46K2	46S2	46C2	47S8	48S2	49K2s	49S10	51K10	51S7	51S10

52S7 53K´5 53S8 54K7 54S3 54S7 55K8 55S6 56K6 56S8 57K6
58S6 59K8 60K8 61K7 62K8 62S10 63K8 63S2 63S8 64K8 64S6
64S8 65S7 66K5 66K9 67S10 68K8 68S1 68S7 69K7 69K9 70K9
70K10 70S6 70S10 71K4 71K9 72K9 73S4 75K8a 75S8a 77S7b 78K8
78S10 79K6 79S9 80K8a 80S6 80S7a 81K8 82K7a 82S10 83K5 83S6
85K9 85S6 86K9 86K10 87K10a 87S10b 88K5a 88S6a 89K9 89S7a 89S10a
90K7 90K10b 90S8b 91S7b 92K9a 93K7b 93S7b 94S6a 94S7b 95S7a 96K6
96K10b 97K9 97S10 98K8a 98S10a 98S10b 99K7a 99K8 99S8b 00K11 00S9
02K10 02K12 03K8 04K11 04S13 06K10 06S11 07S7 08K9 08S9 08S10
09K5b 09K7 09K15 09S13 10K7 10K9 10S10 11K5 11S9a 12K5 12K7
12K8 12K14 12S5 12S10 13S9 14K6 15K9 15S7 16K11 16S4 16S11
17K7 17S6 18K3 18S13 19K11 19K12 19S4 19S6 20K2 20K4 20K6
20K13 20S4 20S12 21K4 21K5

15. Määrätty integraali
21.3 24.1a 25.2a 26.2 26.10a 27.3 28.2a 29.1 30.2a 32.3b 32.10a
34.12 35.10 65S11 68K1 68K11 68S8 69K10 69S11 71S11 74K10 74S8
75K7a 75S2 75S9 76K1 77K4a 77K4b 77S5a 78K1 78S1 79K1 79S7a
79S10 80K1 80K10 80S10 81K3 82K2 82S3 83K1 83S1 84K3 84K10
84S4b 84S8 85K4a 85S3 86K1a 86K6b 86S5 87K3 87S8 88K1a 88S9
89K2a 89S6a 89S10b 90K2 90S3 90S6 90S9 91K2 91S3a 92S7b 92S10
93S5b 94K6a 95K7b 96S2a 97S2a 00K13 00S13 01K9 02K8 03K10 04K2
04K12 04S11 05K8 06S2b 08K13b 08K14c 08K14d 08S3a 09K2a 09S3b 10K2a
*10K15 10S2b 11K3c 12K2e 12S3b 13S7 14K3a *14K15 15K10 16K3b 16K12
16S2c 18K1c 18S3 19K5.2 20K3 20S2.5 20S8 21K3

16. Integraalilaskennan sovelluksia
21.8a 22.2 23.5 24.6 25.4 26.4 29.5b 33.6 36.11 37.11 53K5
63K4 63S10 64K10 65K10 65S10 66K3 66S4 67S9 68S11 70S7 71K5
71S8 72K4 72S6 73K7 76K8a 76S1 77K10 78K9 80S4 81K6a 81S3
82S7 82S8 83S10 84K6b 85K7 86S4a 88S3 89K7b 90S7b 91S5b 94K8
94S7a 95K4 96K7a 97K10a 98K7 99K8 99S9 01S12 02S12 03S13 05K11
05S12 06K9 06S13 07S10 08K7b 08S6 09K9 09K10 09S10 *09S14 *09S15
10K8 11K10 11K11 *11K14 11S4c 12S6 14K10 15K10 15S13 1k/4b 17K5b
16S13 18K12 19K5.2 19S12 22S3.2

17. Todennäköisyyslaskentaa
21.8b 21.9a 22.9b 24.7a 25.7b 26.7c 27.9b 28.6a 29.4a 29.6a 33.4b
34.11 35.5 36.12 37.6 65K12 65S12 66S12 67K12 67S12 68K12 68S12
69K12 69S12 70K12 71K12 72K12 72S12 73S12 74K7b 75B8b 76K7b 77K7b
77S5a 77K6b 79S7b 80S8b 81K9b 81S7b 82S9a 83K9a 85K5a 85S9 86S8a
87S6a 88S6b 90K8a 90S8a 91K4a 91S5a 92S4b 93K9a 93S6 94K5 94S5b
95K7a 95S9 97K4 98K5b 98S5a 99S7a 00K8 00S7 01S5 02K9 02S9
03K4 04K9 04S5 05S8 06S10 07S8 08K5 09K6 09S7 10K6 10S6
11K6 11S8a 12K6 12S8 13S8 14K7 *15K14 16S8 17S7 18K7 18S12
19K6 19S7 20K7 20K12 20S7 21K7 22S7

18. Todennäköisyysjakaumia
23.8a 26.7b 28.8b 30.6b 66K12 70S12 71S12 73K12 75K8b 76S8b 78S6a
79K4b 80K9b 82K8a 84K8a 84S6b 89K6b 89S9a 96K9 96S8b 97K10b 97S9a
99K5b 01K7 03S8 05K9 06K8 08S8 10S13 11S8b 12S8 *12S14 15K6

15S6 16K5 17K11 17S9 18S9 21K7

19. Lukujonot

21.4b 21.6a 22.9a 23.7a 26.5b 30.6a 32.9a 33.10a 34.14 35.3 **1800**
80.6 93K5 00S6 02K8 03K8 34S2 37S2 66K8 67K8 69K3 72S9
82K10b 88K4b 88K7 88S10 92S9 94S9b 96S8a 98K8b 00K13 00S10 01K11
03K12 03S11 03S12 05S10 06S12 *10K14 10S8 11S11 12S11 16K9.1 16S5
17K13 19K1 19S13 20K11 21K1

20. Sarjat

1800 75.7 76.4 83.7 85B5 86.5 90.5 94K4 95K4 96K4 96S4
98K7 99S8 00K8 01S5 02K8A 20K8R 22K4R 23K3 23S3 24K3 26K3
27K3 28K2 28S2 29S2 30K2 30S2 31K2 31S2 32K2 33K2 33S2
34K5 35K2 35S2 36K2 36S2 37K2 38K2 38S2 39K2 39S2 41K2
41S2 46S3 48K2s 49K2 49K5 49K8 49S2 50K2 50S2 51K2 51S2
52K2 52S2 53K2 53S2 54K2 54S2 55K2 55S2 56K2 56S2 57K2
57S2 58K2 58K8 58S2 59K2 59K5 59S2 60K1 60S1 60S2 61K2
61S2 62K2 62S2 63K2 63S3 64K2 64S2 65K5 65S1 66S6 67K8
67S8 69S6 70K7 71K10 72K8 74S7a 77K6a 78S8 80S9 83K8 85S7a
89K10 94S9a 00S11 01K11 01S9 02K13 04K12 04K14 04S12 05K13 06K12
08S15 09K13 09S11 10K11 11K9 12K11 *13S15 14K13 *15K15 15S8 15S10
17K6 19K10 19S13 22S12

Differentiaaliyhtälöt

32.9b 34.15 36.9 36.15 65K11 66K11 66S11 67K11 67S11 69K11 70K11
70S11 72K11 72S11 73K11 73S11 74K8b 74S10b 75K7b 75S5b 76K8b 76S7b
78K7b 78S9b 80S5b 83K7b 94K10 96S10b 98K9b 99K9b 99S10b 00K14 00S14
01K15 01S15 02K14 03K14 03S15 04K15 04S14 05K14 05S14 06S14

Numeeriset menetelmät

34.13 35.14 36.14 01S14 02K15 02S15 03K5b 03S15 05K15 06K13 06S15
08K12 09K12 *09S14 10K13 11S12 *11S14 12K13 12S12 13S11 14K12 16K12
16S10 17K8 18K9 19K9 19S11 21K8 22S11

Lukuteoria ja logiikka

26.10b 35.6 35.13 36.5 36.13 37.15 95K3a 97K7a 99K10b 00K15 00S15
01K12 02S13 04K13 04S15 05S15 06K15 07S13 08K11 09S12 10K12 10S11
11K12 11S13 12K12 13S13 15K11 15S11 16S9.1 17K9 17S10 18K8 18S10
19S8 20S9 21K10 22S10

Kompleksiluvut

22.1 26.8b 27.10b 32.10b 33.9b 35.15 **1800** 88.5 67K5 69K6 70K2
70S2 74K7a 75K10 77K7a 77S6b 78K6b 80S8a 81K7b 82K6 82S6a 84K7
84S7b 85K8a 86K8b 86S8b 87K7b 80S7b 89K7a 90K3b 93K4b 94K4b 95K9a
96K7b 97K6b 98S7b 01K14 02S14 03K15