PITKÄ

MATEMATIIKKA

KURSSI   MAs3

ANALYYSIN JATKOKURSSI

Markku Männikkö
2003

Sisällysluettelo:

1. Syklometriset funktiot………………………………………………………………………….. 1
1.1 Arkussini-funktio………………………………………………………………………………. 1
1.2 Arkuskosini-funktio……………………………………………………………………………. 2
1.3 Arkustangentti-funktio………………………………………………………………………… 3
1.4 Arkussunktioiden derivaatat……………………………………………………………….. 4
1.5 Arkusfunktioihin liittyviä integroimissääntöjä…………………………………………….. 4

2. Hyperboliset funktiot……………………………………………………………………………. 4
2.1 Hyperbolinen sini……………………………………………………………………………… 4
2.2 Hyperbolinen kosini……………………………………………………………………………5
2.3 Hyperbolinen tangentti…………………………………………………………………………5
2.4 Hyperbolisten funktioiden lausekkeiden sievennys…………………………………………6
2.5 Hyperbolisten funktioiden derivaatat………………………………………………………… 6
2.6 Hyperbolisten funktioiden integrointi………………………………………………………… 6

3. Integroiminen sijoituskeinolla……………………………………………………………….. 7
3.1 Integraalifunktio sijoituskeinolla………………………………………………………… 7
3.2 Määrätty integraali sijoituskeinolla…………………………………………………………… 7

4. Implisiittifunktio……………………………………………………………………………….. 7
4.1 Implisiittifunktion käsite…………………………………………………………………………7
4.2 Implisiittifunktion derivoiminen……………………………………………………………….. 8

5. Käyrien parametrimuotoiset esitykset ………………………………………………………8
5.1 Parametriesitys………………………………………………………………………………….8
5.2 Parametrimuotoisesta esityksestä koordinaattimuotoiseen esitykseen……………………………… 9
5.3 Parametrimuotoisen funktion derivaatta……………………………………………………….. 9

6. Napakoordinaatisto…………………………………………………………………………..10
6.1 Napakoordinaatit………………………………………………………………………………10
6.2 Napakoordinaattien ja xy-koordinaattien muunnoskaavat…………………………………..11
6.3 Napakoordinaateissa esitetyn käyrän derivoiminen……………………………………… 11

7. Kahden muuttujan funktiot…………………………………………………………………..12
7.1 Kahden muuttujan funktion kuvaaja…………………………………………………………12
7.2 Osittaisderivaatat……………………………………………………………………………….12
7.3 Ääriarvotehtäviä kahden muuttujan funktiosta……………………………………………..13

8. Kompleksiluvut…………………………………………………………………………………14
8.1 Kompleksitaso……………………………………………………………………………………14
8.2 Kompleksilukujen yhteen- vähennys ja kertolasku…………………………………………….. 15
8.3 Kompleksiluvun liittoluku ja kompleksilukujen jakolasku…………………………………… 16
8.4 Kompleksiluvun potenssiin korotus ja neliöjuuri……………………………………………….. 17
8.5 de Moivren kaava……………………………………………………………………………….. 18
8.6 Kompleksiyhtälö……………………………………………………………………………………18
8.7 Kompleksilukukertoimisten polynomien teoriaa………………………………………………18

9. Differentiaaliyhtälöt…………………………………………………………………………..19
9.1 Peruskäsitteitä……………………………………………………………………………………19
9.2 Separoituva differentiaaliyhtälö……………………………………………………………………19
9.3 Tasa-asteinen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö………………………………………… 20
9.4 Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö…………………………20
9.5 Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö………………………………………… 21
9.6 Toisen kertaluvun lineaarinen homogeeninen vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö………………. 21

Vastaukset harjoitustehtäviin……………………………………………………………………. 22

Koetehtäviä aiemmilta vuosilta………………………………………………………………….. 24

MAs3. Analyysin jatkokurssi.

1. Syklometriset funktiot

1.1. Arkussini-funktio

1. Määritelmä arkussinille
arkussini on sinifunktion käänteisfunktio välillä $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$.
$f(x) = \sin x$, $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi] \to [-1,1]$ ja $f^{-1}(x) = \arcsin x$, $[-1,1] \to [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$
arcsin x luetaan joskus "Kulma, jonka sini on x (ja kulma on välillä $[\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$)"

2. Arkussinin määrittely- ja arvojoukko
Mj = [-1,1] , Aj = $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

3. Arkussini-funktion kuvaaja
On kasvava funktio, joka alkaa pisteestä $(-1,-\frac{1}{2}\pi)$ kulkee origon kautta ja loppuu pisteeseen $(1,\frac{1}{2}\pi)$
Muoto on sama kuin sinifunktiolla. On sinifunktion vastaavan osan peilikuva suoran y = x suhteen.

4. Muuttujien ja arvojen välinen yhteys
$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$

5. Arkussinin arvojen laskeminen
Käytä kohdan 1.1.4 yhteyttä ja tee vastaava siniyhtälö.
Ratkaise tämä yhtälö ja arvona on se kulma, joka kuuluu arvojoukkoon eli on välillä $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

1.1.1. Laske a) arcsin 1 b) arcsin ½ c) arcsin $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ d) arcsin 0 e) arcsin $(-\frac{1}{2}\sqrt{2})$ f) arcsin (-1)

6. Arkussini-yhtälön ratkaiseminen
Käytä kohdan 1.1.4 yhteyttä ja laske sinifunktion arvo

2. Ratkaise x, kun a) $\arcsin x = \frac{\pi}{3}$ b) $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$ c) $\arcsin (2x - \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ d) arcsin 3x = -1

7. Arkussinin arvot laskimella
Laita laskimeen kulmat radiaaneiksi.
Näppäile $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{sin}}$ $\boxed{\text{x}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ $\to$ $\boxed{\text{arvo}}$ ts. näppäillään $\boxed{\sin^{-1}}$ ja $\boxed{\text{muuttuja}}$

3. Laske a) arcsin 0,7 b) arcsin (-0,31) c) arcsin (-2,1)

8. Arkussinin muuttujan arvon saaminen laskimella
Laita laskimessa kulmat radiaaneiksi.
Näppäile $\boxed{\text{sin}}$ $\boxed{\text{arvo}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ $\to$ $\boxed{\text{muuttuja}}$

4. Ratkaise x, kun a) arcsin x = 0,35 b) arcsin 2x = -0,47

9. Muut kulmat arkussinin avulla
Funktio $f(x) = \pi - \arcsin x$ antaa arvoiksi ne kulmat väliltä $[\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi]$, joiden sini on x
Funktio $f(x) = n\cdot 2\pi + \arcsin x$ antaa arvoiksi ne kulmat väliltä $[-\frac{1}{2}\pi + n\cdot 2\pi, \frac{1}{2}\pi + n\cdot 2\pi]$, joiden sini on x
Funktio $f(x) = (n + 1)\cdot 2\pi - \arcsin x$ antaa arvoiksi ne kulmat väliltä $[\frac{1}{2}\pi + n\cdot 2\pi, 1\frac{1}{2}\pi + n\cdot 2\pi]$, joiden sini on x

5. Esitä kulma a) $\frac{7\pi}{6}$ b) $-1\frac{1}{4}\pi$ arcsin-funktion avulla

10. Sini arkussinistä
$\sin(\arcsin x) = x$

6. Sievennä a) sin (arcsin 0,5) b) sin [arcsin (- 0,31)] c) sin (arcsin π)

11. Arkussini sinistä
$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - n\cdot 2\pi, \text{ kun } -\frac{1}{2}\pi + n\cdot 2\pi \le x \le \frac{1}{2}\pi + n\cdot 2\pi \\ \pi - x - n\cdot 2\pi, \text{ kun } \frac{1}{2}\pi + n\cdot 2\pi < x < 1\frac{1}{2}\pi + n\cdot 2\pi \end{cases}$$

7. Sievennä a) arcsin (sin π) b) arcsin (sin $2\frac{1}{2}\pi$) c) arcsin [sin $(-\frac{3}{4}\pi)$]

1.2. Arkuskosini-funktio

1. Määritelmä arkuskosinille
arkussini on kosinifunktion käänteisfunktio välillä $[0, \pi]$.
$f(x) = \cos x$, $[0, \pi] \to [-1,1]$ ja $f^{-1}(x) = \arccos x$, $[-1,1] \to [0, \pi]$
arccos x luetaan joskus ”Kulma, jonka kosini on x (ja kulma on välillä $[0,\pi]$)”

2. Arkuskosinin määrittely- ja arvojoukko
$Mj = [-1,1]$, $Aj = [0, \pi]$

3. Arkuskosini-funktion kuvaaja
On vähenevä funktio, joka alkaa pisteestä $(-1,\pi)$ kulkee piteen $(0,\frac{1}{2}\pi)$ kautta ja loppuu pisteeseen (1,0)
Muoto on sama kuin kosinifunktiolla. On sinifunktion vastaavan osan peilikuva suoran y = x suhteen.

4. Muuttujien ja arvojen välinen yhteys
$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$

5. Arkuskosinin arvojen laskeminen
Käytä kohdan 1.2.4 yhteyttä ja tee vastaava kosiniyhtälö.
Ratkaise tämä yhtälö ja arvona on se kulma, joka kuuluu arvojoukkoon eli on välillä $[0, \pi]$

1.2.1. Laske a) arccos 1 b) arccos ½ c) $\arccos \frac{1}{2}\sqrt{3}$ d) arccos 0 e) $\arccos (-\frac{1}{2}\sqrt{2})$ f) arccos (-1)

6. Arkuskosini-yhtälön ratkaiseminen
Käytä kohdan 1.2.4 yhteyttä ja laske kosinifunktion arvo

2. Ratkaise x, kun a) $\arccos x = \frac{\pi}{3}$ b) $\arccos x = \frac{\pi}{4}$ c) $\arccos (2x - 1) = \frac{\pi}{6}$ d) arccos 3x = -1

7. Arkuskosinin arvot laskimella
Laita laskimeen kulmat radiaaneiksi.
Näppäile $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{cos}}$ $\boxed{x}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ → $\boxed{\text{arvo}}$ ts. näppäillään $\boxed{\cos^{-1}}$ ja $\boxed{\text{muuttuja}}$

3. Laske a) arccos 0,7 b) arccos (- 0,31) c) arccos (- 2,1)

8. Arkuskosinin muuttujan arvon saaminen laskimella
Laita laskimessa kulmat radiaaneiksi.
Näppäile $\boxed{\text{cos}}$ $\boxed{\text{arvo}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ → $\boxed{\text{muuttuja}}$

4. Ratkaise x, kun a) arccos x = 0,35 b) arccos 2x = - 0,47

9. Muut kulmat arkuskosinin avulla
Funktio $f(x) = 2\pi - \arccos x$ antaa arvoiksi ne kulmat väliltä $[\pi,2\pi]$, joiden kosini on x
Funktio $f(x) = n\cdot 2\pi + \arccos x$ antaa arvoiksi ne kulmat väliltä $[n\cdot 2\pi, \pi + n\cdot 2\pi]$, joiden kosini on x
Funktio $f(x) = (n + 1)\cdot 2\pi - \arccos x$ antaa arvoiksi ne kulmat väliltä $[\pi + n\cdot 2\pi, 2\pi + n\cdot 2\pi]$, joiden kosini on x

5. Esitä kulma a) $\frac{7\pi}{6}$ b) $-1\frac{1}{4}\pi$ arkuskosinifunktion avulla

10. Kosini arkuskosinista
$\cos (\arccos x) = x$

6. Sievennä a) cos (arccos 0,5) b) cos [arccos (- 0,3)] c) $\cos (\arccos \pi)$

11. Arkuskosini kosinista

$$\arccos (\cos x) = \begin{cases} x - n\cdot 2\pi, \text{ kun } n\cdot 2\pi \le x \le \pi + n\cdot 2\pi \\ 2\pi - x - n\cdot 2\pi, \text{ kun } \pi + n\cdot 2\pi < x < 2\pi + n\cdot 2\pi \end{cases}$$

7. Sievennä a) $\arccos [\cos (-\pi)]$ b) $\arccos (\cos 2\frac{1}{4}\pi)$ c) $\arccos [\cos (-3/4\pi)]$

1.3. Arkustangentti-funktio

1. Määritelmä arkustangentille.
Arkustangentti on tangenttifunktion käänteisfunktio
$f(x) = \tan x$, $]-½\pi,½\pi[\to R$, $f^{-1}(x) = \arctan x$, $R \to]-½\pi,½\pi[$
arctan x luetaan joskus ” kulma, jonka tangentti on x (ja kulma välillä $[-½\pi,½\pi]$)”

2. Arkustangentin määrittely- ja arvojoukko
Mj = R , Aj = $]-½\pi,½\pi[$

3. Arkustangentti-funktion kuvaaja
on kasvava funktio, joka tulee $-\infty$:stä läheltä suoraa $y = -½\pi$ sen yläpuolelta, kulkee origon kautta ja lähestyy suoraa $y = ½\pi$ alapuolelta, kun x lähestyy $+\infty$:tä.
Muoto on sama kuin tangenttifunktiolla. On tangenttifunktion päähaaran peilikuva suoran y = x suhteen.

4. Muuttujan ja arvojen yhteys
$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$

5. Arkustangentin arvojen laskeminen
Käytä kohdan 1.3.4 yhteyttä ja tee vastaava tangenttiyhtälö.
Ratkaise tämä yhtälö ja arvona on se kulma, joka on välillä $]-½\pi,½\pi[$

1.3.1 Laske a) arctan 1 b) arctan ½ c) arctan $\sqrt{3}$ d) arctan ½$\sqrt{3}$ e) arctan (-½$\sqrt{2}$) f) arctan (-1)

6. Arkustangenttiyhtälön ratkaiseminen
Käytä kohdan 1.3.4 yhteyttä ja laske tangentin arvo

2. Ratkaise x, kun a) $\arctan x = \frac{\pi}{3}$ b) $\arctan x = \frac{\pi}{4}$ c) $\arctan (2x - 1) = \frac{\pi}{6}$ d) arctan 3x = -1

7. Arkustangentin arvot laskimella
Laita laskimeen kulmat radiaaneiksi.
Näppäile $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{tan}}$ $\boxed{x}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ → $\boxed{\text{arvo}}$ ts. näppäillään $\boxed{\tan^{-1}}$ ja $\boxed{\text{muuttuja}}$

3. Laske a) arctan 0,7 b) arctan (- 0,31) c) arctan (- 2,1)

8. Arkustangentin muuttujan arvon saaminen laskimella
Laita laskimessa kulmat radiaaneiksi.
Näppäile $\boxed{\text{tan}}$ $\boxed{\text{arvo}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ → $\boxed{\text{muuttuja}}$

4. Ratkaise x, kun a) arctan x = 0,35 b) arctan 2x = - 0,47

9. Muut kulmat arkustangentin avulla
Funktio $f(x) = n\cdot\pi + \arctan x$ antaa arvoiksi ne kulmat $[(-½+n)\pi,(½+n)\pi]$, joiden tangentti on arvoltaan x

5. Esitä kulma a) $\frac{7\pi}{6}$ b) $-1¼\pi$ arkustangenttifunktion avulla.

10. Tangentti kun kulmana arkustangentti jostakin reaaliluvusta
tan (arc tan x) = x

6. Sievennä a) tan (arctan 0,5) b) tan [arctan (- 0,3)] c) tan (arctan π)

11. Arkustangentti jonkin kulman tangentista
$\arctan (\tan x) = x - n\cdot\pi$, kun $-½\pi + n\cdot\pi < x < ½\pi + n\cdot\pi$

7. Sievennä a) arctan [tan ($-\pi$)] b) arctan (tan $2¼\pi$) c) arctan [tan ($-¾\pi$)]

12. Trigonometrisen funktion arvo, kun kulmana jokin toisen syklometrisen funktion arvo
Piirretään suorakulmainen kolmio ja merkitään siihen kulmaksi y = ko. arkusfunktio.
Tämän määritelmästä saadaan kolmioon kahdelle sivulla arvot.
Kolmannen sivun pituus saadaan Pythagoraan teoreemalla.
Trigonometrisen funktion itseisarvo saadaan lopuksi määritelmästä suorakulmaisessa kolmiossa ja merkki siitä, missä neljänneksessä kulma on.

8. Laske a) sin (arccos ½) b) sin (arctan 2) c) cos (arcsin $\frac{3}{5}$) d) cos (arctan x) e) tan (arcsin $\frac{4}{5}$) f) tan ($\cos^{-1}$ a)

1.4. Arkusfunktioiden derivaatat

1. D arcsin x = $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, D arccos x = $-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, D arctan x = $\frac{1}{1 + x^2}$

1.4.1. Derivoi a) f(x) = arcsin 2x b) f(x) = arcsin x^2 c) f(x) = arcsin (1/x)
2. Derivoi a) f(x) = arccos (2x - 1) b) f(x) = arccos (1 - x^2) c) f(x) = arccos $\sqrt{x}$
3. Derivoi a) f(x) = arctan e^x b) f(x) = arctan (ln x) c) f(x) = arctan (sin x)
4. Laske funktion f(x) = arcsin x + x$\sqrt{1 - x^2}$ derivaatta
5. Laske funktion f(x) = x·arcsin x derivaatan nollakohta.
6. Milloin funktio f(x) = 3arcsin x + (4 + 3x - 4x^2) $\sqrt{1 - x^2}$ on kasvava?
7. Laske funktion f(x) = arcsin x - 2x ääriarvot.

1.5. Arkusfunktioihin liittyviä integrointisääntöjä

1. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$ = arcsin x + C ; $\int \frac{1}{1 + x^2}\,dx$ = arctan x + C

1.5.1. Laske a) $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$ b) $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$ c) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

2. Laske a) $\int \frac{1}{x^2 + 1}\,dx$ b) $\int \frac{x}{x^2 + 1}\,dx$ c) $\int \frac{x^2}{x^2 + 1}\,dx$

3. Laske a) $\int_{-½}^{½} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$ b) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2 + 1}\,dx$

4. Laske sen alueen ala, jonka reunoina ovat x-akseli, y-akseli, käyrä y = $\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ sekä suora x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Hyperboliset funktiot

2.1. Hyperbolinen sini

1. Hyperbolisen sinin määritelmä
sinh x = ½(e^x - e^{-x})

2. Hyperbolisen sinin määrittely- ja arvojoukko
Mj = Aj = R

3. Hyperbolisen sinin kuvaaja
on kasvava funktio, joka on vasemmalla lähellä käyrää y = -½e^{-x} ja oikealla y = ½e^x sekä kulkee origon kautta

4. Arvojen laskeminen tavallisella funktiolaskimella
Käytetään määritelmää 2.1.1 sijoittamalla x:n paikalle muuttujan arvo

2.1.1. Laske tarkka arvo ja likiarvo a) sinh 1 b) sinh 2 c) sinh ½ d) sinh (-1)

5. Arvojen laskeminen laskimella, jossa sinh - funktio (esim. TI-85)
Catalog-valikosta löytyy sinh, joka valitaan. Sen jälkeen syötetään x ja painetaan ENTERiä

2. Laske likiarvo a) sinh 0,75 b) sinh 0,25 c) sinh 1,5

6. Muuttujan arvon ratkaiseminen, kun tunnetaan hyperbolisen sinin arvo
Kirjoitetaan yhtälö kohdan 2.1.1 mukaan.
Kerrotaan yhtälön molemmat puolet e^x:llä ja korvataan e^x aputuntemattomalla a.
Ratkaistaan saadusta II asteen yhtälöstä a.
Merkitään $e^x = a$, josta ratkaistaan x. (Huom! vain positiivinen a:n arvo kelpaa)

3. Laske yhtälön ratkaisulle tarkka arvo a) $\sinh x = 2$ b) $\sinh x = \sqrt{3}$ c) $\sinh x = \frac{3}{4}$

7. Muuttujan arvon ratkaiseminen laskimella, jossa $\sinh^{-1}$ - funktio (TI-85)
Catalog-valikosta löytyy $\sinh^{-1}$, joka valitaan. Sen jälkeen syötetään arvo ja painetaan ENTERiä.

4. Ratkaise likiarvo yhtälölle a) $\sinh x = 0{,}4$ b) $\sinh 2x = -1{,}3$

2.2. Hyperbolinen kosini

1. Hyperbolisen kosinin määritelmä
$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

2. Hyperbolisen kosinin määrittely- ja arvojoukko
Mj = R , Aj = $[1,\infty[$

3. Hyperbolisen kosinin kuvaaja
on funktio, joka on negatiivisilla muuttujan arvoilla vähenevä ja vasemmalla lähellä käyrää $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ sekä positiivisilla muuttujan arvoilla kasvava ja oikealla $y = \frac{1}{2}e^x$ sekä kulkee minimipisteen (0,1) kautta

4. Arvojen laskeminen tavallisella funktiolaskimella
Käytetään määritelmää 2.2.1 sijoittamalla x:n paikalle muuttujan arvo

2.2.1 Laske tarkka arvo ja likiarvo a) cosh 1 b) cosh 2 c) cosh ½ d) cosh (-1)

5. Arvojen laskeminen laskimella, jossa cosh - funktio (esim. TI-85)
Catalog-valikosta löytyy cosh, joka valitaan. Sen jälkeen syötetään x ja painetaan ENTERiä

2. Laske likiarvo a) cosh 0,75 b) cosh (-0,25) c) cosh 1,5

6. Muuttujan arvon ratkaiseminen, kun tunnetaan hyperbolisen sinin arvo
Kirjoitetaan yhtälö kohdan 2.2.1 mukaan.
Kerrotaan yhtälön molemmat puolet e^x:llä ja korvataan e^x aputuntemattomalla a.
Ratkaistaan saadusta II asteen yhtälöstä a.
Merkitään $e^x = a$, josta ratkaistaan x.

3. Ratkaise yhtälön tarkka arvo a) $\cosh x = 2$ b) $\cosh x = \sqrt{5}$ c) $\cosh x = 1\frac{1}{4}$

7. Muuttujan arvon ratkaiseminen laskimella, jossa $\cosh^{-1}$ - funktio (TI-85)
Catalog-valikosta löytyy $\cosh^{-1}$, joka valitaan. Sen jälkeen syötetään arvo ja painetaan ENTERiä.

4. Ratkaise likiarvo yhtälölle a) $\cosh x = 1{,}15$ b) $\cosh x = 1{,}50$ c) $\cosh 2x = 2{,}25$

2.3. Hyperbolinen tangentti

1. Hyperbolisen tangentin määritelmä
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

2. Hyperbolisen tangentin määrittely- ja arvojoukko
Mj = R , Aj = $]-1,1[$

3. Hyperbolisen tangentin kuvaaja
on kasvava funktio, joka on vasemmalla lähellä suoraa y = -1 ja sen yläpuolella, kulkee origon kautta ja on oikealla lähellä suoraa y = 1 sen alapuolella

4. Arvojen laskeminen tavallisella funktiolaskimella
Käytetään määritelmää 2.3.1 sijoittamalla x:n paikalle muuttujan arvo

2.3.1. Laske tarkka arvo ja likiarvo a) tanh 1 b) tanh 2 c) tanh ½ d) tanh (-1)

5. Arvojen laskeminen laskimella, jossa tanh - funktio (esim. TI-85)
Catalog-valikosta löytyy tanh, joka valitaan. Sen jälkeen syötetään x ja painetaan ENTERiä

2. Laske likiarvo a) tanh 0,75 b) tanh (-0,25) c) tanh 1,5

6. Muuttujan arvon ratkaiseminen, kun tunnetaan hyperbolisen tangentin arvo
Kirjoitetaan yhtälö kohdan 2.3.1 mukaan.
Kerrotaan yhtälön molemmat puolet e^x:llä ja korvataan e^x aputuntemattomalla a.
Ratkaistaan saadusta II asteen yhtälöstä a.
Merkitään $e^x = a$, josta ratkaistaan x.

3. Ratkaise yhtälön tarkka arvo a) $\tanh x = 4/5$ b) $\tanh 2x = -3/5$

7. Muuttujan arvon ratkaiseminen laskimella, jossa $\tanh^{-1}$ - funktio (TI-85)
Catalog-valikosta löytyy $\tanh^{-1}$, joka valitaan. Sen jälkeen syötetään arvo ja painetaan ENTERiä.

4. Ratkaise yhtälön likiarvo a) $\tanh x = 0,72$ b) $\tanh 2x = -0,3$

2.4. Hyperbolisten funktioiden lausekkeiden sievennys

1. Kaavat
ovat lähes identtiset trigonometristen funktioiden sievennyskaavojen kanssa

2. Kaavojen todistaminen
Käytetään määritelmän mukaisia eksponenttilausekkeita.
Tapa 1: Lähde vasemmasta puolesta ja pyri oikeanpuoleiseen lausekkeeseen
Tapa 2: Tee väitteen kanssa yhtäpitäviä yhtälöitä ja pyri identtisesti toteen yhtälöön

2.4.1. Osoita, että $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

2. Todista kaava $\dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x$

3. Osoita oikeaksi $\cosh^2 x = ½(1 + \cosh 2x)$

4. Todista kaava $\sinh (x + y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y$

2.5. Hyperbolisten funktioiden derivaatat

1. $D \sinh x = \cosh x$, $D \cosh x = \sinh x$, $D \tanh x = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

2.5.1. Derivoi a) $f(x) = \sinh (1 - x^2)$ b) $f(x) = \ln (\cosh x)$ c) $f(x) = e^{\tanh x}$ d) $f(x) = ¼\sinh 2x - ½x$

2. Derivaattojen käyttö
samoihin tarkoituksiin kuin muidenkin funktioiden tutkimisessa

2. Laske funktion $f(x) = x \cdot \sinh x - \cosh x$ ääriarvo

3. Osoita, että yhtälö $y = a\cdot\cosh x$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $y'' - y' = 0$

2.6. Hyperbolisten funktioiden integrointi

1. $\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$, $\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$, $\int \dfrac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$

2.6.1. Integroi a) $\int \sinh (1 - 2x)\, dx$ b) $\int \dfrac{\cosh x}{\sinh x}\, dx$ c) $\int \dfrac{1}{x^2} \cdot \sinh \dfrac{1}{x}\, dx$

2. Laske määrätty integraali a) $\int_0^1 \sinh 2x \, dx$ b) $\int_{-1}^2 \cosh 4x \, dx$

3. Integroiminen sijoituskeinolla

3.1. Integraalifunktio sijoituskeinolla

1. Sijoituskeinon idea
on käyttää yhdistetyn funktion integroimissääntöä
$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$, muodossa $\int f(t)\,dt = F(t) + C$

Merkitään sisäfunktiota t = g(x), tällöin $t' = \frac{dt}{dx} = g'(x)$ eli $dt = g'(x)dx$
Eli kun korvataan sisäfunktio g(x) t:llä ja g'(x)dx dt:llä saadaan yksinkertaisempi funktio integroitavaksi.
Lopuksi palataan takaisin muuttujaan x, korvaamalla t g(x):llä

3.1.1. Mikä seuraavissa integraaleissa voisi olla g(x) = t. Mitä on g'(x)dx = dt? Integroi lopuksi t:n suhteen ja palaa muuttujaan x.

a) $\int (5x^2 + 1)^2 \cdot 10x\,dx$ b) $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx$ c) $\int \sin^3 x \cdot \cos x\,dx$ d) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$

2. Sijoituskeinon toinen idea.
perustuu kuvitelmaan, että edellisessä on t ja x vaihtaneet paikkaa
$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ muuttuu muotoon $\int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = F(g(t)) + C$

eli korvataan alkuperäisessä integroitavassa x funktiolla g(t) ja dx differentiaalilla g'(t)dt
Funktio x = g(t) tulee olla yksikäsitteinen, jotta voidaan lopuksi korvata $t = g^{-1}(x)$:llä ja palata muuttujaan x.

2. Laske a) $\int x(x - 1)^4\,dx$ b) $\int x\sqrt{x - 2}\,dx$ c) $\int x^2(x + 1)^5\,dx$ d) $\int x^3(1 + x^2)^5\,dx$

3. Laske annetulla sijoituksella a) $\int \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}}\,dx$ (t = 2x) b) $\int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx$ (x = 2t) c) $\int \frac{1}{x^2 + 16}\,dt$ (x = 4t)

3.2. Määrätty integraali sijoituskeinolla

1. Määrätty integraali laskemalla ensin integraalifunktio
Laske ensin integraalifunktio kuten kohdassa 3.1.1 tai 3.1.2 on esitetty
Laske arvo ylärajalla ja vähennä arvo alarajalla

3.2.1 Laske a) $\int_0^3 x\sqrt{x + 1}\,dx$ b) $\int_1^2 x(x - 1)^5\,dx$

2. Määrätty integraali sijoituskeinolla muuttamalla myös integroimisrajat
Kun on valittu uusi muuttuja t = g(x), eliminoitu x:t ja siirrytty uuteen muuttujaan t.
Määrätyn integraalin yhteydessä on turha palata takaisin alkuperäiseen muuttujaan
$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} h(t)\,dt$, eli korvataan integroitavassa x:t t:llä ja rajat niitä vastaavilla t:n arvoilla

2. Laske a) $\int_3^7 x\sqrt{x - 3}\,dx$ b) $\int_1^2 x^2\sqrt{x - 1}\,dx$ c) $\int_1^2 (x - 1)\sqrt{2 - x}\,dx$

4. Implisiittifunktio

4.1. Implisiittifunktion käsite

1. Implisiittifunktio
Yhtälö F(x,y) = 0, josta ei ole ratkaistu y:n lauseketta x:n avulla on implisiittinen eli ratkaisematon
Yhtälö määrittelee funktion y = f(x), jos y voidaan ratkaista yksikäsitteisesti.
Jos y:tä ei voi ratkaista yksikäsitteisesti, yhtälö voidaan kenties esittää kahden tai useamman funktion avulla

2. Implisiittifunktion esittäminen ratkaistussa muodossa (eksplisiittisesti).
Ratkaistaan yhtälöstä $F(x,y) = 0$ y:n lauseke x:n avulla esitettynä
Näin saadaan funktio ratkaistussa muodossa $y = f(x)$.

4.1.1. Esitä ratkaistussa muodossa a) $2x + y = 4$ b) $x^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0$ c) $x^2 + y^2 = 4,\ x \leq 0$ d) $x^2 - 4xy + y^2 = 1$

4.2. Implisiittifunktion derivoiminen

1. Derivoimisidean perusta
Kuvitellaan, että y olisi ratkaistu, jolloin sen paikalla olisi funktio y(x).
Derivoitaessa huomattava tämä. Esim. $D(y^2) = 2y\cdot y'$ ja $D(xy) = 1\cdot y + x\cdot y'$ jne.

2. Implisiittifunktion derivaatan lauseke
Derivoidaan implisiittisen yhtälön molemmat puolet x:n suhteen. Huomioidaan, että $y = y(x)$ eli x:n lauseke.
Siirretään y'-termit vasemmalle puolelle ja muut termit oikealle puolelle
Otetaan y' yhteiseksi tekijäksi.
Jaetaan y':n kertoimella, josta saadaan derivaatan lauseke x:n ja y:n lausekkeena

4.2.1. Laske y ':n lauseke x:n ja y:n avulla a) $xy - x + 2y = 1$ b) $x^2 + xy = y^3$ c) $x^2y^3 = 2x - y$

3. Implisiittifunktion derivaatan lauseke jossakin pisteessä
Derivoidaan implisiittisen yhtälön molemmat puolet. Huomioidaan, että y on x:n lauseke.
Sijoitetaan x:n ja y:n paikalle pisteen koordinaatit.
Ratkaistaan y':n arvo

2. Laske käyrän tangentin kulmakerroin annetussa pisteessä a) $2x^2 + 3y^2 = 5$, P = (1,1)
b) $x^2y^3 - x^3 y^2 = 12$, P = (-1,2) c) $\frac{x}{y} + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 2$, P = (-1,1) d) $2x + y - \sqrt{2}\sin(xy) = \frac{1}{2}\pi$, P = $(\frac{1}{4}\pi, 1)$
3. Mikä on käyrän $x\cdot\sin(xy - y^2) = x^2 - 1$ pisteeseen (1,1) piirretyn tangentin yhtälö?
4. Osoita, että käyrät $2x^2 + y^2 = 6$ ja $y^2 = 4x$ leikkaavat toisensa kohtisuorasti.

5. Käyrien parametrimuotoiset esitykset

5.1. Parametriesitys

1. Määritelmä parametrimuotoiselle tasokäyrälle
Tasokäyrä on pisteiden (f(t),g(t)) joukko, missä $x = f(t)$ ja $y = g(t)$ ovat jatkuvia jollakin välillä.
$x = f(t)$ ja $y = g(t)$ ovat käyrän parametrimuotoiset yhtälöt, ja t on käyrän parametri.

2. Miksi parametrimuotoisia yhtälöitä.
Käyrän koordinaatti- (xy-)muotoinen yhtälö kertoo missä piste on ollut käyrällä.
Parametrimuotoinen yhtälö voi kertoa myös sen MILLOIN piste on ollut sillä kohtaa käyrällä.

3. Parametrimuotoisen käyrän piirtäminen.
Annetaan parametrille t eri arvoja.
Lasketaan x ja y parametrimuotoisista yhtälöistä.
Laitetaan samaa parametrin arvoa t vastaavat lukuparit (x,y) pisteinä koordinaatistoon.
Piirretään käyrä merkittyjen pisteiden kautta.

5.1.1. Piirrä käyrä a) $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$, $-2 \leq t \leq 3$ c) $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 1 + 1/t \\ y = t - 1 \end{cases}$

4. Parametrimuotoisen käyrän piirtäminen graafisella laskimella TI-85
Valitse $\boxed{\text{MODE}}$ sta $\boxed{\text{Param}}$ esitysmuoto.

Syötä parametrimuotoiset yhtälöt $\boxed{\text{GRAPH}}$ $\boxed{\text{F1=E(t)}}$ kirjoittamalla xt1= f(t) ja yt1 = g(t)

Anna $\boxed{\text{F2=RANGE}}$:ssa parametrin (t) määrittelyjoukko ja koordinaatiston koko (xmin-xmax ; ymin-ymax)

Laskin piirtää kuvan komennolla $\boxed{\text{F5=GRAPH}}$

2. Piirrä edellisen tehtävän käyrät laskimella

5. Määrittelyjoukko.
Parametrimuotoiset yhtälöt voivat olla määriteltyjä niin, ettei koordinaatteja voida/haluta laskea kaikilla parametrin arvoilla. Tästä seuraa, että myös x-koordinaatit voivat muodostaa reaalilukujen osajoukon.

3. Mikä on käyrän $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{t+1}} \\ y = \dfrac{t}{t+1} \end{cases}$ määrittelyjoukko? Mikä on kuvaaja?

6. Käyrän määrittäminen tekemällä parametrimuotoinen yhtälö
Valitse parametri, se voi olla esim. aika, kulma, jonkin pisteen x-koordinaatti tms.
Lausu käyrän x- ja y-koordinaatit tämän parametrin avulla.

4. Henkilö liikkuu lentotukialuksen kannella vauhdilla 5 m/s koilliseen. Laiva liikkuu samanaikaisesti vauhdilla 10 m/s itään. Mikä on henkilön liikerata maassa tarkkailevasta henkilöstä.
5. Jana (pituus = 10) liukuu niin, että sen päätepisteet ovat koordinaattiakseleilla. Mitä viivaa pitkin liikkuu janan keskipiste?

7. Tason suora parametrimuotoisena yhtälönä.
Jos suoralta tunnetaan piste (x_0,y_0) ja suuntavektori $\mathbf{s} = s_x\mathbf{i} + s_y\mathbf{j}$ ($= \mathbf{i} + k\mathbf{j} = (x_1 - x_0)\mathbf{i} + (y_1 - y_0)\mathbf{j}$)
on parametrimuotoinen yhtälö $\begin{cases} x = x_0 + ts_x \\ y = y_0 + ts_y \end{cases}$

6. Mikä on suoran parametrimuotoinen yhtälö, kun suora kulkee a) pisteen (1,2) kautta ja suuntavektori on $\mathbf{s} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ b) pisteen (3,-1) kautta ja kulmakerroin on 2 c) pisteiden (-1,2) ja (2,-4) kautta?

8. Avaruussuora parametrimuotoisena yhtälönä
Jos suoralta tunnetaan piste (x_0,y_0,z_0) ja suuntavektori $\mathbf{s} = s_x\mathbf{i} + s_y\mathbf{j} + s_z\mathbf{k}$ ($= (x_1 - x_0)\mathbf{i} + (y_1 - y_0)\mathbf{j} + (z_1 - z_0)\mathbf{j}$)
niin parametrimuotoinen yhtälö on $\begin{cases} x = x_0 + ts_x \\ y = y_0 + ts_y \\ z = z_0 + ts_z \end{cases}$

7. Mikä on pisteen (1,2,-3) kautta kulkeva suora, jonka suuntavektori on $\mathbf{s} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$?

9. Ympyrä parametrimuotoisena yhtälönä
Olkoon ympyrän keskipiste (x_0,y_0) ja säde r.
parametrimuotoinen yhtälö on $\begin{cases} x = x_0 + r\cos t \\ y = y_0 + r\sin t \end{cases}$, missä $0 \le t < 2\pi$ tai $\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 \pm \sqrt{r^2 - t^2} \end{cases}$, missä $-r \le t \le r$

8. Mikä on ympyrän parametrimuotoinen yhtälö, kun keskipiste on (2,3) ja säde 4?

10. Paraabeli parametrimuotoisena yhtälönä
Olkoon paraabeli huippu (x_0,y_0) ja koordinaattimuotoisessa yhtälössä x^2:n kerroin a ($y = ax^2 + \ldots$)
parametrimuotoinen yhtälö on $\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + at^2 \end{cases}$

9. Mikä on paraabelin parametrimuotoinen yhtälö, kun paraabelin huippu on (2,-1), aukeamissuunta on alaspäin ja paraabeli on yhtä kapea kuin $y = 2x^2$?

5.2. Parametriesityksestä koordinaattimuotoiseen esitykseen

1. Koordinaattimuotoisen yhtälön saaminen
Ratkaise toisesta yhtälöstä t:n lauseke ja sijoita tämä lauseke toiseen yhtälöön.
Tai eliminoi t jonkin säännön (esim. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$) perusteella.
Ota huomioon t:n määrittelyjoukko.

5.2.1 Esitä koordinaattimuodossa käyrät a) $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t / (t - 1) \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$

2. Käyrän yhtälön muodostaminen laskien ensin parametriesitys
Laske ensin parametrimuotoinen esitys kuten kohdassa 5.1.6.
Eliminoi parametri t jotta saisit koordinaattimuotoisen yhtälön.

2. Mikä on sen paraabelin yhtälö, joka saadaan kun paraabelin $y = x^2 - 2x + 4$ jokainen piste siirtyy pisteen ja sen x-akselilla olevan projektiopisteen keskipisteeseen?
3. Ympyrä sivuaa suoraa y = 1 ja kulkee origon kautta. Millä viivalla ovat ympyröiden keskipisteet?
4. Piste P jakaa janan AB 1:2. Piste A on y-akselilla ja B x-akselilla. Millä käyrällä on piste P kun janan AB pituus on 6?

5.3. Parametrimuotoisen funktion derivaatta

1. Parametrimuotoisen käyrän tangentin kulmakerroin kohdassa t_0
$k_T = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$

5.3.1. Laske käyrän derivaatta annetussa kohdassa
a) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t + 4 \end{cases}$, t = 5 b) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = 3t + 2 \end{cases}$, t = 1 c) $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 + 3t \end{cases}$, t = -1 d) $\begin{cases} x = t^2 + 3t \\ y = t + 1 \end{cases}$, t = 0.

2. Parametrimuotoisesta funktiosta saadun funktion y = y(x) derivaatta kohdassa $x = x_0$
$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$, missä t on ratkaistava yhtälöstä $x(t) = x_0$

2. Laske käyrän tangentin kulmakerroin kohdassa x = 4, kun a) $\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = t^2 - t + 2 \\ y = t^3 - 3t \end{cases}$

3. Pisteen määrittäminen, kun käyrän tangentti vaakasuora
Tällöin y'(t) = 0, josta yhtälöstä saadaan t ja siitä edelleen piste.

3. Missä pisteessä käyrän a) $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t^3 - 3t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = t^2 - t + 2 \\ y = t^3 - 12t \end{cases}$ tangentti on vaakasuora?

4. Pisteen määrittäminen, kun käyrän tangentti on pystysuora
Tällöin x'(t) = 0, josta yhtälöstä saadaan t ja siitä edelleen piste.

4. Missä pisteessä käyrän a) $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t^3 - 3t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = t^2 - 2t + 3 \\ y = t^3 - 12t \end{cases}$ tangentti on pystysuora?

6. Napakoordinaatisto

6.1. Napakoordinaatit

1. Pisteen paikan esitys koordinaatistossa napakoordinaatein
Tavallisen esityksen (x,y) koordinaattien asemasta paikka ilmoitetaan kahdella luvulla.
Toinen luku kertoo miten kaukana origosta piste on ja toinen luku missä suunnassa piste on.
Koordinaatit [3,40°] kertoo, että pisteen etäisyys origosta on kolme yksikköä suunnassa 40° positiivisesta x-akselista positiiviseen kiertosuuntaan (vastapäivään)

2. Napakoordinaatit
Ilmaistaan muodossa [r, θ], missä r on etäisyys origosta ja θ on suuntakulma $0 \leq \theta < 2\pi$
Kulma voi olla myös alueen ulkopuolelta, mutta pisteet [r, θ] ja [r, θ+n·2π] edustavat samaa pistettä.
Kulma voidaan antaa myös asteina.
Joskus etäisyys annetaan suunnattuna [-r, θ] = [r, θ + π] eli vastakkaisessa suunnassa etäisyydellä r
Origossa r = 0 ja θ on määrittelemätön, ts. kaikki pisteet [0, θ] kuvaavat origoa.

6.1.1. Kuinka kaukana origosta on piste a) [5, 10°] b) [6, π] c) [π, 1] d) [0, 9] e) [-3, 90°]
2. Missä suunnassa on piste a) [5, 10°] b) [6, π] c) [π, 1] d) [0, 9]

3. Käyrät napakoordinaatistossa
annetaan yhtälöllä, jossa esiintyy r tai θ tai molemmat

4. Napakoordinaateissa esitetyn funktion piirtäminen
Annetaan esim. θ:lle arvoja ja lasketaan mikä on vastaava r:n arvo.
Merkitään tämä pari pisteenä koordinaatistoon.
Yhdistetään pisteet käyräksi, joka kuvaa yhtälöä.

3. Laske käyrän r = 4 sin θ niiden pisteiden etäisyys origosta, joiden vaihekulma on a) 0 b) π/6 c) π/3 d) π/2 e) 2π/3 f) 5π/6 g) π h) 7π/6 i) 4π/3 j) 3π/2 k) 5π/3 l) 11π/6 m) 2π . Merkitse pisteet koordinaatistoon ja piirrä kuvaaja

5. Napakoordinaateissa esitetyn funktion kuvaajan piirtäminen graafisella laskimella TI-85
Valitse [MODE] sta [Pol] esitysmuoto.
Syötä parametrimuotoiset yhtälöt [GRAPH] [F1=r(θ)=] kirjoittamalla r1= lauseke miten r riippuu θ:sta
Anna [F2=RANGE] :ssa parametrin θ määrittelyjoukko ja koordinaatiston koko
Laskin piirtää kuvan komennolla [F5=GRAPH]

4. Piirrä käyrät a) $r = 4 \sin \theta$ b) $r = 5 \cos \theta$ c) $r = 1 - 2\sin \theta$ d) $r^2 = 4 \sin \theta$ e) $\theta = \pi/6$

6.2. Napakoordinaattien ja xy-koordinaatien muunnoskaavat

1. Muunnoskaavat miten xy-koordinaatit saadaan napakoordinaateista.
$[r, \theta] = (x,y)$, missä $x = r\cdot\cos \theta$ ja $y = r \sin \theta$

6.2.1. Laske pisteen xy-koordinaatit a) $[4, \frac{1}{2}\pi]$ b) $[4, 1\frac{1}{2}\pi]$ c) $[4, -\pi/3]$ d) $[-4, \pi/3]$

2. xy-koordinaatit napakoordinaateista graafisella laskimella TI-85
[2nd] [CPLX] [MORE] [sulku alkaa r] [2nd∠ (=kulma)] [θ sulku päättyy]) [F1=>Rec] → (x,y)

2. Esitä pisteen xy-koordinaatit a) [6, 60°] b) [4, 45°] c) [3, 1] d) [2, -1] e) [-1, 3]

3. Muunnoskaavat miten napakoordinaatit saadaan xy-koordinaateista
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $\tan \theta = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \arctan \frac{y}{x}$

3. Esitä napakoordinaatein piste a) (1, 1) b) (2, 0) c) (4, -2) d) (-5, 0) f) (5, 12)

4. Napakoordinaatit xy-koordinaateista graafisella laskimella TI-85
[2nd] [CPLX] [MORE] [(x,y)] [F2=>Pol] → (r∠θ)

4. Esitä napakoordinaatein piste a) (2, 3) b) (4, -5) c) (6, 3) d) (-1, 2) e) (-3, 2)

5. xy-koordinaatein annetun käyrän muuttaminen napakoordinaatein annetuksi käyräksi
Korvaa x:t ja y:t lausekkeilla $x = r\cdot\cos \theta$ ja $y = r\cdot\sin \theta$
Ratkaise etäisyys r vaihekulman θ:n avulla

5. Esitä napakoordinaattimuodossa yhtälö a) $x^2 + y^2 = 9$ b) $x^2 + y^2 - 6x = 0$ c) $y = 4$ d) $x = 5$ e) $3x - 2y + 2 = 0$

6. Napakoordinaateissa esitetyn funktion muuttaminen xy-koordinaateissa esitetyksi funktioksi
Korvaa etäisyydet r lausekkeella $\sqrt{x^2 + y^2}$
Korvaa vaihekulmat θ lausekkeella $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \arctan \frac{y}{x}$ tai käytä θ:n eliminoimiseen yhtälöä $\tan \theta = \frac{y}{x}$
Esitä yhtälö ratkaistussa muodossa $y = y(x)$ jos mahdollista, muutoin implisiittimuodossa.

6. Esitä suorakulmaisessa koordinaatistossa yhtälö a) $r = 4 \sin \theta$ b) $r = 1 - 2 \sin \theta$ c) $r = 6 / (2 - 3\sin \theta)$

6.3. Napakoordinaateissa esitetyn käyrän derivoiminen

1. Tangentin kulmakerroin eli tavallinen derivaatta
Olkoon käyrän yhtälö $r = f(\theta)$
Esitetään käyrä parametrimuodossa $x = r\cdot\cos \theta = f(\theta)\cdot\cos \theta$ ja $y = r\cdot\sin \theta = f(\theta)\cdot\sin \theta$
Täten sitä derivoidaan kuten muitakin parametrimuotoisia käyriä
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f'(\theta)\cdot\sin \theta + f(\theta)\cdot\cos \theta}{f'(\theta)\cdot\cos \theta - f(\theta)\cdot\sin \theta}$$

6.3.1. Laske käyrän $r = 2 + 3\sin \theta$ tangentin kulmakertoimet kun a) $\theta = \frac{1}{2}\pi$ b) $\theta = \pi$ c) $\theta = 1\frac{1}{2}\pi$

2. Pystysuoran tangentin laskeminen
Tällöin x ei muutu, joten $x'(\theta) = 0$, joka ratkaisemalla saadaan vaihekulma, jolla tangentti on pystysuora.
Etäisyys saadaan yhtälöstä $r = f(\theta)$

2. Missä pisteissä käyrän $r = 2(1 - \cos \theta)$ tangentit ovat pystysuoria?

3. Vaakasuoran tangentin laskeminen
Tällöin y ei muutu, joten $y'(\theta) = 0$, joka ratkaisemalla saadaan vaihekulma, jolla tangentti on vaakasuora.
Etäisyys saadaan yhtälöstä $r = f(\theta)$.
HUOM! jos sekä $y'(\theta)$ että $x'(\theta)$ ovat molemmat nollia, ei voida päätellä tangentin suuntaa.

3. Missä pisteissä käyrän $r = 2(1 - \cos\theta)$ tangentit ovat vaakasuoria?

7. Kahden muuttujan funktiot

7.1. Kahden muuttujan funktion kuvaaja

1. Kahden muuttujan funktio
Kahden muuttujan funktion arvot riippuvat kahdesta muuttujakirjaimesta, tavallisesti x:stä ja y:stä.
Merkitään f(x,y).
Tämä on funktio, jos jokaiseen määrittelyjoukon pariin (x,y) liittyy yksi ja vain yksi arvo f(x,y) = z.

7.1.1. Laske a) f(2,3) kun $f(x,y) = 4 - x^2 - 4y^2$ b) f(2,-1), kun $f(x,y) = xe^y$ c) f(1,4) kun $f(x,y) = \int_x^y (2t - 3)\,dt$

2. Kahden muuttujan funktion määrittelyjoukko
on niiden xy-tason pisteiden (x,y) joukko, joissa funktion arvo on määritelty (laskettavissa).

2. Laske määrittelyjoukko, kun f(x,y) on a) $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ b) ln (x - y - 1) c) $\dfrac{x + 1}{y^2\sqrt{x}}$ d) arcsin (x + y)

3. Kahden muuttujan funktion kuvaaja
on kolmiulotteinen pinta kolmiulotteisessa koordinaatistossa.
Pinnan z-koordinaatti kuvaa miten korkealla xy-tasosta funktion arvo on.

4. Kahden muuttujan funktion kuvaajan ja koordinaatistotasojen leikkausviiva.
xy-tason leikkausviiva koostuu niistä pisteistä, joissa f(x,y) = 0
xz-tason leikkausviiva on funktion z = f(x,0) kuvaaja xz-tasossa.
yz-tason leikkausviiva on funktion z = f(0,y) kuvaaja yz-tasossa.

3. Laske käyrän $z = x^2 + 2xy - 3x + 4y$ ja a) xy-tason b) xz-tason c) yz-tason leikkausviiva.

5. Kahden muuttujan funktion sama-arvokäyrät
ovat xy-tason suuntaisia käyriä, joissa kaikissa toteutuu yhtälö f(x,y) = vakio.
Havainnollisesti ne kuvaavat xy-tasoon piirrettyjä ”korkeuskäyriä”.
Niiden avulla voidaan havainnoida tasossa millainen on funktion kuvaava pinta.

4. Minkä xy-tason käyrän yläpuolella funktion $f(x,y) = x^2 - y + 2x - 3$ kuvaaja on korkeudella a) 1 b) 2 c) - 3?

7.2. Osittaisderivaatat

1. Kahden muuttujan funktion osittaisderivaatta x:n suhteen
saadaan derivoimalla funktio f(x,y) x:n suhteen pitäen y:tä vakiona.
Merkitään ja määritellään $f_x(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{u \to x} \dfrac{f(u,y) - f(x,y)}{u - x}$ eli erotusosamäärän raja-arvona.

7.2.1. Laske f_x, kun f(x,y) on a) x^3y^2 b) $2xy^2 - y^3 + y/x$ c) e^{x+y} d) $\ln(x^2 + 2xy)$ e) $x\cdot\sin(xy)$

2. Kahden muuttujan funktion osittaisderivaatta y:n suhteen
saadaan derivoimalla funktio f(x,y) y:n suhteen pitäen x:ää vakiona.
Merkitään ja määritellään $f_y(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{u \to x} \dfrac{f(x,u) - f(x,y)}{u - y}$ eli erotusosamäärän raja-arvona.

2. Laske f_y, kun f(x,y) on a) x^3y^2 b) $2xy^2 - y^3 + y/x$ c) e^{x+y} d) $\ln(x^2 + 2xy)$ e) $x\cdot\sin(xy)$

3. Kuvaajapinnan kaltevuus x-akselin suunnassa pisteessä (x,y,z)
Osittaisderivaatta $f_x(x,y) = k_T$ eli tangentin kulmakerroin sille viivalle, joka syntyy funktion kuvaajan ja pisteen (x,y,z) kautta kulkevan xz-tason suuntaisen tason leikatessa.
Jos x-akselin suunnan ja tämän tangentin välinen kulma on α, niin $\tan\alpha = k_T = f_x(x,y)$ ja kulma kertoo millaisella jyrkkyydellä lähetään pisteestä (x,y,z) kun x kasvaa ja y pysyy vakiona

3. Laske $f_x(2,1)$, kun a) $f(x,y) = x^2 + 2xy - 2y^2$ b) $f(x,y) = xy\cdot e^{xy^2}$

4. Kuvaajapinnan kaltevuus y-akselin suunnassa pisteessä (x,y,z)
Osittaisderivaatta $f_y(x,y) = k_T$ eli tangentin kulmakerroin sille viivalle, joka syntyy funktion kuvaajan ja pisteen (x,y,z) kautta kulkevan yz-tason suuntaisen tason leikatessa.
Jos y-akselin suunnan ja tämän tangentin välinen kulma on β, niin $\tan \beta = k_T = f_x(x,y)$ ja kulma kertoo millaisella jyrkkyydellä lähetään pisteestä (x,y,z) kun y kasvaa ja x pysyy vakiona

4. Laske $f_y(2,1)$, kun a) $f(x,y) = x^2 + 2xy - 2y^2$ b) $f(x,y) = xy\cdot e^{xy^2}$

5. Toisen kertaluvun osittaisderivaatat
Kun osittaisderivaatat x:n tai y:n suhteen vielä derivoidaan, saadaan toisen kertaluvun osittaisderivaatat
$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ eli derivoidaan ensin x:n suhteen ja näin saatu derivaatta vielä x:n suhteen
$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ eli derivoidaan ensin x:n suhteen ja näin saatu derivaatta vielä y:n suhteen
$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ eli derivoidaan ensin y:n suhteen ja näin saatu derivaatta vielä x:n suhteen
$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ eli derivoidaan ensin y:n suhteen ja näin saatu derivaatta vielä y:n suhteen
Jos kaikki neljä derivaattaa ovat olemassa on funktio kahdesti derivoituva
Jos kaikki neljä derivaattaa ovat jatkuvia, niin $f_{xy} = f_{yx}$.

5. Laske kaikki toisen kertaluvun osittaisderivaatat a) $f(x,y) = 3x^3 - 4x^2y + 5xy^2 - 6y^3$ b) $f(x,y) = e^{xy}\cdot\sin(x+y)$

6. Osoita, että $f_{xy} = f_{yx}$, kun a) $f(x,y) = x^3 - 3x^2y$ b) $f(x,y) = xe^{-y^2}$

6. Kuvaajapinnan tangenttitason normaalivektori
Jos funktio $z = f(x,y)$ esitetään ratkaisemattomassa muodossa $f(x,y) - z = 0$ ja merkitään tätä $F(x,y,z) = 0$, on pinnan pisteessä (a,b,c) tangenttitason normaalivektori $\mathbf{n} = F_x(a,b,c)\mathbf{i} + F_y(a,b,c)\mathbf{j} + F_z(a,b,c)\mathbf{k}$

7. Laske funktion kuvaajapinnan normaalivektori annetussa pisteessä a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja P = (3,4,5)
b) $f(x,y) = x^2y^4$ ja P = (1,2,16) c) $x^2 + 3y + z^3 = 9$ ja P = (2,-1,2)

7. Kuvaajapinnan tangenttitason yhtälö
on $F_x(a,b,c)x + F_y(a,b,c)y + F_z(a,b,c)z = d$, missä d saadaan sijoittamalla a, b ja c x:n, y:n ja z:n paikalle.

8. Laske funktion kuvaajapinnan tangenttitaso annetussa pisteessä a) $f(x,y) = x^2 - y^2$ ja P = (5,4,9)
b) $f(x,y) = \frac{y}{x}$ ja P = (1,2,2) c) $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$ ja P = (1,0,0) d) $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$ ja P = (2,-2,4)

7.3. Ääriarvotehtäviä kahden muuttujan funktiosta

1. Tasoalueen reunapiste
Piste (x,y) on reunapiste, jos pisteen jokainen r-säteinen ympäristö sisältää sekä alueeseen että sen ulkopuolelle kuuluvia pisteitä.

2. Suljettu alue
Tasoalue on suljettu, jos alueeseen kuuluu myös sen reunapisteet

3. Avoin alue
Tasoalue on avoin, jos alueeseen ei kuulu sen reunapisteet.

4. Pisteen ympäristö tasossa
on jokainen alue $U(x_0,y_0)$, jos se on avoin ja piste (x_0,y_0) kuuluu tähän alueeseen.

5. Kahden muuttujan funktion suurin ja pienin arvo
Luku p on funktion f(x,y) pienin arvo, jos kaikissa määrittelyalueen pisteissä (x,y) pätee $f(x,y) \geq p$
Luku S on funktion f(x,y) suurin arvo, jos kaikissa määrittelyalueen pisteissä (x,y) pätee $f(x,y) \leq S$

6. Kahden muuttujan funktion maksimi- ja minimiarvo
Funktion $f(x,y)$ arvo pisteessä (x_0,y_0) on maksimiarvo, jos on olemassa sellainen pisteen (x_0,y_0) ympäristö $U(x_0,y_0)$, että kaikilla $(x,y) \in U(x_0,y_0)$ pätee $f(x,y) \le f(x_0,y_0) = M$
Funktion $f(x,y)$ arvo pisteessä (x_0,y_0) on minimiarvo, jos on olemassa sellainen pisteen (x_0,y_0) ympäristö $U(x_0,y_0)$, että kaikilla $(x,y) \in U(x_0,y_0)$ pätee $f(x,y) \ge f(x_0,y_0) = m$

7. Milloin kahden muuttujan funktiolla on suurin ja pienin arvo
Jos funktio on jatkuva suljetulla alueella, niin sillä on suurin ja pienin arvo

8. Kahden muuttujan funktion mahdollinen ääriarvopiste
on se piste (x,y), jonka koordinaatit toteuttavat yhtälöt $f_x = 0$ ja $f_y = 0$

7.3.1. Määritä mahdollinen ääriarvopiste a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y$ b) $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$

9. Kahden muuttujan funktion ääriarvon laatu mahdollisessa ääriarvopisteessä
Olkoon $f_x(x_0,y_0) = 0$ ja $f_y(x_0,y_0) = 0$ sekä toisen kertaluvun osittaisderivaatat f_{xx}, $f_{xy} = f_{yx}$ ja f_{yy} jatkuvia
Merkitään $D = f_{xx}(x_0,y_0) \cdot f_{yy}(x_0,y_0) - [f_{xy}(x_0,y_0)]^2$
Jos $D > 0$ ja $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$, niin pisteessä (x_0,y_0) on paikallinen minimi
Jos $D > 0$ ja $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$, niin pisteessä (x_0,y_0) on paikallinen maksimi
Jos $D < 0$, niin pisteessä (x_0,y_0) ei ole ääriarvoa, pistettä sanotaan usein satulapisteeksi
Jos $D = 0$, niin ääriarvon olemassaolo jää avoimeksi.

2. Päättele ääriarvo, kun a) $f_{xx} = 9$, $f_{yy} = 4$ ja $f_{xy} = 6$ b) $f_{xx} = -3$, $f_{yy} = -8$ ja $f_{xy} = 2$ c) $f_{xx} = 9$, $f_{yy} = 6$ ja $f_{xy} = 7$
3. Laske ääriarvot a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x - 6y$ b) $f(x,y) = \sqrt{25 - (x - 2)^2 - y^2}$ c) $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$ d) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

10. Kahden muuttujan funktion suurimman ja pienimmän arvon laskeminen, kun määrittelyalue on suljettu
Jos funktio on jatkuva, niin sillä on tällöin suurin ja pienin arvo.
Lasketaan ne pisteet missä $f_x = 0$ ja $f_y = 0$
Lasketaan missä reunaviivan pisteissä derivaatta on nolla.
Lasketaan funktion arvo kaikissa näissä pisteissä. Suurin arvo on suurin saaduista luvuista.

4. Laske funktion suurin ja pienin arvo annetulla alueella a) $f(x,y) = (2x - y)^2$ kolmiossa (2,0), (0,1), (1,2) b) $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y$, $y \ge x^2$ ja $y \le 4$ c) $f(x,y) = x^2 + xy$, $|x| \le 2$ ja $|y| \le 1$ c) $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$, $x^2 + y^2 \le 8$

11. Ääriarvoprobleema, joka johtaa kahden muuttujan funktioon
Päättele mikä suure pitää olla mahdollisimman suuri tai pieni. Tälle suureelle pitäisi saada funktio.
Valitaan jotkin tämän suureen arvoon vaikuttavat suureet x:ksi ja y:ksi.
Muodostetaan maksimoitavalle suureelle funktio $f(x,y)$ x:n y:n ja annettujen lukujen avulla
Selvitä määrittelyalue.
Laske saadun funktio $f(x,y)$ suurin arvo määrittelyalueessaan.
Pohdi lopuksi ratkaisun järkevyyttä ja anna vastaus.

5. Kolmen luvun summa on 12. Laske tulon suurin arvo.
6. Kolmen luvun x, y ja z summa on 30. Laske mikä on tulon xy^2z suurin mahdollinen arvo.
7. Suorakulmaisen särmiön pohja on xy-tasolla yksi kärki origossa. Laske tilavuuden suurin mahdollinen arvo, kun yksi kärki on tasolla $6x + 4y + 3z = 24$.
8. Osoita, että kun suorakulmaisen särmiön tilavuus on vakio, niin sen sen pinta-ala on pienin silloin, kun särmiö on kuutio.

8. Kompleksiluvut

8.1. Kompleksitaso

1. Kompleksitaso
on tavallinen 2-ulotteinen tasokoordinaatisto.
x-akseli on reaaliakseli, ja sen pisteen esittävät puhtaita reaalilukuja
y-akseli on imaginaariakseli, ja sen pisteet ovat puhtaita imaginaarilukuja.
muut koordinaatiston pisteet esittävät jotakin imaginaarilukua.

2. Kompleksiluvun esittämistapoja
Kompleksilukua merkitään yleensä kirjaimella z.
Kompleksiluku on 1° kompleksitason piste tai 2° sen pisteen paikkavektori
Kompleksilukuna voidaan pitää 3° lukuparia (x,y) tai vastaavaa pistettä 4° napakoordinaatein esitettynä $[r,\theta]$
Se voidaan esittää myös 5° algebrallisena summana $z = x + yi$ tai 6° napakoordinaatein $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

3. Koordinaattimuotoisten kompleksilukujen muuttaminen napakoordinaattimuotoisiksi laskimella TI-85
Kompleksiluvut $z = x + yi = (x,y)$ saadaan napakoordinaattimuotoon näppäilyillä

[(x,y)] [2nd] [CPLX] [MORE] [F2 = >Pol] [ENTER]

kulma saadaan asteina tai radiaaneina MODE-valikossa tehdyn valinnan mukaisesti

8.1.1. Esitä napakoordinaatein kompleksiluku a) 2 + 3i b) 4 - 5i c) 6i d) 7

4. Napakoordinaattimuotoisten kompleksilukujen muuttaminen koordinaattimuotoisiksi laskimella TI-85
Kompleksiluvut $z = [r, \theta] = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ saadaan koordinaattimuotoisiksi $z = (x,y) = x + yi$ näppäilyllä

[(r∠θ)] [2nd] [CPLX] [MORE] [F1 = >Rec] [ENTER]

2. Esitä polynomimuodossa kompleksiluku a) $[2, \frac{1}{4}\pi]$ b) $[6, \pi/3]$ c) $[5, -\frac{1}{2}\pi]$ d) $[7, 7\pi/6]$

5. Imaginaariyksikkö i
on kompleksitason piste $i = (0,1) = [1,\frac{1}{2}\pi]$
Sillä on ominaisuus $i^2 = -1$ eli sen toinen potenssi on reaaliluku -1 eli se on yhtälön $z^2 + 1 = 0$ ratkaisu.

6. Kompleksiluvun reaali- ja imaginaariosa
Olkoon $z = x + yi$. Reaaliosa = Re(z) = x ja imaginaariosa = Im(z) = y
Olkoon $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Reaaliosa $\mathrm{Re}(z) = r\cos\theta$ ja imaginaariosa $= \mathrm{Im}(z) = r\sin\theta$

3. Mitkä ovat kompleksiluvun reaali- ja imaginaariosat a) 3 + 4i b) 5 - 6i c) $[6, \pi/6]$ d) $[4, -\frac{1}{4}\pi]$

7. Kompleksiluvun itseisarvo
on kompleksivektorin pituus = kompleksilukua kuvaavan pisteen etäisyys origosta.
$z = x + yi$ tai $z = (x,y)$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ tai $z = [r,\theta]$, $|z| = r$

4. Laske kompleksiluvun itseisarvo a) 3 + 4i b) 5 - 12i c) (3,1) d) [3,1] e) 2(cos 10° + isin 10°)

8. Kompleksiluvun $z = x + yi = (x,y)$ itseisarvo graafisella laskimella TI-85
Näppäile [2nd] [CATALOG] [abs] [(x,y)] [ENTER] tai

[2nd] [CPLX] [F4 = abs] [(x,y)] [ENTER]

9. Kompleksiluvun argumentti eli vaihekulma.
on se kulma minkä kompleksivektori muodostaa positiivisen reaaliakselin kanssa.
$z = [r, \theta]$ tai $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, vaihekulma = arg z = θ.
$z = x + yi$, arg z = on se kulma θ, jolle $\tan\theta = \frac{y}{x}$, $0 < \theta < \pi$, jos $y > 0$ ja $\pi < \theta < 2\pi$, jos $y < 0$
Jos y = 0 ja x > 0, on $\theta = 0$. Jos y = 0 ja x < 0 , on $\theta = \pi$. Jos x = y = 0, ei θ ole määritelty.

5. Laske kompleksiluvun vaihekulma a) 3 + 4i b) 5 - 12i c) (3,1) d) [3,1] e) 2(cos 10° + isin 10°)

10. Kompleksiluvun $z = x + yi = (x,y)$ vaihekulman arvo graafisella laskimella TI-85
Näppäile [2nd] [CPLX] [F5=angle] [(x,y)] [ENTER]
Kulma saadaan joko asteina tai radiaaneina MODE-valintaan tehdyllä tavalla.

6. Määritä reaaliluku a siten, että kompleksiluku a) $(a + 1) + (2a - 3)i$ b) $2a + (a - a^2)i$ on puhdas reaaliluku.

11. Kompleksiluku on puhdas reaaliluku
kun sen imaginaariosa on nolla. Siis kun $z = x + yi$, niin $y = 0$.

7. Mikä on reaaliluku a, kun kompleksiluku a) $(a + 1) + (2a - 3)i$ b) $2a + (a - a^2)i$ on puhdas imaginaariluku.

12. Kompleksiluku on puhdas imaginaariluku
kun sen reaaliosa on nolla. Siis kun $z = x + yi$, niin $x = 0$

13. Kompleksiluvut ovat samoja
Olkoon $z_1 = x_1 + y_1i$ ja $z_2 = x_2 + y_2i$.
Tällöin $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ JA $y_1 = y_2$ eli kun niillä on sama reaaliosa ja sama imaginaariosa
Olkoon $z_1 = [r_1, \theta_1]$ ja $z_2 = [r_2, \theta_2]$.
Tällöin $z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2$ JA $\theta_1 = \theta_2 + n\cdot 2\pi$ eli kun niillä on sama itseisarvo ja sama vaihekulma

8. Määritä x ja y, kun kompleksiluvut $z_1 = (x + 2) + (3y - 4)i$ ja $z_2 = (y + 4) + (2x - 5)i$ ovat samoja-

8.2. Kompleksilukujen yhteen- vähennys- ja kertolasku

1. Polynomimuotoisten kompleksilukujen yhteen- ja vähennyslasku
$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$, eli niitä lasketaan kuin polynomeja

8.2.1. Laske a) (3 - i) + (4 + 2i) b) (2 + i) - (3 - 4i) c) 2i - [(3 - 4i) - (5 + 6i)]

2. Lukuparimuotoisten kompleksilukujen yhteen- ja vähennyslasku
$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

2. Laske a) (2,3) + (1, -4) b) (3,0) - (2,7) c) (1,2) - [(3,4) - (-1,5)]

3. Polynomimuotoisten kompleksilukujen kertolasku
$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i) = x_1x_2 + x_1y_2i + x_2y_1i + y_1y_2i^2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$
Eli niitä kerrotaan kuten polynomeja kuitenkin huomioiden, että $i^2 = -1$.

3. Laske a) (2 + i)(3 - i) b) (3 - 2i)(4 - 5i) c) (1 + i)(2 - i)(3 + 2i)

4. Lukuparimuotoisten kompleksilukujen kertolasku
$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$

4. Laske a) (1,2)·(3,4) b) (2, -3)·(4,1) c) (-1,2)·(4,3)

5. Napakoordinaatistomuotoisten kompleksilukujen kertolasku
$[r_1, \theta_1] \cdot [r_2, \theta_2] = [r_1r_2, \theta_1 + \theta_2]$ eli itseisarvo on itseisarvojen tulo ja vaihekulma on vaihekulmien summa.
$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i\sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i\sin \theta_2) = r_1r_2(\cos (\theta_1 + \theta_2) + i\sin (\theta_1 + \theta_2))$

5. Laske a) [2, 10°]·[[3, 20°] b) [4, π/3]·[5, π/2] c) [1, -2]·[3, ½]

8.3. Kompleksiluvun liittoluku ja kompleksilukujen jakolasku

1. Kompleksiluvun z = x + yi liittoluku
on z* = x - yi, eli liittoluvuilla on sama reaaliosa ja imaginaariosat ovat vastalukuja

8.3.1. Mikä on kompleksiluvun liittoluku a) 2 + 3i b) 4 - 5i c) 6i d) 7

2. Kompleksiluvun z = (x,y) liittoluku
on z* = (x, -y)

2. Mikä on liittoluku a) (2,3) b) (-1, -2) c) (0,3) d) (4,0)

3. Kompleksiluvun $z = [r, \theta]$ liittoluku
on $z^* = [r, -\theta]$ eli liittolukujen itseisarvo on sama ja vaihekulmat ovat vastalukuja

3. Mikä on liittoluku a) [2, 10°] b) [3, π/4] c) [4, -32°] d) [5, 0]

4. Kompleksiluvun $z = r(\cos \theta + i\sin \theta)$ liittoluku
on $z^* = r(\cos \theta - i\sin \theta) = r(\cos (-\theta) + i\sin (-\theta))$

4. Mikä on liittoluku a) 2(cos 10° + isin 10°) b) 3(cos π/3 + isin π/3)

5. Kompleksiluvun liittoluvun sijaitseminen kompleksitasossa
Kompleksiluku ja sen liittoluku ovat symmetrisesti reaaliakselin suhteen.

6. Kompleksiluvun ja sen liittoluvun tulo
$z \cdot z^* = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 = | z |^2$ eli on reaaliluku ja arvoltaan itseisarvon neliö
$z \cdot z^* = [r, \theta] \cdot [r, -\theta] = [r^2, 0]$

5. Laske a) z · z*, kun a) z = 3 + 4i b) z = [5, π/7]

7. Kompleksiluvun $z = x + yi$ käänteisluku
$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i$ eli se on saatu laventamalla nimittäjän liittoluvulla

6. Laske käänteisluku a) $z = 2 + i$ b) $z = 3 - 2i$ c) $z = 4 + 3i$

8. Kompleksiluvun $z = [r, \theta]$ käänteisluku
$\frac{1}{z} = \frac{1}{[r, \theta]} = [\frac{1}{r}, -\theta]$

7. Mikä on käänteisluku a) [2, 10°] b) [2/3, π/4] c) [3/4, π/2] ?

9. Yleissääntö kompleksilukujen jakolaskuun
Jaettava kerrotaan jakajan käänteisluvulla

10. Polynomimuotoisten kompleksilukujen jakolasku
$\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i$ eli kompleksiluku lavennetaan jakajan liittoluvulla.
Sama tulos tulee myös kertomalla jakajan käänteisluvulla.

8. Laske a) (2 + 3i) : (4 - 3i) b) (1 - i) : (2 + i) c) (2 - i) · (3 + 2i) : (4 + 5i)
9. Millä reaaliluvun a arvolla luku (1 + i) : (2 + ai) on puhtaasti reaalinen?

11. Napakoordinaattimuotoisten kompleksilukujen jakolasku
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{[r_1, \theta_1]}{[r_2, \theta_2]} = [\frac{r_1}{r_2}, \theta_1 - \theta_2]$

10. Laske a) [6, 50°] ; [2, 10°] b) [4, π/3] : [2, π/12]

12. Kompleksilukujen $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ jakolasku
$z_1 : z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) : r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = (r_1 : r_2) \cdot (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$

11. Laske a) 10(cos 10° + isin 10°) : 4(cos 50° + isin50°)

13. Laskut kompleksiluvuilla käyttäen graafista laskinta TI-85
Esitä kompleksiluvut z = x + yi lukupareina (x,y) ja käytä kyseistä laskutoimitusmerkkiä lukujen välillä
siis esim. tulo (2 + 3i) · (4 - 5i) näpytellään $\boxed{(2,3)}$ $\boxed{x}$ $\boxed{(4,-5)}$ $\boxed{\text{ENTER}}$

12. Laske a) $(3 - 4i) \cdot (2 + 3i) + (1 - i)^2$ b) (5 - 4i) + (2 + i) · (4 - i) : (3 - i)

8.4. Kompleksiluvun potenssiin korotus ja neliöjuuri

1. Kompleksiluvun $z = [r, \theta]$ korotus potenssiin
$z^n = [r, \theta]^n = [r^n, n\cdot\theta]$

8.4.1 Laske a) $[2, 10°]^2$ b) $[3, \pi/6]^2$ c) $[2, \pi/3]^3$ d) $[1, \pi/5]^{10}$

2. Kompleksiluvun $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ korotus potenssiin
$z^n = r^n(\cos n\cdot\theta + i\sin n\cdot\theta)$

2. Laske a) z^2, kun $z = 2(\cos 10° + i\sin 10°)$ b) z^3, kun $z = 4(\cos \pi/6 + i\sin \pi/6)$

3. i:n potenssit

$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = -i$	$i^4 = 1$
$i^{4n+1} = i$	$i^{4n+2} = -1$	$i^{4n+3} = -i$	$i^{4n} = 1$

4. Kompleksiluvun $z = x + yi$ korotus potenssiin
$z^n = (x + yi)^n$ voidaan laskea kertomalla tai Pascalin kolmiota tai binomikaavaa käyttäen.
Huomioidaan edellisen kohdan eri i:n potenssit.

3. Laske a) $(3 + 2i)^2$ b) $(2 - i)^2$ c) $(2 + i)^3$ d) $(1 - i)^3$

5. Kompleksiluvun $z = [r, \theta]$ neliöjuuri
$\sqrt{z} = [\sqrt{r}, \tfrac{1}{2}\theta]$ eli itseisarvosta otetaan neliöjuuri ja vaihekulma puolitetaan

4. Laske $\sqrt{z}$, kun $z = [4, \pi]$ b) $z = [9, \pi/2]$ c) $z = [16, 3\pi/2]$

6. Kompleksiluvun $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ neliöjuuri
$\sqrt{z} = \sqrt{r}\,(\cos \tfrac{1}{2}\theta + i\sin \tfrac{1}{2}\theta)$ eli itseisarvosta otetaan neliöjuuri ja vaihekulma puolitetaan.

5. Laske $\sqrt{z}$, kun a) $z = 25(\cos 20° + i\sin 20°)$ b) $z = 3(\cos 120° + i\sin 120°)$

7. Kompleksiluvun $z = x + yi$ neliöjuuri
Oletetaan, että neliöjuuri on kompleksiluku $u + vi$.
Tehdään yhtälöstä $(u + vi)^2 = x + yi \Leftrightarrow u^2 - v^2 = x$ JA $2uv = y$ yhtälöpari, josta ratkaistaan u ja v.
Luvut u ja v on oltava reaalisia sekä $v > 0$, jotta vaihekulma θ olisi puolet juurrettavan vaihekulmasta.

6. Laske $\sqrt{z}$, kun a) $z = -3 + 4i$ b) $z = 5 + 12i$ c) $z = 7 - 24i$

8.5. de Moivren kaava

1. de Moivren kaava
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

8.5.1 Laske a) $(\cos 20° + i\sin 20°)^3$ b) $(\cos \pi/6 + i\sin \pi/6)^4$
2. Laske $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3$ kahdella tavalla ja päättele mitä on $\sin 3\alpha$ ja $\cos 3\alpha$.

8.6. Kompleksiyhtälö

1. Ensimmäisen asteen yhtälö z:n suhteen.
Ratkaistaan kuten muutkin I asteen yhtälöt.
Eli nimittäjät pois, sulut pois, siirrot, laske yhteen ja jaa z:n kertoimella.
Jos nimittäjään tulee i, niin se lavennetaan sieltä pois.

8.6.1. Ratkaise a) $z + 5i = 4iz + 14$ b) $2(z - 1) = i(z - 11)$

2. Yhtälöt, joissa z ja z*.
Merkitään $z = x + yi$, jolloin $z^* = x - yi$.
Sijoitetaan nämä alkuperäiseen yhtälöön.
x ja y ratkaistaan yhtälöparista : Re(op) = Re (vp) JA Im(vp) = Im(op)

2. Ratkaise a) $z + iz^* = 3(1 + i)$ b) $2(2 + z) + i(3z^* + 1) = 0$

3. Toisen asteen yhtälö z:n suhteen, kertoimet reaalilukuja.
Ratkaistaan samalla kaavalla kuin muutkin II asteen yhtälöt.
Jos neliöjuuren alle tulee negatiivinen luku $\sqrt{-|D|}$ jaetaan se tuloksi $\sqrt{-1 \cdot |D|} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{|D|} = i \cdot \sqrt{|D|}$

3. Ratkaise a) $z^2 - 4z + 5 = 0$ b) $z^2 - 6z + 13 = 0$ c) $4z^2 - 12z + 25 = 0$

4. Korkeamman asteen yhtälöt, kertoimet reaalilukuja.
Ratkaistaan kuten aiemminkin eli jaetaan I tai II astetta oleviin tekijöihin, joista tulo = 0 yhtälö.
Lisänä on se, että II asteen yhtälö voi antaa ratkaisuksi kompleksilukuja.

4. Ratkaise a) $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$ b) $z^3 + 3z^2 + z - 5 = 0$ c) $z^3 - 5z^2 + 17z - 13 = 0$

8.7. Kompleksilukukertoimisten polynomien teoriaa

1. Jakoyhtälö
Olkoon $P(z) = a^n z_n + a^{n-1} z_{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, missä $a_n \neq 0$ ja $a_k \in C\ \forall k$
Kun P(z) jaetaan I astetta olevalla polynomilla (z - a) on vaillinainen osamäärä Q(z) ja jakojäännös r
Tällöin pätee jakoyhtälö $P(z) = (z - a)Q(z) + r$

8.7.1 Kirjoita jakoyhtälö jakolaskusta $(z^3 + i) : (z + i)$

2. Jakojäännöslause
Kun polynomi P(z) jaetaan I astetta olevalla polynomilla (z - a) on jakojäännös $r = P(a)$

2. Mikä on jakojäännös, kun a) $(z^3 + i) : (z + 1)$ b) $(z^3 - 4z^2 + iz - 4) : (z - i)$

3. Jaollisuuslause
P(z) on jaollinen binomilla (z - a) $\Leftrightarrow P(a) = 0$

3. Onko polynomi $P(z) = z^3 - i$ jaollinen binomilla (z - i)

4. Tekijä - jaollisuus - nollakohta - ratkaisu
(z - a) on polynomin P(z) tekijä
⇔ P(z) on jaollinen binomilla (z - a)
⇔ P(a) = 0
⇔ z = a on polynomin P(z) nollakohta
⇔ z = a on yhtälön P(z) = 0 ratkaisu.

4. Onko binomi z + 2i polynomin a) $P(z) = z^3 - 4z^2 - 5z + 6$ tekijä b) $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$ tekijä

5. Algebran peruslause
Olkoon P(z) vähintään ensimmäistä astetta oleva kompleksilukukertoiminen polynomi.
Tällöin yhtälöllä P(z) = 0 on ainakin yksi ratkaisu kompleksilukujen joukossa.

6. n:nnen asteen yhtälön ratkaisujen lukumäärä
n:nnen asteen yhtälöllä P(z) = 0 on täsmälleen n ratkaisua kompleksilukujen joukossa

7. Polynomin tekijöihin jakolause
Jos n:nnen asteen polynomifunktion nollakohdat ovat $z_1, z_2, \ldots , z_n$, niin polynomi voidaan jakaa tekijöihin
$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$, missä a_n on korkeimman asteisen termin kerroin.

8. Useampikertainen nollakohta
Kompleksiluku a on k-kertainen polynomin P(z) nollakohta, jos
$P(z) = (z - a)^k \cdot Q(z)$, missä z = a ei ole polynomin Q(z) nollakohta.

5. Muodosta kolmannen asteen polynomi, jonka kaksinkertainen nollakohta on z = 1 + i ja jonka reaalinen nollakohta on z = -2

9. Differentiaaliyhtälöt

9.1 Peruskäsitteitä

1. Differentiaaliyhtälö
on yhtälö, jossa on tuntematon funktio (y), sen derivaattoja (y',y'',..) ja funktion muuttuja (x) sekä vakiota.

2. DY:n kertaluku
on korkeimman esiintyvän derivaatan kertaluku

9.1.1. Minkä kertaluvun DY on a) y' + y = 1 b) $x^2y' + 2x = y$ c) $(y')^2 + 2y = 3$ d) y'' + 2y = y'

3. DY:n ratkaisu ja ratkaiseminen
DY:n ratkaisu on se funktio, joka sijoitettuna ja sen derivaatat sijoitettuna yhtälöön, toteuttaa yhtälön kaikilla x

2. Onko a) $y = x^3$ DY:n xy' = 3x b) $y = e^{2x}$ DY:n y' - 2y = 0 c) $y = e^{2x}$ DY:n y'' - 3y' + 2y = 0 ratkaisu?

9.2. Separoituva differentiaaliyhtälö

1. Separoituva DY
Voidaan esittää muodossa $g(y)\cdot y' = h(x)$

2. Separoituvan DY:n ratkaiseminen
Yhtälö $g(y)\cdot y' = h(x)$ kirjoitetaan muotoon $g(y)\cdot\frac{dy}{dx} = h(x)$ ja edelleen $g(y)dy = h(x)dx$
Integroidaan molemmat puolet $\int g(y)dy = \int h(x)dx$ ja saadusta yhtälöstä ratkaistaan y.

9.2.1. Ratkaise DY a) yy' = 2x b) $y' = y^2$ c) y' = 4y d) y' = xy e) $y' = x^2/y$
2. Ratkaise DY a) (x + 1)y' = 2y b) (x + 1)2y' + y = 0 c) $(x^2 + 1)y' = 2x/y$
3. Määritä ne funktiot, joilla tason jokaisessa pisteessä (x,y) on tangentin kulmakerroin (x + 1)(y - 1).
4. Jäähtymislain mukaan kappaleen lämpötilan T muutosnopeus on suoraan verrannollinen lämpötilan T ja ympäristön lämpötilan T_0 erotukseen. Tee DY ja ratkaise se.

3. Tietyn ratkaisun määrittäminen yleisestä ratkaisusta
Ratkaistaessa edellisellä tavalla DY:tä, ratkaisuun tulee jokin integroimisvakio C.
Integroimisvakion C arvo saadaan sijoittamalla ratkaisuun annettu alkuehto $y_0 = y(x_0)$ (eli ratkaisuna olevan funktion kuvaaja kulkee pisteen (x_0,y_0) kautta)
Saatu C.n arvo sijoitetaan lopuksi yleiseen ratkaisuun.

5. Mikä on se DY:n $y' = x/y^3$ ratkaisu, jolle $y(1)= 2$?
6. Määritä funktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen (2,3) kautta ja joka toteuttaa DY:n $xy' = y + 2$.
7. Ratkaise DY $x^2y' = 2y + 1$ alkuehdolla $y(1) = 0$
8. Käyrä kulkee pisteen (0,2) kautta ja tangentin kulmakerroin on joka pisteessä pisteen x-koordinaatin suuruinen. Määritä käyrän yhtälö.
9. Bakteerien määrän kasvuvauhti on verrannollinen lukumäärän neliöjuureen. Alussa ollut 10000 bakteerin populaatio oli kasvanut 5 tunnissa 14000:aan. Mikä on bakteerien määrä 1 vrk:n kuluttua?

4. Tietyn ratkaisun määrittäminen määrätyn integraalin avulla
Kun separoinnin jälkeen on saatu yhtälö $g(y)dy = h(x)dx$, otetaan kummastakin puolesta määrätty integraali
$\int_{y_0}^{y} g(y)dy = \int_{x_0}^{x} h(x)dx$, josta saadaan suoraan halutun alkuehdon toteuttava ratkaisu

10. Ratkaise edellä olevat tehtävät 5 - 9 tätä tekniikkaa käyttäen

5. Tietyn ratkaisun määrittäminen graafisella laskimella TI-85
-Valitse MODE-valikosta käsiteltävä funktiotyyppi DifEq
- DY syötetään seuraavasti: Paina GRAPH F1 = Q '(t) ja anna lauseke, mitä y' on. Muuttujaa x vastaa t. Q'1 tarkoittaa derivaattaa y'. Q1 tarkoittaa funktiota y.
- Valitse F2=RANGE ja anna arvoksi tMin = x_0 eli se x, millä alkuarvo saadaan sekä koordinaatiston koko
- Valitse F3=INITC ja anna arvoksi QI1= y_0 eli se y, minkä arvon funktio saa lähtökohdassaan
- Piirrä kuvaaja komennolla F5=GRAPH
- Jos olet ratkaissut yhtälön, voit piirtää samaan koordinaatistoon saamasi funktion kuvaajan ja verrata sitä laskimen piirtämään kuvaajaan. Valitse MORE F2=DRAW F5=DrawF ja kirjoita saamasi funktion lauseke käyttäen muuttujana kirjainta x. Jos olet laskenut oikein, kuvaajat ovat päällekkäin (ainakin alussa)

9.3. Tasa-asteinen ensimmäisen kertaluvun DY

1. Tasa-asteinen DY
on muotoa $y' = f(y/x)$

2. Muuttujan vaihdolla saatava uusi DY
1° Merkitse $z = y/x$, jolloin $y = xz$ ja $y' = z + xz'$
2° Sijoitetaan nämä tasa-asteiseen I kertaluvun DY:öön
3° Saadaan $z + xz' = f(z)$ eli $z' = [f(z) - z] / x$, joka on separoituva DY

9.3.1 Muodosta separoituva DY a) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ b) $y' = \frac{y - 2x}{2x + 3y}$

3. Tasa-asteisen DY:n ratkaiseminen.
- tee muuttujan vaihdolla separoituva DY
- ratkaise tästä separoituvasta DY:stä funktio z.
- alkuperäisen DY:n ratkaisu on $y = xz$

2. Ratkaise DY a) $y' = \frac{y}{x} + 2$ b) $x^2y' = 2xy + y^2$

9.4. Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö

1. Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen vakiokertoiminen DY
Ensimmäisen kertaluvun = korkein derivaatta on y'
Lineaarinen = y ja y' ovat ensimmäistä astetta
vakiokertoiminen = y:n ja y':n kertoimet ovat vakioita

2. Homogeeninen DY
tarkoittaa että kaikki termit ovat y:n ja y':n suhteen samaa astetta.

3. Yksityisratkaisu
on jokin funktio, joka toteuttaa DY:n

4. Yksityisratkaisun löytäminen kokeilemalla.
Yleisohje on kokeilla samanlaista funktiota kuin on häiriötermi b(x).

Häiriötermi	Yrite	Häiriötermi	Yrite
Vakiofunktio	Vakiofunktio y = A	polynomi	samanasteinen polynomi
sin x, cos x	y = Asin x + Bcos x	sin kx, cos kx	y = Asin kx + Bcos Kx
e^{rx}	$y = Ae^{rx}$	$x \cdot e^{rx}$	$y = Axe^{rx} + B^{rx}$

9.4.1. Määritä DY:lle yksityisratkaisu a) y' + y = 3 b) y' + y = 3x c) y' + y = x^3 d) y' + y = e^{2x} e) y' + y = sin x.

5. Homogeenisen DY:n y' + ay = 0 ratkaisu
on y = Ce^{-ax}. Tämä voidaan ratkaista joka kerta erikseen separoituvana, mutta tulosta voi käyttää hyväksi.

2. Ratkaise DY a) y' + 2y = 0 b) y' - 3y = 0 c) y' = ½y d) y' = - 4x

6. Täydellisen DY:n y' + ay = b(x) ratkaiseminen.
- Ratkaistaan homogeeninen DY y' + ay = 0. Olkoon sen ratkaisu y = h(x).
- Etsitään täydellisen DY:n y' + ay = b(x) jokin yksityisratkaisu y = t(x)
- Täydellisen DY:n kaikki ratkaisut saadaan muodossa y = h(x) + t(x).

3. Ratkaise DY a) y ' - 2y = 3 b) y ' - y = x + 1 c) y ' - 3y = $3x^2$ + 1 d) y ' + y = sin x
4. Määritä annetun ehdon toteuttava DY:n ratkaisu a) y ' = 3y + 4 , y(0) = 5 b) y ' - 2y = 3x + 4, y(1) = 2 c) y ' + 3y = 2sin x , y(0) = 3
5. Potilaalle annetaan ravintoliuosta nopeudella 200 mg/min. Liuoksen konsentraation y muutosnopeus kehossa noudattaa DY:ä y ' = 2 - 0,04y. Mikä on liuoksen konsentraatio ajan funktiona, kun y(0) = 400?
6. Kaupungin väkiluvun p muutos noudattaa yhtälöä p' = 0,02p + 100. Mikä on väkiluku a) 10 vuoden b) 20 vuoden kuluttua, kun se nyt on 100 000?

9.5. Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö

1. Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen DY
Tässä kertoimet voivat olla funktioita y' + a(x)y = b(x)

2. Homogeenisen DY:n y' + a(x)y = 0 ratkaisu
Olkoon A(x) jokin funktion a(x) integraalifunktio
Tällöin HY:n ratkaisu on y = $Ce^{-A(x)}$

3. Täydellisen yhtälön yksityisratkaisu
löytyy kokeilemalla samantyyppistä funktiota kuin häiriötermi on.

4. Täydellisen DY:n ratkaiseminen
- Ratkaistaan homogeeninen DY y' + a(x)y = 0. Olkoon sen ratkaisu y = h(x) = $Ce^{-A(x)}$
- Etsitään täydellisen yhtälön jokin yksityisratkaisu, olkoon se y = t(x)
- Täydellisen DY:n kaikki ratkaisut ovat y = h(x) + t(x)

9.5.1 Osoita, että y = x^3 + x toteuttaa DY:n y' - 3xy = 1 - $3x^4$. Määritä yleinen sekä ehdon y(0) = 2 toteuttava ratkaisu.
2. Osoita, että y = $2x^{3/2}$ toteuttaa DY:n y ' = y/x + $\sqrt{x}$. Määritä DY:n yleinen sekä ehdon y(1) = 5 toteuttava ratkaisu.

9.6. Toisen kertaluvun lineaarinen homogeeninen vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö

1. Toisen kertaluvun homogeeninen vakiokertoiminen DY
- Toinen kertaluku = korkein derivaatta on y''
- Lineaarinen = y, y' ja y'' ovat ensimmäistä astetta
- Homogeeninen = jokainen termi on y:n, y':n ja y'':n suhteen samaa (ensimmäistä) astetta
- Vakiokertoiminen = kertoimet ovat reaalilukuja
- Yleinen DY:n muoto on y'' + py' + qy = 0

2. Karakteristinen yhtälö DY:ä $y'' + py' + qy = 0$ vastaava karakteristinen yhtälö on $r^2 + pr + q = 0$ (korvataan y'' r^2:lla, y' r:llä ja y 1:llä)

3. DY:n ratkaisu, kun karakteristisella yhtälöllä on kaksi erisuurta reaalista ratkaisua r_1 ja r_2 Ratkaisu on $y = Ce^{r1x} + De^{r2x}$

9.6.1 Ratkaise a) $y'' - y = 0$ b) $y'' - y' - 6y = 0$

4. DY:n ratkaisu, kun karakteristisella yhtälöllä on yksi kaksinkertainen ratkaisu r. Ratkaisu on $y = Cxe^{rx} + De^{rx} = (Cx + D)e^{rx}$

2. Ratkaise $y'' + 6y' + 9y = 0$

5. DY:n ratkaisu, kun karakteristisella yhtälöllä on imaginaariset ratkaisut a ± bi Ratkaisu on $y = e^{ax}(C\sin bx + D\cos bx)$

3. Ratkaise $y'' - 2y' + 4y = 0$
4. Määritä annetut ehdot toteuttava ratkaisu a) $y'' - y' - 30y = 0$, $y(0) = 1$ ja $y'(0) = -4$
b) $y'' + 2y' + 3y = 0$, $y(0) = 2$ ja $y'(0) = 1$

Vastaukset E-tehtäviin

1.1.1a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) 0 e) $-\frac{\pi}{4}$ f) $-\frac{\pi}{2}$
2. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) ¾ d) -0,280
3. a) 0,775 b) -0,315 c) ei ole
4. a) 0,343 b) -0,226
5. a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{4}$
6. a) 0,5 b) -0,3 c) ei ole
7. a) 0 b) $\frac{\pi}{4}$ c) $-\frac{\pi}{4}$

1.2.1 a) 0 b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{3\pi}{4}$ f) π
2.a) ½ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}$ d) 1,05
3. a) $\frac{5\pi}{6}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) ei ole
4. a) 0,939 b) 0,446
5. a) $\frac{5\pi}{6}$ b) $\frac{3\pi}{4}$
6. a) 0,5 b) -0,3 c) ei ole
7. a) π b) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{3\pi}{4}$

1.3.1 a) $\frac{\pi}{4}$ b) 0,464 c) $\frac{\pi}{3}$ d) 0,714
e) -0,615 f) $-\frac{\pi}{4}$
2.a) $\sqrt{3}$ b) 1 c) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$ d) -0,519
3. a) 0,611 b) -0,301 c) -1,13
4. a) 0,365 b) -0,253
5. a) $\frac{\pi}{6}$ b) $-\frac{\pi}{4}$
6. a) 0,5 b) -0,31 c) π
7. a) 0 b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{4}$

8. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
e) $\frac{4}{3}$ f) $\frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}$

1.4.1 a) $\frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$ b) $\frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$
c) $\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$
2. a) $\frac{-1}{\sqrt{x - x^2}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{2 - x^2}}$
c) $\frac{-1}{2\sqrt{x - x^2}}$
3. a) $\frac{e^x}{e^{2x} + 1}$ b) $\frac{1}{x(1 + (\ln x)^2)}$
c) $\frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$
4. $2\sqrt{1 - x^2}$
5. x = 0
6. $-1 < x \leq \frac{1}{2}$
7. MAX = $f(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$
ja $f(1) = \frac{1}{2}\pi - 2$
MIN = $f(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$
ja $f(-1) = 2 - \frac{1}{2}\pi$

1.5.1a) arcsin x+C b) $C - \sqrt{1 - x^2}$
2. a) arctan x + C
b) $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$
c) x + arctan x + C
3. a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{4}$
4. $\frac{\pi}{3}$

2.1.1 a) $\frac{1}{2}(e - e^{-1}) \approx 1{,}175$
b) $\frac{1}{2}(e^2 - e^{-2}) \approx 3{,}627$
c) $\frac{1}{2}(\sqrt{e} - \frac{1}{\sqrt{e}}) \approx 0{,}521$
d) $\frac{1 - e^2}{2e} \approx -1{,}175$
2. a) 0,822 b) 0,253 c) 2,129
3. a) $\ln(2 + \sqrt{5})$ b) $\ln(2 + \sqrt{3})$
c) ln 2
4. a) $x \approx 0{,}390$ b) $x \approx -0{,}539$

2.2.1 a) $\frac{1}{2}(e + e^{-1}) \approx 1{,}543$
b) $\frac{1}{2}(e^2 + e^{-2}) \approx 3{,}762$
c) $\frac{1}{2}(\sqrt{e} + \frac{1}{\sqrt{e}}) \approx 1{,}128$
d) $\frac{1}{2}(e + e^{-1}) \approx 1{,}543$
2. a) 1,295 b) 1,031 c) 2,352
3. a) $\ln(2 \pm \sqrt{3}$ b) $\ln(\sqrt{5} \pm 2)$
c) ± ln 2
4. a) $x \approx \pm 0{,}541$ b) $x \approx 0{,}962$
c) $x \approx 0{,}725$

2.3.1 a) $\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} \approx 0{,}762$
b) $\frac{e^4 - 1}{e^4 + 1} \approx 0{,}964$
c) $\frac{e - 1}{e + 1} \approx 0{,}462$
d) $\frac{1 - e^2}{e^2 + 1} \approx -0{,}762$
2. a) 0,625 b) - 0,245 c) 0,905
3. a) ln 3 b) $-\frac{1}{2}\ln 2$
4. a) 0,908 b) - 0,155

2.5.1 a) $-2x\cosh(1 - x^2)$ b) tanh x
c) $e^{\tanh x} \cdot (1 - \tanh^2 x)$
d) $\frac{1}{2}\cosh 2x - \frac{1}{2}$
2. f(0) = -1

2.6.1 a) $-\frac{1}{2}\cosh(1 - 2x) + C$
b) $\ln|\sinh x| + C$ c) $-\cosh\frac{1}{x} + C$

2. a) $\sinh^2 1$ b) $\frac{1}{4}(\sinh 8 + \sinh 4)$

3.1.1 a) $t = 5x^2 + 1$, $dt = 10xdx$, $\frac{1}{3}(5x^2 + 1)^3 + C$ b) $t = x^3 + 1$, $dt = 3x^2dx$, $\frac{2}{9}(x^2 + 1)^{3/2} + C$
c) $t = \sin x$, $dt = \cos xdx$, $\frac{1}{4}\sin^4 x + C$ d) $t = x^2 + 1$, $dt = 2xdx$, $\sqrt{x^2 + 1} + C$
2. a) $\frac{1}{6}(x - 1)^6 + \frac{1}{5}(x - 1)^5 + C$
b) $(\frac{4x}{5} - \frac{8}{15})(x - 2)\sqrt{x - 2} + C$
c) $\frac{1}{8}(x+1)^8 - \frac{2}{7}(x+1)^7 + \frac{1}{6}(x+1)^6 + C$
d) $\frac{1}{14}(1 + x^2)^7 - \frac{1}{12}(1 + x^2)^6 + C$
3. $\frac{1}{2}\arcsin 2x + C$ b) $\arcsin \frac{1}{2}x + C$
c) $\frac{1}{4}\arctan \frac{1}{4}x + C$

3.2.1 a) 13½ b) 13/42
2. a) 28,8 b) 184/105 c) 4/15

4.1.1 a) $y = 4 - 2x$ b) $y = \sqrt{4 - x^2}$
c) $y = -\sqrt{4 - x^2}$
d) $y = 2x \pm \sqrt{3x^2 + 1}$

4.2.1 a) $y' = \frac{1 - y}{x + 2}$ b) $y' = \frac{2x + y}{3y^2 - x}$
c) $y' = \frac{2 - 2xy^3}{3x^2y^2 + 1}$
2. a) $-2/3$ b) 1 c) 1 d) $4/(\pi - 4)$
3. $y = 2 - x$

5.1.3 $t > -1$ tai $x > 0$. Paraabelin $y = 1 - x^2$ oikea puolisko
4. Jos lähtöpaikka on origo $\begin{cases} x = 13{,}5t \\ y = 3{,}5t \end{cases}$ eli $y = 0{,}26x$
5. ympyrällä $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{2}\sqrt{100 - t^2} \end{cases}$ eli $x^2 + y^2 = 25$
6. a) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$
c) $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 6t \end{cases}$
7. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$
8. $\begin{cases} x = 2 + 4\cos t \\ y = 3 + 4\sin t \end{cases}$ $0 \le t < 2\pi$
9. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t^2 \end{cases}$

5.2.1 a) $y = (x - 1)^3$ b) $y = 1 + 1/x$
c) $x^2 + y^2 = 1$ d) $9x^2 + y^2 = 1$
2. $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$
3. $y = \frac{1}{2}(1 - x^2)$
4. $4x^2 + y^2 = 16$

5.3.1 a) 1½ b) 6 c) -1 d) 1/3
2. a) 2 b) 0
3. a) (0,-2) ja (0,2) b) (4,-16) ja (8,16)
4. a) (1,0) b) (2,-11)

6.1.1 a) 5 b) 6 c) π d) 0 e) 3
2. θ = a) 10° b) π c) 1 d) $9 - 2\pi$
3. a) 0 b) 2 c) $2\sqrt{3}$ d) 4 e) $2\sqrt{3}$
f) 2 g) 0 h) 2 i) $2\sqrt{3}$ j) 4 k) $2\sqrt{3}$
l) 2 m) 0

6.2.1 a) (0,4) b) 0,-4) c) $(2,-2\sqrt{3})$
d) $(-2,-2\sqrt{3})$
2. a) (3;5,196) b) (2,83 ; 2,83)
c) (1,62; 2,52) d) (1,08; -1,68)
e) (0,99; -1,14)
3. a) $[\sqrt{2},\pi/4]$ b) [2,0]
c) $(2\sqrt{5}, -26{,}6°]$ d) $[5,\pi]$
e) [13, 67,4°]
4. a) [3,6; 56,3°] b) [6,4; -51,3°]
c) [6,7; 26,6°] d) [2,2; 117°]
e) [3,6; 146°]
5. a) $r = 3$ b) $r = 6\cos\theta$
c) $r = 4/\sin\theta$ d) $r = 5/\cos\theta$
e) $r = 2/(\sin\theta - 3\cos\theta)$
6. a) $x^2 + y^2 - 4y = 0$
b) $(x^2 + y^2 + 2y)^2 = x^2 + y^2$
c) $4x^2 - 5y^2 - 36y = 36$

6.3.1. a) $k_T = 0$ b) $k_T = -2/3$
c) $k_T = 0$
2. $[1,\pi/3]$, $[4,\pi]$, $[1, 5\pi/3]$
3. $[3,2\pi/3$, $[3, 4\pi/3]$

7.1.1 a) -36 b) 2/e c) 6
2. a) $x^2 + y^2 \le 1$ b) $y \le x - 1$
c) $y \ne 0$ ja $x > 0$ d) $|x + y| \le 1$
3. a) $x^2 + 2xy - 3x + 4y = 0$
b) $z = x^2 - 3x$ c) $z = 4y$
4. a) $y = x^2 + 2x - 5$
b) $y = x^2 + 2x - 5$ c) $y = x^2 + 2x$

7.2.1 a) $3x^2y^2$ b) $2y^2 - y/x^2$
c) $(1+y)e^{x+y}$ d) $(2x+2y)/(x^2+2xy)$
e) $\sin(xy) + xy\sin(xy)$
2. a) $2x^3y$ b) $4xy - 3y^2 + 1/x$
c) $(x + 1)e^{x+y}$ d) $2x/(x^2 + 2xy)$
e) $x^2\sin(xy)$
3. a) 6 b) $3e^2$
4. a) 0 b) $4e^2$
5. a) $f_{xx} = 6x - 6y$, $f_{xy} = f_{yx} = -6x$, $f_{yy} = 0$ b) $f_{xx} = e^{xy}[y\cos(x + y) + (y^2 - 1)\sin(x + y)]$,
$f_{xy} = f_{yx} = e^{xy}[(x + y)\cos(x + y) + xy\sin(x + y)]$,
$f_{yy} = e^{xy}[2x\cdot\cos(x + y) + (x^2 - 1)\sin(x + y)]$
7. a) $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ b) $32\mathbf{i} + 32\mathbf{j} - \mathbf{k}$
c) $4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$

8. a) $10x - 8y - z = 9$ b) $2x - y + z = 2$ c) $y - z = 1$ d) $x - 4y + 2z = 18$

7.3.1 a) (-2,3) b) (4/3, 4/3)
2. a) ei tietoa b) max c) min
3. a) min = f(-1,3) = -4
b) max = f(2,0) = 5
c) min = f(-1,1) = -4
d) min = f(1,1) = -1 , f(0,0) = 0 on satulapiste
4. S = 16, p = 0 b) S = 28, p = -2
c) S = 16 , p = 0
5. a) 64 b) 12 656,25 c) 64/9

8.1.1 a) $[\sqrt{11}, 56{,}3°]$
b) $[\sqrt{41}, -51{,}3°]$ c) $[6, \pi/2]$
d) [7,0]
2. a) $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ b) $3 + 3i\sqrt{3}$
c) $-5i$ d) $-3\frac{1}{2}\sqrt{3} - 3\frac{1}{2}i$
3. a) Re(z) = 3, Im(z) = 4
b) Re(z) = 5, Im(z) = -6
c) Re(z) = $3\sqrt{3}$, Im(z) = 3
4. a) 5 b) 13 c) $\sqrt{10}$ d) 2
5. a) 53,1° b) -67,4° c) 18,4°
d) 10°
6. a) a = 1½ b) a = 0 tai a = 1
7. a) a = -1 b) ei millään a
8. x = 5 , y = 3

8.2.1 a) 7 + i b) -1 + 5i c) 4 + 10i
2. a) (3, -1) b) (1, -7) c) (-3, 3)
3. a) 7 + i b) 2 - 23i c) 7 + 9i
4. a) (-5,10) b) (11, -10)
c) (-10,5)
5. [6,30°] b) $[20, 5\pi/6]$ c) [3, -1½]

8.3.1 a) 2 - 3i b) 4 + 5i c) -6i d) 7
2. a) (2,-3) b) (-1,2) c) (0,-3)
d) (4,0)
3. [2, -10°] b) $[3, -\pi/4]$ c) 4, 32°]
d) [5,0]
4. a) 2(cos 10° - isin 10°)
b) $3(\cos\pi/3 - i\sin\pi/3)$
5. a) 25 b) 25
6. a) $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ b) $\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$
c) $\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$
7. a) [½, -10°] b) $[1\frac{1}{2}, -\pi/4]$
c) $[4/3, -\pi/2]$
8. a) $-\frac{1}{25} + \frac{18}{25}i$ b) $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$
c) $\frac{37}{41} - \frac{36}{41}i$
9. a = 2
10. a) [3,40°] b) $[2, \pi/4]$
11. 2½(cos 40° - isin 40°)
12. a) 18 - i b) 7½ - 2½i

8.4.1 a) [4,20°] b) $[9, \pi/3]$ c) $[8, \pi]$
d) [1,0]

2. a) 4(cos 20° + isin 20°)
b) 64(cos π/2 + isin π/2) = 64i
3. a) 5 + 12i b) 3 - 4i c) 2 + 11i
d) -2 - 2i
4. a) [2, π/2] b) [3, π/4]
c) [4, 3π/4]
5. a) 5(cos 10° + isin 10°)
b) $\sqrt{3}$ (cos 60° + isin 60°)
6. a) 1 + 2i b) 3 + 2i c) 4 - 3i

8.5.1 a) (cos 60° + isin 60°)
b) (cos 2π/3 + isin 2π/3)
2. cos 3α + isin 3α =
($\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \sin^2 \alpha$)
+ i($3\cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha$)
$\sin 3\alpha = 3\cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha$
$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \sin^2 \alpha$

8.6.1 a) 2 +3i b) 3 - 4i
2. a) 2 + i b) 1 - 2i
3. a) 2 ± i b) 3 ± 2i c) 1,5 ± 2i
4. a) 1, ±i b) 1, -2 ± i c) 1, 2 ± 3i

8.7.1 $(z^3+i) = (z+i)(z^2 - iz - 1) + 2i$
2. a) i - 1 b) -1 - i
3. ei
4. a) ei b) on
5. $z^3 - (4 + 2i)z^2 + (4 + 6i)z - 4i$

9.1.1a) 1. b) 1. c) 1. d) 2.
2. a) on b) on c) on

9.2.1 a) $y = \pm\sqrt{2x^2 + C}$
b) $y = \dfrac{1}{C - x}$ c) $y = Ce^{4x}$
d) $y = Ce^{½x^2}$
e) $y = \pm\sqrt{2/3 \cdot x^3 + C}$
2. a) $y = C(x + 1)^2$ b) $y = Ce^{1/(x+1)}$
c) $y = \pm\sqrt{2\ln (x^2 + 1) + C}$
3. $y' = -1 \pm \sqrt{(x + 1)^2 + C}$
4. $T' = \dfrac{k}{T - T_0}$, $T = T_0 \pm \sqrt{kt + C}$
5. $y = \sqrt{2x^2 + 2}$
6. y = 2½x - 2
7. $y = ½(e^{2-2/x} - 1)$
8. $y = 2e^{½x^2}$
9. n. 38 400

9.3.1 a) xzz' = 1
b) $x(3z + 2)z' + 3z^2 + z + 2 = 0$
2. a) y = 2xln x + Cx
b) $y = \dfrac{Cx^2}{1 - Cx}$

9.4.1 a) y = 3 b) y = 3x - 3
c) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 6$
d) $y = 1/3 \cdot e^{2x}$

e) y = ½(sin x - cos x)
2. a) $y = Ce^{-2x}$ b) $y = Ce^{3x}$
c) $y = Ce^{½x}$ d) $y = Ce^{-4x}$
3. a) $y = Ce^{x} - x - 2$ b) $y = Ce^{2x} - 1½$ c) $y = Ce^{3x}$ - x2 - 2x/3 - 5/9
d) $y = Ce^{-x} + ½(\sin x - \cos x)$
4. a) $y = 19/3 \cdot e^{3x} - 4/9$
b) $y = e^{2x} - 1½x - 2¾$
c) $y=3,2e^{-3x} + 0,6\sin x - 0,2\cos x$
5. $y = 350e^{-0,04x} + 50$
6. a) 123 000 b) 152 000

9.5.1 $y = Ce^{1½x^2} + x^3 + x$,
$y = 2e^{1½x^2} + x^3 + x$
2. $y = Cx + 2x\sqrt{x}$,
$y = 3x + 2x\sqrt{x}$

9.6.1 a) $y = C_1 + C_2e^x$
b) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$
2. $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$
3. $y = e^x[C_1\sin (x\sqrt{3}) + C_2\cos (x\sqrt{3})]$
4. a) $y = 1/11 \cdot (e^{6x} + 10e^{-5x})$
b) $y\ e^{-x}[\dfrac{3}{\sqrt{2}} \sin(x\sqrt{2}) + 2\cos(x\sqrt{2})]$

Aiempien vuosien koetehtäviä

97.1.1. Olkoon f(x) = arc sin x . Laske a) f(-½) b) f ´(-½).

97.1.2. Laske käyrälle $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$ pisteeseen (1,2) piirretyn tangentin yhtälö.

97.1.3. Ympyrä (säde on 5 m) on xy-tasossa siten, että keskipiste on aina x-akselilla. Tarkastelun alkuhetkellä pallon pinnalla, origossa olevan keskipisteen yläpuolella on valaiseva piste. Mikä on valaisevan pisteen rata parametrimuodossa, kun
a) keskipiste on paikallaan, mutta ympyrä pyörii keskipisteen ympäri myötäpäivään kerran 10 sekunnissa
b) ympyrä ei pyöri, mutta keskipiste liikkuu vauhdilla 5 m/s positiivisen x-akselin suuntaan
c) ympyrä pyörii keskipisteen ympäri myötäpäivään kerran 10 sekunnissa ja keskipiste liikkuu vauhdilla 5 m/s positiivisen x-akselin suuntaan?

97.1.4. Esitä piste a) (3, 4) napakoordinaateissa b) [10, π/6] suorakulmaisissa koordinaateissa.

97.1.5. Laske funktion $F(x,y) = e^{xy} + 2x^3 - 3y^2$ kaikki toisen kertaluvun osittaisderivaatat.

97.1.6. Määritä a) $\bar{z}$ b) | z | c) z^{-1} , kun z = 2 + 3i

97.1.7. Ratkaise täydellisesti yhtälö $(z^2 - 8z)(z - 1) = 25(1 - z)$

97.1.8. Ratkaise differentiaaliyhtälö xy ´ = 2y - 1.

97.1.9. Määritä differentiaaliyhtälön y ´ + 4x = y se ratkaisu, joka toteuttaa ehdon y(0) = 3.

97.1.10. Ratkaise differentiaaliyhtälö y ´´ - 5y ´ - 6y = 0.

1. a) f(-½) = x ; arcsin ½ = x ; sin x = -½ JA -½π ≤ x ≤ ½π ; x = - π/6
b) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; $f'(-½) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - ¼}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

2. $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$; $2x - 3y - 3xy' + 2yy' = 0$ Sijoitetaan x = 1 ja y = 2 : $2 - 6 - 3y' + 4y' = 0$; $y' = 4$ $y - 2 = 4(x - 1)$; $y - 2 = 4x - 4$; $y = 4x - 2$
3. Kulma pisteeseen menevän säteen ja x-akselin välillä on $\frac{1}{2}\pi - 2\pi/10 \cdot t = (5 - 2t) \cdot \pi/10$ a) $\begin{cases} x = 5 \cdot \cos(5 - 2t)\pi/10 \\ y = 5 \cdot \sin(5 - 2t)\pi/10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 5t \\ y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 5t + 5 \cdot \cos(5 - 2t)\pi/10 \\ y = 5 \cdot \sin(5 - 2t)\pi/10 \end{cases}$
4. a) x = 3 ja y = 4 ; $R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $\tan\theta = 4/3$; $\theta = 53{,}1°$ Piste = [5, 53,1°] b) r = 10 ja $\theta = \pi/6$; $x = r\cdot\cos\theta = 10\cdot\cos\pi/6 = 10\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$; $y = r\cdot\sin\theta = 10\cdot\sin\pi/6 = 10\cdot\frac{1}{2} = 5$ Piste = $(5\sqrt{3}, 5)$
5. $F(x,y) = e^{xy} + 2x^3 - 3y^2$; $F_x(x,y) = ye^{xy} + 6x^2$; $F_{xx}(x,y) = y^2e^{xy} + 12x$; $F_{xy}(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}$ $F_y(x,y) = xe^{xy} - 6y$; $F_{yx}(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}$; $F_{yy}(x,y) = x^2e^{xy} - 6$
6. z = 2 + 3i ; a) $\overline{z} = 2 - 3i$ b) $\lvert z \rvert = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{2 + 3i} = \frac{2 - 3i}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{2 - 3i}{4 - 9i^2} = \frac{2 - 3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$
7. $(z^2 - 8z)(z - 1) = 25(1 - z)$ || ☹z - 1) ; $z^2 - 8z = -25$ TAI $z - 1 = 0$; $z^2 - 8z + 25 = 0$ TAI $z = 1$ $z = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 100}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36i^2}}{2} = \frac{8 \pm 6i}{2} = 4 \pm 3i$ TAI $z = 1$
8. $xy' = 2y - 1$; $x \cdot \frac{dy}{dx} = (2y - 1)$; $\frac{dy}{2y - 1} = \frac{dx}{x}$; $\frac{1}{2} \cdot \int \frac{2}{2y - 1}dy = \int \frac{dx}{x}$ $\frac{1}{2} \cdot \ln\lvert 2y - 1\rvert = \ln\lvert x\rvert + k$; $\ln\lvert 2y - 1\rvert = 2 \cdot \ln\lvert x\rvert + 2k$; $\ln\lvert 2y - 1\rvert = \ln(x^2 \cdot e^{2k})$ $\lvert 2y - 1\rvert = x^2 \cdot e^{2k}$; $2y - 1 = \pm e^{2k} \cdot x^2$; $2y = 1 \pm e^{2k} \cdot x^2$; $y = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} e^{2k} \cdot x^2$; $y = \frac{1}{2} + Cx^2$
9. $y' + 4x = y$; $y' - y = -4x$; HY: $y' - y = 0$; $y = Ce^x$ TY: Arvaus yksityisratkaisuksi $y = ax + b$; $y' = a$. Sijoitetaan nämä TY:öön $a - ax - b = -4x$; $-a = -4$ JA $a - b = 0$; $a = 4$ JA $b = 4$; $y = Ce^x + 4x + 4$ $y(0) = 3$; $3 = C\cdot e^0 + 0 + 4$; $C = -1$ V: $y = -e^x + 4x + 4$
10. HY: $y'' - 5y' - 6y = 0$; Karakteristinen yhtälö $r^2 - 5r - 6 = 0$; $r = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$; $r_1 = 6$, $r_2 = -1$ V : $y = C \cdot e^{6x} + D \cdot e^{-x}$

98.1.1. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'' - 5y' + 6y = 0$

98.1.2. Mikä on käyrälle $x^2 + y^2 - 3xy – 4x + 5 = 0$ pisteeseen (1, 2) piirretyn tangentin kulmakerroin?

98.1.3. Ratkaise yhtälö $(z^2 + 5)(z – 1) = 2z^2 – 2z$.

98.1.4. Määritä käyrän $\begin{cases} x = 2t^2 – 3 \\ y = t^2 – 3t \end{cases}$ parametrinarvoa t = 2 vastaavaan pisteeseen piirretyn käyrän normaalin yhtälö.

98.1.5. Millä kompleksitason viivalla on a) voimassa yhtälö | z + iz* | = 2? b) lauseke z + iz* puhtaasti reaalinen? (z* on kompleksiluvun z = x + yi liittoluku.)

98.1.6. a) Osoita, että funktio y = 2x toteuttaa differentiaaliyhtälön $y' + 2y = 4x + 2$.
b) Mikä on differentiaaliyhtälön $y' + 2y = 4x + 2$ yleinen ratkaisu?
c) Mikä on alkuehdon y(0) = 3 toteuttava yksityisratkaisu?

98.1.7. Määritä lausekkeen cos (arctan 2) tarkka arvo.

98.1.8. Esitä a) suorakulmaisissa koordinaateissa yhtälö $r = 2\sin\theta$
b) napakoordinaatein muodossa $r = r(\theta)$ yhtälö y = x + 1.

98.1.9. Funktiolla $f(x,y) = - x^3 + 4xy – 2y^2 + 1$ on origosta poikkeavassa kohdassa maksimiarvo. Mikä on tämä piste ja laske maksimiarvon suuruus.

98.1.10. Määritä ne ensimmäisessä neljänneksessä kulkevat käyrät, joilla on ominaisuus: Käytän mielivaltaiseen kohtaan x_0 piirretty tangentti leikkaa x-akselin pisteessä $(\frac{1}{2}x_0, 0)$.

1. $y'' - 5y' + 6 = 0$; Karakteristinen yhtälö $r^2 - 5r + 6 = 0$; $r = 3$ tai $r = 2$ V : $Ce^{3x} + De^{2x}$

2. $x^2 + y^2 - 3xy - 4x + 5 = 0$ || D( ) ; $2x + 2yy' - 3y - 3xy' - 4 = 0$; SIJ. (1,2)
$2 + 4y' - 6 - 3y' - 4 = 0$; $y' = 8$; $k_T = 8$

3. $(z^2 + 5)(z - 1) = 2z^2 - 2z$; $(z^2 + 5)(z - 1) = 2z(z - 1)$ || : $(z - 1)$; $z^2 + 5 = 2z$ tai $z - 1 = 0$
$z^2 - 2z + 5 = 0$; $z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$ tai $z = 1$

4. $\begin{cases} x = 2t^2 - 3 \\ y = t^2 - 3t \end{cases}$; Piste : $\begin{cases} x = 2\cdot 2^2 - 3 \\ y = 2^2 - 3\cdot 2 \end{cases} = \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$; Kulmakerroin : $\begin{cases} x' = 4t \\ y' = 2t - 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x'(2) = 8 \\ y'(2) = 1 \end{cases}$
$k_T = \frac{y'(2)}{x'(2)} = \frac{1}{8}$; $k_N = -8$; Normaali : $y + 2 = -8(x - 5)$; $y + 2 = -8x + 40$; $y = -8x + 38$

5. a) $| z + iz^* | = | x + yi + xi + yi^2 | = | (x - y) + (x + y)i | = \sqrt{(x - y)^2 + (x + y)^2} = \sqrt{x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2} =$
$\sqrt{2x^2 + 2y^2} = 2$ || $(\ )^2$; $2x^2 + 2y^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 2$
b) $z + iz^* = (x - y) + (x + y)i$ on puhtaasti reaalinen, kun $x + y = 0$ ts. suoralla $y = -x$

6. $y = 2x$; $y' = 2$, jotka sijoitetaan DY:öön. $2 + 2\cdot 2x = 4x + 2$, joka on tosi.
HY: $y' + 2y = 0$ yleinen ratkaisu on $y = Ce^{-2x}$. TY:n yleinen ratkaisu $y = Ce^{-2x} + 2x$
$y(0) = 3$; $3 = C\cdot e^0 + 2\cdot 0$; $3 = C\cdot 1$; $C = 1$. Yksityisratkaisu $y = 3e^{-2x} + 2x$

7. $\arctan 2 = x \Leftrightarrow \tan x = 2$ ja $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$. Kun $\tan x > 0$, on $0 < x < \frac{1}{2}\pi$
Piirr. suorakulmainen kolmion, jonka kateetit 2 ja 1, jolloin hypotenuusa = $\sqrt{5}$
$\cos(\arctan 2) = \cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

8. $x = r\cdot\cos\theta$; $y = r\cdot\sin\theta$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
a) $r = 2\sin\theta$; $\sqrt{x^2 + y^2} = 2\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $x^2 + y^2 = 2y$; $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1$; $x^2 + (y - 1)^2 = 1$
b) $y = x + 1$; $r\cdot\sin\theta = r\cdot\cos\theta + 1$; $r(\sin\theta - \cos\theta) = 1$; $r = \frac{1}{\sin\theta - \cos\theta}$

9. Ääriarvo voi olla vain kohdassa, jossa $f_X = f_Y = 0$
$\begin{cases} -3x^2 + 4y = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases}$; $-3x^2 + 4x = 0$; $x(-3x + 4) = 0$; ($x = 0$ tai) $-3x + 4 = 0$; $x = \frac{4}{3}$; $y = \frac{4}{3}$
$f(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = -(\frac{4}{3})^3 + 4\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3} - 2(\frac{4}{3})^2 + 1 = 2\frac{5}{27}$

10. Sivuamispiste P(x,y). x-akselin leikkauspiste = A($\frac{1}{2}x$,0) ; $k_T = y' = k_{AP} = \frac{y - 0}{x - \frac{1}{2}x} = \frac{2y}{x}$
$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$; $\frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx$; $\int\frac{dy}{y} = \int\frac{2}{x}dx$; $\ln y = 2\ln x + D$; $\ln y - \ln x^2 = D$; $\ln\frac{y}{x^2} = \ln e^D$; $y = e^D\cdot x^2$
$y = Cx^2$, missä $C = e^D > 0$ ja $x > 0$, koska käyrän tulee olla I neljänneksessä.

98.2.1. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'' - 6y' + 9 = 0$.

98.2.2. Määritä käyrälle $y = \arcsin\frac{1}{x}$ kohtaan $x = 2$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

98.2.3. Laske yhtälön $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0$ kaikki ratkaisut.

98.2.4. Laske käyrän $x^3 + y^3 = 9$ pisteeseen (1,2) piirretyn tangentin yhtälö.

98.2.5. Millä kompleksitason viivalla lauseke $(2 + i)zz^* + 2z + 4iz^*$ on reaalinen.
z^* on kompleksiluvun $x + yi$ liittoluku.

98.2.6. Laske käyrän $\begin{cases} x = t^2 + 2t - 3 \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$ siihen pisteeseen, missä käyrä leikkaa positiivisen y-akselin, piirretyn tangentin kulmakerroin.

98.2.7. Missä pisteessä voi kahden muuttujan funktiolla $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 3xy - 4x + 5y$ olla ääriarvo?

98.2.8. a) Esitä suorakulmaisissa koordinaateissa yhtälö $r = 2\cdot\sin\theta$.
b) Esitä napakoordinaateissa yhtälö $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$

98.2.9. Ratkaistavana on differentiaaliyhtälö $y' - y = -e^x$
a) Ratkaise homogeeninen yhtälö

b) Korvaa homogeenisen yhtälön ratkaisussa oleva vakio C funktiolla C(x) ja selvitä mikä C(x):n tulisi olla jotta näin muodostettu homogeenisen yhtälön ratkaisu olisi myös alkuperäisen yhtälön ratkaisu.
c) Anna vastaus, kun alkuperäisen yhtälön ratkaisu on homogeenisen yhtälön ratkaisu korvattuna C(x):llä.

98.2.10. Erään käyrän mielivaltaiseen pisteeseen $P(x_0,y_0)$ asetettu normaali leikkaa x-akselin pisteessä A ja olkoon piste $B = (x_0,0)$. Määritä käyrän yhtälö, kun janan AB pituus on 1 ja käyrä kulkee pisteen (0,2) kautta.

1. $y'' - 6y' + 9 = 0$; $r^2 - 6r + 9 = 0$; $r_1 = r_2 = 3$; $y = (C + Dx)e^{3x}$
2. $y = \arcsin 1/x$; $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (1/x)^2}}\cdot(-\frac{1}{x^2})$; $k_T = y'(2) = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/4}}\cdot(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$
3. $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0$; huomataan, että x = 1 on yksi nollakohta $(x - 1)(x^2 - 4x + 5) = 0$ $x - 1 = 0$ tai $x^2 - 4x + 5 = 0$; $x = 1$ tai $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4\cdot(-1)}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$
4. $x^3 + y^3 = 9$; $3x^2 + 3y^2y' = 0$; sij. Piste (1,2) ; $3\cdot1^2 + 3\cdot2^2\cdot y' = 0$; $y' = k_T = -\frac{1}{4}$ $y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 1)$; $4y - 8 = x - 1$; $x + 4y = 9$
5. $(2 + i)(x + yi)(x - yi) + 2(x + yi) + 4i(x - yi) = (2 + i)(x^2 + y^2) + 2x + 2yi + 4xi + 4y =$ $2x^2 + 2y^2 + x^2i + y^2i + 2x + 2yi + 4xi + 4y = (2x^2 + 2y^2 + 2x + 4y) + (x^2 + y^2 + 2y + 4x)i$ Lauseke on reaalinen, jos imaginaariosa = 0 ; $x^2 + y^2 + 2y + 4x = 0$; $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$
6. y-akselin leikkauspisteessä x = 0 ; $t^2 + 2t - 3 = 0$; t = 1 tai t = -3 Jos t = 1 on y = 1 - 3 < 0, joten se ei ole positiivisella y-akselilla. Jos t = -3, on y = 15 $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2t - 2}{2t + 2} = \frac{-6 - 2}{-6 + 2} = \frac{-8}{-4} = 2$
7. $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x - 3y - 4 = 0 & \| \cdot 4 \\ -3x + 4y + 5 = 0 & \| \cdot 3 \end{cases}$; x - 1 = 0 ; x = 1 ; -2 - 3y - 4 = 0 ; y = -2 V: (1,-2)
8. a) $r = 2\sin\theta$; $\sqrt{x^2 + y^2} = 2\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\|\cdot\sqrt{x^2 + y^2}$; $x^2 + y^2 = 2y$; $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0 + 1$; $(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 1$ b) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$; $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 2$; $x^2 + y^2 = 2(x - y)$ $r^2 = 2(r\cos\theta + r\sin\theta)$ $\|$: r ; $r = 2(\sin\theta + \cos\theta)$
9. a) $y' - y = 0$; $\frac{dy}{dx} = y$; $\frac{dy}{y} = dx$; $\ln y = x + C1$; $y = e^{x + C1} = e^xe^{C1} = Ce^x$ b) $y = C(x)e^x$; $y' = C'(x)e^x + C(x)e^x$, Sijoitetaan nämä yhtälöön $y' - y = -e^x$ $C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = -e^x$; $C'(x)e^x = -1e^x$; $C'(x) = -1$; $C(x) = -x + D$ V : $y = (D - x)e^x$
10. $P = (x_0,y_0)$; $B = (x_0,0)$; $A = (x_0 \pm 1,0)$; $k_T = y'(x_0)$; $k_N = -1/y'(x_0)$ $k_{AB} = k_N$; $\frac{y_0 - 0}{x_0 - x_0 \pm 1} = \frac{-1}{y'(x_0)}$; $y'(x_0)y(x_0) = \pm1$; $yy' = \pm1$; $y\cdot\frac{dy}{dx} = \pm1$; $ydy = \pm dx$; $\frac{1}{2}y^2 = \pm x + C$; (0,2) on käyrällä ; $\frac{1}{2}\cdot4 = \pm0 + C$; C = 2 ; $\frac{1}{2}y^2 = \pm x + 2$; V : $x = \pm(\frac{1}{2}y^2 - 2)$

99.1.1. Määritä a) pisteen $(-2\sqrt{3}, 2)$ napakoordinaatit b) pisteen $[6, \frac{\pi}{3}]$ koordinaatit xy-tasossa.

99.1.2. Määritä differentiaaliyhtälön $y'' - 3y' + 2y = 0$ yleinen ratkaisu

99.1.3. Laske a) D arccos 2x b) $\int \frac{3}{\sqrt{4 - 4x^2}}\,dx$

99.1.4. Osoita, että toisen kertaluvun osittaisderivaatat f_{xy} ja f_{yx} ovat samat, kun $f(x,y) = e^{x - y^2}$.

99.1.5. Laske käyrän $\begin{cases} x = t^2 - 3t \\ y = 4t^2 + 5t \end{cases}$ kohtaan, missä t = 2, piirretyn tangentin yhtälö.

99.1.6. Millä reaalisella a:n arvolla lauseke $\frac{3 - ai}{2 + i}$ on puhtaasti reaalinen luku? Mikä on lausekkeen arvo tällöin?

99.1.7. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' - xy = x$.

99.1.8. Missä pisteissä Cartesiuksen lehden $x^3 - 6xy + y^3 = 0$ tangentti on suoran
a) y = 0 b) x = 0 suuntainen?

99.1.9. Määritä käyrät, joiden kuvaajan jokaiseen pisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin on yhtä suuri kuin pisteen koordinaattien summa.

99.1.10. Mitkä ovat ne kolme positiivista lukua, joiden summa on 24 ja joiden tulo on mahdollisimman suuri?

1. a) $(-2\sqrt{3}, 2)$; $r = \sqrt{4\cdot 3+4} = 4$. $\tan\theta = 2/(-2\sqrt{3}) = -1/\sqrt{3}$; $\theta = 5\pi/6$ V: $[4, 5\pi/6]$ b) $[6, \pi/3]$; $x = 6\cdot\cos\pi/3 = 6\cdot½ = 3$; $y = 6\cdot\sin\pi/3 = 6\cdot\sqrt{3}/2 = 3\sqrt{3}$ V: $(3, 3\sqrt{3})$
2. $y'' - 3y' + 2y = 0$: Kar. yhtälö $r^2 - 3r + 2 = 0$; $r = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm 1}{2}$; r = 2 tai r = 1 ; $y = Ce^{2x} + De^x$
3. a) $D\arccos 2x = -\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot 2 = -\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ b) $\int\frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}dx = \int\frac{3}{2\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{3}{2}\arcsin x + C$

4. $f(x,y) = e^{x-y^2}$. $f_x(x,y) = e^{x-y^2}\cdot 1 = e^{x-y^2}$; $f_{xy}(x,y) = e^{x-y^2}\cdot(-2y) = -2ye^{x-y^2}$ $f_y(x,y) = e^{x-y^2}\cdot(-2y) = -2y\,e^{x-y^2}$; $f_{yx}(x,y) = -2y\,e^{x-y^2}\cdot 1 = -2y\,e^{x-y^2} = f_{xy}(x,y)$
5. $\begin{cases}x = t^2 - 3t\\ y = 4t^2 + 5t\end{cases}$; Piste: $\begin{cases}x = 2^2 - 3\cdot 2\\ y = 4\cdot 2^2 + 5\cdot 2\end{cases}$; $\begin{cases}x = -2\\ y = 26\end{cases}$ Kulmakerroin $\begin{cases}x' = 2t - 3\\ y' = 8t + 5\end{cases}$; $k_T = \frac{y'(2)}{x'(2)} = \frac{8\cdot 2+5}{2\cdot 2-3} = 21$ Yhtälö $y - 26 = 21(x + 2)$; $y - 26 = 21x + 42$; $y = 21x + 68$
6. $\frac{3-ai}{2+i} = \frac{(3-ai)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{6-3i-2ai+ai^2}{4-i^2} = \frac{6-a}{5} + \frac{-3-2a}{5}i$ on puhtaasti reaalinen, jos imaginaariosa = 0. $-3 - 2a = 0$; $-2a = 3$; $a = -1½$. Arvo on tällöin $\frac{6+1½}{5} = 1½$
7. $y' - xy = x$; $y' = x(y + 1)$; $\frac{dy}{dx} = x(y+1)$; $\frac{dy}{y+1} = xdx$; $\int\frac{dy}{y+1} = \int x\,dx$; $\ln\lvert y+1\rvert = ½x^2 + C_1$; $\lvert y+1\rvert = e^{½x^2+C_1}$; $\lvert y+1\rvert = e^{C_1}\cdot e^{½x^2}$; $y + 1 = Ce^{½x^2}$; $y = C\,e^{½x^2} - 1$
8. $x^3 - 6xy + y^3 = 0$, joka derivoidaan implisiittisesti. $3x^2 - 6y - 6xy' + 3y^2y' = 0$; $x^2 - 2y - 2xy' + y^2y' = 0$; $(y^2 - 2x)y' = 2y - x^2$; $y' = \frac{2y-x^2}{y^2-2x}$ a) T ‖ y = 0 ; $k_T = 0$; $y' = 0$; $2y - x^2 = 0$; $y = ½x^2$, joka sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön $x^3 - 6x\cdot½x^2 + 1/8\cdot x^6 = 0$; $x^3(1/8\cdot x^3 - 2) = 0$; x = 0 tai $1/8\cdot x^3 = 2$; $x^3 = 16$; $x = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$ y = 0 tai $y = ½(2\sqrt[3]{2})^2 = 2\sqrt[3]{4}$ V: (0,0) tai $(2\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{4})$ b) T ‖ x = 0 ; ts. y ’ ei ole ts. $y^2 - 2x = 0$, josta symmetrisesti V : (0, 0) tai $(2\sqrt[3]{4}, 2\sqrt[3]{2})$
9. Olkoon käyrän mielivaltainen piste (x,y). Tällöin toteuduttava $y' = x + y$ HY: $y' = y$, jonka yleinen ratkaisu on $y = Ce^x$ TY: $y' = y + x$. Arvataan häiriötermin x perusteella yksi ratkaisu $y = ax + b$; $y' = a$ $a = ax + b + x$; $a + 1 = 0$ & $a = b$; $a = b = -1$ ts. $y = -x - 1$ V: $y = Ce^x - x - 1$
10. Olkoon luvut x, y ja z. $x + y + z = 24$; $z = 24 - x - y$. $0 < x$ ja $y < 24$ $T(x,y) = xy(24 - x - y) = 24xy - x^2y - xy^2$, joka on jatkuva funktio Tutkitaan suljettua aluetta $0 \le x \le 24$, $0 \le y \le 24$, sillä rajoilla tulo saa arvon 0, eikä silloin tule suurinta arvoa. Koska nyt varmasti on suurin arvo, se voi tulla vain kun $T_x = T_y = 0$ $\begin{cases}24y - 2xy - y^2 = 0\\ 24x - x^2 - 2xy = 0\end{cases}$; $\begin{cases}y(24 - 2x - y) = 0\\ x(24 - x - 2y) = 0\end{cases}$; $\begin{cases}24 - 2x - y = 0\\ 24 - x - 2y = 0\end{cases}$; $\begin{cases}2x + y = 24 \;\lVert\cdot 2\\ x + 2y = 24 \;\lVert\cdot(-1)\end{cases}$; $3x = 24$ x = 8 ja y = 8 T(8,8) = 512, joka on suurin. V: luvut ovat 8, 8 ja 8.

00.1.1. Laske a) $D\arccos\frac{x}{3}$ b) $\int\frac{3}{2+2x^2}$

00.1.2. Laske osittaisderivaatat f_x, f_{xx}, f_y ja f_{yx}, kun $f(x,y) = e^{xy}\cdot\ln y$

00.1.3. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = 2y + 3x$.

00.1.4. Ratkaise täydellisesti yhtälö $2x^3 + 5x^2 = 4x^2 - 25$.

00.1.5. Esitä napakoordinaateissa käyrä a) $x^2 + y^2 + 4x = 0$ b) $x^2(x^2 + y^2) = y^2$

00.1.6. Määritä käyrän $xe^y + \sin xy + y - \ln 2 = 0$ pisteeseen (0,ln2) asetetun tangentin kulmakerroin.

00.1.7. Laske käyrän $\begin{cases} x = 2t^2 - 3t \\ y = 4t^2 + 5 \end{cases}$ kohtaan t = 1 piirretyn tangentin yhtälö.

00.1.8. Millä kompleksitason viivalla kompleksiluvut z toteuttavat yhtälön $| z - (2 - 3i) | = 4$. Mikä on viivan rajoittaman suljetun käyrän pinta-ala?

00.1.9. Funktiolla $f(x,y) = 9x^3 + \frac{y^3}{3} - 4xy$ on minimiarvo. Määritä minimiarvon suuruus, kun sitä ei saavuteta origossa.

00.1.10. Määritä differentiaaliyhtälön $(1 - x^2)y' + xy = 0$ se yksityisratkaisu y(x), jonka kuvaaja pyörähtäessään x-akselin ympäri muodostaa tasojen x = 1 ja x = 2 kanssa kappaleen, jonka tilavuus on $\frac{4\pi}{3}$.

---

1. a) $D \arccos\frac{x}{3} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2/9}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{-1}{3\sqrt{1 - x^2/9}} = \frac{-1}{\sqrt{9 - x^2}}$ b) $\int \frac{3}{2 + 2x^2} = \frac{3}{2}\int \frac{1}{1 + x^2} = 1½ \cdot \arctan x + C$

---

2. $f(x,y) = e^{xy} \cdot \ln y$. $f_x = ye^{xy} \cdot \ln y$. $f_{xx} = y^2e^{xy} \cdot \ln y$.
$f_y = xe^{xy} \cdot \ln y + e^{xy} \cdot 1/y$ $\quad f_{yx} = 1 \cdot e^{xy} \cdot \ln y + xye^{xy} \cdot \ln y + ye^{xy} \cdot 1/y = e^{xy}(\ln y + xy \cdot \ln y + 1)$.

---

3. $y' = 2y + 3x$. HY: $y' = 2y$, jonka yleinen ratkaisu on $y = Ce^{2x}$
TY: Yrite yksityisratkaisuksi $y = Ax + B$, $y' = A$
$A = 2Ax + 2B + 3x$; $\quad A = 2B$ ja $0 = 2A + 3$, joista $A = -1½$ ja $B = ¾$
Täydellinen ratkaisu on $y = Ce^{2x} - 1½x + ¾$.

---

4. $2x^3 + 5x^2 = 4x^2 - 25$; $x^2(2x + 5) = (2x + 5)(2x - 5)$ || : (2x + 5)
$x^2 = 2x - 5$ ja $2x + 5 = 0$; $x^2 - 2x + 5 = 0$ ja $x = -2½$; $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$

---

5. Napa- ja xy-koordinaattien yhteys $x = r \cdot \cos\theta$, $y = r \cdot \sin\theta$, $r^2 = x^2 + y^2$
a) $x^2 + y^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow r^2 + 4r\cos\theta = 0 \Leftrightarrow r = -4\cos\theta$
b) $x^2(x^2 + y^2) = y^2 \Leftrightarrow r^2 \cdot \cos^2\theta \cdot r^2 = r^2 \cdot \sin^2\theta$ || $:r^2 \Leftrightarrow r^2 \cdot \cos^2\theta = \sin^2\theta$ || $: \cos^2\theta$
$\Leftrightarrow r^2 = \tan^2\theta \Leftrightarrow r = \pm\tan\theta$

---

6. $xe^y + \sin xy + y - \ln 2 = 0$ pisteeseen (0,ln2)
$D(xe^y + \sin xy + y - \ln 2) = 0$; $e^y + xe^y y' + \cos xy(y + xy') + y' = 0$
Sij. (0,ln2) ; $e^{\ln 2} + 0 + 1(0 + \ln 2) + y' = 0$; $y' = -2 - \ln 2 = k_T$

---

7. $\begin{cases} x = 2t^2 - 3t \\ y = 4t^2 + 5 \end{cases}$ Piste: $\begin{cases} x = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \\ y = 4 \cdot 1^2 + 5 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -1 \\ y = 9 \end{cases}$ kohtaan t = 1 ; Kulmakerroin : $\begin{cases} x' = 4t - 3 \\ y' = 8t \end{cases}$; $k_T = \frac{y'(1)}{x'(1)} = \frac{8}{1}$
Yhtälö : $y - 9 = 8(x + 1)$; $y - 9 = 8x + 8$; $y = 8x + 17$

---

8. $| z - (2 - 3i) | = 4$, missä $z = x + yi$
$| x + yi - 2 + 3i | = 4$; $| (x - 2) + (y + 3)i | = 4$; $\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2} = 4$; $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$
Kuvaaja on siis ympyrä, jonka säde on 4. Ala on = 16π

---

9. $f(x,y) = 9x^3 + \frac{y^3}{3} - 4xy$. Koska ääriarvo on, niin se löytyy kohdasta, jossa
$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 27x^2 - 4y = 0 \\ y^2 - 4x = 0 \end{cases}$ Alemmasta $x = ¼y^2$, joka sijoitetaan ylempään.
$\frac{27}{16}y^4 - 4y = 0$ || $\cdot 16$; $27y^4 - 64y = 0$ || $: y \neq 0$; $27y^3 = 64$ || $\sqrt[3]{\ }$ $3y = 4$; $y = \frac{4}{3}$
$x = ¼ \cdot \frac{16}{9} = \frac{4}{9}$. $f(\frac{4}{9}, \frac{4}{3}) = 9 \cdot \frac{64}{729} + \frac{1}{3} \cdot \frac{64}{27} - 4 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{64}{81}$

---

10. $(1 - x^2)y' + xy = 0$; $(1 - x^2)\frac{dy}{dx} = xy$; $\frac{dy}{y} = \frac{xdx}{1 - x^2}$; $\frac{dy}{y} = ½\frac{2x}{x^2 - 1}$; $\int\frac{dy}{y} = ½\int\frac{2x}{x^2 - 1}$
$\ln|y| = ½\ln|x^2 - 1| + C_1$; $\ln|y| = \ln|x^2 - 1|^{½} \cdot C$; $|y| = C\sqrt{|x^2 - 1|}$
$V = \frac{4\pi}{3}$; $\pi\int_1^2 (C\sqrt{|x^2 - 1|})^2\,dx = \frac{4\pi}{3}$; $\pi\int_1^2 C^2(x^2 - 1)\,dx = \frac{4\pi}{3}$; $\pi \Big/_1^2 C^2(x^3/3 - x) = \frac{4\pi}{3}$;
$C^2[(8/3 - 2) - (1/3 - 1)] = 4/3$; $C^2 \cdot 4/3 = 4/3$; $C^2 = 1$; $C = \pm 1$ $\quad$ V :$y = \pm\sqrt{|x^2 - 1|}$

01.1.1. Määritä a) arcsin ½ , b) $\arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}})$, c) $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$.

01.1.2. Laske yhtälön $z^2 - 4z + 13 = 0$ ratkaisujen itseisarvot ja vaihekulmat (argumentit).

01.1.3. Laske osittaisderivaatat f_{xx} ja f_{yx} , kun $f(x,y) = xy + e^{xy}$.

01.1.4. Määritä ellipsin $4x^2 + y^2 = 5$ pisteeseen (½,2) piirretyn tangentin yhtälö.

01.1.5. Käyrän parametrimuotoinen yhtälö on $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t + 1 \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$
a) Muodosta käyrän koordinaattien välinen yhtälö.
b) Laske derivaatan arvo kohdassa missä x = 3 käyttäen koordinaattimuotoista yhtälöä
c) Laske derivaatan arvo kohdassa missä x = 3 käyttäen parametrimuotoista yhtälöä.

01.1.6. Ratkaise differentiaaliyhtälö y ’ = 4xy .

01.1.7. Esitä napakoordinaateissa käyrä a) $x^2 + y^2 = 9$ b) xy = 9.

01.1.8. Laske sijoitusmenetelmällä $\int_0^1 x(1 + x)^4\, dx$.

01.1.9. Mikä on suurin ja pienin arvo, jonka funktio $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - y$ saa, kun $x^2 + y^2 \le 1$?

01.1.10. Säiliössä on 1 kg suolaa liuotettuna 100 litraan vettä. Säiliöön aletaan pumpata liuosta, jossa on 5 g suolaa litrassa liuosta, nopeudella 10 litraa/min. Täysin sekoittunutta liuosta poistuu samalla nopeudella säiliöstä. Paljonko suolaa on säiliössä 15 minuutin kuluttua?

1. a) x = arcsin ½ ⇔ sin x = ½ ⇔ x = π/6 b) $x = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}}) \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = 3\pi/4$ c) $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \pi/6$
2. $z^2 - 4z + 13 = 0$; $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$ $\lvert 2 \pm 3i \rvert = \sqrt{2^2 + (\pm 3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$; $\tan\theta = \frac{\pm 3}{2}$; $\theta = \pm 56{,}3°$
3. $f(x,y) = xy + e^{xy}$; $f_x = y + e^{xy}\cdot y$; $f_{xx} = 0 + e^{xy}\cdot y\cdot y = e^{xy}\cdot y^2$ $f_{yx} = f_{xy} = 1 + e^{xy}\cdot x\cdot y + e^{xy}\cdot 1 = 1 + e^{xy}(xy + 1)$
4. $4x^2 + y^2 = 3$ || D( ) ; 8x + 2y·y ’ = 0 Pisteessä (½,2) ; 8·½ + 2·2·y ’ = 0 ; 4y ’ = - 4 ; y ’ = - 1= k_T. Yhtälö : y - 2 = - 1(x - ½) ; y - 2 = - x + ½ ; y = - x + 2½
5. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t + 1 \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$, ylemmästä x = ½t + 1 saadaan, 2x = t + 2 ; t = 2x - 2 a) Sijoitetaan alempaan. $y = (2x - 2)^2 - 2(2x - 2) = 4x^2 - 8x + 4 - 4x + 4$; $y = 4x^2 - 12x + 8$ b) y ’ = 8x - 12 ; y ’(3) = 8·3 - 12 = 12 c) x = 3 ; 3 = ½t + 1 ½t = 2 ; t = 4 $y' = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2t - 2}{½}$; kun t = 4 ; $y' = \frac{2\cdot 4 - 2}{½} = \frac{6}{½} = 12$
6. y ’ = 4xy ; $\frac{dy}{dx} = 4xy$; $\frac{dy}{y} = 4x dx$; $\int \frac{dy}{y} = \int 4x dx$ $\ln\lvert y\rvert = 2x^2 + \ln C$; $\ln\lvert y\rvert = \ln Ce^{2x^2}$; $\lvert y \rvert = Ce^{2x^2}$; $y = Ce^{2x^2}$
7. x = rcos θ ; y = rsin θ a) $x^2 + y^2 = 9$; $(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = 9$; $r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 9$; $r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 9$; $r^2 = 9$; r = 3 b) xy = 9 ; rcos θ ·rsin θ = 9 ; $r^2\sin\theta\cos\theta = 9$; $r^2 = \frac{9}{\sin\theta\cos\theta}$; $r = \frac{3}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}$
8. Olkoon 1 + x = t ; x = t - 1 ; dx = dt ; kun x = 0, on t = 1 ; kun x = 1, on t = 2 $\int_0^1 x(1 + x)^4 dx = \int_1^2 (t - 1)t^4 dt = \int_1^2 (t^5 - t^4) dt = \Big/_1^2 (t^6/6 - t^5/5)$ dt = (64/6 - 32/5) - (1/6 - 1/5) = 63/6 - 31/5 = 4,3

9. Alue $x^2 + y^2 \le 1$ on yksikköympyrän kehän tai sen sisäpuolen pisteet.
Ääriarvo (, jollainen suurin ja pieninkin arvo on) voi olla pisteessä, jossa $f_x = 0$ ja $f_y = 0$
$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - y$; $2x = 0$ ja $4y - 1 = 0$; $x = 0$ ja $y = ¼$. Piste (0,¼) on alueella.
Suuri arvo voi tulla myös reunalla. Tällöin $f(x,y) = x^2 + y^2 + y^2 - y = 1 + y^2 - y = g(y)$ joka on jatkuva suljetulla välillä $-1 \le y \le 1$; $g'(y) = 2y - 1$; $g' = 0$; $2y - 1 = 0$; $y = ½$
$g(-1) = 3$, $g(1) = 1$, $g(½) = ¾$ ja $f(0,¼) = -1/8$. V: suurin = 3 ja pienin = - 1/8

10. Olkoon suolan määrä ajan funktiona m(t).
Sen muutos Δt minuutissa $\Delta m = -\frac{10\cdot\Delta t}{100}\cdot m + 50\cdot\Delta t$, joten $\frac{\Delta m}{\Delta t} = 50 - 0{,}1m = m'$
HY: $m' + 0{,}1m = 0$, jonka yleinen ratkaisu on $m = Ce^{-0,1t}$
TY: yrite yksityisratkaisuksi $m = a$, $m' = 0$, jotka sijoitetaan. $50 - 0{,}1a = 0$; $a = 500$
Yleinen ratkaisu on $m = 500 + Ce^{-0,1t}$.
Kun $t = 0$, on $m = 1000$; $1000 = 500 + C\cdot 1$; $C = 500$, joten $m = 500 + 500e^{-0,1t}$
Kun $t = 15$, on $m = 500 + 500\cdot e^{-1,5} = 612$ (g)

02.1.1. Ratkaise *z*:n suhteen a) $2z + i = 3 - iz$ b) $5z + 3 = 3z^* + i$.

02.1.2. Ratkaise yhtälö a) $\arcsin 4x = -\pi/3$ b) $\arccos (x^2 - 1) = 2\pi/3$

02.1.3. a) Määritä pisteen (5,12) napakoordinaatit.
b) Mikä on käyrän $r = 5\cdot\cos\theta$ esitys xy-koordinaatistossa?

02.1.4. Määritä käyrän $x^3 - y^3 + y + xy = 0$ ja y-akselin leikkauspisteisiin piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet.

02.1.5. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' + 3y = 2x - 1$.

02.1.6. Mikä on käyrän a) $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = t^2 - t \end{cases}$ kohtaan x = 2 piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet
b) koordinaattimuotoinen yhtälö?

02.1.7. Määritä funktion $f(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + 9}$ mahdolliset ääriarvopisteet.

02.1.8. Määritä ne kompleksitason pisteet, jotka toteuttavat yhtälön $| z - 2i | = | z^* + 1 |$.

02.1.9. Määritä $\int_1^2 (x^2 - 2)^4 x^3 \, dx$

02.1.10. Määritä ne käyrät y = f(x), joiden jokaiseen pisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin on neljäsosa saman pisteen ja origon kautta kulkevan suoran kulmakertoimesta.

1. a) $2z + i = 3 - iz \Leftrightarrow (2 + i)z = 3 - i \Leftrightarrow z = \frac{3 - i}{2 + i} = \frac{(3 - i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{6 - 2i - 3i + i^2}{4 - i^2} = \frac{5 - 5i}{5} = 1 - i$
b) $5z + 3 = 3z^* + i \Leftrightarrow 5(x + yi) + 3 = 3(x - yi) + i \Leftrightarrow 5x + 3 + 5yi = 3x + (1 - 3y)i$
$\begin{cases} 5x + 3 = 3x \\ 5y = 1 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1½ \\ y = 1/8 \end{cases}$ V: $z = -1½ + 1/8\cdot i$

2. a) $\arcsin 4x = -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 4x = \sin(-\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{8}$
b) $\arccos(x^2 - 1) = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x^2 - 1 = \cos(\frac{2\pi}{3}) \Leftrightarrow x^2 - 1 = -½ \Leftrightarrow x^2 = ½ \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{½}$

3. a) $P = (5,12)$ $r^2 = x^2 + y^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$; $r = 13$
$\tan\theta = y/x = 12/5 = 2{,}4$; $\theta = 67{,}4°$. $P = [13;67{,}4°]$
b) $r = 5\cos\theta$; $r^2 = 5r\cos\theta$; $x^2 + y^2 = 5x$

4. $x^3 - y^3 + y + xy = 0$; sij. $x = 0$; $-y^3 + y = 0$; $y(1 - y^2) = 0$; $y = 0$ tai $y = \pm 1$
implisiittinen derivointi ; $3x^2 - 3y^2y' + y' + y + xy' = 0$; $y'(x + 1 - 3y^2) = -3x^2 - y$
$y' = \frac{3x^2 + y}{3y^2 - x - 1}$; $k_{T1} = y'(0,0) = 0$; $k_{T2} = y'(0,1) = ½$; $k_{T3} = y'(0,-1) = -½$

5. Homogeeninen yhtälö $y' + 3y = 0$; $h(x) = Ce^{-3x}$
yritefunktio $f(x) = y = Ax + B$ jolloin $y' = A$, jotka sijoitetaan täydelliseen yhtälöön
$A + 3(Ax + B) = 2x - 1$; $3Ax + A + 3B = 2x - 1$; $3A = 2$ ja $A + 3B = -1$; $A = 2/3$ ja $3B = -5/3$
$A = 2/3$ ja $B = -5/9$; $y = h(x) + f(x)$; $y = Ce^{-3x} + 2/3 \cdot x - 5/9$

6. $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = t^2 - t \end{cases}$; $x = 2$; $t^2 + t = 2$; $t^2 + t - 2 = 0$; $t = 1$ tai $t = -2$

$\begin{cases} x' = 2t + 1 \\ y' = 2t - 1 \end{cases}$ $k_{T1} = y'(1) / x'(1) = \dfrac{1}{3}$; $k_{T2} = y'(-2) / x'(-2) = \dfrac{-5}{-3} = \dfrac{5}{3}$

$x - y = 2t$; $t = ½(x - y)$; $y = ¼(x - y)^2 - ½(x - y)$; $4y = (x - y)^2 - 2x + 2y$; $(x - y)^2 = 2(x + y)$

7. $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + 9}$; $f_x = \dfrac{0 - 2xy}{(x^2 + y^2 + 9)^2} = \dfrac{-2xy}{(x^2 + y^2 + 9)^2}$ $f_y = \dfrac{x^2 + y^2 + 9 - 2y \cdot y}{(x^2 + y^2 + 9)^2} = \dfrac{x^2 - y^2 + 9}{(x^2 + y^2 + 9)^2}$

$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -2xy = 0 \\ x^2 - y^2 + 9 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \text{ tai } y = 0 \\ x^2 - y^2 + 9 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - y^2 + 9 = 0 \end{cases}$ tai $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - y^2 + 9 = 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x = 0 \\ -y^2 + 9 = 0 \end{cases}$ tai $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 9 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 3 \end{cases}$ tai ei reaalisia ratkaisuja V : (0,3) tai (0,-3)

8. Merkitään $z = x + yi$ ja $z^* = x - yi$. $| z - 2i | = | z^* + 1 | \Leftrightarrow | x + yi - 2i | = | x - yi + 1 |$
$\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$; $x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 2x + 1 + y^2$; $-4y = 2x - 3$; $y = -½x + ¾$

9. Sijoitetaan $t = x^2 - 2 \Leftrightarrow x^2 = t + 2$. Tällöin $2xdx = dt$. $x = 1 \Rightarrow t = -1$ ja $x = 2 \Rightarrow t = 2$

$$\int_1^2 (x^2 - 2)^4 x^3\,dx = \int_1^2 (x^2 - 2)^4 x^2 \cdot ½ \cdot 2xdx = ½\int_{-1}^2 t^4(t + 2)\,dt = ½\int_{-1}^2 (t^5 + 2t^4)\,dt$$

$$= ½ \Big/_{-1}^{2} (1/6 \cdot t^6 + 2/5 \cdot t^5) = ½[(64/6 + 64/5) - (1/6 - 2/5)] = 11\frac{17}{20}$$

10. Olkoon käyrän piste (x,y) siinä $k_T = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{y}{x}$; $y' = \dfrac{y}{4x}$, $x \neq 0$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{4x}$; $\dfrac{4dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$

$\displaystyle\int \frac{4dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$; $4\ln |y| = \ln |x| + \ln |C_1|$; $\ln y^4 = \ln |C_1x|$; $y^4 = |C_1x|$; $y = \sqrt[4]{|C_1x|}$; $y = C\sqrt[4]{|x|}$