PITKÄ

MATEMATIIKKA

KURSSI MA9

TILASTOTIEDE JA TODENNÄKÖISYYSLASKENTA

Markku Männikkö
2003

Sisällysluettelo:

MA9. Tilastotiede ja todennäköisyyslaskenta

1. Todennäköisyyden käsite

1.1. Klassinen todennäköisyys

1. Satunnaiskoe
on koe, jonka tulosta ei tiedetä etukäteen

1.1.1. Mikä on satunnaiskoe seuraavista a) huominen sää b) huominen viikonpäivä c) nopan heitto?

2. Alkeistapaus
on satunnaiskokeen jokin mahdollinen tulos

2. Mitkä ovat satunnaiskokeen ”nosta kortti pakasta” alkeistapaukset?

3. Otosavaruus
on kaikkien alkeistapausten muodostama joukko E

3. Mikä on 1 mk ja 5 mk rahan heiton otosavaruus, kun tarkastellaan kruunuja ja klaavoja?

4. Tapahtuma
on satunnaiskokeen tulos, johon voi kuulua useampia alkeistapauksia

4. Mitä alkeistapauksia kuuluu nopan heitossa tapahtumaan ”silmäluku on ainakin 4”?

5. Otosavaruuden ja tapahtuman kuvaaminen geometrisesti
tapahtuu Venn-diagrammilla, jossa otosavaruus on esimerkiksi suorakaide ja tapahtuma sen osa-alue

6. Tapausten lukumäärän merkintä
tapahtuu N-kirjainta käyttäen. N(E) = kaikkien tapausten lukumäärä, N(A) = tapahtumaan A kuuluvien alkeistapausten lukumäärä jne.

5. Otetaan kortti pakasta. Mikä on N(E)? Mikä on N(A), kun A = ”kortin arvo alle 5”?

7. Symmetriaan perustuva todennäköisyys yhdelle alkeistapaukselle
Jos alkeistapauksia on symmetrisesti, ts. kaikilla alkeistapauksilla on sama tulemisen todennäköisyys, on yhden alkeistapauksen tulemisen todennäköisyys P(e) = 1/N(E) = 1/alkeistapausten lukumäärä

6. Heitetään markan kolikkoa. Millä todennäköisyydellä saadaan a) kruunu b) klaava c) euro?
7. Otetaan korttipakasta yksi kortti. Millä todennäköisyydellä se on a) ristiässä b) patarouva?
8. Korttipakasta otettu ensimmäinen kortti oli ristiässä. Millä todennäköisyydellä toinen on patarouva?

8. Tilaston frekvenssiin perustuva todennäköisyys yhdelle alkeistapaukselle
= tilastosta saatava alkeistapauksen lukumäärä / kaikkien havaintojen lukumäärä
= alkeistapauksen suhteellinen frekvenssi tilaston perusteella

9. Tee nastalla 100 heittoa. Mikä on tuloksen ”nastan kärki ylöspäin” todennäköisyys tämän perusteella?

9. Subjektiivinen todennäköisyys
on oma subjektiivinen arvio jonkin alkeistapauksen tulemisen todennäköisyydelle

10. Symmetriaan perustuva todennäköisyys tapahtumalle
Lasketaan tapahtumaan kuuluvien alkeistapausten lukumäärä = k ja kaikkien alkeistapausten määrä = n. Todennäköisyys on $k \cdot 1/n$.

10. Heitetään noppaa. Mikä on todennäköisyys saada ainakin 5?
11. Otetaan kortti. Mikä on todennäköisyys saada a) pata b) rouva c) alle 6?
12. Mikä on todennäköisyys, että 1997 syntyneen lapsen syntymäpäivä on a) 1. b) 29. c) 31. päivä?
13. Mikä on todennäköisyys, että 1996 syntyneen lapsen syntymäpäivä on a) 1. b) 29. c) 31. päivä?
14. Mikä on todennäköisyys, että alle 96-vuotiaan henkilön syntymäpäivä on a) 1. b) 29. c) 31. päivä?
15. Millä todennäköisyydellä lottoarvonnassa 1. pallon numero on vähintään 10 mutta enintään 20?
16. Laatikossa on 2 valkoista, 3 mustaa ja 5 sinistä palloa. Otetaan yksi pallo. Mikä on todennäköisyys, että pallo on a) valkoinen b) sininen tai valkoinen?
17. Tarkastellaan ilmiötä ”perheen 1. lapsen sukupuoli ja 2. lapsen sukupuoli”. Mitkä ovat alkeistapaukset? Mikä on todennäköisyys, että perheessä on a) 1. lapsi poika ja 2. tyttö b) poika ja tyttö c) ainakin 1 poika?

11. Tilastoon perustuva todennäköisyys tapahtumalle
= kaikkien tapahtumaan kuuluvien alkeistapausten lukumäärä / kaikkien havaintojen määrä ko. tilastosta.
= tapahtuman kaikkien alkeistapausten lukumäärän suhteellinen frekvenssi.

18. Automerkkiä A rekisteröitiin vuonna 1985 8500 kappaletta. Vuonna 1990 näistä oli rekisterissä 8300 ja vuonna 1995 7600. Millä todennäköisyydellä a) auto A kestää 10 vuotta b) hajoaa 5 - 10 v ikäisenä?

12. Subjektiivinen todennäköisyys
on oma subjektiivinen arvio jonkin tapahtuman tulemisen puolesta.

13. Todennäköisyysfunktio
On funktio, jonka arvot ovat todennäköisyyksiä ja muuttujana alkeistapaus tai tapahtuma

14. Todennäköisyyksien arvot
Ovat vähintään nolla ja korkeintaan 1

15. Alkeistodennäköisyyksien summa
on tasan yksi (1)

16. Tapahtuman todennäköisyys
on tapahtumaan kuuluvien alkeistapausten todennäköisyyksien summa

19. Räyringin järvestä saadaan hauki todennäköisyydellä 0,15 ja ahven 0,30. Millä todennäköisyydellä saadaan hauki tai ahven?

17.Todennäköisyyskenttä
Muodostuu otosavaruudesta ja siinä määritellystä todennäköisyysfunktiosta

18. Alkeistapauksen todennäköisyys symmetrisessä todennäköisyyskentässä
Jos alkeistapausten lukumäärä on n, niin yhden alkeistapauksen sattumisen todennäköisyys on 1/n.

19. Klassinen todennäköisyys
tarkoittaa jonkin otosavaruuden tapahtuman todennäköisyyttä
Olkoon alkeistapauksia tapahtumassa A yhteensä k kappaletta ja koko otosavaruudessa n kappaletta.
Tällöin $P(A) = k/n = N(A)/N(E)$

20. Rahaa heitetään kolme kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan täsmälleen 2 kruunua?
21. Valitaan satunnainen 3-numeroinen kokonaisluku. Millä todennäköisyydellä siinä on ainakin kaksi 5:sta?
22. Millä todennäköisyydellä 4-lapsisessa perheessä on 2 poikaa?
23. Puisen kuution sivutahot on maalattu punaisiksi. Kuutio leikataan 125 yhtä suureksi pikkukuutioksi. Sekaisin olevista kuutioista otetaan yksi. Millä todennäköisyydellä punaisia tahoja on a) 3 b) 2 c) 1 d) 0?
24. Pimeässä komerossa on 5 sinista ja 2 punaista sukkaa. Otetaan umpimähkään kaksi. Millä todennäköisyydellä saatiin samanvärinen sukkapari?

1.2. Alkeistapausten laskemismenetelmiä

1. Kahden nopan heiton kuvaaminen
Koordinaatistossa 6x6 pisteikkönä tai 6x6 ruudukkona. Vaaka-akselilla 1. ja pystyakselilla 2. nopan tulos.
Pisteiköstä voidaan valita tapahtumaan kuuluvat pisteet, tai ruudukkoon voidaan merkitä tapahtuman arvo.
Lasketaan suotuisten tapausten lukumäärä k. Todennäköisyys on k/36

1.2.1. Noppaa heitetään 2 kertaa. Millä todennäköisyydellä a) pistelukujen summa on 8 b) kumpikaan ei ylitä neljää c) pienempi silmäluku on suurempi kuin 4 d) ainakin toinen on korkeintaan 3?
2. Heitetään kahta noppaa. Millä todennäköisyydellä a) silmäluvut ovat eri suuret b) kumpikaan ei ole 1 tai 2 c) joko molemmat ovat korkeintaan 4 tai molemmat vähintään 3?
3. Millä todennäköisyydellä yhtälön $x^2 + px + q = 0$ ratkaisut ovat eri suuria reaalilukuja, kun p ja q on arvottu nopanheitolla?
4. Millä todennäköisyydellä funktio $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$ on aidosti kasvava kaikkialla, kun kertoimet p ja q on arvottu nopalla?
5. Suoran $y = ax + b$ kertoimet arvotaan kahdella nopalla. Millä todennäköisyydellä piste (2,8) on suoralla?
6. Suoran $y = ax + b$ kertoimet arvotaan ottamalla yksi lappu joukosta, joissa lapuissa on numerot 1 - 5. Kun on saatu a, laitetaan lappu takaisin ja arvotaan b. Millä todennäköisyydellä piste (2,8) on suoralla?

2. Otosavaruutena luonnolliset luvut
Luvut voidaan jakaa esimerkiksi n:llä jaollisuuden suhteen n:ään eri ryhmään, joissa on eri jakojäännös.
Kun lukuja on paljon voidaan ajatella, että jokaiseen ryhmään kuuluu yhtä monta lukua.
Tällöin yhtä ryhmää voi pitää yhtenä symmetrisenä alkeistapauksena.

7. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu kokonaisluku on jaollinen 3:lla?
8. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu kokonaisluku on jaollinen 3:lla ja 5:lla?
9. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu kokonaisluku on jaollinen 3:lla ja 7:llä?
10. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu 2-numeroinen kokonaisluku on jaollinen 3:lla ja 7:llä?

3. Otosavaruus tulkittavissa geometrisesti
Otosavaruuden voi muodostaa tason pisteet, joita on äärettömästi.
Otosavaruuden ja tapahtuman pisteet voivat muodostaa äärellisen alueen.
Voidaan kuvitella, että mitä laajempi alue sitä enemmän siinä on pisteitä eli alkeistapauksia.
Täten alueen pinta-alan (janan pituuden, kulman …) voi kuvitella vastaavan alkeistapausten lukumäärää.

11. Digitaalinen kello pysähtyy satunnaisesti. Millä todennäköisyydellä kello pysähtyy 17 ja 19 välillä?
12. Onnenpyörässä on 12 samankokoista sektoria. Yhdessä on päävoitto ja kahdeksassa lohdutusvoitto. Muissa ei ole voittoa. Millä todennäköisyydellä yhdellä pyöräytyksellä saadaan a) päävoitto b) voitto?
13. Onnenpyörän sektorin 1 asteluku on 30, sektorin 2 on 90, sektorin 3 on 45, sektorin 4 on 60 ja loput on sektorille 5. Millä todennäköisyydellä onnenpyörä pysähtyy sektoriin a) 2 b) 1 tai 5 c) muuhun kuin 3 ?
14. Ympyrän kehältä otetaan satunnaisesti kaksi pistettä. Millä todennäköisyydellä pisteiden välin jänne on suurempi kuin ympyrän säde?
15. Tikkataulun kympin säde on 1 cm ja jokaisen numerorenkaan leveys 1 cm. Millä todennäköisyydellä tauluun osunut tikka antaa tulokseksi vähintään 7, jos jokainen kohta taulussa on yhtä todennäköinen eikä osuta taulun ulkopuolelle?
16. Rautatien pituus on 30 km. Osuudella on 600 m pitkä tunneli. Juna, jonka pituus on 400 m, pysähtyy satunnaisesti. Millä todennäköisyydellä juna jää a) kokonaan b) kokonaan tai osittain c) osittain tunneliin?
17. Neliön sisältä otetaan satunnaisesti piste. Millä todennäköisyydellä piste on lähempänä neliön kärkeä kuin keskipistettä?
18. Luvut x ja y arvotaan satunnaisesti väliltä [-1,1]. Millä todennäköisyydellä on $x^2 + y^2 < 1$?
19. Luvut x ja y arvotaan väliltä]0,2[. Millä todennäköisyydellä on $\ln(x + y) > 1$?

2. Kombinatoriikkaa

2.1. Tuloperiaate

1. Erilaisten **alkeistapausten laskeminen tuloperiaatteella**
Tällä lasketaan yhdistetyssä kokeessa olevien erilaisten alkeistapausten lukumäärä.
Olkoon ensimmäisen kokeen A erilaisia alkeistapauksia m kpl, toisen B n kpl, kolmannen C p kpl,…
Tällöin yhdistetyssä kokeessa A x B x C on alkeistapauksia m·n·p kpl

2.1.1. Äiti aikoo istuttaa puutarhaan 1 punaisen ja 1 keltaisen ruusun. Kaupan on 25 lajiketta punaisia ja 8 lajiketta keltaisia ruusuja. Montako erilaista istutusta hän voi tehdä?
2. Ravikierroksella on 6 lähdössä jokaisessa 12 hevosta. Montako erilaista tulosvaihtoehtoa on?
3. Grillistä saa jauhe- tai täyslihahampurilaisia. Lisäksi ostaja voi valita munan tai ananasrenkaan sekä 5 erilaisesta mausteesta millaisen yhdistelmän tahansa. Montako erilaista hampurilaista voi ostaa?
4. Liedessä on 4 kytkintä, jotka jokainen voi olla 7 eri asennossa. Montako eri kytkentätapaa on?

2. Mikä sana vihjaa tuloperiaatteen käyttöön
JA-sana

3. Todennäköisyyden laskeminen tuloperiaatetta apuna käyttäen
Lasketaan tuloperiaatteella suotuisten ja kaikkien tapausten lukumäärät.
Näistä saadaan todennäköisyys klassisella tavalla

5. Millä todennäköisyydellä kolminumeroisen kokonaisluvun kaikki numerot ovat eri suuret?
6. Laatikossa A on 5 palloa, josta 3 valkoista ja laatikossa B 6 palloa, josta 4 valkoista. Kummastakin laatikosta otetaan pallo. a) Montako erilaista palloparia voidaan valita kaikkiaan? b) Montako kahden valkoisen pallon paria on kaikkiaan. c) Millä todennäköisyydellä molemmat pallot ovat valkoisia?

2.2. Permutaatiot

1. **Permutaatio**
Tarkoittaa jonoa, jossa joukon kaikki alkiot ovat jossakin järjestyksessä

2. **Permutaatioiden lukumäärän** laskeminen
Jos joukossa on n alkiota, on erilaisissa järjestyksissä olevia jonoja eli permutaatioita n! kpl.

2.2.1. Monessako eri järjestyksessä voi 15 oppilasta lähteä luokasta?
2. Montako eri lukua voidaan muodostaa numeroista 1, 2, 3, 4 ja 5, kun jokaista käytetään kerran?
3. Seitsemän veljestä istuu pitkälle penkille. a) Monellako tavalla he voivat istua? b) Monellako tavalla he voivat istua, jos nuorin ja vanhin on oltava vierekkäin?

3. Todennäköisyyden laskeminen permutaatioita apuna käyttäen
Lasketaan permutaatioilla suotuisten ja kaikkien tapausten lukumäärät.
Näistä todennäköisyys klassisella tavalla.

4. Viisi oppilasta lähtee luokasta. Millä todennäköisyydellä he lähtevät aakkosjärjestyksessä?
5. Luokalla on 7 poikaa ja 8 tyttöä. Heidät laitetaan satunnaisesti jonoon. Millä todennäköisyydellä he tulevat järjestykseen siten, että ensin ovat pojat ja sitten tytöt?

4. **k-permutaatio**
Tarkoittaa järjestettyä jonoa, jossa n-alkioisesta joukosta on k eri alkiota otettu jossakin järjestyksessä

5. k-permutaatioiden lukumäärän **laskemiskaava**
n! / (n - k)!

6. Monellako tavalla voidaan 8 henkilöstä valita järjestyksessä 5?
7. Luokalla on 17 oppilasta. Monellako tavalla heistä voidaan valita luokan puheenjohtaja ja sihteeri?
8. Montako kolminumeroista lukua voidaan muodostaa numeroista 1 - 7, kun jokainen numero voi esiintyä vain kerran?

6. k-permutaatioiden lukumäärän laskeminen käytännössä
Käytetään tuloperiaatetta kaikkiin k alkioon
n · (n - 1) · (n - 2) · … (n - k + 1)

9. Laske a) 8P4 b) 7P3 c) 12P2 d) 15P5.

7. k-permutaatiot laskimesta
TI-85 : [n] [2nd] [MATH] [F2 = PROB] [F2 = nPr] [r] [ENTER]
Canon F-800P : [n] [a] [r] [b] [nPr]

8. Todennäköisyyden laskeminen k-permutaatioita apuna käyttäen
Lasketaan suotuisten ja kaikkien tapausten määrät k-permutaatioilla tai permutaatioilla.
Todennäköisyys sitten klassiselle tavalla suotuisten määrä / kaikkien määrä

10. Pakasta otetaan 5 korttia. Millä todennäköisyydellä ne ovat kaikki herttoja?
11. Laatikossa on 3 sinistä ja 6 mustaa palloa. Otetaan 3 palloa. Millä todennäköisyydellä tuli 3 mustaa?

2.3. k-kombinaatio

1. **k-kombinaatio**
Tarkoittaa osajoukkoa, jossa on k eri alkiota otettuna n-alkioisesta joukosta.

2. k-kombinaatioiden lukumäärän **laskemiskaava**
$nCk = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

2.3.1. Montako 3 hengen komiteaa voidaan valita 8 henkilön joukosta?
2. Monellako tavalla voidaan 17 oppilaan ryhmästä valita 9 hengen pesäpallojoukkue?
3. Montako 3-kirjaimista sanaa voidaan muodostaa kirjaimista A - F, kun jokaista voi käyttää kerran?
4. Liikuntaryhmässä on 17 oppilasta, joista valitaan 2 viiden hengen koripallojoukkuetta ja lopuista muodostetaan huutosakki. Montako erilaista huutosakkia on?
5. Kouluautossa on 4 vapaata paikkaa. Monellako tavalla ne voidaan jakaa 8 oppilaan kesken?6. Laske a) 6C2 b) 7C4 c) 9C3 d) 10C7 e) 10C3 f) 12C5 g) 12C7.

3. k-kombinaatiot laskimesta
TI-85 : [n] [2nd] [MATH] [F2 = PROB] [F3 = nCr] [r] [ENTER]

4. Todennäköisyyden laskeminen k-kombinaatioita apuna käyttäen
Lasketaan suotuisten ja kaikkien tapausten lukumäärät k-kombinaatioita käyttäen.
Todennäköisyys sitten klassisella tavalla
HUOM! Tapahtuma on usein sanottava TÄYDELLISESTI, vaikka loppuosa on voitu loogisesti jättää pois.

7. Laatikossa on 3 sinistä ja 6 punaista palloa. Otetaan 3. Millä todennäköisyydellä tuli 2 sinistä?
8. Viking-lotossa arvotaan 48 numerosta 6 varsinaista ja 3 lisänumeroa. Millä todennäköisyydellä saadaan a) 6 b) 4 c) 3 ja lisänumero oikein?
9. Arpajaisissa on 50 arpaa, joista 5 voittaa. Millä todennäköisyydellä Matin 8 arvalla saa 3 voittoa?
10. Hatussa on 4 kpl 50 mk ja 5 kpl 10 mk seteliä. Otetaan umpimähkään 3 seteliä. Millä todennäköisyydellä saadaan vähintään 100 mk?
11. Pakasta otetaan 5 korttia. Millä todennäköisyydellä ne ovat samaa maata?
12. Pakasta otetaan 5 korttia. Millä todennäköisyydellä saadaan 2 pataa ja 3 herttaa?

5. **Binomikerroin**
nCr on nimeltään binomikerroin

3. Kertolaskusäännöt

3.1. Ehdollinen todennäköisyys ja yleinen kertolaskusääntö

1. **Ehdollinen tapahtuma**
Tapahtuman A alkeistapausten joukossa on osa tapahtuman B alkeistapauksia
Ehdollinen tapahtuma on sellainen, että tapahtuu B, kun tiedetään, että on tapahtunut A
Tämä merkitään B | A ja luetaan ” B ehdolla A ”

2. **Ehdollinen todennäköisyys**
on ehdollisen tapahtuman tulemisen todennäköisyys

3. Ehdollinen otosavaruus
alkeistapaukset ovat tapahtuman A (ehdon) alkeistapauksia

4. Ehdollisen todennäköisyyden laskeminen lukumääristä
$P(B | A) = N(A \cap B) / N(A)$

5. Ehdollisen todennäköisyyden laskeminen osien todennäköisyyksistä
$P(B | A) = P(A \cap B) / P(A)$, missä todennäköisyydet ovat lasketut koko otosavaruudessa E

3.1.1. Heitetään noppaa. Mikä on todennäköisyys, että saatiin 6, kun huomattiin, että silmiä oli vähintään 3?
2. Pakasta otetaan kortti. Mikä on todennäköisyys, että se oli hertta, kun se oli punainen?
3. Heitetään kolmea rahaa. Mikä on todennäköisyys, että saatiin ainakin yksi kruunu, kun huomattiin yhden olevan klaava?
4. Heitetään kahta noppaa. Mikä on todennäköisyys, että saatiin silmäluvuksi 1, kun summa oli 5?

6. Saman kentän **riippuvien tapahtumien kertolaskusääntö**
$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B | A)$

5. Millä todennäköisyydellä pakasta otettu kortti on hertta ja kakkonen?
6. Millä todennäköisyydellä satunnainen kokonaisluku on jaollinen 6:lla ja 9:llä?

7. Kertolaskusääntö riippuvien kokeiden yhdistämiselle
$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B | A)$ eli $P(A \times B) = P(A) \cdot P(B | A)$

7. Luokalla on 7 poikaa ja 8 tyttöä. Arvotaan kaksi järjestäjää. Millä todennäköisyydelle he ovat poikia?
8. Kirjainlaput K K K U U U otetaan laatikosta. Millä todennäköisyydellä ne tulevat järjestyksessä KUKKUU?
9. Pakasta otetaan 5 korttia. Millä todennäköisyydellä a) kaikki samaa väriä b) 4 ässää?
10. Pakasta otetaan kaksi korttia. Mikä on todennäköisyys, että ensimmäinen on risti ja toinen 9?
11. Luokassa on 18 oppilasta. Heistä valitaan luottamusoppilas ja hänelle varajäsen. Montako poikaa on luokassa, kun todennäköisyys, että molemmat ovat poikia, on 22/51?

8. Todennäköisyys riippuvien kokeiden yhdistämisestä puumallilla
Laitetaan ensimmäisen ja toisen asteen oksat sekä niiden todennäköisyydet oksien viereen.
Kokeen todennäköisyys on oksien todennäköisyyksien tulo

3.2. Riippumattomat tapahtumat ja kertolaskusääntö

1. Riippumattomat tapahtumat Tapahtumat A ja B ovat riippumattomia, jos toisen sattuminen ei vaikuta toisen todennäköisyyteen

3.2.1. Ovatko A ja B riippumattomia, kun a) A = kortti on pata ja B = kortti on kakkonen b) A = nopan luku on parillinen ja B = luku on jaollinen 3:lla c) A = kala on hauki ja B = kala on petokala?

2**. Riippumattomuuden määritelmä todennäköisyyksien avulla** Tapahtumat A ja B ovat riippumattomia, jos P(B **|** A) = P(B) ja P(A **|** B) = P(A)

3. Saman kentän riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntö P(A ja B) = P(A) · P(B) tai $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

2. Mikä on todennäköisyys, että satunnainen kokonaisluku on jaollinen 5:llä ja 7:llä?
3. Mikä on todennäköisyys, että satunnainen kokonaisluku on jaollinen 5:llä, 7:llä ja 9:llä?

4. Mikä sana viittaa kertolaskusäännön käyttöön? JA-sana

5. Riippumattomat kokeet Ovat yleensä aivan eri satunnaiskokeita (kuten nopanheitto ja kortin nosto), joissa toisen kokeen tulos ei järjen mukaan mitenkään voi vaikuttaa toisen kokeen tulokseen

4. Ovatko A ja B riippumattomia, kun a) A = rahan heitto ja B = päivän sää b) A = kortin nosto ja B = toisen kortin nosto, kun ensimmäinen kortti laitettiin takaisin c) A = kortin nosto ja B = kortin nosto, kun ensimmäistä korttia ei laitettu takaisin?

6. **Kertolaskusääntö** riippumattomien kokeiden yhdistämiselle P(A ja B) = P(A) · P(B) tai P(A x B) = P(A) · P(B)

5. Mikä on todennäköisyys, että rahan heitossa saadaan kruunu ja kortin otossa pata?
6. Henkilö saa postin mukana kirjeen todennäköisyyksillä 0,1, mainoksen 0,8 ja laskun 0,3. Millä todennäköisyydellä hän saa samana päivänä kirjeen, mainoksen ja laskun?
7. Koripalloilija onnistuu 1. vapaaheitossa 70% ja toisessa 80% todennäköisyydellä. Hän saa kaksi vapaaheittoa. Millä todennäköisyydellä hän onnistuu a) molemmissa b) täsmälleen yhdessä c) ainakin yhdessä heitossa?
8. Firmalla on kaksi paketti- ja yksi kuorma-auto. Pakettiauto on varattuna todennäköisyydellä 0,9 ja kuorma-auto 0,8. Millä todennäköisyydellä jokin autoista on tietyllä hetkellä vapaana?
9. Tähtitieteilijä valmistautuu kuvaamaan tähteä. Hän tietää, että taivas on pilvessä 60% todennäköisyydellä ja laitteisto toimii 95% varmuudella. Millä todennäköisyydellä kuvaus onnistuu?
10. Nuorimies soittaa tyttöystävälleen, jonka kotona vastataan 95% todennäköisyydellä. 20% kerroista vastaajana on isä, joka ei pidä pojasta ja sanoo, ettei tytär ole kotona. Tyttö on iltalenkillä 55% todennäköisyydellä. Millä todennäköisyydellä poika saa tytön puhelimeen ensimmäisellä soitolla?

4. Yhteenlaskusääntö ja komplementtisääntö

4.1. Mahdoton ja varma tapahtuma

1. Mahdottoman tapahtuman todennäköisyys = 0

2. Varman tapahtuman todennäköisyys = 1

4.2. Komplementtisääntö

1. Komplementtitapahtuma tapahtumalle A = ei-A = kaikkien niiden alkeistapausten joukko, jotka eivät kuulu tapahtumaan A

4.2.1. Mikä on A:n komplementtitapahtuma, kun a) A = luku on positiivinen b) A = tehtäviä on vähintään 44 c) A = ainakin yksi oppilas myöhästyy d) A = jokainen osaa tämän tehtävän e) A = koulussa on kivaa?

2. **Komplementtisääntö** P(A sattuu) = 1 - P(A ei satu)

2. Sateen todennäköisyys on 30%. Millä todennäköisyydellä ennusteen päivänä ei sada?
3. Räyringin järvestä saadaan hauki todennäköisyydellä 0,15 ja ahven 0,30. Millä todennäköisyydellä saatu kala ei ole hauki eikä ahven?
4. Lamppu palaa yli 1000 tuntia todennäköisyydellä 0,87. Millä todennäköisyydellä lamppu särkyy ennen?
5. Oppilas selviää tästä kurssista todennäköisyydellä 0,95. Millä todennäköisyydellä hän reputtaa?

3. Milloin komplementtisääntöä kannattaa käyttää?
Kun vastatapahtumaan ” A ei satu ” kuuluu vähemmän alkeistapauksia kuin tapahtumaan ” A sattuu ”.
Ja näin ollen tapahtuman ” A ei satu ” todennäköisyyden laskeminen on lyhyempi ja helpompi.

4. Mitkä sanat viittaavat komplementtisäännön käytön edullisuuteen?
Ainakin, vähintään, enintään, korkeintaan, …

6. Heitetään kahta noppaa. Millä todennäköisyydellä silmälukujen summa on vähintään 3?
7. Heitetään kahta rahaa. Millä todennäköisyydellä saadaan ainakin yksi kruunu?

4.3. Erillisten tapausten yhteenlaskusääntö

1. Erilliset tapahtumat
ovat sellaisia, joilla ei ole yhtään yhteistä alkeistapausta
Joukko-opillisesti ilmoitettuna $A \cap B = \varnothing$ eli A:n ja B:n leikkausjoukko on tyhjä

4.3.1. Ovatko tapahtumat A ja B erillisiä, kun a) A = luku jaollinen kahdella, B = luku jaollinen kolmella b) A = kaksinumeroinen luku jaollinen 11:llä, B = kaksinumeroinen luku jaollinen 13:lla c) A = nopalla saadaan enemmän kuin 3, B = nopan silmäluku on korkeintaan kolme?

2. **Erillisten tapahtumien yhteenlaskusääntö**
P(A tai B) = P(A) + P(B) tai joukko-opillisin merkinnöin $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2. Luokan puheenjohtajaksi on ehdolla 5 oppilasta. Maijan valitsemisen todennäköisyys on 0,45 ja Matin 0,32. Millä todennäköisyydellä a) Maija tai Matti tulee valituksi b) Maija ei tule valituksi c) ei Matti eikä Maija tule valituksi?
3. Tapahtuman A todennäköisyys on 0,6 ja tapahtuman B 0,5. Miksi A ja B eivät ole erillisiä?
4. Pakasta otetaan kortti. Millä todennäköisyydellä se on pata tai herttakuva?
5. Kahta noppaa heitetään. Millä todennäköisyydellä summa on yli 10 tai alle 6?
6. Heitettäessä 3 noppaa saadaan ainakin 2 ykköstä todennäköisyydellä 2/27. Samoin tulos ainakin 2 kakkosta todennäköisyydellä 2/27. Millä todennäköisyydellä saadaan ainakin kaksi samaa numeroa?
7. Todennäköisyys saada painotetulla nopalla 6 on viisinkertainen muihin silmälukuihin verrattuna, joilla on sama todennäköisyys. Mikä on todennäköisyys saada a) 6 b) 6 tai 5 c) ainakin 4?

3. Mikä sana viittaa yhteenlaskusäännön käyttöön?
Tai

4.4. Yleinen yhteenlaskusääntö

1. **Yleinen yhteenlaskusääntö**
Käytetään, kun tapahtumat A ja B eivät ole erillisiä.
P(A tai B) = P(A) + P(B) - P(A ja B) tai joukko-opin merkinnöin $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
Eli vähennetään ensimmäisen kerran P(A):ssa ja toisen kerran P(B):ssä tulleiden alkeistapausten todennäköisyys yhteen kertaan pois P(A ja B):ssä, jotta ne tulisivat otetuiksi mukaan vain kerran

4.4.1. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu positiivinen kokonaisluku on jaollinen 3:lla tai 5:lla?
2. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu positiivinen kokonaisluku on jaollinen 7:llä tai 11:lla?
3. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu 2-numeroinen kokonaisluku on jaollinen 7:llä tai 11:lla?
4. Millä on todennäköisyydellä kahden nopan heitossa silmäluvut ovat molemmat ≤ 4 tai molemmat ≥ 3?
5. P(A) = 0,5 ja P(B) = 0,6. Miksi A ja B eivät ole erillisiä? Millä välillä on P(A ja B)?
6. A osaa laskun todennäköisyydellä 0,85 ja B 0,76 sekä ainakin toinen 0,98. Millä todennäköisyydellä molemmat osaavat laskun?

2. **Yhteenlasku- ja kertolaskusäännön** yhteiskäyttökäyttö toisistaan **riippuville tapahtumille**
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B|A)$

7. Heitetään kahta noppaa. Mikä on todennäköisyys, että summa on 7 tai saadaan kuutonen?

3. **Yhteenlasku- ja kertolaskusäännön** yhteiskäyttö toisistaan **riippumattomille tapahtumille**
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$

8. Pakasta otetaan kortti. Mikä on todennäköisyys, että se on pata tai parillinen? (Ässä = 1)
9. Millä todennäköisyydellä satunnainen kokonaisluku on jaollinen 5:llä tai 7:llä?

4. Yhdistetyn kokeen kuvaaminen puumallilla
Alkupisteestä laitetaan alkamaan niin monta oksaa kuin ensimmäisellä kokeella on eri mahdollisuuksia.
Jokaisen oksan viereen voi laittaa kyseisen mahdollisuuden todennäköisyyden.
Jokaisen ensimmäisen oksan lopusta laitetaan niin monta oksaa kuin on toisen kokeen mahdollisuuksia.
Yksittäisen yhdistetyn tapahtuman todennäköisyys saadaan kertomalla alun ja lopun välillä olevien oksien todennäköisyydet.

10. Maalivahti torjuu rankkarin todennäköisyydellä 0,1. Millä todennäköisyydellä hän torjuu kahdesta rankkarista a) 0 b) 1 c) 2?
11. Pesäpalloilija siirtää etenijän 2:lle, 3:lle ja kotiin todennäköisyyksillä 0,6 , 0,4 ja 0,2. Hänellä on jaksolla yksi tilanne kutakin lajia. Millä todennäköisyydellä hän saa a) 3 b) 2 c) 1 d) 0 kärkilyöntiä?

5. Tapahtuman kuvaaminen sanallisesti täsmällisesti.
Esitä tapahtuma jakaen se osiin, joiden välissä on JA tai TAI sana.
Ota huomioon kaikki mahdollisuudet.
Sano myös ne osat, jotka ovat loogisesti ilmiselviä.

12. Laatikossa A on 80% valkoisia palloja ja loput mustia. Laatikossa B on 70% mustia palloja ja loput valkoisia. Molemmista nostetaan yksi pallo. Millä todennäköisyydellä ne ovat a) saman b) erivärisiä?
13. Jalankulkija on havainnut, että risteyksessä on punainen valo todennäköisyydellä 0,7. Hän kulkee 3 liikennevalojen läpi. Millä todennäköisyydellä hän joutuu pysähtymään valoissa a) 1 b) 2 c) 3 kertaa?
14. Suomalaisista kuuluu veriryhmään A 44%, B 17%, AB 8% ja O 31%. Millä todennäköisyydellä kahdesta satunnaisesti valitusta suomalaisesta molemmat kuuluvat samaan ryhmään?
15. Laatikossa A on 4 valkoista ja 1 musta pallo sekä laatikossa B 2 valkoista ja 3 mustaa. Arvotaan ensin laatikko ja otetaan siitä yksi pallo. Millä todennäköisyydellä pallo on valkoinen?
16. Heitetään noppaa 3 kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan a) 1, sitten 2 ja lopuksi 3 b) 1,2 ja 3?

5. Toistokoe ja binomitodennäköisyys

5.1 Toistokoe

1. Mikä on toistokoe?
Sama koe toistuu monta kertaa. Kokeet ovat toisistaan riippumattomia.

2. **Toistokokeen todennäköisyyksien** laskemista
Sama koe toistuu n kertaa. Ilmiö tapahtuu kokeessa todennäköisyydellä p.
P(kaikki n koetta antavat suotuisan tuloksen) = p^n.

5.1.1. Noppaa heitetään 4 kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan a) aina muu kuin 6 b) ainakin yksi 6?
2. Kaupan edessä on 12 parkkipaikkaa. Paikat ovat vapaina ruokatunnin aikana keskimäärin 3 minuuttia. Millä todennäköisyydellä asiakas voi parkkeerata autonsa heti tullessaan?
3. Luokassa on 32 oppilasta. Millä todennäköisyydellä ainakin 2 oppilaalla on sama syntymäpäivä?
4. Keskimäärin joka 6100. vetyatomin ydin sisältää protonin lisäksi neutronin eli on vedyn deuterium isotooppi. Millä todennäköisyydellä grammassa bentseeniä on ainakin yksi sellainen molekyyli, jonka kaikki 6 vetyatomia ovat deuterium isotooppeja?
5. Monestiko on heitettävä noppaa, jotta saataisiin tulos ”ainakin yksi 6” todennäköisyydellä $\geq 0{,}8$?

5.2. Binomitodennäköisyys

1. n-kertainen toistokoe
Sama koe toistuu n kertaa. Todennäköisyydet ovat joka kerralla täysin samat.
Yleensä tällöin halutaan tietää millä todennäköisyydellä näistä n kerrasta on k kpl suotuisia.

2. **Todennäköisyyden** laskeminen **n-kertaisessa** toistokokeessa
P(n:ssä toistossa on k suotuisaa) = $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$
missä n on toistojen määrä, k on suotuisten tapausten määrä, p on suotuisan tapahtuman todennäköisyys.

5.2.1. Noppaa heitetään 5 kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan kolme a) kuutosta b) samaa?

2. Rahaa heitetään 7 kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan 4 kruunaa?
3. Siementen itävyysprosentti on 85. Millä todennäköisyydellä 10 siemenestä ainakin 9 itää
4. Matti on havainnut tavoittavansa puhelimella haluamansa henkilön 70 % todennäköisyydellä. Millä todennäköisyydellä hän tavoittaa 10 henkilöstä ainakin 8 ensimmäisellä soitolla?
5. Lentoyhtiön mukaan 10% tilatuista paikoista jää täyttämättä. Koneessa on tilaa 20 matkustajalle. Millä todennäköisyydellä loppuunmyydyssä koneessa on 3 tyhjää paikkaa?
6. Pakasta otetaan kortti takaisinpanolla. Millä todennäköisyydellä 5. kerralla saadaan kolmas pata?

3. Voiton todennäköisyys kesken jääneessä pelissä
Rahapotti jaetaan pelaajien lopullisen voiton saamisen todennäköisyyksien suhteessa

7. Björn Borg voittaa erän tenniksessä todennäköisyydellä 0,7. Hän johtaa erin 2 - 1, kun alkaa sade. Miten 100 000 dollarin voitto on jaettava, jos peliä ei voi jatkaa ja voittoon tarvitaan 3 erävoittoa?

6. Tilastollinen jakauma

6.1. Tilastoaineisto ja otos

1. Tilastotieteen tehtävä
Koota ja jäsentää tietoa, esittää se ymmärrettävästi oikeiden johtopäätösten tekemiseksi

2. Tilastoyksikkö
on henkilö, asia, esine, tms. jota tutkitaan.

3. Perusjoukko, populaatio
Kaikki tilastoyksiköt muodostavat perusjoukon.

4. Muuttuja
on ominaisuus, jota tilastoyksiköstä tutkitaan

5. Havainto
on tutkittavan muuttujan arvo

6. Otos
on perusjoukon osa.

7. Edustava otos
tulee olla sellainen, että sen tulokset ovat kutakuinkin samat kuin koko perusjoukon.

8. Tutkimuksen tekeminen
Päätä tutkitko koko joukon vai osan. Jälkimmäisessä tapauksessa tee edustava otos.
Kerää aineisto ja tee siitä haluamasi lainen tilasto.
Esitä tilasto graafisesti, laske tilaston tunnuslukuja.
Esitä tilastosta saamasi päätelmät

6.1.1. Tee tutkimus jostakin aiheesta, suunnittele tutkimus, tilastoi se ja esitä saamasi päätelmät.

6.2. Mitta-asteikot ja tilastolliset tunnusluvut

1. Tilastomuuttujan **luokitteluasteikko**
Muuttujalla eli ominaisuudella on luokitteluasteikko, jos havainnot eli ominaisuuden arvot kuuluvat eri luokkiin ja täten tilastoyksiköt voidaan luokitella.

2. Millaiselle muuttujalle sopii luokitteluasteikko?
Kun muuttujan arvot eli havainnot ovat selvästi erilaisia, eri luokkiin kuuluvia

3. Muuttujan arvon frekvenssi
on niiden tilastoyksiköiden lukumäärä, joilla on kyseinen muuttujan arvo

4. Muuttujan jakauma
Muuttujan arvot ja niiden frekvenssit muodostavat muuttujan jakauman.

5. Jakauman havainnollistaminen pylväsdiagrammilla
Vaaka-akselilla on muuttujan eri arvot ja pystyakselilla niiden frekvenssit tai frekvenssiprosentit.
Muuttujan arvon kohdalle on piirretty sen frekvenssiä vastaavan korkoinen pylväs.

6. Jakauman havainnollistaminen sektoridiagrammilla
Kaikkien havaintojen frekvenssit yhdessä muodostavat täyden ympyrän.
Kutakin havaintoa vastaa sen suhteellista frekvenssiä vastaava osuus ympyrän alasta sektorina esitettynä.

7. Tilastomuuttujan **tyyppiarvo**
on se muuttujan arvo eli havainto, jolla on suurin frekvenssi.
Jos usealla arvolla on tämä sama suurin frekvenssi, ovat ne kaikki tyyppiarvoja.
Tyyppiarvo on toiselta nimeltään moodi ja se lyhennetään Mo.

6.2.1. Pizzeria teki tutkimuksen eri laatujen suosiosta. Ääniä sai: Bolognese 23, Vegetariana 18, Alla mare 9 Tutti frutti 31 ja Four Season 19. Esitä tilasto taulukkona, jossa myös frekvenssiprosentit, pylväs- ja sektoridiagrammina. Mikä on pizzasuosikin tyyppiarvo?
2. Puolen vuoden kuluttua tehtiin uusi pizzatutkimus. Nyt ääniä saatiin samassa järjestyksessä 27, 14, 10, 21 ja 8. Tee samat tilastoesitykset kuin edellisessä tehtävässä. Tee uusi pylväsdiagrammi, jossa vierekkäiset frekvenssiprosentit kummastakin tutkimuksesta.

8. Tilastomuuttujan järjestysasteikko
Muuttujalla eli ominaisuudella on järjestysasteikko, jos havainnot eli ominaisuuden arvot voidaan laittaa järjestykseen. Havainnot eivät tarvitse olla yhtä kaukana viereisistä arvoista, kunhan ovat järjestyksessä.

9. Millaiselle muuttujalle sopii järjestysasteikko?
Kun muuttujan arvot eli havainnot ovat jollakin mielekkäällä tavalla järjestyksessä

10. Muuttujan arvon frekvenssi
on niiden tilastoyksiköiden lukumäärä, joilla on kyseinen muuttujan arvo

11. Muuttujan arvon summafrekvenssi
Kun muuttujan arvot ovat järjestyksessä, niin summafrekvenssi on alkuarvosta ko. arvoon asti olevien arvojen frekvenssien summa.

12. Summafrekvenssin esittäminen histogrammilla
Kunkin muuttujan arvon kohdalla on sen summafrekvenssin korkuinen pylväs.
Histogrammissa pylväät ovat vierekkäin.
Viimeinen pylväs on tilastoyksiköiden lukumäärän korkuinen tai 100%, jos frekvenssit esitetään suhteellisina

13. Summafrekvenssin esittäminen summakäyrällä
Summakäyrä on jonkinlainen ” porrasfunktio ”, jonka arvot ovat summafrekvenssin suuruisia eli vaakasuora viiva koko ko. muuttujan arvon mittaisella alueella.

14. Tilastomuuttujan **mediaani**
Kun järjestysasteikkoisella muuttujalla sen arvot ovat järjestyksessä, on tälle sopiva ” keskiluku ” havaintoarvoista keskimmäinen eli mediaani. Se lyhennetään Md.
Jos havaintoja on pariton määrä, niin joukossa on keskimmäinen, joka on mediaani
Jos havaintoja on parillinen määrä, niin joukossa on kaksi yhtä keskellä olevaa lukua. Tällöin mediaani on lukujen keskiarvo, jos se on mielekäs. Tai toinen tai toinen tai molemmat.

3. Sotilaspiirissä on upseereita seuraavasti: kenraaleja 1, everstejä 3, everstiluutnantteja 5, majureita 12, kapteeneja 31, yliluutnantteja 60 ja luutnantteja 10. Esitä upseerin arvojen jakautuminen taulukkona frekvenssiprosentteineen ja pyväsdiagrammina. Mikä on jakauman tyyppiarvo ja mediaani?

15. Tilastomuuttujan välimatka-asteikko
Muuttujalla eli ominaisuudella on välimatka-asteikko, jos havainnot voidaan laittaa järjestykseen ja ne ovat yhtä kaukana viereisistä arvoista, tai ainakin niiden erotus on mielekkäästi tulkittavissa.

16. Millaiselle muuttujalle sopii välimatka-asteikko?
Muuttujan arvot ovat tasaisin välimatkoin toisistaan (tai välimatkojen erotukset saman luvun monikertoja).

17. Jakauman havainnollistaminen **viivadiagrammilla**
Merkitään muuttujan arvon kohdalle frekvenssin korkeudelle piste.
Kun pisteet yhdistetään murtoviivaksi saadaan viivadiagrammi eli frekvenssimonikulmio.

4. Peruskoulun matematiikan arvosanat olivat uusilla oppilailla: 10, 9, 9, 9, 10, 9, 9, 8, 10, 9, 8, 9, 8, 9, 8, 8, 9, 10, 9, 8, 9, 8, 9, 8, 9, 7, 10, 9, 10, 7, 6, 10, 9, 9, 7, 10. Tee arvosanojen jakaumasta taulukko, jossa frekvenssi ja summafrekvenssi sekä frekvenssi- ja summafrekvenssiprosentit. Mikä on jakauman tyyppiarvo, mediaani ja keskiarvo?

18. **Keskiarvo**
Välimatka-asteikkoiselle muuttujalle sopii keskikohtaa kuvaavaksi luvuksi keskiarvo, koska muuttujan arvot ovat tasaisin välein. Keskiarvo merkitään ja lasketaan $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots}{n}$

5. Laske lukujen 2, 5, 7, 8, 9, 3, 4, 7, 9 keskiarvo, tyyppiarvo ja mediaani.
6. Luettele 10 positiivista lukua, joiden keskiarvo on 30 ja mediaani 40.
7. Määritä luku x siten, että lukujen 19, 11, x, 13 ja 21 keskiarvo on 17.
8. Matin neljän ensimmäisen kurssin keskiarvo oli 7,5. Mitä hänen tulisi saada seuraavasta kurssista arvosanaksi, jotta keskiarvoksi tulisi 8?

19. **Keskiarvon** laskeminen muuttujan arvojen **frekvenssistä**
$\overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots}{n}$

9. Liikkeessä on 25 kpl 50 mk, 30 kpl 75 mk, 20 kpl 100 mk, 15 kpl 150 mk, 10 kpl 200 mk ja 8 kpl 250 mk korvakorua. Mikä on korujen keskihinta?
10. Hissiin meni 4 keskimäärin 55 kg henkilöä. Kun seuraavasta kerroksesta tuli 3 keskimäärin 75 kg henkilöä, niin mikä oli hississä olevien keskipaino?
11. Oppilaalla oli 8 kpl arvosanoja 7, 9 kpl arvosanoja 8 ja 4 kpl 9. Montako 10 pitäisi hänellä olla, jotta keskiarvo olisi yli 8,5?

20. Keskiarvon laskeminen laskimella

TAVALLINEN: Laita laskimeen tilastomoodi esim. [Mode] [Sd]

Syötä havaintoarvot laskimen muistiin esim. [luku] [SUM] (tai [M+] tms.)

Jos samoja arvoja on useita, ne voidaan syöttää esim [arvo] [x] [lkm] [SUM]

Kun kaikki luvut on muistissa saat keskiarvo näppäimellä [$\overline{x}$]

TI-85: [STAT] [EDIT = F2] ja anna listalle nimi tai hyväksy ehdotus xStat ja yStat

Tyhjää mahdolliset tiedot [CLRxy = F5]

Syötä luvut x_1, x_2, x_3, … ja niiden mahdolliset frekvenssit y_1, y_2, y_3, …

[CALC = F1] ja anna listojen nimet x- ja y-listaksi

[1-VAR = F1], jolloin näyttöön tulee keskiarvo ja keskihajonnat

12. Laske lukujen 1, ½, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9 keskiarvo ja mediaani

21. Millaisella muuttujalla on suhdeasteikko
Kun muuttujan arvo 0 on mielekkäästi tulkittavissa

22. Muuttujan arvojen luokitus
Kun muuttujalla on paljon eri arvoja, voidaan useampia yhdistää samaan luokkaan.
Esimerkiksi kaikki välillä [a,b[olevat kuuluvat samaan luokkaan.
Etuna on se, että kun arvojen frekvenssi on 1 tai 0, niin luokan frekvenssit voivat olla isompiakin.

23. Luokkarajat
Luokalla on ala- ja yläraja. Jos muuttujan arvo on näiden välissä, niin muuttuja kuuluu tähän luokkaan.
Rajat voivat olla todellisia tai pyöristettyjä.

24. Luokkakeskus
on luokkarajojen keskiarvo.

13. Poliisi mittasi autojen nopeuksia koulun kohdalla ja tulos oli: 38, 47, 51, 36, 42, 60, 55, 71, 48, 45, 39, 68, 52, 61, 53, 48, 44, 57, 43, 66, 58, 63, 41, 49 ja 54 km/h. Luokittele tulokset ja esitä frekvenssitaulukko. Piirrä histogrammi ja viivadiagrammi. Mikä on koko aineiston keskiarvo ja luokkakeskuksista laskettu keskiarvo?

6.3. Hajontalukuja

1. Välimatka-asteikollisen muuttujan **vaihteluväli**
on suurimman ja pienimmän arvon erotus.

6.3.1. Mikä on havaintoarvojen 17, 26, 12, 24, 18, 23, 27, 29 keskiarvo ja vaihteluväli?

2. Arvojen **poikkeama**
= havaintoarvo - vertailuarvo

3. Välimatka-asteikollisen muuttujan **keskipoikkeama**
on keskiarvosta laskettujen poikkeamien itseisarvojen keskiarvo

$$= \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + |x_3 - \bar{x}| + \dots}{n}$$

2. Laske havaintoarvojen 18, 29, 8, 32, 19, 24, 26, 36 keskiarvo, vaihteluväli ja keskipoikkeama.

4. Välimatka-asteikollisen muuttujan **keskihajonta**
on havaintojen keskiarvosta laskettujen poikkeamien neliöiden keskiarvon neliöjuuri

$$= \sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots}{n}}$$

3. Laske lukujen 7, 8, 5, 9, 6, 9, 7, 10, 8, 8, 10, 9, 8, 6 ja 10 keskiarvo ja keskihajonta.

5. **Varianssi**
on keskihajonnan neliö = σ^2

6. Keskihajonta laskimella
Syötä luvut muistiin kuten kohdassa 6.2.20
Keskihajonnan saat näppäämällä $\boxed{\sigma_n}$ (tai $\boxed{\sigma^n}$ tai $\boxed{\sigma}$ tai … laskimestasi riippuen)

4. Laske lukujen 154, 257, 329, 165, 418, 288, 295, 164, 361 ja 296 keskiarvo, keskihajonta ja varianssi.

7. Välimatka-asteikollisen muuttujan **otoskeskihajonta**
on otettu käyttöön, jotta otoksesta saatava keskihajonta vastaisi paremmin koko joukon keskihajontaa.
Laskennollisesti tämä saadaan muuttamalla keskihajonnan kaavassa nimittäjässä n:n paikalle (n - 1)

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots}{n - 1}}$$

8. **Otosvarianssi**
on otoskeskihajonnan neliö = s^2

9. Otoskeskihajonta laskimesta
Syötä havaintoarvot laskimeen kuten kohdassa 6.2.20.
Otoskeskihajonnan saa näppäimellä $\boxed{\sigma_{n-1}}$ (tai $\boxed{\sigma^{n-1}}$ tai $\boxed{s}$ tai.. laskimestasi riippuen)

5. Koululaisten kesätienestejä kyseltäessä saatiin seuraava otos: 200 mk, 1700 mk, 2000 mk, 800 mk, 350 mk, 1200 mk, 2500 mk ja 600 mk. Mikä on keskiarvo ja otoskeskihajonta

10. Normittamisen tarkoitus
saada eri muuttujan arvot vertailukelpoisiksi

11. Normitettu muuttujan arvo
kertoo miten monikertaisesti havainto poikkeaa keskiarvosta keskihajonnoilla mitattuna

$$= \frac{x - \bar{x}}{s} \text{ (tai } = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \text{)}$$

6. Matti sai matikan kokeesta 8,2 ja englannin kokeesta 7,5. Matikan kokeen keskiarvo oli 7,3 ja keskihajonta 1,5 sekä englannin kokeessa vastaavasti 6,1 ja 1,8. Onko Matti kieli- vai matikkanero?

7. Diskreetti todennäköisyysjakauma

7.1. Satunnaismuuttuja

1. Satunnaiskoe
Koe, jonka tulos ei ole ennalta arvattavissa

2. Satunnaismuuttuja
on funktio, jonka määrittelyjoukkona on satunnaiskokeen alkeistapaukset

3. Satunnaismuuttujan arvo
on ominaisuus, joka liittyy satunnaismuuttujaan

4. Diskreetti satunnaismuuttuja
saa vain äärellisen määrän arvoja
Vähän yleisemmin: Vain erillisiä arvoja, ts. ei kaikkia mahdollisia arvoja joltakin lukuväliltä.

7.1.1. Onko satunnaismuuttuja $\underline{x}$ diskreetti, kun a) $\underline{x} \in \{1, 2,\ldots,10\}$ b) $\underline{x} \in [1,10]$ c) $\underline{x} \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ d) $\underline{x} \in R$?

5. Satunnaismuuttujan arvon tulemisen todennäköisyys
Merkitään $p_k = P(\underline{x} = x_k)$ = todennäköisyys sille, että satunnaismuuttuja x saa arvon x_k.

6. Todennäköisyyksien summa
$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = 1$

2. Satunnaismuuttuja x saa 5 arvoa. Mitä on p_5, kun $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}15$, $p_3 = 0{,}2$ ja $p_4 = 0{,}25$?

7. Satunnaismuuttujan **frekvenssifunktio**
on funktio, jonka arvot ovat todennäköisyyksiä $p_k = P(\underline{x} = x_k)$

8. Satunnaismuuttujan **jakauma**
Jakauman muodostaa satunnaismuuttujan arvot yhdessä niiden tulemisen todennäköisyyden kanssa.

3. Painotetulla nopalla 6 saamisen todennäköisyys on viisinkertainen muiden silmälukujen saamiseen verrattuna, joilla on keskenään sama todennäköisyys. Esitä silmälukujen jakauma taulukkona ja graafisesti.

9. **Tasainen jakauma**
Jakauma on tasainen, jos kaikilla satunnaismuuttujan arvoilla on sama todennäköisyys.
Merkintä $\underline{x} \sim Tas(x_1, x_2, \ldots)$

4. Olkoon $\underline{x} \sim Tas(1,2,3,4)$. Esitä jakauma taulukkona ja janadiagrammina.

10. Empiirinen jakauma
Empiirisen jakauman todennäköisyydet on saatu jonkin kokeen suhteellisista frekvensseistä

5. Kyselytutkimuksessa ilmoitettiin mielenkiintoisimmaksi televisio-ohjelmaksi uutiset 24, elokuva 36, Kauniit ja rohkeat 42, poliisisarja 17 ja pikku kakkonen 9 kertaa. Esitä mielenkiintoisimman televisio-ohjelman jakauma tämän kyselyn perusteella.

11. Teoreettinen jakauma
Teoreettisen jakauman todennäköisyydet saadaan laskemalla jollakin teoreettisella tavalla millä on opittu todennäköisyyksiä laskemaan.

6. Rahaa heitetään 3 kertaa. Esitä satunnaismuuttujan $\underline{x}$ = kruunujen lukumäärä jakauma.
7. Rahaa heitetään 4 kertaa. Esitä satunnaismuuttujan $\underline{x}$ = kruunujen ja klaavojen ero jakauma.
8. Noppaa heitetään kahdesti. Esitä satunnaismuuttujan $\underline{x}$ = silmälukujen erotuksen itseisarvo jakauma.
9. Noppaa heitetään kahdesti. Esitä suuremman silmäluvun jakauma.
10. Laatikossa on 4 valkoista ja 6 mustaa palloa. Otetaan kolme palloa. Laske saatujen valkoisten pallojen lukumäärän jakauma.
11. Koripalloilijoiden A, B ja C onnistumisprosentti vapaaheitoissa on 40, 60 ja 70. Jokainen heittää yhden vapaaheiton. Olkoon satunnaismuuttuja $\underline{x}$ = korien lukumäärä. Esitä $\underline{x}$:n jakauma.
12. Satunnaismuuttuja $\underline{x}$ saa kokonaislukuarvot 1,2,…,10. $P(\underline{x} = k) = ak^2$ kaikilla k = 1, 2, …,10. Määritä vakion a arvo. Laske $P(\underline{x} < 4)$ ja $P(2 < \underline{x} < 5)$

7.2. Diskreetin jakauman tunnusluvut

1. **Odotusarvo**
on satunnaiskokeen arvojen odotettavissa oleva keskiarvo, jos koetta tehtäisiin äärettömästi.

2. Odotusarvon laskeminen
$E\underline{x} = \mu = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots$

7.2.1. TV:n laatikkokisassa on 10 laatikkoa. Kolmessa on 100 mk ja 200 mk, kahdessa 400 mk sekä yhdessä 800 mk ja 3000 mk. Pelaaja valitsee satunnaisesti laatikon. Mikä on voiton odotusarvo?
2. Mikä on kahden nopan heitossa silmälukujen erotuksen itseisarvon odotusarvo?
3. Neljä korttia on numeroitu 1 - 4. Otetaan 2 korttia. Mikä on korttien numeroiden summan odotusarvo?
4. Säästöpossussa on 3 markan ja 2 viiden markan rahaa. Ravistettaessa sieltä putoaa kaksi. Mikä on pudonneen rahamäärän odotusarvo?
5. Lompuukissa on yksi 100 mk, kolme 50 mk ja kuusi 20 mk seteliä. Otetaan satunnaisesti kaksi seteliä. Mikä on saadun rahasumman odotusarvo?
6. Kahdessa samanlaisessa laatikossa on toisessa 2 mustaa ja 4 valkoista palloa sekä toisessa 3 mustaa ja 3 valkoista palloa. Olkoon satunnaismuuttuja $\underline{x}$ = mustien pallojen lukumäärä, kun otetaan kummastakin laatikosta 1 pallo. Muodosta $\underline{x}$:n jakauma ja odotusarvo.
7. Kahdessa samanlaisessa laatikossa on toisessa 2 mustaa ja 4 valkoista palloa sekä toisessa 3 mustaa ja 3 valkoista palloa. Satunnaismuuttuja $\underline{x}$ = mustien pallojen lukumäärä, kun satunnaisesti valitusta laatikosta otetaan 2 palloa. Muodosta $\underline{x}$:n jakauma ja laske sen odotusarvo.

3. **Keskihajonnan** laskeminen
$D\underline{x} = \sigma = \sqrt{p_1(x_1 - \mu)^2 + p_2(x_2 - \mu)^2 + p_3(x_3 - \mu)^2 + \ldots}$

8. Rahaa heitetään 4 kertaa. Laske kruunujen lukumäärän odotusarvo ja keskihajonta.
9. Kahta noppaa heitetään. Mikä on suuremman silmäluvun odotusarvo ja keskihajonta?

4. **Varianssi**
on keskihajonnan neliö = $D^2\underline{x} = s^2$

7.3. Binomijakauma ja sen tunnusluvut

1. Satunnaismuuttuja noudattaa **binomijakauma**a
jos satunnaismuuttujan arvojen tulemisen todennäköisyydet lasketaan **binomitodennäköisyyksistä**.
$p_k = nCk \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$
Merkitään $x \sim Bin(n,p)$

7.3.1. Noppaa heitetään 5 kertaa. Muodosta kuutosten lukumäärän jakauma.
2. Heitetään nastaa 4 kertaa. P(kärki ylös) = 0,4. Muodosta kärki ylös tapausten lukumäärän jakauma.
3. Muodosta 5 lapsisen perheen poikien määrän jakauma. Pojan syntymisen todennäköisyys on 0,514.

2. **Binomijakauman odotusarvo**
$E\underline{x} = np$

4. Olkoon $\underline{x} \sim Bin(10; 0,8)$. Mikä on jakauman odotusarvo?
5. Laattojen muoto on virheetön todennäköisyydellä 0,95 ja lasitus 0,80. Virheet ovat toisistaan riippumattomia. Laske virheettömien laattojen lukumäärän odotusarvo 5 laatan erästä.
6. Oppilas saa flunssan todennäköisyydellä 0,15. Matikan ryhmässä on 19 henkilöä. Mikä on tunnilta poissa olevien oppilaiden odotusarvo?

3. **Binomijakauman keskihajonta**
$D\underline{x} = \sqrt{np(1-p)}$

7. Rahaa heitetään neljä kertaa. Mikä on kruunujen lukumäärän odotusarvo ja keskihajonta?
8. Laboratoriokokeen onnistumisen todennäköisyys on 0,8. Koe tehdään 30 kertaa. Mikä on onnistuneiden kokeiden odotusarvo ja keskihajonta?
9. Noppaa heitetään 5 kertaa. Olkoon $\underline{x}$ = niiden heittojen lukumäärä, joilla saadaan 5 tai 6. Mikä on $\underline{x}$:n odotusarvo ja keskihajonta?
10. Olkoon $\underline{x} \sim Bin(n,p)$. Laske n ja p, kun $E\underline{x} = 8$ ja $D\underline{x} = 2$.

8. Jatkuva todennäköisyysjakauma

8.1. Jatkuva satunnaismuuttuja

1. Jatkuva satunnaismuuttuja
voi saada arvoikseen kaikki reaaliluvut tai kaikki arvot joltakin väliltä [a,b]

2. Jatkuvan satunnaismuuttujan jakauma luokiteltuna
jostakin tilastosta voidaan esittää histogrammina.

8.2. Tiheysfunktio

1. **Tiheysfunktio**
on funktio, jonka arvot ovat vähintään nolla eli sen kuvaaja on x-akselin yläpuolella.
Sen avulla yritetään kuvata miten suuri satunnaismuuttujan tietylle arvovälille tulemisen todennäköisyys.
Alueella, jossa tiheysfunktio on korkealla, on suuri, ja missä matalalla, on pieni todennäköisyys.

2. Tiheysfunktio ja ” todennäköisyysmassa ”
Tiheysfunktion ja x-akselin välisen alueen pinta-ala on 1. Täten alaa voi pitää ” todennäköisyysmassana ”.
Todennäköisyys, että satunnaismuuttujan arvot osuvat jollekin välille, sen alueen pinta-ala, joka on tämän välin yläpuolella oleva osa todennäköisyysmassasta.

3. Milloin funktio on **tiheysfunktio**?
Funktio f on jatkuvan satunnaismuuttujan x tiheysfunktio, jos
1) $f(x) \geq 0$
2) f on jatkuva kaikkialla, paitsi ehkä ei äärellisen monessa kohdassa
3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ eli kokonaisala käyrän ja x-akselin välillä on oltava 1.

4. Tutkiminen onko funktio tiheysfunktio
Tutkitaan, täyttääkö funktio kohdan 8.2.3. vaatimukset.

8.2.1. Onko f erään jatkuvan satunnaisfunktion tiheysfunktio, kun a) $f(x) = x / 50$, kun $0 < x < 10$ b) $f(x) = 3x^2$, $0 < x < 1$, c) $f(x) = e^{-x}$, kun $0 < x < 2$?

5. Vakion määrittäminen niin, että funktio olisi tiheysfunktio
Yleensä vakiolle saadaan arvo ratkaisemalla yhtälö
Joskus jokin vakion arvoista joudutaan hylkäämään, kun sillä ei funktion arvot ole vähintään nollia.

2. Mikä on a, kun funktio $f(x) = ax$, kun $0 < x < 5$ on erään jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio?
3. Mikä on a, kun funktio $f(x) = ax^2$, kun $0 < x < 2$ on erään jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio?
4. Mikä on a, kun funktio $f(x) = 4x^3$, kun $0 < x < a$ on erään jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio?
5. Jakauman tiheysfunktio on $f(x) = x + a$, kun $1 < x < 2$. Määritä a.

6. Tasaisen jakauman tiheysfunktio
on vakio sillä välillä [a,b], mille satunnaismuuttujan arvot voivat osua.
Tällä välillä on siis funktion arvot $1/(b - a)$ ts. $f(x) = 1/(b - a)$

6. Satunnaismuuttujan $\underline{x}$ arvot ovat jakaantuneet tasaisesti välille [2,6]. Mikä on tiheysfunktio?

7. Tasainen jakauma
Kun aina samanpituisella alueella on sama todennäköisyys, on jakauma tasainen. Merkitään $\underline{x} \sim \text{Tas}(a,b)$

8. **Todennäköisyyden laskeminen tiheysfunktiosta**
$$P(c < \underline{x} < d) = \int_c^d f(x)dx$$

7. Satunnaismuuttuja $\underline{x} \sim \text{Tas}(4,10)$. Mikä on tiheysfunktio. Laske $P(\underline{x} < 5)$ ja $P(\underline{x} > 8)$
8. Satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio on $f(x) = 0{,}1 \cdot (x + ½)$, kun $0 < x < 4$. Laske $P(\underline{x} > 2)$.
9. Satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio on $f(x) = 2x / (x^2 + 1)^2$, kun $x > 0$. Laske $P(\underline{x} < 1)$ ja $P(1 < \underline{x} < 2)$
10. Määritä vakio a siten, että $f(x) = 0{,}5x + a$, $2 < x < 3$, on tiheysfunktio. Laske $P(\underline{x} < 2½)$

11. Laitteen toiminta-aika vuosina on satunnaismuuttuja, jonka tiheysfunktio on f(x) = $\frac{1}{2}e^{-x/2}$, kun x > 0. Millä todennäköisyydellä laite kestää a) yli kolme vuotta b) 1 - 2 vuotta c) alle 4 kuukautta?

8.3. Kertymäfunktio

1. Tiheysfunktion f **kertymäfunktio** F
on funktio, jonka arvo kertoo alusta x:ään asti kertyneen todennäköisyyden

8.3.1. F(x) = $x^2 / (x^2 + 10\,000)$, kun x > 0, on kertymäfunktio. Laske a) P($\underline{x}$ < 100) b) P($\underline{x}$ < 200)

2. **Kertymäfunktion laskeminen** määrätyllä integraalilla
F(x) = P($\underline{x}$ < x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

2. Satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio on f(x) = 6x + 2 , kun 0 < x < 1/3. Mikä on kertymäfunktio?
3. Satunnaismuuttuja $\underline{x}$ ~ Tas(1,6). Mikä on a) tiheysfunktio b) kertymäfunktio?

3. Kertymäfunktion laskeminen **integraalifunktiosta**
Kertymäfunktio F on eräs funktion f integraalifunktioista.
Määritellään kaikki integraalifunktiot F + C.
Integroimisvakion C arvon saa ehdosta F(alussa) = F(a) = 0 tai F(lopussa) = F(b) = 1.

4. Tiheysfunktio on f(x) = x + ½, kun 0 < x < 1. Mikä on kertymäfunktio?
5. Tiheysfunktio on f(x) = x^2 + 2/3, kun 0 < x < 1. Mikä on kertymäfunktio?
6. Tiheysfunktio on f(x) = $(x + 1)^{-2}$, kun x > 0. Mikä on kertymäfunktio?

4. Todennäköisyyden **P($\underline{x}$ < x)** laskeminen **kertymäfunktion avulla**
P($\underline{x}$ < x) = F(x)

5. Todennäköisyyden **P($\underline{x}$ > x)** laskeminen **kertymäfunktion avulla**
P($\underline{x}$ > x) = 1 - F(x)

6. Todennäköisyyden **P(a < $\underline{x}$ < b)** laskeminen **kertymäfunktion avulla**
P(a < $\underline{x}$ < b) = F(b) - F(a)

7. F(x) = 1 - e^{-x} on kertymäfunktio. Laske a) P($\underline{x}$ < 1) b) P($\underline{x}$ > ln 2) c) P(1 < $\underline{x}$ < ln 3)
8. Määritä vakio a siten, että F(x) = ½x - ax^2, kun 0 < x < 4, on kertymäfunktio. Laske P($\underline{x}$ > 2).
9. Olkoon tiheysfunktio f(x) = x - ½, kun 1 < x < 2. Määritä a siten, että P($\underline{x}$ > a) = 0,5.

8.4. Jatkuvan jakauman odotusarvo ja keskihajonta

1. **Jatkuvan satunnaismuuttujan odotusarvo**
E$\underline{x}$ = μ = $\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$

8.4.1. Satunnaismuuttuja $\underline{x}$ ~ Tas(0,10). Mikä on a) tiheysfunktio b) kertymäfunktio c) odotusarvo?

2. **Jatkuvan satunnaismuuttujan varianssi**
$D^2\underline{x} = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)dx$

3. Jatkuvan satunnaismuuttujan **keskihajonta**
D$\underline{x}$ = σ eli neliöjuuri varianssista

2. Jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio on f(x) = (x + 1) / 4, kun 0 < x < 2. Mikä on a) kertymäfunktio b) odotusarvo c) varianssi d) keskihajonta?

4. Jatkuvan jakauman **mediaani**
on se satunnaismuuttujan arvo, jolle P($\underline{x}$ < Md) = 0,5

9. Normaalijakauma

9.1. Normitettu normaalijakauma

1. Normaalijakauma
Jakauma, jonka muotoisia on havaittu monien satunnaismuuttujien noudattavan.

2. Normaalijakauman tiheysfunktio
Tiheysfunktiot ovat samanmuotoisia, jonka huippu on keskiarvon kohdalla.
Kuvaajat ovat symmetrisiä huipun kautta kulkevan pystysuoran suoran suhteen.

3. Gaussin käyrä, kellokäyrä
Tiheysfunktion kuvaajia sanotaan Gaussin käyriksi, koska Gauss ensiksi huomasi jakauman yleisyyden.
Niitä sanotaan myös kellokäyriksi, koska ne ovat kirkonkellojen keskikohdan poikkileikkauksen muotoisia.

4. **Normitettu normaalijakauma N(0,1)**
Normaalijakauma on normitettu, jos odotusarvo $\mu = 0$ ja keskihajonta $\sigma = 1$.

5. Normitetun normaalijakauman tiheysfunktio
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-½x^2}$$

6. Normitetun normaalijakauman kertymäfunktio
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-½t^2} dt$$

7. Normitetun normaalijakauman **kertymäfunktion arvot taulukkokirjasta**
Taulukkokirjassa on kertymäfunktion arvot muuttujilla 0,00 - 3,49

9.1.1. Mitä on a) $\Phi(0,12)$ b) $\Phi(1,68)$ c) $\Phi(0,86)$?
2. Mikä on a, kun $\Phi(a) = 0,5678$ b) $\Phi(a) = 0,86$ c) $\Phi(a) = 0,91$?

8. Normitetun normaalijakauman kertymäfunktion arvot laskimesta
Joissakin laskimissa on mahdollisuus saada normitetun normaalijakauman kertymäfunktion arvoja.
Canon F-800P:ssä : $\boxed{\text{Mode}}$ $\boxed{\text{ST1}}$ $\boxed{\text{x}}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{P(t)}}$
Ohjelmoitavissa laskimissa, jotka laskevat määrätyn integraalin, voi laittaa funktiomuistiin tiheysfunktion.
Tämän jälkeen laskee tämän määrätyn integraalin tutkittavaan kohtaan x asti.

9. $\Phi(-a)$
$= 1 - \Phi(a)$. Yleensä kannattaa piirtää Gaussin käyrä ja hahmotella sen perusteella todennäköisyyksiä.

3. Mitä on a) $\Phi(-0,38)$ b) $\Phi(-1,49)$
4. Mikä on a, kun $\Phi(a) = 0,432$ b) $\Phi(a) = 0,2875$?

10. **P($\underline{x}$ < a)**
= Φ(a)

11. **P($\underline{x}$ > a)**
= 1 - Φ(a)

12. **P(a < $\underline{x}$ < b)**
= Φ(b) - Φ(a)

13. **P($\underline{x}$ < -a)**
= Φ(-a) = 1 - Φ(a)

5. $\underline{x} \sim N(0,1)$. Laske a) $P(\underline{x} < 0,73)$ b) $P(\underline{x} > 1,2)$ c) $P(\underline{x} < -0,15)$ d) $P(-0,5 < \underline{x} < 1,2)$ e) $P(|\underline{x}| < 0,3)$

6. $\underline{x} \sim N(0,1)$. Määritä a, kun a) $P(\underline{x} < a) = 0,75$ b) $P(\underline{x} > a) = 0,35$ c) $P(\underline{x} > a) = 0,65$ d) $P(|\underline{x}| < a) = 0,35$
7. Sokeripakettien täyttökoneen virhe on jakautunut normaalisti siten, että keskiarvo on 0 g ja keskihajonta 1 g. Kuinka monta prosentilla paketeista on ylipainoa enemmän kuin 2 g?

9.2. Yleisen normaalijakauman todennäköisyydet normittamalla

1. Normaalijakauman **N(μ,σ) normittaminen** muuttujan vaihdolla

Normittaminen saadaan tekemällä uusi muuttuja $\underline{z} = \frac{x - \mu}{\sigma}$ joka on jakautunut N(0,1)

2. **Yleisen normaalijakauman** todennäköisyyksien laskeminen

Valitaan uusi muuttuja $\underline{z} = \frac{x - \mu}{\sigma}$ kuten edellä.

$P(\underline{x} < a) = P(\underline{z} < \frac{a - \mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{a - \mu}{\sigma})$

9.2.1. $\underline{x} \sim N(3,2)$. Laske a) $P(\underline{x} < 2)$ b) $P(\underline{x} > 3,8)$ c) $P(2,5 < \underline{x} < 3,3)$ d) $P(\underline{x} < 2,34)$
2. Tehtävän suoritusaika minuuteissa on jakautunut N(32,2). Millä todennäköisyydellä tehtävän suoritus kestää yli 35 minuuttia?
3. Tuotteen pakkausten keskipaino on 500 g ja keskihajonta 15 g. Kuinka monta % pakkauksista painaa a) vähintään 520g b) vähemmän kuin 490 g, kun painojen jakauma on normaali?
4. Luokan tyttöjen pituus on jakautunut N(160 cm, 20 cm). Laske todennäköisyys, että umpimähkään valitun oppilaan pituus on a) pienempi kuin 145 cm b) suurempi kuin 130 cm c) välillä 170 - 180 cm d) täysiksi senttimetreiksi pyöristettynä 165 cm?
5. Kahviautomaatista saatavan annoksen tilavuus on jakautunut N(200cm^3, 4 cm^3). Kuinka suuri on kahvimukin oltava, jotta ylivalumisen todennäköisyys on korkeintaan 0,1%?
6. Laitteen kestoikä on jakautunut normaalisti keskiarvon ollessa 36 kk. Ostaja vaatii, että 99% laitteista pitää kestää yli 24 kk. Mikä saa keskihajonta korkeintaan olla?
7. Marmeladia pakataan koneellisesti rasioihin, jolloin paino noudattaa jakaumaa N(μ,12). Keskiarvoa μ voidaan säätää. Miten μ on valittava, jotta 75% rasioista sisältää vähintään 450 g marmeladia?
8. Tietyn tyyppisten vastusten resistanssi noudattaa normaalijakaumaa. Kokemuksesta tiedetään, että 20 prosentilla vastuksista resistanssi on pienempi kuin 190 Ω ja 10 prosentilla suurempi kuin 215 Ω. Kuinka suuri osa vastuksista on sellaisia, joiden resistanssi on välillä 195 - 205 Ω?
9. Halutaan valmistaa 1000 käämiä, joiden paino on 50,0 ± 1,0 g. Käämien paino on jakautunut N(50;0,7). Kuinka monta käämiä on valmistettava?

Vastaukset E-tehtäviin.

1.1.1. a) c)
2. {Ri2, Ri3;…,PaK, PaÄ}
3. (1Kr,5Kr), (1Kr,5Kl), (1Kl,5Kr), (1Kl,5Kl)
4. 4, 5, 6
5. 52, 12
6. a) ½ b) ½ c) 0
7. a) 1/52 b) 1/52
8. 1/51
10. 1/3
11. a) ¼ b) 1/13 c) 4/13
12. a) 12/365 b)11/365 c) 7/365
13.a) 12/366 b) 12/366 c) 7/366
14. a) 48/1461 b) 45/1461 c) 28/1461
15. 11/39
16. a) 2/10 b) 7/10
17. (P,P), (P,T), (T,P), (T,T) a) ¼ b) ½ c) ¾
18. a) 0,89 b) 0,08
19. 0,45
20. 3/8
21. 0,03
22. 3/8
23. a) 8/125 b) 36/125 c) 54/125 d) 27/125
24. 11/21

1.2.1. a) 5/36 b) 4/9 c) 1/9 d) ¾
2. a) 5/6 b) 4/9 c) 7/9
3. 17/36
4. 4/9
5. 1/12
6. 2/25
7. 1/3
8. 1/15
9. 1/21
10. 4/90
11. 1/12
12. a) 1/12 b) ¾
13. a) ¼ b) 11/24 c) 7/8
14. 2/3
15. 0,16
16. a) 1/150 b) 1/30 c) 2/75
17. ½
18. π/4
19. $(4 - e)^2/8$

2.1.1. 200
2. 2 985 984
3. 256
4. 2401
5. 0,72
6. a) 30 b) 12 c) 2/5

2.2.1. $1,3 \cdot 10^{12}$
2. 120
3. a) 5040 b) 1440
4. 1/120
5. 0,000155
6. 6720
7. 272
8. 210
9. a) 1680 b) 210 c) 132 d) 360 360
10. 0,000495
11. 5/21

2.3.1. 56
2. 24 310
3. 20
4. 19 448

5. 70
6. a) 15 b) 35 c) 84 d) 120
e) 120 f) 792 g) 792
7. 3/14
8. a) 1/12 271 512
b) 12915/12 271 512
c) 46 820/12 271 512
9. 0,023
10. 0,40
11. 0,001981
12. 143/16 660

3.1.1. ¼
2. ½
3. 6/7
4. ½
5. 1/52
6. 1/18
7. 1/5
8. 1/20
9. a) 0,001981 b) 0,000018
10. 1/52
11. 12

3.2.1. a) K b) E c) E
2. 1/35
3. 1/315
4. a) K b) K c) E
5. 1/8
6 0,024
7. a) 0,56 b) 0,38 c) 0,94
8. 0,352
9. 0,38
10. 0,342

4.2.1. a) 0 tai negat. b) kork. 43
c) kukaan ei myöhästy d) ain. 1
ei osaa e) ei kivaa
2. 0,7
3. 0,55
4. 0,13
5. 0,05
6. 35/36
7. ¾

4.3.1. a) E b) K c) K
2. a) 0,77 b) 0,55 c) 0,23
3. Summa yli 1
4. 4/13
5. 13/36
6. 4/9
7. a) 0,5 b) 0,6 c) 0,7

4.4.1. 7/15
2. 17/77
3. 7/30
4. 7/9
5. $0,1 \leq p \leq 0,5$
6. 0,63
7. 5/12
8. 31/52
9. 11/35
10. a) 0,81 b) 0,18 c) 0,01

11. a) 0,048 b) 0,296 c) 0,464
d) 0,192
12. a) 0,38 b) 0,62
13. 0,19 b) 0,44 c) 0,34
14. 0,325
15. 3/5
16. a) 1/216 b) 1/36

5.1.1. a) 0,48 b) 0,52
2. 0,46
3. 0,753
4. 0,15
5. 9

5.2.1. a) 0,032 b) 0,193
2. 0,27
3. 0,54
4. 0,38
5. 0,19
6. 27/512
7. BB:lle 91 000 $, vastustajalle
9000 $

6.2.1. Mo = Tutti Frutti
3. Mo = Md = ylil.
4. Mo = 9, Md = 9, $\bar{x}$ = 8,75
5. $\bar{x}$ = 6, Mo = 7 ja 9, Md = 7
7. 21
8. 10
9. 109 mk
10. 63,6 kg
11. 10
12. $\bar{x}$ = 0,314, Md = 1/5
13. $\bar{x}$ = 51,6 km/h

6.3.1. $\bar{x}$ = 22, vaihteluväli = 17
2. $\bar{x}$ = 24, vaihteluväli = 28,
keskipoikkeama = 6,8
3. $\bar{x}$ = 8, σ = 1,51
4. $\bar{x}$ = 273, σ = 84,3,
σ^2 = 7110
5. $\bar{x}$ = 1170 mk, σ_{n-1} = 830 mk
6. kielinero

7.1.1. a) K b) E c) K d) E
2. 0,30
6. p(0) = 1/8, p(1) = 3/8,
p(2) = 3/8, p(3) = 1/8
7.p(0) = 6/16, p(1) = p(3) = 0,
p(2) = 8/16, p(4) = 2/16
8. p(0) = 6/36, p(1) = 10/36,
p(2) = 8/36, p(3) = 6/36,
p(4) = 4/36, p(5) = 2/36
9. p(1) = 1/36, p(2) = 3/36,
p(3) = 5/36, p(4) = 7/36,
p(5) = 9/36, p(6) = 11/36
10. p(0) = 1/6, p(1) = ½,
p(2) = 3/10, p(3) = 1/30
11. p(0) = 0,072, p(1) = 0,324,
p(2) = 0,436, p(3) = 0,168
12. a = 1/385, 14/385, 29/385

7.2.1. 550 mk
2. 35/18
3. 5
4. 5,20 mk
5. 74 mk
6. p(0) = 1/3, p(1) = ½,
p(2) = 1/6, $E\underline{x}$ = 5/6
7. p(0) = 3/10, p(1) = 17/30,
p(2) = 4/30, $E\underline{x}$ = 5/6
8. $E\underline{x}$ = 2, $D\underline{x}$ = 1
9. $E\underline{x}$ = 161/36,
$D\underline{x} = \sqrt{2555}/36$

7.3.1. p(0) = 0,402,
p(1) = 0,402, p(2) = 0,161,
p(3) = 0,032, p(4) = 0,003,
p(5) = 0
2. p(0) = 0,1296,
p(1) = 0,3456, p(2) = 0,3456,
p(3) = 0,1536, p(4) = 0,0256
3. p(0) = 0,0271,
p(1) = 0,1434, p(2) = 0,3033,
p(3) = 0,3207, p(4) = 0,1696,
p(5) = 0,0359
4. 8
5. 3,8
6. 2,85
7. $E\underline{x}$ = 2, $D\underline{x}$ = 1
8. $E\underline{x}$ = 24, $D\underline{x}$ = 2,2
9. $E\underline{x}$ = 10/3, $D\underline{x} = \sqrt{10}/\ 3$
10. n = 16, p = ½

8.2.1. a) K b) K c) E
2. 0,08
3. 3/8
4. 1
5. - ½
6. f(x) = ¼, $x \in [2,6]$
7.f(x) = 1/6, P(x < 5) = 1/6,
P(x > 8) = 2/3
8. 0,7
9. ½, 3/10
10. a = - ¼, p = 7/16
11. a) 0,223 b) 0,239 c) 0,154

8.3.1. a) ½ b) 4/5
2. $F(x) = 3x^2 + 2x$
3. f(x) = 1/5, F(x) = x/5 - 1/5
4. $F(x) = (x^2 + x)/2$
5. $F(x) = (x^3 + 2x)/3$
6. f(x) = 1 - 1/(x + 1)
7. a) 1 - 1/e b) ½ c) 1/e - 1/3
8. a = 1/16, p = ¼
9. $(1 + \sqrt{5})/2$

8.4.1. a) f(x) = 1/10
b) F(x) = x/10 c) 5
2. $F(x) = (x^2 + 2x)/8$
b) $E\underline{x}$ = 7/6 c) 11/36 d) $\sqrt{11}/6$

9.1.1. a) 0,5478 b) 0,9535
c) 0,8051
2. a) 0,17 b) 1,08 c) 1,34
3. a) 0,352 b) 0,0681
4. a) - 0,17 b) - 0,56

5. a) 0,7673 b) 0,1151
c) 0,4404 d) 0,5764 e) 0,2358
6. a) 0,67 b) 0,39 c) - 0,39
d) 0,45
7. 2,3%

9.2.1. a) 0,3085 b) 0,3446
c) 0,1583 d) 0,3707
2. 0,067
3. a) 9,2% b) 25,1%
4. a) 0,23 b) 0,93 c) 0,15
d) 0,02

5. 205 cm^3
6. 5,2 kk
7. 458 g
8. 31%
9. 1180

Koetehtäviä aiemmilta vuosilta

91.1.1. Millä todennäköisyydellä kolminumeroisessa kokonaisluvussa on ainakin yksi numero 5? [0,28]

91.1.2. Noppaa heitetään kolme kertaa peräkkäin. Millä todennäköisyydellä kolmannen heiton tulos on sama kuin kahden ensimmäisen heiton summa? [$\frac{5}{72}$]

91.1.3. Noppaa heitetään kuusi kertaa. Millä todennäköisyydellä kuudennessa heitossa saadaan kolmas kuutonen? [0,027]

91.1.4. Koulusta myöhästynyt oppilas myöhästyy seuraavanakin päivänä 40 prosentin todennäköisyydellä. Jos oppilas on tullut ajoissa kouluun, hän myöhästyy seuraavana koulupäivänä 25 % todennäköisyydellä. Kuinka suuri on todennäköisyys, että hän tulee torstaina ajoissa kouluun, jos hän saman viikon maanantaina myöhästyi koulusta? [0,7035]

91.1.5. Luokalla on 8 tyttöä ja 12 poikaa. Tytöistä 5 ja pojista 8 ovat 18-vuotiaita ja loput ovat 17-vuotiaita. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valitussa 4 oppilaan ryhmässä on a) kaksi poikaa ja kaksi tyttöä b) kaksi 17-vuotiasta poikaa ja kaksi 18-vuotiasta tyttöä c) 4 yhtä vanhaa oppilasta? [a) 0,38 b) 0,012 c) 0,15]

91.1.6. Tietokoneen suorakulmion muotoinen kuvaruutu on suuruudeltaan 640x350 pistettä. Keskellä on 200x100 suuruinen alue, joka on eräässä pelissä 10 pisteen arvoinen. Tämä alue on suuremman 400x200 suuruisen alueen sisäpuolella. Jos samassa pelissä piste osuu tähän alueeseen, muttei sisimpään saa 7 pistettä. Ja jos piste osuu reuna-alueeseen saa 3 pistettä. Tietokone arpoo satunnaisesti kolme pistettä kuvaruudulta. Millä todennäköisyydellä kyseisessä pelissä saa a) 30 pistettä b) 20 pistettä? [a) 0,00071 b) 0,092]

91.1.7. Henkilö kävelee työmatkallaan kaksien liikennevalojen kautta. Ensimmäisissä valoissa on vihreä todennäköisyydellä 0,40 ja toisissa 0,35. Vihreän aallon vuoksi todennäköisyys sille, että molemmissa on vihreä valo on 0,20. Millä todennäköisyydellä liikennevaloissa joutuu pysähtymään täsmälleen kerran? [0,35]

91.2.2. Onnenpyörä on jaettu 36 yhtä suureen sektoriin, joista yksi on punainen, seitsemän vihreää ja loput keltaisia. Punainen sektori tarkoittaa 300 mk:n voittoa ja vihreä 50 mk:n voittoa sekä keltaisella sektorilla ei saa voittoa. Onnenpyörä laitetaan pyörimään ja oletetaan, että se pysähtyy satunnaisesti mihin sektoriin tahansa. Laske odotettavissa olevan voiton suuruus. [18 mk]

91.2.3. Kahviautomaatin antaman kahviannoksen tilavuus noudattaa normaalijakaumaa, jonka keskiarvo on 1,5 dl ja keskihajonta 0,1 dl. Millä todennäköisyydellä kahvi sopii mukiin, jonka tilavuus on 1,68 dl? [0,9641]

91.2.5. Laatikossa on 4 valkoista ja 5 mustaa palloa. Laatikosta otetaan umpimähkään 3 palloa. Laske valkoisten pallojen lukumäärän jakauma ja odotusarvo. [$E\underline{x} = 4/3$]

92.1.1. Jalkapalloturnaukseen osallistuu 16 joukkuetta. Kuinka monta ottelua tarvitaan, jos joukkueet jaetaan kahteen lohkoon, jossa jokainen pelaa jokaista vastaan ja sen jälkeen kummankin lohkon kaksi parasta pelaa keskenään kaksinkertaisen sarjan? [68]

92.1.2. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valitussa kaksinumeroisessa positiivisessa kokonaisluvussa ensimmäinen numero on pienempi kuin toinen? [0,4]

92.1.3. Noppaa heitetään kolme kertaa. Millä todennäköisyydellä silmälukujen tulo on 30? [1/18]

92.1.4. Sateen todennäköisyys jonakin päivänä toukokuussa on 35 %. Millä todennäköisyydellä ensi toukokuun valittuna viikkona on a) viisi poutapäivää b) viisi peräkkäistä poutapäivää? [a) 0,30 b) 0,095]

92.1.5. Laatikossa A on 6 valkoista ja 1 musta pallo sekä laatikossa B 6 valkoista palloa. Laatikosta A otetaan ensin satunnaisesti 3 palloa ja laitetaan ne laatikkoon B. Sitten otetaan laatikosta B satunnaisesti 3 palloa ja laitetaan ne laatikkoon A. Millä todennäköisyydellä laatikossa A on nyt musta pallo? [$\frac{5}{7}$]

92.2.4. Laatikossa on kaksi palloa, joissa on numero 1 , kaksi palloa, joissa on numero 2 ja yksi pallo, jossa on numero 3. Palloista valitaan satunnaisesti kaksi palloa. Mikä on pallojen numeroiden summan jakauma ja odotusarvo? [P(2) = 0,1 , P(3) = 0,4 , P(4) = 0,3 , P(5) = 0,2 ; $E\underline{x}$ = 3,6]

92.2.5. Naisten keihäänheiton tilastotulokset noudattavat normaalijakaumaa. Tulosten keskiarvo on 61,40 m ja keskihajonta 3,20 m. Kuinka monta prosenttia tuloksista on yli 65,00 m? [13%]

92.3.1. Jalkapalloturnaukseen osallistuu 16 joukkuetta. Kuinka monta ottelua tarvitaan voittajan selvittämiseksi, jos a) häviäjä putoaa aina pois b) kaikki pelaavat kerran kaikkia vastaan? [a) 15 b) 120]

92.3.2. Viisi poikaa ja kaksi tyttöä asettuvat satunnaisesti jonoon. Millä todennäköisyydellä tytöt eivät ole peräkkäin? [$\frac{5}{7}$]

92.3.3. Kolmessa identtisessä nopassa on aina kaksi tahkoa maalattu samalla värillä. Käytetyt värit ovat sininen, punainen ja keltainen. Millä todennäköisyydellä saadaan a) vain yhtä väriä b) vain punaisia c) kaikki värit? [a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{27}$ c) $\frac{2}{9}$]

92.3.4. Toisen luokan oppilaista 50 % valitsee psykologian kurssin 3. luokalle ja 30 % biologian kurssin. Todennäköisyys, että satunnaisesti valittu oppilas ei ole valinnut psykologiaa eikä biologiaa on 40%. Kuinka monta prosenttia oppilaista valitsee molemmat oppiaineet? [20%]

92.3.5. Jalkapalloilija onnistuu rangaistuspotkussa todennäköisyydellä 0,9. Monennenko rangaistuspotkun jälkeen todennäköisyys, että hän on epäonnistunut vähintään kaksi kertaa, on suurempi kuin 0,3? [11]

92.4.4. Pienen koulun luokalla on 3 tyttöä ja 4 poikaa. Heistä valitaan umpimähkään 3. Muodosta poikien lukumäärän jakauma ja laske poikien lukumäärän odotusarvo.
[P(0) = $\frac{1}{35}$, P(1) = $\frac{12}{35}$, P(2) = $\frac{18}{35}$, P(3) = $\frac{4}{35}$ $E\underline{x}$ = $1\frac{5}{7}$]

92.4.5. Kahviautomaatin annoksen koko noudattaa normaalijakaumaa, jonka keskiarvo on 1,6 dl ja keskihajonta 0,05 dl. Millä todennäköisyydellä kahvi sopii mukiin, jonka tilavuus on 1,7 dl? [0,9773]

94.1. Meirän-päivien aikana pidettävään Pedro-mestaruuskilpailuihin on ilmoittautunut 16 joukkuetta. a) Montako ottelua on pelattava, kun jokainen joukkue pelaa kerran jokaista vastaan? b) Montako pelikierrosta tarvitaan, kun kaikki joukkueet pelaavat samanaikaisesti yhtä ottelua eli yhtäaikaa on käynnissä 8 ottelua ? c) Kauanko kilpailut kestävät, kun yksi ottelu kestää 10 minuuttia eikä otteluiden välillä pidetä taukoa?

94.3. Kaksi tasavahvaa joukkuetta ottelee Meirän-päivien kyykkämestaruudesta, jonka saa se joukkue, joka ensiksi on voittanut kolme ottelua. Millä todennäköisyydellä mestaruus ratkeaa vasta viidennellä kierroksella? (Kussakin ottelussa ratkaistaan voittaja, tasapeliä ei tule)

94.5. Meirän-päivien nelihenkisen toimikunnan jäsenet valitaan arvalla kuuden naisen ja viiden miehen joukosta. Millä todennäköisyydellä toimikuntaan tulee naisenemmistö?

94.6. Meirän-päivien vierailevien esiintyjien matkakulujen peittämiseski järjestettiin arpajaiset, joissa on myynnissä 1000 arpaa, joista kymmenellä voittaa 150 mk ja kahdellakymmenellä 100 mk. Yhden arvan hinta on 5 mk. Laske odotusarvo sille summalle, jonka kahden arvan ostaja jää voitolle tai tappiolle.

94.7. Kaustisen koulubussin tuloaikaa koululle kuvaa tiheysfunktio f(x) = 0,0032(x + 20), missä x on tuloaika laskettuna koulun alkamisajasta ja välillä -20 < x < 5. Negatiivinen x tarkoittaa, että bussi on etuajassa ja positiivinen x , että bussi myöhästyy. Millä todennäköisyydellä kaustislaiset oppilaat ennättävät Meirän-päivien juhlallisiin avajaisiin?

94.8. Koulu-päivien matematiikkaryhmä päättää tutkia kokeellisesti funktion f(x) = (m - x)(x - n) suurinta arvoa arpomalla luvut m ja n nopalla. Millä todennäköisyydellä suurin arvo on ainakin 1?

94.10. Erään 5-jäsenisen toimikunnan jäsenten kouluuntuloaika jakautunut normaalisti siten, että keskimääräinen tuloaika on klo 9.30 ja keskihajonta 20 minuuttia. Millä todennäköisyydellä a) yksittäinen jäsen b) ainakin yksi jäsen on koulussa jo klo 9.00?

1. a) $\binom{16}{2}$ = **120** b) Kierroksia = $\frac{120}{8}$ = **15** c) aika = 15 · 10 min = 150 min = **2½ h**
3. P(pelataan 5 ottelua) = P(4:stä toiselle 2 voittoa) = $\binom{4}{2} \cdot (½)^2 \cdot (½)^2 = \frac{6}{16} = \mathbf{\frac{3}{8}}$
5. n = $\binom{11}{4}$ = 330 ; k = 6:sta 3 naista ja 5:stä 1 mies tai 6:sta 4 naista = $\binom{6}{3} \cdot \binom{5}{1} + \binom{6}{4}$ = 115 P(A) = $\frac{115}{330} = \mathbf{\frac{23}{66}}$ = **0.35**
6. x - 10 90 140 190 240 290 p 0,9409 0,0388 0,0194 0,00038 0,0004 0,00009 P(-10) = $\frac{970}{1000} \cdot \frac{969}{999}$ = 0,9409 ; P(90) = $\frac{970}{1000} \cdot \frac{20}{999} \cdot 2$ = 0,0388 ,… E$\underline{x}$ = 0,9409·(-10) + 0,0388·90 + 0,0194·140 + 0,00038·190 + 0,0004·240 + 0,00009·290 = **- 3 mk**
7. Tiheysfunktion kuvaaja on pisteiden (-20,0) ja (5;0,08) välinen jana P(ajoissa) = P(-20 < $\underline{x}$ < 0) = Ala = ½·(0,0032·20)·20 = **0,64**
8. f(x) = mx - mn - x^2 + nx = - x^2 + (m + n)x - mn , jonka kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jonka suurin arvo saadaan paraabelin huipussa. f ' (x) = - 2x + (m + n) ; f ' = 0 ; x = ½(m + n) f(½(m + n)) = (m - ½(m + n))(½(m + n) - n) = ¼$(m - n)^2$ Tehdään 6 x 6 taulukko, johon lasketaan ¼$(m - n)^2$ arvot. Niistä on > 1 20 kpl. P(A) = $\frac{20}{36} = \mathbf{\frac{5}{9}}$
10. Kouluuntuloaika $\underline{x}$ on jak. N(9½ , 1/3) ; $\underline{z} = \frac{x - 9½}{1/3}$ on jak. N(0,1) ; P($\underline{x}$ < 9) = P($\underline{z} < \frac{9 - 9½}{1/3}$) = P($\underline{z}$ < - 1½) = F(-1½) = 1 - F(1½) = 1 - 0,9332 = **0,0668** b) P(ain. 1 ajoissa) = 1 - P(ei kukaan ajoissa) = 1 - P(1. ei ja 2. ei ja ...) = 1 - $0,9332^5$ = **0,2923**

95.1.3. Pikku-Kallen kodin olohuone on 5 m pitkä, 4 m leveä ja 2,5 m korkea. Huoneessa on kaksi 120 cm x 150 cm kokoista ikkunaa, seinällä on peili 50 cm x 100 cm ja kolme akvarellia, joiden koot ovat 60 cm x 40 cm , 80 cm x 100 cm ja 120 cm x 100 cm. Suutuksissaan Kalle heitti painavan leikkiauton umpimähkään seinälle. Millä todennäköisyydellä ei tullut lasivahinkoa?

95.1.4. Eräässä CD-ROM-levyjen valmistuserässä on 0,5% virheellisiä. Kauppaan tulee 50 levyn erä. Millä todennäköisyydellä siinä on a) 3 viallista b) korkeintaan 1 viallinen levy?

95.1.5. Funktion f(x) = $ax^3 + 3x^2 + bx$ kertoimet a ja b arvotaan säännöllisen tetraedrin (tahkoissa luvut 1, 2, 3 ja 4) avulla siten, että tuloksena on luku, joka jää peittoon. Millä todennäköisyydellä funktio on aidosti kasvava (derivaatalla korkeintaan 1 nollakohta)?

95.1.7. Suomalaisista perheistä 35% omistaa lemmikkieläiminään koiria, 10% kissoja ja 2% molempia. a) Kuinka monella % perheistä ei ole kissoja eikä koiria? b) Kuinka monella % kissoja tai koiria omistavista perheistä on vain kissoja?

95.1.8. Pääsiäismunien sisällä on yhtä todennäköisesti joku hahmoista Aku, Iines, Tupu, Hupu tai Lupu. Ostetaan umpimähkään kolme munaa. Millä todennäköisyydellä a) kaikki hahmot ovat erilaisia b) saadaan Tupu, Hupu ja Lupu c) saadaan ainakin yksi Aku?

95.1.9. Kukkarossa on yksi 10 mk, kaksi 5 mk ja kolme 1 mk kolikkoa. Kukkarosta otetaan umpimähkään kolme kolikkoa. Laske saadun rahasumman jakauma ja odotusarvo.

95.1.10. Keväällä 1990 laajan matematiikan yo-kokeessa L:n raja oli 44 p ja A:n 14 p. Mikä oli pistemäärien keskiarvo ja keskihajonta jakauman ollessa normaali, kun L:iä oli 16,6% ja reputtaneita 4,0%. Kevään 1996 yo-tutkinnossa tulee uusi arvosana M:n ja L:n väliin. Mikä olisi ollut L:n raja keväällä 1990, jos L:iä olisi annettu 5%?

3. Koko seinien ala = (5+4+5+4) · 2,5 = 45 (m^2) Lasinen ala = 2 · 1,2 · 1,5 + 0,5 · 1 + 0,6 · 0,4 + 0,8 · 1 + 1,2 · 1 = 6,34 (m^2) P(ei osu lasiin) =1 - $\frac{\text{lasiala}}{\text{koko ala}} = 1 - \frac{6,34}{45}$ = 1 - 0,14 = **0,86**

4.a) P(50:stä on 3 viallista) = $50C3 \cdot 0{,}005^3 \cdot 0{,}995^{47}$ = **0,0019**

b) P(kork 1 viall.) = P(50:stä 1 tai 0 viall.) = $50C1 \cdot 0{,}005^1 \cdot 0{,}995^{49} + 50C0 \cdot 0{,}005^0 \cdot 0{,}995^{50}$ = **0,97**

5. $f(x) = ax^3 + 3x^2 + bx$; $f\,'(x) = 3ax^2 + 6x + b$

kork 1 nk. jos $D \le 0$; $36 - 12ab \le 0$; $ab \ge 3$

Suotuisia 16 - 3 = 13. Kaikkiaan 16

P(Kasvava) = $\mathbf{\frac{13}{16}}$

b					
4	4	8	12	16	taulukon luvut a · b
3	3	6	9	12	
2	2	4	6	8	
1	1	2	3	4	
	1	2	3	4	a

7. Koiria 35%, Koiria ja kissoja 2% , Yksistään koiria 33% ; Kissoja 10%, yksistään kissoja 8%

a) Yks. koiria + yks. kissoja + molempia = 33% + 8% + 2% = 43**%** . Ei kumpaakaan = 100% - 43% = **57%**

b) $8 = \frac{x}{100} \cdot 43$; $43x = 800$; x = **18,6%**

8. a) P(eril.) = P(1.jotain JA muu JA vielä muu) = $1 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$ = **0,48**

b) P(Tupu JA Lupu JA Hupu jossakin järjestyksessä) = $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot 3! = \frac{6}{125}$ = **0,048**

c) P(ain. 1 Aku) = 1 - P(ei Akua) = 1 - P(ei JA ei JA ei) = $1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = 1 - \frac{64}{125} = \frac{61}{125}$ = **0,488**

9. $P(\underline{x} = 3) = \frac{3C3}{6C3} = \frac{1}{20}$; $P(\underline{x} = 7) = \frac{2C1 \cdot 3C2}{6C3} = \frac{6}{20}$; $P(\underline{x} = 11) = \frac{2C2 \cdot 3C1}{6C3} = \frac{3}{20}$

$P(\underline{x} = 12) = \frac{1C1 \cdot 3C2}{6C3} = \frac{3}{20}$; $P(\underline{x} = 16) = \frac{1C1 \cdot 2C1 \cdot 3C1}{6C3} = \frac{6}{20}$; $P(\underline{x} = 20) = \frac{1C1 \cdot 2C2}{6C3} = \frac{1}{20}$

x	**3**	**7**	**11**	**12**	**16**	**20**
p	**0,05**	**0,30**	**0,15**	**0,15**	**0,30**	**0,05**

$E\underline{x} = 0{,}05 \cdot 3 + 0{,}30 \cdot 7 + 0{,}15 \cdot 11 + 0{,}15 \cdot 12 + 0{,}30 \cdot 16 + 0{,}05 \cdot 20$ = **11,5**

10. Olkoon keskiarvo = k ja keskihajonta = s , $\underline{x} \sim N(k,s)$ $\underline{z} = \frac{\underline{x} - k}{s} \sim N(0,1)$

$\begin{cases} P(\underline{x} > 44) = 0{,}166 \\ P(\underline{x} < 14) = 0{,}04 \end{cases}$; $\begin{cases} P(\underline{z} > (44 - k)/s) = 0{,}166 \\ P(\underline{z} < (14 - k)/s) = 0{,}04 \end{cases}$; $\begin{cases} 1 - \Phi((44 - k)/s) = 0{,}166 \\ \Phi((14 - k)/s) = 0{,}04 \end{cases}$; $\begin{cases} \Phi((44 - k)/s) = 0{,}834 \\ \Phi((k - 14)/s) = 0{,}96 \end{cases}$;

$\begin{cases} (44 - k)/s = 0{,}97 \\ (k - 14)/s = 1{,}75 \end{cases}$; $\begin{cases} 44 - k = 0{,}97s \\ k - 14 = 1{,}75\,s \end{cases}$; $30 = 2{,}72s$; **s = 11,0** ; k **=** $14 + 1{,}75 \cdot 11{,}0$ = **33,3**

$P(\underline{x} > r) = 0{,}05$; $P(\underline{z} > \frac{r - 33{,}3}{11{,}0}) = 0{,}05$; $1 - \Phi(\frac{r - 33{,}3}{11}) = 0{,}05$; $\Phi(\frac{r - 33{,}3}{11{,}0}) = 0{,}95$; $\frac{r - 33{,}3}{11{,}0} = 1{,}645$

$r - 33{,}3 = 18{,}1$; $r = 51{,}4$; V: **51 pistettä**

97.1.1. Luokalla on 7 poikaa ja 18 tyttöä. Montako erilaista toimikuntaa heistä voidaan valita, jos siihen tulee a) huvimestari, - sihteeri ja - jäsen b) samat kuin edellä, muutta sihteerin tulee olla tyttö c) kolme jäsentä?

97.1.2. Määritä x niin, että lukujen 19, 11, x, 13 ja 21 keskiarvo on 17. Mikä on silloin lukujen mediaani, tyyppiarvo ja keskihajonta?

97.1.3. Pankin palvelussa on kaksi virkailijaa. He ovat kumpikin palvelemassa asiakkaita 51 minuuttia tunnista ja yhtaikaa 47 minuuttia. Pankkiin saapuu kaksi asiakasta. Millä todennäköisyydellä kummankaan ei tarvitse jonottaa?

97.1.4. Heitetään kerran valkoista ja mustaa noppaa. Millä todennäköisyydellä valkoisen nopan tulos on ykköstä suurempi ja mustan kuutosta pienempi, mutta pistelukujen summa on kuitenkin suurempi kuin 6?

97.1.5. Seudun koivuista on 35% hieskoivuja, loput rauduskoivuja. Saunavihdan tekijä tekee vihtansa umpimähkään valitusta koivusta. Millä todennäköisyydellä viidestä vihdasta on ainakin 3 rauduskoivusta?

97.1.6. Eräällä Tyynen Valtameren saarella on päivän sateen todennäköisyys 0,6, jos edellisenä päivänä satoi ja 0,2, jos edellisenä päivänä oli pouta. Mikä on todennäköisyys sille, että ylihuomenna ei sada, jos eilen satoi?

97.1.7. Arvonnassa on voiton arvo 50 mk ja arvan hinta 5 mk. Voiton todennäköisyys on 5 %. Ostetaan kaksi arpaa. Mikä on nettotuloksen jakauma ja odotusarvo?

97.1.8. Koirarodun säkäkorkeus $\underline{x}$ on jakautunut normaalisti siten, että keskiarvo on 57 cm ja keskihajonta 2,5 cm. Millä todennäköisyydellä rodun satunnaisen edustajan säkäkorkeus on välillä 55 cm < $\underline{x}$ < 60 cm?

97.1.9. Vappupallomyyjällä on jäljellä 3 sinistä, 4 punaista ja 5 hopeanväristä palloa. Millä todennäköisyydellä umpimähkään valitusta 3 pallosta on tasan kahta eri väriä?

97.1.10. Jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio on $f(x) = \begin{cases} a, \text{ kun } -1 < x < 0 \\ 2a, \text{ kun } 0 < x < 2 \end{cases}$. Määritä vakio a. Muodosta jakauman kertymäfunktio F(x). Määritä luku m, jolle $P(\underline{x} < m) = ½$

1. a) 25 · 24 ·23 = 13 800 b) 18 · 24 · 23 = 9936 c) 25C3 = 2300
2. (19 + 11 + x + 13 + 21) / 5 = 17 || · 5 ; 64 + x = 85 ; x = 21 Luvut ovat järjestyksessä 11, 13, 19, 21, 21 , jolloin mediaani on 19 ja tyyppiarvo on 21 Keskihajonta saadaan vaikka laskimella 4,20
3. P(A työssä TAI B työssä) = P(A) + P(B) - P(A JA B) = $\frac{51}{60} + \frac{51}{60} - \frac{47}{60} = \frac{55}{60}$ P(ei jonotusta) = P(kumpikin vapaa) = 1 - P(A tai B työssä) = 1 - $\frac{55}{60} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$
4. Suotuisia ruutuja 6 x 6 ruudukossa (2,5), (3,5), (3,4), (4,5), (4,4), (4,3), (5,5), (5,4), (5,3), (5,2), (6,5), (6,4), (6,3), (6,2) ja (6,1). Siis k = 15, n = 36 P(A) = $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$
5. P(ain. 3 rauduskoivuvihtaa 5:stä) = 5C3 · $0{,}65^3 \cdot 0{,}35^2$ + 5C4 · $0{,}65^4 \cdot 0{,}35^1$ + 5C5 · $0{,}65^5 \cdot 0{,}35^0$ = 0,76
6. Oksamallin mukaan tai esim. P(ylihuomenna sataa) = P(SSE tai SEE tai ESE tai EEE) = 0,6·0,6·0,4 + 0,6·0,4·0,8 + 0,4·0,2·0,4 + 0,4·0,8·0,8 = 0,624
7. P(2 voittoa) = P(V JA V) = 0,05·0,05 = 0,0025 P(1 V) = P(V JA E TAI E JA V) = 0,05·0,95 + 0,95·0,05 = 0,0950 P(0V) = P(E JA E) = 0,95·0,95 = 0,9025 $E\underline{x}$ = 0,0025·90 mk + 0,0950·40 mk + 0,9025·(-10 mk) = - 5 mk.
8. x ~ N(57;2,5) $\underline{z} = \frac{x - 57}{2{,}5}$ ~ N(0,1) $P(54{,}5 < \underline{x} < 60{,}5) = P(\frac{54{,}5 - 57}{2{,}5} < \underline{z} < \frac{60{,}5 - 57}{2{,}5}) = P(-1 < \underline{z} < 1{,}4)$ $= \Phi(1{,}4) - \Phi(-1) = 0{,}9192 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}7605 \approx 76\%$
9. n = monellako tapaa voidaan 12 pallosta valita 3 palloa = 12C3 = 220 k = 2S1P tai 2S1H tai 2P1S tai 2P1H tai 2H1S tai 2H1P = 3C2·4C1 + 3C2·5C1 + 4C2·3C1 + 4C2·5C1 + 5C2·3C1 + 5C2·4C1 = 3·4 + 3·5 + 6·3 + 6·5 + 10·3 + 10·4 = 145 P(2 väriä) = $\frac{145}{220} = \frac{29}{44}$
10. a > 0. F on 2 palassa jatkuva. A = 1 ; a·1 + 2a ·2 = 1 ; 5a = 1 ; a = 0,2 $F(x) = \begin{cases} ax + C, \text{ kun } -1 < x < 0 \\ 2ax + D, \text{ kun } 0 < x < 2 \end{cases}$ F(-1) = 0 ; -a + C = 0 ; C = a ; F(0-) = F(0+) ; C = D $F(x) = \begin{cases} 0{,}2x + 0{,}2, \text{ kun } -1 < x < 0 \\ 0{,}4x + 0{,}2, \text{ kun } 0 < x < 2 \end{cases}$ P(x < m) = ½ ; F(m) = ½ ; 0,4m + 0,2 = 0,5 ; 0,4m = 0,3 ; m = 0,75

98.1.1. Ratkaise positiivinen kokonaisluku x yhtälöstä $\binom{x}{2} = 136$.

98.1.2. Satunnaismuuttuja $\underline{x}$ ~ N(3,2). Laske $P(\underline{x} < 3{,}5)$ ja $P(\underline{x} > 4{,}5)$.

98.1.3. Monistuspaperin neliömetrimassan (g/m^2) tarkkailemiseksi otettiin paperilaboratoriossa satunnaisesti 20 näytettä ja mitattiin jokaisen neliömetrimassa. Tulokset olivat seuraavat:

80,6	80,3	79,6	79,5	79,3	79,4	80,8	80,1	79,6	80,3
80,6	80,1	79,1	80,0	80,4	79,7	80,3	80,8	79,7	80,2

Määritä mittausaineiston a) keskiarvo b) vaihteluväli c) otoskeskihajonta.

98.1.4. Kuoroon kuuluu 6 poikaa ja 6 tyttöä. Kuinka monella eri tavalla kuorolaiset voidaan järjestää näyttämölle a) yhteen riviin kasvot yleisöön päin, tytöt ja pojat vuorotellen b) kahteen riviin kasvot yleisöön päin, tytöt eteen ja pojat heidän taakseen?

98.1.5. Ryhmästä, jossa on 6 tyttöä ja 4 poikaa, valitaan arvalla työryhmä hoitamaan kirjatilauksia. Millä todennäköisyydellä ryhmään tulee kaksi tyttöä, jos ryhmään valitaan kaikkiaan a) 2 b) neljä oppilasta?

98.1.6. Eräässä hedelmäpelissä on kolme rinnakkaista pyöreää kiekkoa, joihin on maalattu hedelmien kuvia. Kun laitteeseen syötetään viiden markan kolikko, kiekot alkavat pyöriä ja pysähtyvät toisistaan riippumatta, jolloin kiekosta nähdään yksi hedelmän kuva. Kiekot näyttävät päärynän todennäköisyyksin 0,4; 0,2 ja 0,1. Yhdestä päärynästä kone antaa 5 markkaa, kahdesta 10 markkaa ja kolmesta 50 markkaa. Laske voiton odotusarvo yhdessä pelissä.

98.1.7. Arvoilla x > 0 määritellyn satunnaisfunktion tiheysfunktio on $f(x) = ae^{-ax}$ (a>0). a) Osoita, että funktio $F(x) = 1 - e^{-ax}$ on kyseisen satunnaismuuttujan kertymäfunktio. b) Erään lintulajin keskuudessa linnun elinikä vuosina on jakautunut likimäärin äskeisten funktioiden määräämällä tavalla, kun a = 0,8. Kuinka moni lintu 150 linnun joukosta elää tämän mallin mukaan vähintään kolmivuotiaaksi?

98.1.8. Neliön sivun pituus on 1 m. Neliön sisältä valitaan satunnaisesti piste. Mikä on todennäköisyys, että pisteen etäisyys lähimmästä sivusta on a) vähemmän kuin 10 cm b) vähemmän kuin x cm ($0 < x \le 0{,}5$ m)

98.1.9. Raveissa on 5 lähtöä, joiden voittajan Ville arvaa todennäköisyydellä 0,2 ja toiset 5 lähtöä, joiden voittaja on varma todennäköisyydellä 0,4. Ville lyö vetoa joka lähdössä ja laskee ettei tule tappiota, jos hän arvaa vähintään kolmen lähdön voittajan. Millä todennäköisyydellä Ville pääsee vedonlyönneissään vähintään omilleen?

98.1.10. Erään kanarodun tuottamista munista on yli 69 gramman painoisia 12,3% ja alle 52 gramman painoisia 1,7%. Oletetaan, että kyseisten kananmunien paino on normaalisti jakautunut. Määritä jakauman odotusarvo ja keskihajonta.

1. $\binom{x}{2} = 136$; $\frac{x!}{2!\,(x-2)!} = 136$; $\frac{x(x-1)}{2} = 136$; $x^2 - x - 272 = 0$; $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 1088}}{2} = \frac{1 \pm 33}{2}$
x = 17 (tai x = -16)

2. $\underline{x} \sim N(3,2)$; $\underline{z} = \frac{x - 3}{2} \sim N(0,1)$ a) $P(\underline{x} < 3{,}5) = P(\underline{z} < \frac{3{,}5 - 3}{2}) = P(\underline{z} < ¼) = \Phi(0{,}25) = 0{,}60$
b) $P(\underline{x} > 4{,}5) = P(\underline{z} > \frac{4{,}5 - 3}{2}) = P(\underline{z} > 0{,}75) = 1 - \Phi(0{,}75) = 1 - 0{,}77 = 0{,}23$

3. Laskimella a) $\overline{x} = 80{,}0$ (g/m^2) ja c) 0,51 (g/m^2) b) Vaihteluväli = 80,8 - 79,1 = 1,7 (g/m^2)

4. a) n(PTPT…tai TPTP…) = 2·6·6·5·5·… = 2·6!·6! = 1 036 800 b) P(TTTTTT ja PPPPPP) = 6!·6! = 518 400

5. a) P(2 T) = $\frac{6C2}{10C2} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ b) P(2T ja 2P) = $\frac{6C2 \cdot 4C2}{10C4} = \frac{15 \cdot 6}{210} = \frac{3}{7}$

6. $\underline{x}$ = voitto yhdessä pelissä. Mahdolliset arvot ovat 45 mk, 5 mk, 0 mk ja -5 mk
$P(\underline{x} = 45)$ = P(PPP) = 0,4·0,2·0,1 = 0,008
$P(\underline{x} = 5)$ = P(PPM tai PMP tai MPP) = 0,4·0,2·0,9 + 0,4·0,8·0,1 + 0,6·0,2·0,1 = 0,116
$P(\underline{x} = 0)$ = P(PMM tai MPM tai MMP) = 0,4·0,8·0,9 + 0,6·0,2·0,9 + 0,6·0,8·0,1 = 0,444
$P(\underline{x} = -5)$ = P(MMM) = 0,6·0,8·0,9 = 0,432
$E\underline{x} = \Sigma px$ = 0,008·45 + 0,116·5 + 0,444·0 + 0,432·(-5) = -1,22 (mk) V: Tappioa 1,22 mk

7. a) $F(x) = \int_0^x ae^{-at}dt = \left[-e^{-at}\right]_0^x = -e^{-ax} - (-e^0) = 1 - e^{-ax}$ Olkoon $\underline{x}$ = yhden linnun ikä vuosissa
b) $P(x>3) = 1 - F(3) = 1 - (1 - e^{-0{,}8\cdot 3}) = 0{,}091$. Elossa 3-vuotiaita 150·0,091 = 14

8. Neliön ala = 1. a) Suotuisa ala = 0,1 m leveän ”kehyksen” ala = koko ala - sisäneliön ala = 1 - 0,8·0,8 = 0,36 ; P(A) = 0,36 / 1 = 0,36
b) Suotuisa ala = $1 - (1 - 2x)^2 = 1 - 1 + 4x - 4x^2 = 4x - 4x^2$; $P(B) = (4x - 4x^2) / 1 = 4x - 4x^2$

9. Vaikeissa lähdöissä voitto-osumien lukumäärien todennäköisyydet ovat binomitodennäköisyyksiä P(5:stä k voittajaa osuus) = $5Ck \cdot 0{,}2^k \cdot 0{,}8^{5-k}$ (arvot saa vaikka taulukosta)
Esim. P(5 Vaikeasta 2 voittoa) = 5C2· 0,22·0,83 = 0,2048, V = vaikeat , H = helpot.
P(ainakin 3 voittoa) = 1 - P(korkeintaan 2 voittoa)
= 1 - P(0 V ja 0 H tai 1V ja 0H tai 0V ja 1H tai 2V ja 0H tai 1V ja 1 H tai 0V ja 2H)
= 1 - (0,3277·0,0778 + 0,4096·0,0778 + 0,3277·0,2592 + 0,2048·0,0778 + 0,4096·0,2592 + 0,3277·0,3456) = 1 - 0,378 = 0,622

10. kananmunien massa = $\underline{x} \sim N(m,h)$; $\underline{z} = \frac{x - m}{h} \sim N(0,1)$
$P(x > 69) = 0{,}123 \Leftrightarrow P(z > \frac{69 - m}{h}) = 0{,}123 \Leftrightarrow 1 - \Phi(\frac{69 - m}{h}) = 0{,}123$; $\Phi(\frac{69 - m}{h}) = 0{,}877 \Leftrightarrow \frac{69 - m}{h} = 1{,}16$
$\Leftrightarrow m + 1{,}16h = 69$
$P(x < 52) = 0{,}017 \Leftrightarrow P(z < \frac{52 - m}{h}) = 0{,}017 \Leftrightarrow \Phi(\frac{52 - m}{h}) = 0{,}017 \Leftrightarrow \Phi(-\frac{52 - m}{h}) = 0{,}983 \Leftrightarrow \frac{m - 52}{h} = 2{,}12$
$\Leftrightarrow m - 2{,}12h = 52$ $\begin{cases} m + 1{,}16h = 69 \\ m - 2{,}12h = 52 \end{cases}$; 3,28h = 17 ; h = 5,2
m = 52 + 2,12·5,2 = 63,0 V: keskiarvo on 63 g ja keskihajonta 5,2 g

98.2.1. Eräässä viikkoennusteessa ilmoitettiin sateen todennäköisyydeksi lauantaina 40% ja sunnuntaina 30%. Millä todennäköisyydellä kyseisenä viikonloppuna ainakin toinen päivä sateeton?

98.2.2. Kaksinumeroinen luonnollinen luku arvotaan noppaa heittämällä niin, että ensimmäinen heitto antaa kymmenten ja toinen heitto ykkösten numeron. Millä todennäköisyydellä näin saatu luku on a) suurempi kun 60 b) suurempi kuin 30 ja parillinen?

98.2.3. Jatkuva satunnaismuuttuja on tasaisesti jakautunut välille [1,7]. Määritä sen tiheysfunktio, kertymäfunktio, odotusarvo ja keskihajonta sekä $P(\underline{x} \leq 5)$.

98.2.4. Kolmea arpanoppaa heitetään yhtä aikaa. Millä todennäköisyydellä a) kaikilla saadaan kuutonen, b) saadaan tarkalleen kaksi kuutosta?

98.2.5. Tehtaassa valmistetaan tuotetta, jonka massa on normaalisti jakautunut parametrein $\mu = 18{,}5$ kg ja $\sigma = 1{,}5$ kg. Millä todennäköisyydellä tehtaan tuotannosta satunnaisesti valittu tuote painaa a) yli 21,5 kg, b) väliltä 18,0 - 19,0 kg?

98.2.6. Liikenneseurannassa mitattiin ajonopeuksia ja saatiin seuraava taulukko

nopeus (km/h)	80 - 84	85-89	90-94	95-99	100-104
f	35	72	145	184	78

a) Piirrä nopeusjakaumasta diagrammi valitsemalla mielestäsi sopivin kuviotyyppi.
b) Mikä on nopeuksien mediaani ja ilmoita moodiluokka?
c) Laske nopeuksien keskiarvo ja keskihajonta

98.2.7. Kahdessa perheessä on kummassakin neljä lasta. Millä todennäköisyydellä kummassakin perheessä on yhtä monta tyttöä?

98.2.8. Juha ja Riikka poimivat omenoita, kumpikin omaan samanlaiseen koriinsa: Juha 3 punaista ja 7 valkoista, Riikka 4 punaista ja 6 valkoista. Korit vietiin kellariin, josta Juha illan pimetessä haparoi käteensä yhden omenan. a) Millä todennäköisyydellä Juha sai punaisen omenan? b) Valoisaan tultuaan Juha huomasi omenan olevan punainen. Millä todennäköisyydellä se oli peräisin hänen omasta koristaan?

98.2.9. Tehtaassa valettujen betonilevyjen paksuus noudattaa normaalijakaumaa niin, että odotusarvo on 10,0 cm. Levyistä joudutaan hylkäämään 3% siksi, että niiden paksuus poikkeaa odotusarvosta enemmän kuin 5 mm. Mikä oli levyjen paksuuden keskihajonta?

98.2.10. Erään jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ kertymäfunktio on $F(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$, kun $x \geq 1$. Muodosta satunnaismuuttujan x tiheysfunktio ja piirrä sen kuvaaja. Mikä on todennäköisyys, että satunnaismuuttujan $\underline{x}$ arvo on vähintään 3?

1. P(ainakin 1 sateeton) = 1 - P(molempina sataa) = 1 - 0,4·0,3 = 1 - 0,12 = 0,88

2. a) P(arvo > 60) = P(1. = 6 ja 2. = mikä vaan) = 1/6 · 1 = 1/6
b) P(arvo > 30 ja parillinen) = P(1. ≥ 3 ja 2. on parillinen) = 4/6 · 3/6 = 1/3

3. $f(x) = \frac{1}{7 - 1} = \frac{1}{6}$; $F(x) = \frac{1}{6} \cdot x + C$; $F(1) = 0$; $\frac{1}{6} + C = 0$; $C = -\frac{1}{6}$; $F(x) = \frac{1}{6}(x - 1)$

$$E\underline{x} = \int_1^7 \frac{1}{6} x\,dx = \left[\frac{1}{12}x^2\right]_1^7 = \frac{1}{12}(49 - 1) = 4$$

$$D^2\underline{x} = \int_1^7 \frac{1}{6}(x-4)^2\,dx = \left[\frac{1}{18}(x-4)^2\right]_1^7 = \frac{1}{18}(27 + 27) = 3 \text{ ; } D\underline{x} = \sqrt{3} \text{ ; } P(\underline{x} \leq 5) = F(5) = \frac{1}{6}(5 - 1) = \frac{2}{3}$$

4. a) P(6 ja 6 ja 6) = 1/6 · 1/6 · 1/6 = 1/216 b) P(täsm. 2 kpl 6) =
P(6 ja 6 ja muu tai 6 ja muu ja 6 tai muu ja 6 ja 6) = 1/6 · 1/6 · 5/6 · 3 = 5/72

5. $\underline{x} \sim N(18{,}5 ; 1{,}5)$; $\underline{z} = \frac{x - 18{,}5}{1{,}5} \sim N(0,1)$

$P(\underline{x} > 21{,}5) = P(\underline{z} > \frac{21{,}5 - 18{,}5}{1{,}5}) = P(\underline{z} > 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

$P(18 < \underline{x} < 19) = P(\frac{18 - 18{,}5}{1{,}5} < \underline{z} < \frac{19 - 18{,}5}{1{,}5}) = P(-0{,}33 < \underline{z} < 0{,}33) = \Phi(0{,}33) - \Phi(-0{,}33)$
$= \Phi(0{,}33) - [1 - \Phi(0{,}33)] = 2\Phi(0{,}33) - 1 = 2 \cdot 0{,}6293 - 1 = 0{,}2586$

6. a) piirrä histogrammi b) Md = 97 ja Mo = 95 - 99 c) x = 93,9 km/h ja $s_{n-1} = 5{,}54$ km/h

7. $P(0\ T) = 4C0 \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^4 = 0{,}0625 = P(4\ T)$; $P(1\ T) = 4C1 \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^3 = 0{,}25 = P(3\ T)$
$P(2\ T) = 4C2 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}375$
P(yhtä monta T) = P(0 ja 0 tai 1 ja 1 tai 2 ja 2 tai 3 ja 3 tai 4 ja 4) = P(0 ja 0) + P(1 ja 1) + P(2 ja 2) + P(3 ja 3) + P(4 ja 4) = $0{,}0625^2 + 0{,}25^2 + 0{,}375^2 + 0{,}25^2 + 0{,}0625^2 = 0{,}2586$

8. P(pun) = P(Juhan kori ja pun. tai Riikan kori ja pun.) = $0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}35$
$P(\text{Juhan kori} \mid \text{pun.}) = \frac{P(\text{Juhan kori ja pun.})}{P(\text{pun.})} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}3}{0{,}35} = \frac{3}{7}$

9. Paksuus $\underline{x} \sim N(10,s)$ $\underline{z} = \frac{x - 10}{s} \sim N(0,1)$
$P(|\underline{x} - 10| > 0{,}5) = 0{,}03$; $P(\underline{x} - 10 > 0{,}5) = 0{,}015$; $P(\underline{x} > 10{,}5) = 0{,}015$
$P(\underline{z} > \frac{10{,}5 - 10}{s}) = 0{,}015$; $1 - \Phi(\frac{0{,}5}{s}) = 0{,}015$; $\Phi(\frac{0{,}5}{s}) = 0{,}985$; $\frac{0{,}5}{s} = 2{,}17$; s = 0,23 (cm)

10. $F(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$, $x \geq 1$; $f(x) = F'(x) = \frac{1(x + 1) - 1(x - 1)}{(x + 1)^2} = \frac{2}{(x + 1)^2}$, $x \geq 1$; f(x) = 0, kun x < 1
$P(\underline{x} \geq 3) = 1 - P(\underline{x} < 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{3 - 1}{3 + 1} = ½$
f(x) : n kuvaaja on x-akselilla, kun x < 1 ja pisteestä (1,½) x-akselia lähestyvä käyrä

99.1.1. Matematiikan opiskelijoiden tenttiarvosanat olivat asteikolla 0 - 3 eräässä tentissä seuraavat:

Arvosana	0	1	2	3
Lukumäärä	20	50	20	30

Laadi taulukko, jossa ovat arvosanat, niiden frekvenssit, suhteelliset frekvenssit ja suhteelliset summafrekvenssit. Esitä frekvenssit histogrammina sekä määritä jakauman moodi, mediaani, keskiarvo ja keskihajonta.

99.1.2. Laatikossa on 6 punaista, 5 valkoista ja 4 sinistä palloa. Kuinka monta mahdollisuutta on valita näistä 4 palloa, joista a) 3 on punaista ja 1 on sininen b) 2 on punaista, 1 sininen ja 1 on valkoinen c) ainakin 1 on punainen ja täsmälleen 1 on valkoinen?

99.1.3. Pikku Villellä on ämpärissä 10 vihreää lehtisammakkoa ja 3 rupikonnaa. Hän antaa umpimähkään niistä kaksi parhaalle ystävälleen pikku Kallelle. Millä todennäköisyydellä kaikki rupikonnat jäävät Villelle?

99.1.4. Tavaratalon herrainosasto ilmoittaa lehdessä, että eräässä partavesierässä on ilmennyt valmistusvirhe, josta johtuen niillä vesillä ei olekaan haluttua iskutehoa. Tavaratalossa myydyistä partavesipakkauksista 5% oli virheellistä erää. Nuorukainen osti 3 pakkausta kyseistä partavettä. Millä todennäköisyydellä ainakin yksi pakkaus oli virheellistä erää?

99.1.5. Perheessä on kuusi lasta. Millä todennäköisyydellä poikia on enemmän kuin tyttöjä, kun pojan syntymisen todennäköisyys on 0,52?

99.1.6. Laatikossa on mustia ja punaisia palloja. Jos laatikosta poistetaan yksi punainen pallo, niin nostettaessa jäljelle jääneistä palloista yksi, saadaan punainen todennäköisyydellä 1/7. Jos taas laatikosta otetaan pois kaksi mustaa palloa, niin todennäköisyys saada yhdellä nostolla punainen pallo on 1/5. Määritä mustien ja punaisten pallojen lukumäärät.

99.1.7. Kolme kolikkoa heitetään kahdesti peräkkäin. Millä todennäköisyydellä kruunujen määrä on jälkimmäisellä kerralla a) sama b) suurempi kuin edellisellä kerralla?

99.1.8. Erään ruusulajikkeen keston leikkokukkana oletetaan noudattavan normaalijakaumaa, keskimääräisen keston ollessa 7 vuorokautta ja keskihajonnan 3 vuorokautta. Ville vie ihailemalleen Venlalle tätä lajiketta olevan ruusun. Mikä on todennäköisyys, että Venlan saama ruusu a) lurpsahtaa jo vuorokauden kuluessa b) on kukkea vielä 10 vuorokautta myöhemmin?

99.1.9. Jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio f on määritelty seuraavasti : $f(x) = 2|x| + k$, kun $|x| \leq k$, muualla f(x) = 0. Määritä positiivinen vakio k sekä kertymäfunktio.

99.1.10. Heitetään kahta noppaa. Tämän jälkeen saa huonomman silmäluvun omaavaa (jos silmäluvut ovat samoja, niin jompaakumpaa) noppaa heittää kerran. Mikä on näiden heittojen jälkeen suurimman esiintyneen silmäluvun jakauma ja odotusarvo?

1. Arvosana	0	1	2	3	
f	20	50	20	30	
f%	17	42	17	25	
Σf%	17	58	75	100	Mo = 1 , MD = 1, μ = 1,5 (laskimesta) ja σ = 1,04 (laskimesta)

2. a) 3 P ja 1 S = 6C3 · 4C1 = 20 · 4 = 80 b) 2 P ja 1 S ja 1 V = 6C2 · 4C1 · 5C1 = 15 · 4 · 5 = 300
c) ain. 1 P ja 1 V = 1 V ja (1 P ja 2 S tai 2 P ja 1 S tai 3 P) = 5C1 · (6C1 · 4C2 + 6C2 · 4C1 + 6C3)
= 5 · (6 · 6 + 15 · 4 + 20) = 5 · 116 = 580

3. P(rupikonnat Villelle) = P(Kallelle 2 lehtisammakkoa) = 10C2 : 13C2 = 45 : 78 = 15/26 ≈ 0,577

4. P(ain. 1 virh.) = 1 - P(ei yhtään virh.) = 1 - P(ei JA ei JA ei) = 1 - 0,95·0,95·0,95 = 1 - 0,857 = 0,143

5. P(poikia enemmän kuin tyttöjä) = P(6:sta 4 P tai 6:sta 5 P tai 6:sta 6 P)
$= 6C4 \cdot 0{,}52^4 \cdot 0{,}48^2 + 6C5 \cdot 0{,}52^5 \cdot 0{,}48^1 + 6C6 \cdot 0{,}52^6 \cdot 0{,}48^0 = 0{,}253 + 0{,}109 + 0{,}020 = 0{,}382$

6. Olkoon mustia palloja x kpl ja punaisia y kpl. Siis yhteensä x + y kpl

$\begin{cases} P(\text{pun, kun 1 punainen poissa}) = 1/7 \\ P(\text{pun, kun 2 mustaa poissa}) = 1/5 \end{cases}$; $\begin{cases} (y - 1)/(x + y - 1) = 1/7 \\ y/(x + y - 2) = 1/5 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y - 1 = 7y - 7 \\ x + y - 2 = 5y \end{cases}$; $\begin{cases} x - 6y = -6 \;\|\cdot(-1) \\ x - 4y = 2 \;\|\cdot 1 \end{cases}$

2y = 8 ; y = 4 ; x - 4·4 = 2 ; x = 18 V: Mustia oli 18 ja punaisia 4

7. Kolmen kolikon heitossa mahdollisuudet KKK, KKL, KLK, LKK, KLL, LKL, LLK ja LLL siis 8 kpl
P(0 K) = 1/8 , P(1 K) = 3/8 , P(2 K) = 3/8 ja P(3 K) = 1/8
a) P(sama määrä K) = P(0&0 tai 1&1 tai 2&2 tai 3&3) = 1/8·1/8 + 3/8·3/8 + 3/8·3/8 + 1/8·1/8 = 20/64 = 5/16
b) P(enemmän 2. kerralla) = P(0&123 tai 1&23 tai 2&3) = 1/8·7/8 + 3/8·4/8 + 3/8·1/8 = 22/64 = 11/32

8. $\underline{x}$ = ruusun kestoaika ~ N(7,3) . $\underline{z} = (\underline{x} - 7)/3$ ~ N(0,1)
a) $P(\underline{x} \le 1) = P(\underline{z} \le (1 - 7)/3) = P(\underline{z} \le -2) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0223$
b) $P(\underline{x} > 10) = P(\underline{z} > (10 - 7)/3) = P(\underline{z} > 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8416 = 0{,}1584$

9. 1° f(x) = 2|x| + k > 0, koska itseisarvo ≥ 0 ja k > 0. $f(x) = \begin{cases} -2x + k , & -k \le x < 0 \\ 2x + k, & 0 \le x \le k \end{cases}$

2° f on jatkuva, koska itseisarvofkt ja vakio jatkuvia jolloin niiden summakin on jatkuva

3° P(-k ≤ x ≤ k) = 1 ; P(0 ≤ x ≤ k) = ½ (symmetriasyistä)

$\int_0^k (2x + k)dx = \left[x^2 + kx \right]_0^k$ = ½ ; $k^2 + k^2$ = ½ ; $2k^2$ = ½ ; k^2 = ¼ ; k = ½

$F(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{1}{2}x + C , & -\frac{1}{2} \le x < 0 \\ x^2 + \frac{1}{2}x + D, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \end{cases}$ F(0) = ½ → C = D = ½ ; $F(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} , & -\frac{1}{2} \le x < 0 \\ x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \end{cases}$

10.

6	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	5	5	6
4	4	4	4	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6

Viereisestä taulukosta saadaan ensimmäisellä suuremman todennäköisyydet
P(1) = 1/36, P(2) = 3/36, P(3) = 5/36, P(4) = 7/36, P(5) = 9/36 ja P(6) = 11/36
Olkoon $\underline{x}$ = kahden heiton jälkeen suurin silmäluku
$P(\underline{x} = 1)$ = P(1 ja 1) = 1/36 · 1/6 = 1/216
$P(\underline{x} = 2)$ = P(2 ja ≤ 2 tai 1 ja 2) = 3/36 · 2/6 + 1/36 · 1/6 = 7/216
$P(\underline{x} = 3)$ = P(3 ja ≤ 3 tai ≤ 2 ja 3) = 5/36 · 3/6 + 4/36 · 1/6 = 19/216
$P(\underline{x} = 4)$ = P(4 ja ≤ 4 tai ≤ 3 ja 4) = 7/36 · 4/6 + 9/36 · 1/6 = 37/216
$P(\underline{x} = 5)$ = P(5 ja ≤ 5 tai ≤ 4 ja 5) = 9/36 · 5/6 + 16/36 · 1/6 = 61/216
P(x = 6) = P(6 ja ≤ 6 tai ≤ 5 ja 6) = 11/36 · 6/6 + 25/36 · 1/6 = 91/216

$E\underline{x} = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots$ = 1/216 ·1 + 7/216 · 2 + 19/216 · 3 + 37/216 · 4 + 61/216 · 5 + 91/216 · 6 = 4 23/24

99.2.1. Taulukossa on kahdentoista koehenkilön suoritusajat tehtävistä *x* ja *y*.

henkilöt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
tehtävä x	9	7	10	8	9	11	6	9	8	10	8	7
tehtävä y	15	11	17	11	14	16	9	13	12	15	13	12

Tutki, kumman tehtävän suorittaminen vie keskimäärin enemmän aikaa, ja laske molempien tehtävien suoritusaikojen keskihajonnat.

99.2.2. Korttipakasta vedetään kaksi korttia. Millä todennäköisyydellä a) molemmat ovat patoja, b) ainakin toinen on pata?

99.2.3. Paperiliuskalle on kirjoitettu sana MATEMATIIKKA. Kirjaimet leikataan erillisiksi lappusiksi, jotka pannaan hattuun ja sekoitetaan. Laput poimitaan yksitellen hatusta ja pannaan poimimisjärjestyksessä jonoon. Millä todennäköisyydellä niistä muodostuu jälleen sana MATEMATIIKKA?

99.2.4. Suuressa henkilöjoukossa on 70% tummatukkaisia ja 40 % ruskeasilmäisiä. Sekä tummatukkaisia että ruskeasilmäisiä on 30%. Millä todennäköisyydellä umpimähkään valittu henkilö a) on tummatukkainen tai ruskeasilmäinen, b) on ruskeasilmäinen mutta ei tummatukkainen, c) ei ole tummatukkainen eikä ruskeasilmäinen?

99.2.5. Ampuja osuu kymppiin keskimäärin joka viidennellä laukauksella. Hän ampuu kolme kertaa. Miten suuri mahdollisuus hänellä on saada a) tasan kaksi kymppiä, b) ainakin kaksi kymppiä?

99.2.6. Suoran y = kx + b kertoimet *k* ja *b* arvotaan nopalla. Millä todennäköisyydellä suora kulkee pisteen (2,10) kautta?

99.2.7. Eräällä tieosuudella on nopeusrajoitus 90 km/h. Autojen nopeuksien oletetaan noudattavan normaalijakaumaa, jonka keskiarvo on 85 km/h ja keskihajonta 5 km/h. Kuinka monta prosenttia autoilijoista ajoi korkeintaan 75 km/h nopeudella?

99.2.8. Eräässä de Meren suosimassa pelissä koko potin voitti kahdesta pelaajasta se, joka ensin sai viisi erävoittoa. Peli joudutaan keskeyttämään, kun pelaajalla A on neljä ja pelaajalla B kolme erävoittoa. Missä suhteessa on oikeudenmukaista jakaa potti, eli mikä on pelaajien A ja B voiton todennäköisyyksien suhde?

99.2.9. Arkipäivän liikenteessä noin kaksi autoilijaa tuhannesta ajaa alkoholin vaikutuksen alaisena. Kuinka monta autoilijaa poliisin pitää puhalluttaa, jotta todennäköisyys, että ainakin kaksi rattijuoppoa saadaan kiinni, on suurempi kuin 0,90 ?

99.2.10. Olkoon f(x) = e^{-x} arvoilla x > 0 ja f(x) = 0 muulloin. a) Osoita, että funktio *f* on tiheysfunktio. b) Määritä P(0 < $\underline{x}$ < 1) c) Määritä kertymäfunktio.

1. $\bar{x}$ = 8,50 ; s_{n-1} = 1,45 ; $\bar{y}$ = 13,2 ; s_{n-1} = 2,33 (laskimesta) V: x enemmän
2. a) P(molemmat patoja) = P(pata ja pata) = $\frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51} = \frac{3}{51} = \frac{1}{17} \approx 0{,}059$ b) P(ainakin toinen pata) = 1 - P(ei patoja) = 1 - P(ei p ja ei p) = $1 - \frac{39}{52}\cdot\frac{38}{51} = \frac{15}{34} \approx 0{,}44$
3. P(MATEMATIIKKA) = P(M)P(A)P(T)P(E)P(M)P(A)P(T)P(I)P(I)P(K)P(K)P(A) = $\frac{2}{12}\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{4\,989\,600}$
4. a) P(T tai R) = P(T) + P(R) - P(T ja R) = 70% + 40% - 30% = 80% b) P(T ja ei-R) = P(R) - P(R ja T) = 40% - 30% = 10% c) P(ei-T ja ei-R) = 1 - P(T tai R) = 1 - 0,8 = 0,2 = 20%
5. a) P(3:sta 2 kpl 10) = 3C2·$0{,}2^2$·0,8 = 0,096 b) P(3:sta ainakin 2 kpl 10) = P(2 tai 3 kpl 10) = 0,096 + 0,2·0,2·0,2 = 0,104
6. y = kx + b ; 10 = 2k + b, joka toteutuu vain, jos b = 2 ja k = 4 tai b = 4 ja k = 3 tai b = 6 ja k = 2. Suotuisia tapauksia on siis 3. Kaikkia tapauksia on 36 P(A) = $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
7. Nopeus $\underline{x}$ ~ N(85,5) , $\underline{z} = \frac{x - 85}{5}$ ~ N(0,1) ; P($\underline{x}$ ≤ 75) = P($\underline{z} \le \frac{75 - 85}{5}$) = P($\underline{z}$ ≤ -2) = Φ(-2) = 1 - Φ(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228 ≈ 2,3%
8. P(A voittaa) = P(A tai BA) = P(A) + P(B)P(A) = $\frac{4}{7} + \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7} = \frac{40}{49}$. Suhde = $\frac{40}{49} : \frac{9}{49}$ = 40 : 9
9. P(ainakin 2) > 0,9 ; 1 - P(0) - P(1) > 0,9 ; 1 - $0{,}998^n$ - nC1·$0{,}998^{n-1}$·0,002 > 0,9 $0{,}998^{n-1}$(0,998 + n·0,002) < 0,1, josta kokeilemalla eri n:n arvoja saadaan n = 1943 ; VP = 0,100066 ; n = 1944 ; VP = 0,999 . V : 1944 autoilijaa
10. a) f(x) = e^{-x} > 0, koska eksponenttifunktion arvot ovat positiivisia. f on myös jatkuva $\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-x}dx = \lim_{M\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^M = \lim_{M\to\infty}(-e^M + 1) = 1$ b) P(0 < x < 1) = $\int_0^1 e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1$ = - e^{-1} + 1 = 1 - $\frac{1}{e}$ ≈ 0,632 c) F(x) = $\int_0^x e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x$ = 1 - e^{-x}

00.1.1. Heitetään kahta noppaa. Millä todennäköisyydellä silmälukujen tulo on vähintään 10 ?

00.1.2. Erään tutkimuksen mukaan poutapäivän jälkeen sataa 45 prosentin todennäköisyydellä ja sadepäivän jälkeen on pouta 60 prosentin todennäköisyydellä. Millä todennäköisyydellä maanantaina sataa, kun lauantaina on pouta.

00.1.3. Oppilasryhmästä, jossa oli 9 poikaa ja 11 tyttöä, arvottiin 5 henkilön osaryhmä. Millä todennäköisyydellä ryhmään tuli 3 poikaa ja 2 tyttöä?

00.1.4. Heitettäessä rahaa kuusi kertaa saatiin kolme kruunaa. Millä todennäköisyydellä toisen kerran tuli kruuna neljännessä heitossa?

00.1.5. Jääkiekossa rangaistuslaukaus onnistuu 85 %:n todennäköisyydellä. Kuinka monta laukausta on ammuttava, että ainakin yksi laukaus onnistuu vähintään 99 %:n todennäköisyydellä?

00.1.6. Pöytä on peitetty ruudullisella liinalla, jonka neliömäisen ruudun sivu on 40 mm. Mikä on todennäköisyys, että pöydälle heitetty kymmenen markan kolikko, jonka halkaisija 27 mm, peittää jonkin neliön kärjen?

00.1.7. Herra Virtanen yritti varata lentolippua koneeseen, jossa oli 130 matkustajapaikkaa. Koska kaikki paikat olivat jo varatut, hän joutui jonotuslistalle. Millä todennäköisyydellä herra Virtanen saa lentolipun, kun hänen edellään jonotuslistalla oli kaksi henkilöä, ja tiedetään, että 98 % lipun varanneista lunastavat sen määräaikaan mennessä sekä jonotuslistalta lennolle pääsevät eivät peruuta saamaansa paikkaa?

1. Alkeistapauksia on 36 kpl, joista suotuisia 19 kpl,
jolloin P(tulo $\geq$ 10) = $\frac{19}{36}$ = 0,5277 = 0,53 :<u>*Vastaus:* 0,53</u>

6	6	12	18	24	30	36
5	5	10	15	20	25	30
4	4	8	12	16	20	24
3	3	6	9	12	15	18
2	2	4	6	8	10	12
1	1	2	3	4	5	6
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

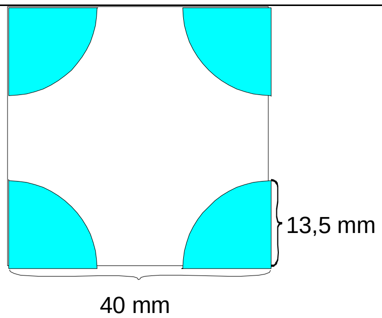
2. P(maanantaina sataa, kun lauantaina pouta) = P(su sa ja ma sa tai su po ja ma sa)
= P(su sa)P(ma sa) + P(su po)P(ma sa) = 0,45·0,4 + 0,55·0,45 = 0,4275 $\approx$ 0,43

3. n = 20 C 5 = 15 504
k = 9:sta 3 poikaa ja 11:sta 2 tyttöä = 9 C 3 · 11 C 2 = 84 · 55 = 4620
P(A) = 4620 / 15 504 = 0,298 $\approx$ 0,30

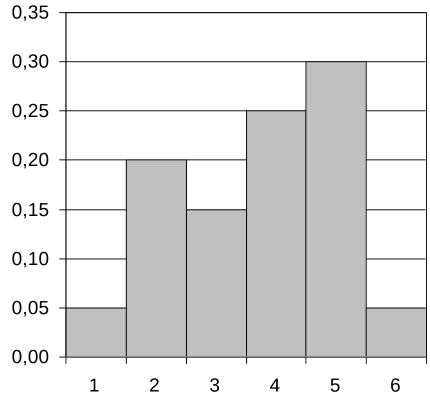
4. P(toinen kruuna neljännessä heitossa, kun kuudesta tuli kaikkiaan 3 kruunaa)
= P(3:sta 1 kruuna JA 4. on kruuna JA 2:sta viimeisestä 1 kruuna)
= 3 C 1 · $(½)^1$· $(½)^2$ · ½ · 2 C 1 · $(½)^1$ · $(½)^1$ = 3 / 32 = 0,09375 $\approx$ 0,094

5. P(ainakin yksi osuu) > 0,99 $\Leftrightarrow$ 1 - P(ei yhtään osu) > 0,99 $\Leftrightarrow$ P(ei yhtään osu) < 0,01
$\Leftrightarrow$ $0{,}15^n$ < 0,01 || lg ( ) ; lg $0{,}15^n$ < lg 0,01 ; n · lg 0,15 < lg 0,01 || : lg 0,15 ; n > 2,4
V: vähintään 3 rangaistuslaukausta

6. Kolikko peittää yhden ruudun kulmapisteen, jos kolikon keskipisteen etäisyys kulmapisteestä on pienempi kuin säde. Suotuisaa aluetta on sellaisella neljännesympyrällä, jonka keskipiste on nurkkapiste ja säde kolikon säde.
Suotuisa ala = 4 · ¼ π $(13{,}5)^2$ $\approx$ 572 (mm^2)
Koko ala = 40^2 = 1600 (mm^2)
P(kärki peittyy) = 572 / 1600 $\approx$ 0,36



7. P(Virtanen pääsee koneeseen) = P(ainakin 3 peruu lentonsa)
= 1 - P(2 tai 1 tai 0 peruu lentonsa) =
1 - P(130:stä 2 peruu) - P(130:stä 1 peruu) - P(130:stä kukaan ei peru)
$= 1 - 130\text{ C }2 \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{128} - 130\text{ C }1 \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^{129} - 0{,}98^{130}$
$= 1 - \frac{130!}{2! \cdot 128!} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{128} - \frac{130!}{1! \cdot 129!} \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^{129} - 0{,}98^{130}$
$= 1 - \frac{130 \cdot 129 \cdot 128!}{2 \cdot 1 \cdot 128!} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{128} - \frac{130 \cdot 129!}{1 \cdot 129!} \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^{129} - 0{,}98^{130}$
$= 1 - 65 \cdot 129 \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{128} - 130 \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^{129} - 0{,}98^{130}$
$\approx 0{,}48$



Kuva 1

Tuloluokka (mk/vuosi)	Osuus väestöstä	Kertymä
10 - 9 999	6,0 %	
10 000 - 19 999	4,2 %	
20 000 - 29 999	5,7 %	
30 000 - 39 999	9,3 %	
40 000 - 49 999	7,9 %	
50 000 - 59 999	7,5 %	
60 000 - 79 999	11,2 %	
80 000 - 99 999	10,3 %	
100 000 - 149 999	21,9 %	
150 000 - 199 999	9,0 %	
200 000 - 249 999	3,6 %	

Kuva2

00.2.1. Kuva 1 esittää erään satunnaismuuttujan jakaumaa. Laske odotusarvo.

00.2.2. Taulukko kuvassa 2 esittää suomalaisten ansiotulojakaumaa vuonna 1997. Piirrä jakauman kertymäfunktio ja arvioi sen perusteella jakauman mediaani.

00.2.3. Noppaa heitetään kaksi kertaa. Muodosta suuremman ja pienemmän silmäluvun erotuksen jakauma.

00.2.4. Laatikosta, jossa on 3 punaista ja 2 vihreää palloa, nostetaan yksi pallo kerrallaan, jota ei palauteta laatikkoon. Tätä jatketaan, kunnes saadaan punainen pallo. Laske tarvittavien nostojen lukumäärän odotusarvo.

00.2.5. Satunnaismuuttuja x on jakautunut x ~ Bin(n,p). Määritä n ja p, kun $E\underline{x} = 3$ ja $D\underline{x} = 1½$.

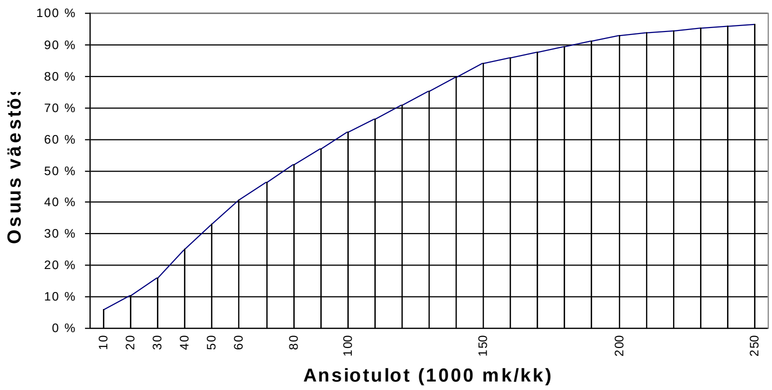
00.2.6. Funktio $f(x) = -0{,}2x + a$, kun $0 \le x \le 2$, on satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio
a) Määritä a b) Laske $P(\underline{x} \le 0{,}5)$

00.2.7. Erään jatkuvan, positiivisen satunnaismuuttujan kertymäfunktio on $F(x) = x^2 - 1$. Mikä on tiheysfunktio ja mitä arvoja satunnaismuuttuja voi saada?

1. $E(\underline{x}) = 1\cdot 0{,}05 + 2\cdot 0{,}05 + 3\cdot 0{,}15 + 4\cdot 0{,}25 + 5\cdot 0{,}30 + 6\cdot 0{,}05$

Tuloluokka (mk/vuosi)	Osuus väestöstä	Kertymä
10 - 9 999	6,0 %	6,0 %
10 000 - 19 999	4,2 %	10,2 %
20 000 - 29 999	5,7 %	15,9 %
30 000 - 39 999	9,3 %	25,2 %
40 000 - 49 999	7,9 %	33,1 %
50 000 - 59 999	7,5 %	40,6 %
60 000 - 79 999	11,2 %	51,8 %
80 000 - 99 999	10,3 %	62,1 %
100 000 - 149 999	21,9 %	84,0 %
150 000 - 199 999	9,0 %	93,0 %
200 000 - 249 999	3,6 %	96,6 %

2.



50% kohta on noin 77 000 mk kohdalla

3. Kahden nopan heittoa kuvaavaan 6 x 6 ruudukkoon merkitään erotukset

$\underline{x}$	0	1	2	3	4	5
p	6/36	10/36	8/36	6/38	4/36	2/36 Yht. 36/36

4. $\underline{x}$ = nostettavien pallojen lukumäärä kunnes saadaan punainen. PPPVV
$P(\underline{x} = 1) = P(P) = 3/5 = 6/10$ $P(\underline{x} = 2) = P(V \text{ ja } P) = 2/5 \cdot 3/4 = 3/10$
$P(\underline{x} = 3) = P(V \text{ ja } V \text{ ja } P) = 2/5 \cdot 1/4 \cdot 3/3 = 1/10$
$E\underline{x} = 0{,}6 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot 2 + 0{,}1 \cdot 3 = 1{,}5$

5. $\begin{cases} E\underline{x} = 3 \\ D\underline{x} = 1½ \end{cases}$; $\begin{cases} np = 3 \\ \sqrt{np(1 - p)} = 1½ \end{cases}$; $\begin{cases} np = 3 \\ np(1 - p) = 9/4 \end{cases}$
3(1 - p) = 9/4 ; 1 - p = ¾ ; p = ¼ ; n · ¼ = 3 ; n = 12

6. a) f(x) = -0,2x + a , kun 0 ≤ x ≤ 2 on jatkuva polynomina.
Onko f(x) koko välillä ≥ 0 tarkistetaan lopuksi.
$\int_0^2 (a - 0,2x)dx = \left[ax - 0,1x^2\right]_0^2$ = 2a - 0,4 ; 2a - 0,4 = 1 ; 2a = 1,4 ; a = 0,7
f vähenevä, siis f:n pienin arvo on f(2) = 0,7 - 0,2 · 2 = 0,1 > 0
b) P(x < 0,5) = $\int_0^{0,5} (0,7 - 0,2x)dx = \left[0,7x - 0,1x^2\right]_0^{0,5}$ = 0,35 - 0,025 = 0,325

7. F(x) = x^2 - 1 . f(x) = F ' (x) = 2x
Alussa F(x) = 0 ; x^2 - 1 = 0 ; x^2 = 1 ; x = ± 1 ; x = 1 Lopussa F(x) = 1 ; x^2 - 1 = 1 ; x^2 = 2 ; x = ± $\sqrt{2}$; x = $\sqrt{2}$
Ts. f(x) = 2x , kun 1 < x < $\sqrt{2}$

01.1.1. Teemu osuu tikkatauluun todennäköisyydellä 0,75. Millä todennäköisyydellä viidestä Teemun heittämästä tikasta tauluun osuu tasan neljä?

01.1.2. Pallojoukosta poimitaan kaksi palloa. Millä todennäköisyydellä pallot ovat samanvärisiä, kun poiminta tehdään
a) suuresta pallojoukosta, jossa 30 % punaisia ja 70 % valkoisia palloja?
b) kymmenen pallon joukosta, jossa on 3 punaista ja 7 valkoista palloa?

01.1.3. Minna ja Sanna pelaavat noppapeliä seuraavilla säännöillä: Parillisilla silmäluvuilla Minna maksaa Sannalle rahamäärän, joka on silmäluku kerrottuna neljällä ja parittomilla silmäluvuilla Sanna maksaa Minnalle rahamäärän , joka on silmäluku kerrottuna viidellä. Kummalle pelisäännöt ovat edullisemmat?

01.1.4. Osoita, että funktio f(x) = 0,2x + 0,3 , 0 < x < 2 on erään jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio. Mikä on kertymäfunktio? Laske todennäköisyys P($\underline{x}$ > 1)

01.1.5. Millä *n*:n arvolla $\binom{n+2}{2}$ = 21 ?

01.1.6. Korttipakasta vedetään kolme korttia peräkkäin. Millä todennäköisyydellä toinen ja kolmas kortti ovat samaa maata tai samaa numeroa kuin välitön edeltäjänsä?

01.1.7. Kokeeseen, jossa tulokset likimäärin noudattivat normaalijakaumaa, osallistui 156 oppilasta. Pistemäärien keskiarvo oli 66,5 pistettä ja keskihajonta 8,1 pistettä. Mihin hyväksymisen pisteraja oli asetettu, kun 97 oppilasta läpäisi kokeen?

1. Kaikilla heitoilla on sama todennäköisyys. Voi käyttää binomitodennäköisyyttä.
P(5:stä heitosta 4 osuu) = 5C4 ·$0,75^4$ · $0,25^1$ = 0,3955 ≈ 40%

2. a) Palloja paljon ⇒ yhden ottaminen ei muuta todennäköisyyttä
P(samanväriset) = P(P ja P tai V ja V) = P(P)·P(P) + P(V)·P(V) = 0,3·0,3 + 0,7·0,7 = 0,58
b) P(samanvärisiä) = P(P ja P|P tai V ja V|V) = P(P)·P(P|P) + P(V)·P(V|V)
= 3/10 ·2/9 + 7/10 · 6/9 = 8/15 ≈ 0,53

3. $\underline{x}$ = Sannan voittosumma.

Tulee	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
x	-5	8	-15	16	-25	24

E$\underline{x}$ = 1/6 · (-5) + 1/6 · 8 + 1/6 · (-15) + 1/6 · 16 + 1/6 · (-25) + 1/6 · 24 = 0,50 > 0
V: Sannalle edullisempi

4. f(x) = 0,2x + 0,3 , 0 < x < 2 . f on jatkuva polynomina. f(x) > 0 kun kaikki termit > 0
$\int_0^2 (0,2x + 0,3)dx = \left[0,1x^2 + 0,3x\right]_0^2$ = (0,4 + 0,6) - (0 + 0) = 1
Kertymäfunktio on eräs integraalifunktio ⇒ F(x) = $0,1x^2$ + 0,3x + C
F(alussa) = 0 ; F(0) = 0 ; C = 0 F(x) = $0,1x^2$ + 0,3x
P($\underline{x}$ > 1) = 1 - P($\underline{x}$ < 1) = 1 - F(1) = 1 - (0,1 + 0,3) = 0,6

5. $(n+2)\ C\ 2 = 21$; $\frac{(n+2)!}{2! \cdot (n+2-2)!} = 21$; $\frac{(n+2)(n+1)n!}{2 \cdot n!} = 21$; $\frac{(n+2)(n+1)}{2} = 21$ $n^2 + 3n + 2 = 42$; $n^2 + 3n - 40 = 0$; $n = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{2} = \frac{-3 \pm 13}{2}$; n = 5 tai (n = -8)
6. P(toinen ja kolmas ovat samaa maata tai samaa numeroa kuin välitön edeltäjänsä)   = P(jokin ja sama maa ja sama maa TAI jokin ja sama maa ja sama numero TAI jokin ja sama numero ja sama maa TAI jokin ja sama numero ja sama numero) $= 1 \cdot 12/51 \cdot 11/50 + 1 \cdot 12/51 \cdot 3/50 + 1 \cdot 3/51 \cdot 12/50 + 1 \cdot 3/51 \cdot 2/50 = 7/85 \approx 0{,}082$
7. $\underline{x}$ = pisteet ~ N(66,5 ; 8,1) $\underline{z} = \frac{x - 66{,}5}{8{,}1}$ ~ N(0,1). Olkoon pisteraja = r $P(x > r) = 97/156$; $P(z > \frac{r - 66{,}5}{8{,}1}) = 0{,}622$; $1 - P(z < \frac{r - 66{,}5}{8{,}1}) = 0{,}622$ $\Phi(-\frac{r - 66{,}5}{8{,}1}) = 0{,}622$; $-\frac{r - 66{,}5}{8{,}1} = 0{,}31$; $r - 66{,}5 = -0{,}31 \cdot 8{,}1$; $r = 64$

01.2.1. Millä todennäköisyydellä satunnainen vuonna 1983 syntynyt henkilö on syntynyt ennen vappua?

01.2.2. Köysi, jonka pituus on 15 m, katkaistaan satunnaisesta paikasta. Millä todennäköisyydellä molempien osien pituus on vähintään 6,5 m?

01.2.3. Kahdeksan miestä ja seitsemän naista arvotaan jonoon. Millä todennäköisyydellä kolme ensimmäistä ovat samaa sukupuolta?

01.2.4. a) Noppaa heitetään kerran. Millä todennäköisyydellä silmäluku on kolmella jaollinen?
b) Noppaa heitetään kolme kertaa. Millä todennäköisyydellä silmälukujen tulo on kolmella jaollinen?

01.2.5. Osoita, että funktio $f(x) = \frac{1}{4}x - 1$, kun $5 < x < 7$, on erään jatkuvan jakauman tiheysfunktio. Mikä on kertymäfunktio? Laske todennäköisyys $x > 6$.

01.2.6. Korttipakasta vedetään kortteja siksi, kunnes jokin numero tulee toisen kerran. Millä todennäköisyydellä parin saamiseen tarvitaan enemmän kuin neljä korttia.

01.2.7. Pallomeressä on 20 % punaisia ja 80 % sinisiä palloja. Pallomerestä poimitaan satunnaisesti viisi palloa. Millä todennäköisyydellä poimittujen pallojen joukkoon punaisille palloille tulee yliedustus, ts. niitä on enemmän kuin 1?

01.2.8. Toisessa nopassa silmäluvut ovat 2 ykköstä ja 4 kakkosta sekä toisessa 3 kolmosta, 2 nelosta ja 1 viitonen. Määritä todennäköisyysjakauma ja odotusarvo silmälukujen summalle, kun näitä noppia heitetään samanaikaisesti.

01.2.9. Tutkittaessa erästä satunnaismuuttujaa todettiin sen jakautuvan normaalisti. Muuttujan arvojen keskiarvo oli 47,5 ja 6 % arvoista oli enintään 44,0. Määritä keskihajonta.

01.2.10. Erään kokeen onnistumisvarmuutta testattiin kahden vuoden ajan. Ensimmäisenä vuonna koetta toistettiin kymmenen kertaa päivässä ja toisena vuonna kaksitoista kertaa päivässä. Ensimmäisenä vuonna oli 27 päivää, jolloin koe onnistui kahdeksan kertaa päivässä ja toisena vuonna 36 päivää, jolloin koe onnistui kymmenen kertaa päivässä. Millä todennäköisyydellä koe onnistuu?

1. $P(A) = \frac{\text{päiviä ennen vappua}}{\text{päiviä vuodessa}} = \frac{31+28+31+30}{365} = \frac{120}{365} \approx 0{,}329$
2. Ehto täyttyy, jos köysi katkaistaan väliltä 6,5m < x < 8,5 m toisesta päästä lukien. $P(A) = \frac{\text{suotuisa pituusalue}}{\text{koko pituus}} = \frac{2\text{ m}}{15\text{ m}} \approx 0{,}133$
3. P(3 ensimmäistä samaa sukupuolta) = P(MMM tai NNN) = P(M)·P(M | M)·P(M | MM) + P(N)·P(N | N)·P(N | NN) $= \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} \cdot \frac{6}{13} + \frac{7}{15} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{546}{2730} = \frac{1}{5}$
4. a) $P(\text{luku 3:lla jaollinen}) = \frac{\text{3 tai 6}}{\text{mikä luku vaan}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ b) P(tulo 3:lla jaollinen) = 1 - P(ei 3:lla jaollinen) = 1 - P(ei JA ei JA ei) $= 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{19}{27}$

5. $f(x) = \frac{1}{4}x - 1$ $(5 < x < 7)$ on kasvava pienin arvo = $\frac{1}{4}\cdot 5 - 1 > 0$, joten $f(x) > 0$. f on JVA

$$\int_5^7 \left(\frac{1}{4}x - 1\right)dx = \left[\frac{1}{8}x^2 - x\right]_5^7$$ = 49/8 - 7 - 25/8 + 5 =1. Täten f on tiheysfunktio

$F(x) = 1/8\cdot x^2 - x + C$. $F(5) = 0$; $25/8 - 5 + C = 0$; $C = 15/8$; $F(x) = 1/8x^2 - x + 15/8$

$P(x > 6) = 1 - P(x \le 6) = 1 - F(6) = 1 - (36/8 - 6 + 15/8) = 5/8 = 0{,}625$

6. P(kortteja > 4) = 1 - P(kortteja 2 tai 3 tai 4)

= 1 - P(jokin ja sama tai jokin ja eri ja jompikumpi edellisistä tai jokin ja eri ja eri ja jokin edellisistä)

$= 1 - 1\cdot\frac{3}{51} - 1\cdot\frac{48}{51}\cdot\frac{6}{50} - 1\cdot\frac{48}{51}\cdot\frac{44}{50}\cdot\frac{9}{49} = \frac{2816}{4165} \approx 0{,}68$

7. P(punaisia > 1) = 1 - P(punaisia 0 tai 1) = 1 - [P(0 punainen) + P(1 punainen)]

$= 1 - [5C0\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^5 + 5C1\cdot 0{,}2^1\cdot 0{,}8^4] = 1 - [0{,}32768 + 0{,}4096] \approx 0{,}26$

8. Tehdään 6 x 6 taulukko eri nopanheiton tuloksille.

5	6	6	7	7	7	7
4	5	5	6	6	6	6
4	5	5	6	6	6	6
3	4	4	5	5	5	5
3	4	4	5	5	5	5
3	4	4	5	5	5	5
	1	1	2	2	2	2

$P(\underline{x} = 4) = 6/36$ $P(\underline{x} = 5) = 16/36$

$P(\underline{x} = 6) = 10/36$ $P(\underline{x} = 7) = 4/36$

$E\underline{x} = 4\cdot 6/36 + 5\cdot 16/36 + 6\cdot 10/36 + 7\cdot 4/36 = 192/36$

$= 16/3 = 5\ 1/3$

9. $x \sim N(47{,}5 ; s)$; $z = \frac{x - 47{,}5}{s} \sim N(0,1)$; $P(\underline{x} \le 44) = 0{,}06 \Leftrightarrow P(\underline{z} \le \frac{44 - 47{,}5}{s}) = 0{,}06$

$\Leftrightarrow \Phi(\frac{-3{,}5}{s}) = 0{,}06 \Leftrightarrow \Phi(\frac{3{,}5}{s}) = 0{,}94 \Leftrightarrow \frac{3{,}5}{s} = 1{,}555 \Leftrightarrow s = 2{,}25$

10. kokeen onnistumisen todennäköisyys = p

P(10:stä kokeesta onnistuu 8) = $10C8 \cdot p^8 \cdot (1 - p)^2 = 27/365 \Leftrightarrow 45p^8(1 - p)^2 = 0{,}07397$

P(12:sta kokeesta onnistuu 10) = $12C10 \cdot p^{10} \cdot (1 - p)^2 = 36/365 \Leftrightarrow 66p^{10}(1 - p)^2 = 0{,}09863$

$\frac{45p^8(1 - p)^2}{66p^{10}(1 - p)^2} = \frac{0{,}07397}{0{,}09863}$; $p^2 = 0{,}9091$; $p = 0{,}95$

02.1.1. a) Kuinka monessa eri järjestyksessä voi 4 poikaa ja 3 tyttöä olla?
b) Kuinka monella tavalla tästä joukosta voidaan valita järjestyksessä 4 henkilöä?
c) Kuinka monella tavalla tästä joukosta voidaan valita 4 henkilöä?

02.1.2. Millä todennäköisyydellä kolme korttipakasta vedettyä korttia ovat eri maata, kun vedettyjä kortteja ei palauteta pakkaan?

02.1.3. Millä todennäköisyydellä kahdesta nopanheitosta jälkimmäinen antaa vähintään kaksi kertaa niin suuren silmäluvun kuin ensimmäinen?

02.1.4. Satunnaismuuttujan $\underline{x}$ arvot jakautuvat seuraavan taulukon mukaisesti:

x	1	2	3	4	5	6
p(x)	0,05	*a*	0,25	*b*	0,15	0,15

Määritä *a* ja *b*, kun $E\underline{x} = 3{,}45$.

02.1.5. Oletetaan, että poutapäivä seuraa poutapäivää 65 %:n ja sadepäivää 50 %:n todennäköisyydellä. Mikä on todennäköisyys, että sateista torstaita seuraa poutainen lauantai ja sunnuntai?

02.1.6. Bussi lähtee pysäkiltä kolme kertaa tunnissa, tasatunnein, 15 minuuttia yli ja 20 vaille tasatunnin. Esa tulee satunnaiseen aikaan pysäkille. Millä todennäköisyydellä hän joutuu odottamaan seuraavan bussin lähtöä vähintään 7 minuuttia?

02.1.7. Ampumahiihdossa Jukan osumistodennäköisyys on makuulta 0,98 ja pystystä 0,92. Eräässä kilpailussa on yksi makuu- ja yksi pystyampumapaikka. Molemmilla paikoilla ammutaan viisi laukausta. Millä todennäköisyydellä Jukka ampuu kilpailussa tasan yhden ohilaukauksen a) makuulta b) pystystä c) kaikkiaan?

02.1.8. Herra Virtanen, jonka työaika alkaa klo 8.00, aloittaa työmatkansa klo 7.30. Matkan kestoaika on normaalisti jakautunut siten, että odotusarvo on 27 min ja keskihajonta 3,7 min.
a) Millä todennäköisyydellä herra Virtanen myöhästyy?
b) Mihin aikaan herra Virtasen pitää lähteä kotoa, jos hän haluaa pienentää myöhästymisriskinsä 5 %:iin?

02.1.9. Kahdentoista henkilön ryhmästä, jossa on sekä miehiä että naisia, valitaan arvalla kaksi henkilöä. Todennäköisyys, että valitut henkilöt ovat eri sukupuolta, on $\frac{9}{22}$. Kuinka monta miestä ja naista ryhmässä on, kun ryhmässä on miehiä enemmän kuin naisia?

02.1.10. Satunnaismuuttujan $\underline{x}$ jakauman määrää tiheysfunktio y = f(x), joka on määritelty välillä [0,4] ja jonka kuvaaja on suora kulkien pisteiden (0,a) ja (4,3a) kautta. a) Määritä vakio a , b) Laske jakauman odotusarvo.

1. a) n = 7! = 5040 b) n = 7 · 6· 5 · 4 = 840 c) 7 nCr 4 = 35
2. P(eri maata) = P(jokin maa JA toinen maa JA muu kuin kumpikaan edellinen maa) = P(jokin) · P(toinen) · P(muu kuin edellinen) = $1 \cdot \frac{39}{51} \cdot \frac{26}{50} = \frac{165}{425}$ = 0,398
3. Voidaan tehdä 6 · 6 ruudukko ja katsoa siitä suotuisat parit, joita ovat (2,1) , (3,1) , (4,1) (5,1) , (6,1) , (4,2) , (5,2) , (6,2) ja (6,3) eli 9 kpl. P(A) = $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
4. Tarvitaan kaksi yhtälöä kahden tuntemattoman ratkaisemiseksi. $\begin{cases} \Sigma p = 1 \\ E\underline{x} = 3{,}45 \end{cases}$; $\begin{cases} 0{,}05 + a + 0{,}25 + b + 0{,}15 + 0{,}15 = 1 \\ 0{,}05 \cdot 1 + 2a + 0{,}25 \cdot 3 + 4b + 0{,}15 \cdot 5 + 0{,}15 \cdot 6 = 3{,}45 \end{cases}$; $\begin{cases} a + b = 0{,}4 \ \Vert \cdot (-2) \\ 2a + 4b = 1 \ \Vert \cdot 1 \end{cases}$ 2b = 0,2 ; b = 0,1 ; a + 0,1 = 0,4 ; a = 0,3 V : a = 0,3 ja b = 0,1
5. Tilanteesta voi tehdä oksamallin P(poutaa la ja su) = P(pe pouta ja la pouta ja su pouta tai pe sataa ja la pouta ja su pouta) = 0,5·0,65·0,65 + 0,5·0,5·0,65 = 0,37375 ≈ 0,37
6. Voi piirtää kellon tai aikajanan. Kysytylle tapahtumalle suotuinen tuloaika on esim. 9.00 - 9.08 tai 9.15 - 9.33 tai 9.40 - 9.53 eli suotuisia minuutteja on 8 + 18 + 13 = 39. P(A) = 39/60 ≈ 0,65
7. a) P(makuulta 5:stä 4 osumaa) = 5 nCr 4 · $0{,}98^4 \cdot 0{,}02^1$ = 0,0922 ≈ 0,092 b) P(pystystä 5:stä 4 osumaa) = 5 nCr 4 ·$0.92^4 \cdot 0{,}08^1$ = 0,287 ≈ 0,29 c) P(makuulta 5:stä 4 osumaa JA pystystä 5:stä 5 osumaa TAI makuulta 5:stä 5 osumaa JA pystystä 5:stä 4 osumaa) = 0,0922 · $0{,}92^5 + 0.98^5 \cdot 0{,}287$ = 0,32
8. Aika = $\underline{x}$ ~N(27;3,7). Valitaan uusi satunnaismuuttuja $\underline{z} = \frac{x - 27}{3{,}7}$ ~ N(0,1) a) P(myöh.) = P($\underline{x}$ > 30) = P($\underline{z} > \frac{30 - 27}{3{,}7}$) = P($\underline{z}$ > 0,81) = 1 - Φ(0,81) = 1 - 0,791 = 0,209 b) P(myöh.) = 0,05 ; P($\underline{x}$ > a) = 0,05 ; P($\underline{z} > \frac{a - 27}{3{,}7}$) = 0,05 ; 1 - $\Phi(\frac{a - 27}{3{,}7})$ = 0,05 $\Phi(\frac{a - 27}{3{,}7})$ = 0,95 ; $\Phi(\frac{a - 27}{3{,}7}) = \Phi(1{,}65)$; $\frac{a - 27}{3{,}7} = 1{,}65 \ \Vert \cdot 3{,}7$; a - 27 = 6,1 ; a = 33,1 aikaa varattava 33 min. V: lähdettävä kotoa 7.27
9. Olkoon miehiä x ja naisia 12 - x. P(eri sukupuolta) = P(1. on mies ja 2. on nainen tai 1. on nainen ja 2. on mies) $= \frac{x}{12} \cdot \frac{12 - x}{11} + \frac{12 - x}{12} \cdot \frac{x}{11} = \frac{2x(12 - x)}{132} = \frac{12x - x^2}{66}$; $\frac{12x - x^2}{66} = \frac{9}{22}$; $12x - x^2 = 27$; $x^2 - 12x + 27 = 0$ $x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2}$; x = 9 (tai x = 3) V: 9 miestä ja 3 naista
10. Suoran kulmakerroin = $\frac{3a - a}{4 - 0}$ = ½a. Tiheysfunktio f(x) = ½ax + a. a) 1° f(x) ≥ 0 ⇒ a ≥ 0 , 2° f on jatkuva polynomina 3° $\int_0^4 (\frac{1}{2}ax + a)dx = \left[\frac{1}{4}ax^2 + ax \right]_0^4$ = 1 ; (4a + 4a) - (0 + 0) = 1 ; a = 1/8 b) E$\underline{x}$ = $\int_0^4 x\left(\frac{1}{16}x + \frac{1}{8}\right)dx = \int_0^4 \left(\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{8}x\right)dx = \left[\frac{1}{48}x^3 + \frac{1}{16}x^2\right]_0^4$ = (64/48 + 16/16) - (0 + 0) = 7/3 = 2 1/3

02.2.1. Monellako tapaa 5 poikaa ja 3 tyttöä voidaan asettaa jonoon? Montako jonoa on sellaisia, joissa on pojat ensin? Monellako tavalla voidaan valita paikat 5 pojalle?

02.2.2. Noppaa heitetään kaksi kertaa. Millä todennäköisyydellä ainakin toinen heitoista antaa silmäluvun, joka on suurempi kuin neljä?

02.2.3. Ratkaise yhtälö $\binom{x}{2} = 4753$, $x \in N$

02.2.4. Hatussa oli Maijan, Pekan, Tuomaksen ja Kirstin nimilaput. Ne nostettiin sieltä peräkkäin.
a) Millä todennäköisyydellä nimilaput nousevat aakkosjärjestyksessä?
b) Millä todennäköisyydellä tyttöjen nimilaput nousevat ennen poikien nimilappuja?

02.2.5. Laatikosta, jossa on 12 valkoista ja 7 mustaa palloa, nostetaan kolme palloa. Millä todennäköisyydellä kaikki pallot eivät ole samanvärisiä, kun nostettua palloa ei palauteta laatikkoon?

02.2.6. Ammunnassa osumistodennäköisyys on 85 %, jos edellinen laukaus on osunut. Ohilaukauksen jälkeen osumistodennäköisyys on 70 %. Millä todennäköisyydellä neljän laukauksen sarjaan tulee korkeintaan yksi ohilaukaus, kun sarjan ensimmäinen laukaus osuu.

02.2.7. Noppapelissä käytettiin painotettua noppaa, jolla silmälukujen 1 – 5 todennäköisyydet ovat keskenään yhtä suuret ja kuutosen todennäköisyys on kolminkertainen muiden silmälukujen muiden silmälukujen todennäköisyyteen verrattuna. Laske silmäluvun odotusarvo, kun tätä noppaa heitetään yhden kerran.

02.2.8. Tutkimuksessa todettiin, että 200 gramman keksipakkauksen massan keskiarvo oli 204 g ja keskihajonta 6 g. Oletetaan että massa on normaalisti jakautunut. Kuinka monella prosentilla pakkauksista massa oli alle 200g? Kuinka monella prosentilla massa oli välillä 200 g - 210 g?

02.2.9. Kunnan asukkaista 1,5 % on ruotsinkielisiä. Montako kunnan asukasta on satunnaisesti poimittava, että poimittujen joukkoon tulisi vähintään yksi ruotsinkielinen todennäköisyydellä, joka suurempi kuin 70 %?

02.2.10. Suoran yhtälössä $y = -kx + k^2$ parametri k saa arvoja väliltä [0, 10] tiheysfunktion ollessa muotoa $f(k) = 0,01k + 0,05$. Millä todennäköisyydellä suoran ja koordinaattiakseleiden rajoittaman kolmion pinta-ala on enintään 200?

1. a) $8! = 40\ 320$ b) $5!\cdot 3! = 120\cdot 6 = 720$ c) $\binom{8}{5} = 56$
2. P(ainakin toinen > 4) = 1 - P(molemmat ≤ 4) = $1 - \frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6} = 1 - \frac{2\cdot 2}{3\cdot 3} = \frac{5}{9}$
3. $\binom{x}{2} = 4753$; $\frac{x(x-1)(x-2)!}{2\cdot 1\cdot (x-2)!} = 4753$; $x(x-1) = 9506$; $x^2 - x - 9506 = 0$ $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 38\ 024}}{2} = \frac{1 \pm 195}{2}$; x = 98 tai (x = - 97)
4. a) P(aakkosjärjestys) = P(K ja M ja P ja T) = $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{24}$ b) P(tytöt ennen poikia) = P(T ja t ja p ja p) = $\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{6}$
5. P(Pallot eivät kaikki samanvärisiä) = 1 - P(samanvärisiä) = 1 - P(3V) - P(3M) $= 1 - \frac{12}{19}\cdot\frac{11}{18}\cdot\frac{10}{17} - \frac{7}{19}\cdot\frac{6}{18}\cdot\frac{5}{17} = 0,737 \approx 0,74$
6. P(korkeintaan 1 ohi) = P(OOO tai OOE tai OEO tai EOO) $= 0,85\cdot 0,85\cdot 0,85 + 0,85\cdot 0,85\cdot 0,15 + 0,85\cdot 0,15\cdot 0,70 + 0,15\cdot 0,70\cdot 0,85 = 0,901 \approx 0,90$
7. Olkoon 1 - 5 arvojen tdn = p ja 6:n tdn = 3p. p+p+p+p+p+3p = 1 ; 8p = 1 ; p = 0,125 $E\underline{x} = \sum p_i x_i = p\cdot 1 + p\cdot 2 + p\cdot 3 + p\cdot 4 + p\cdot 5 + 3p\cdot 6 = 33p = 33\cdot 0,125 = 4,125$
8. Paino $\underline{x} \sim N(204, 6)$; $\underline{z} = \frac{x - 204}{6} \sim N(0,1)$ $P(\underline{x} < 200) = P(\underline{z} < \frac{200 - 204}{6}) = P(\underline{z} < -0,67) = \Phi(-0,67) = 1 - \Phi(0,67) = 1 - 0,7486 = 0,2514 \approx 0,25$ $P(200 < \underline{x} < 210) = P(\frac{200 - 204}{6} < \underline{z} < \frac{210 - 204}{6}) = P(-0,67 < \underline{z} < 1) = F(1) - F(-0,67) = 0,8413 - 0,2514 =$ $0,5899 \approx 0,59$
9. P(vähintään yksi ruotsinkielinen) ≥ 0,7 ; 1 - P(ei yhtään ruotsinkielistä) ≥ 0,7 ; P(ei yhtään ruotsinkielistä) ≤ 0,3 ; $0,985^n \le 0,3$ || lg ( ) ; $n\cdot \lg 0,985 \le \lg 0,3$ || : lg 0,985 $n \ge 79,7$ V: vähintään 80 asukasta.
10. Suora $y = -kx + k^2$ leikkaa y-akselin korkeudella k^2 ja x-akselin $-kx + k^2 = 0$; x = k Ala on $A = ½k\cdot k^2 = ½k^3$; $A \le 200$; $½k^3 \le 200$; $k^3 \le 400$; $k \le \sqrt[3]{400} = a$ (< 10)

P(A ≤ 200) = P(0 < k ≤ a) = $\int_0^a (0{,}01k+0{,}05)dk = \Big[0{,}005k^2+0{,}05k\Big]_0^a$ = $(0{,}005a^2 + 0{,}05a) - (0 + 0) = 0{,}005(\sqrt[3]{400})^2 + 0{,}05\cdot\sqrt[3]{400} = 0{,}639.. \approx 0{,}64$

02.3.1. Joukossa A on 6 alkiota. a) Moneenko eri järjestykseen ne voidaan laittaa? b) Monellako eri tavalla niistä voidaan valita 2 alkiota eri järjestyksissä? c) Montako erilaista 2 alkion joukkoa voidaan muodostaa?

02.3.2. Korttipakasta otetaan 5 korttia. Mikä on todennäköisyys, että saatiin 3 pataa ja 2 herttaa?

02.3.3. Kokeessa on 30 monivalintakysymystä, kussakin 4 vastausvaihtoehtoa ja joista vain yksi on oikea. Oppilas tietää oikeat vastaukset 22 kysymykseen ja arvaa loput. Millä todennäköisyydellä oppilas saa 30 kysymyksestä a) 30 oikein b) 25 oikein?

02.3.4. Teija selviää insinööriajosta 1. kerralla todennäköisyydellä $\frac{2}{3}$. Mikäli hänelle tulee hylkäämisiä, hän masentuu niin, että selviää n. kerralla enää todennäköisyydellä $\frac{1}{n+2}$, n = 2, 3, ... Millä todennäköisyydellä Teija ei läpäise ajokoetta 10 ensimmäisellä kerralla?

02.3.5. Teija, Ari ja Vesa ovat autokoulussa. He selviävät insinööriajosta ensimmäisellä kerralla todennäköisyydellä 0,7 , 0,6 ja 0,4. Millä todennäköisyydellä ekakerralla a) vain Vesa ja Teija pääsevät läpi b) ainakin 2 heistä pääsee läpi c) ainakin yksi heistä pääsee läpi?

02.3.6. Jana, jonka pituus on 4, kiinnitetään toisesta päästä pisteeseen (2,1) ja päästetään se vapaasti pyörimään. Millä todennäköisyydellä jana pysähdyttyään leikkaa y-akselin, kun kaikki loppuasennot ovat yhtä todennäköisiä?

02.3.7. Satunnaisilmiön E tapahtumat A ja B ovat toisistaan riippumattomat. Laske tapahtumien A ja B todennäköisyydet, kun todennäköisyys, että tapahtuu A ja B on 0,2 ja tapahtuu A tai B on 0,7?

02.3.8. Laatikossa on viisi kirjainta M, A, M, M ja A. Otetaan umpimähkään kolme kirjainta. Olkoon satunnaismuuttuja $\underline{x}$ = "M-kirjainten lukumäärä otetuista kirjaimista". Laske M-kirjainten lukumäärän odotusarvo.

02.3.9. Ihmisten pituudet ovat jakautuneet normaalisti. Laske pituuksien keskiarvo ja keskihajonta, kun tiedetään, että 80% ihmisistä on lyhyempiä kuin 175 cm ja 95% lyhyempiä kuin 180 cm.

02.3.10. Olkoon funktio $f(x) = \begin{cases} c, \text{ kun } 0 \le x < 1 \\ 2c, \text{ kun } 1 \le x < 2 \\ 3c, \text{ kun } 2 \le x \le 3 \end{cases}$ erään satunnaismuuttujan tiheysfunktio. Määritä luku c. Mikä on todennäköisyys, että $\underline{x} \in [1½,2½]$?

1. a) 6! = 720 b) 6·5 = 30 c) $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{720}{2\cdot 24} = 15$
2. n = $\binom{52}{5} = \frac{52\cdot51\cdot50\cdot49\cdot48\cdot47!}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot47!} = 2\,598\,960$; k = $\binom{13}{3}\cdot\binom{13}{2} = \frac{13!\cdot13!}{3!\cdot10!\cdot2!\cdot11!} = 22\,308$ P(A) = $\frac{22\,308}{2\,598\,960} = 0{,}0086$
3. a) P(30 oikein) = P(22 ja 8 muuta) = 1 ·¼·¼·...·¼ = $(¼)^8$ = 0,000015   b) P(25 oikein) = P(22 ja 8:sta 3) = $1\cdot\binom{8}{3}\cdot(¼)^3\cdot(¾)^5 = 0{,}208$
4. P(ei läpi 10 kerralla) = P(ei 1. ja ei 2. ja ... ja ei 10.)   = $(1-\frac{2}{3})\cdot(1-\frac{1}{2+2})\cdot(1-\frac{1}{3+2})\cdot...\cdot(1-\frac{1}{10+2}) = \frac{1}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5}\cdot...\cdot\frac{11}{12} = \frac{1}{12}$
5. a) P(vain T ja V) = P(T)·P(V)·P(ei A) = 0,7·0,4·0,4 = 0,112   b) P(ainakin 2) = P(T ja V ja ei A tai T ja ei V ja A tai ei T ja V ja A tai T ja V ja A)   = 0,7·0,4·0,4 + 0,7·0,6·0,6 + 0,3·0,4·0,6 + 0,7·0,4·0,6 = 0,604   c) P(ainakin 1) = 1 - P(ei kukaan) = 1 - P(ei T ja ei A ja ei V) = 1 - 0,3·0,4·0,6 = 0,928
6. Suotuisan kulma-alueen kyljet kulkevat niin, että kärjestä y-akselille on kyljen pituus 4   cos ½α = 2/4 = ½ ; ½α = 60° ; α = 120° . Koko kulma-alue on 360°   P(leikkaa y-akselin) = 120°:360° = 1:3

7. Olkoon P(A) = x ja P(B) = y

$\begin{cases} P(A \text{ ja } B) = 0{,}2 \\ P(A \text{ tai } B) = 0{,}7 \end{cases}$ $\begin{cases} P(A)\cdot P(B) = 0{,}2 \\ P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B) = 0{,}7 \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 0{,}2 \\ x + y - xy = 0{,}7 \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 0{,}2 \\ x + y - 0{,}2 = 0{,}7 \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 0{,}2 \\ y = 0{,}9 - x \end{cases}$; $x(0{,}9 - x) = 0{,}2$;

$0{,}9x - x^2 = 0{,}2$; $x^2 - 0{,}9x + 0{,}2 = 0$; $x = \frac{0.9 \pm \sqrt{0{,}81 - 0{,}80}}{2} = \frac{0{,}9 \pm 0{,}1}{2}$ x = 0,5 tai x = 0,4, jolloin y = 0,4 tai y = 0,5 V: $\begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = 0{,}4 \end{cases}$ tai $\begin{cases} x = 0{,}4 \\ y = 0{,}5 \end{cases}$

8. $P(3M) = \binom{3}{3} : \binom{5}{3} = 1:10 = 0{,}1$; $P(2M) = P(2M \text{ ja } 1A) = \binom{3}{2}\cdot\binom{2}{1} : \binom{5}{3} = 6:10 = 0{,}6$

$P(1M) = P(1M \text{ ja } 2A) = \binom{3}{1}\cdot\binom{2}{2} : \binom{5}{3} = 3:10 = 0{,}3$; $E\underline{x} = \sum p_i x_i = 0{,}1\cdot 3 + 0{,}6\cdot 2 + 0{,}3\cdot 1 = 1{,}8$

9. Pituus $\underline{x} \sim N(k, s)$ $\underline{z} = \frac{\underline{x} - k}{s} \sim N(0,1)$

$\begin{cases} P(\underline{x} < 175) = 0{,}8 \\ P(\underline{x} < 180) = 0{,}95 \end{cases}$; $\begin{cases} P(\underline{z} < \frac{175 - k}{s}) = 0{,}8 \\ P(\underline{z} < \frac{180 - k}{s}) = 0{,}95 \end{cases}$; $\begin{cases} \Phi(\frac{175 - k}{s}) = \Phi(0{,}84) \\ \Phi(\frac{180-k}{s}) = \Phi(1{,}645) \end{cases}$; $\begin{cases} 175 - k = 0{,}84s \\ 180 - k = 1{,}645s \end{cases}$

5 = 0,805s ; s = 6,2 ; 175 - k = 0,84·6,2 ; k = 170 V: keskiarvo on 170 cm, keskihajonta = 6,2 cm

10. Koko ala x-akselin yläpuolella on 1. c·1 + 2c·1 + 3c·1 = 1 ; 6c = 1 ; c = 1/6

$P(1½ < x < 2½) = \text{ala} = ½\cdot 2c + ½\cdot 3c = 2½c = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{12}$