PITKÄ

MATEMATIIKKA

KURSSI MA8

INTEGRAALILASKENTA

Markku Männikkö
2004

Sisällysluettelo:

MA8. Integraalilaskenta.

1. Integraalifunktio

1.1. Integraalifunktion käsite

1. Integraalifunktion määritelmä
F(x) on funktion f(x) integraalifunktio jollakin välillä]a,b[, jos $\forall\, x \in$]a,b[pätee $F'(x) = f(x)$

2. Tutkiminen onko funktio toisen integraalifunktio
On jos $F'(x) = f(x)$ (kaikilla määrittelyjoukon x:illä)

1.1.1. Onko funktio $F(x) = xe^x$ funktion $f(x) = (x + 1)e^x$ integraalifunktio?
2. Onko funktio $x^2 \cdot \ln x + 2$ funktion $x(2\ln x + 1)$ integraalifunktio?

3. Sellaisen funktion määrittäminen, jonka integraalifunktio tunnetaan
Derivoidaan tämä funktio, niin saadaan kysytty funktio

3. Minkä funktion integraalifunktio on a) $F(x) = \sin x \cdot e^x$ b) $F(x) = x^2 \cdot \cos x$?

1.2. Annetun funktion integraalifunktiot

1. Kaikki integraalifunktiot, jos yksi tunnetaan
Jos funktion f(x) yksi integraalifunktio on F(x), niin kaikki integraalifunktiot löytyvät funktioparvesta F(x) + C

2. Tietyn integraalifunktion määrittäminen annetusta ehdosta
Muodostetaan ensin kaikki integraalifunktiot laittamalla loppuun vakio C.
Ratkaistaan annetusta ehdosta C:n arvo.
Sijoitetaan saatu arvo integraalifunktioon C:n paikalle ja annetaan vastaus.

3. Ehto F(a) = b
Integroimisvakio C ratkaistaan yhtälöstä F(a) = b

1.2.1. Mikä on se funktion $f(x) = 8x$ integraalifunktio F, joka toteuttaa ehdon $F(-1) = -1$?
2. Mikä on se funktion $f(x) = 2x + 3$ integraalifunktio, jonka nollakohta on 4?
3. Mikä funktio toteuttaa ehdot: $f'(x) = 4x - 5$ ja $f(2) = 3$?

4. Ehto: Kuvaaja kulkee pisteen (a,b) kautta
Integroimisvakio ratkaistaan yhtälöstä F(a) = b

4. Määritä se funktion $f(x) = 1 - 2x$ integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen (3,4) kautta.
5. Mikä on se funktion $f(x) = 4x - 5$ integraalifunktio, jonka kuvaaja leikkaa y-akselin korkeudella 3?

5. Ehto: Kuvaaja sivuaa jotain suoraa
Sivuamispisteen x-koordinaatti (= a) saadaan ratkaisemalla yhtälö $F'(x) = k_T$.
Sivuamispisteen y-koordinaatti (= b) saadaan suoran yhtälöstä, kun sijoitetaan siihen saatu x.
Integroimisvakio ratkaistaan yhtälöstä F(a) = b

6. Mikä on se funktion $f(x) = 2x - 6$ integraalifunktio, jonka kuvaaja sivuaa suoraa $y = 4$?
7. Mikä on se funktion $f(x) = 2x - 6$ integraalifunktio, jonka kuvaaja sivuaa suoraa $y = 4x$?

6. Ehto: Ääriarvotieto
Ääriarvokohta (a) saadaan yleensä yhtälöstä $F'(x) = 0$
Ääriarvo (b) on yleensä annettu.
Integroimisvakio saadaan yhtälöstä F(a) = b

8. Määritä se funktion $f(x) = 2x + 4$ integraalifunktio, jonka pienin arvo on 3?
9. Mikä on se funktion $f(x) = 3x^2 - 6x$ integraalifunktio, jonka maksimiarvo on 5? Mikä on minimiarvo?

7. Muu ehto
Käytetään tehtävässä olevaa tietoa integroimisvakion arvon laskemisessa.

10. Mikä on se funktion $f(x) = 2x - 6$ integraalifunktio, joka erottaa x-akselista janan, jonka pituus on 4?

1.3. Potenssin ja polynomin integraali

1. Potenssifunktion integroimissääntö $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, n \in \mathbb{Z}\ ja\, n \neq -1$

1.3.1. Integroi a) $\int x^2 dx$ b) $\int x^3 dx$ c) $\int x^4 dx$ d) $\int$ x^5 dx e) $\int x^{-2} dx$ f) $\int \frac{1}{x^3} dx$ g) $\int \frac{dx}{x^4}$ h) $\int x dx$ i) $\int dx$

2. $\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln|x| + C$

3. Summafunktion integraalifunktio
$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

2. Integroi a) $\int \left(x^2 + x\right) dx$ b) $\int \left(x^3 + x^{-1}\right) dx$ c) $\int x^2 \left(x^3 - x\right) dx$

4. Vakion siirtosääntö integraalifunktiossa
$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$

3. Integroi a) $\int 6x^2 dx$ b) $\int 10x^4 dx$ c) $\int 2x^3 dx$ d) $\int \frac{x^3}{2} dx$

5. Polynomien integroiminen
Integroidaan jokainen termi erikseen sääntöjen 1.3.1 ja 1.3.4. mukaisesti
Joskus on ensiksi suoritettava funktiossa esiintyvä lasku, jotta funktio saataisiin polynomimuotoon.

4. Integroi a) $\int \left(3x^2 - 4x + 5\right) dx$ b) $\int \left(5x^4 - 12x^3 + 9x^2 - 10x + 5\right) dx$ c) $\int \left(16x^3 - 18x^2 + 20x - 22\right) dx$

5. Integroi a) $\int (x-2)(3x+4) dx$ b) $\int (2x-3)^2 dx$ c) $\int \frac{3x^2 - 4x + 5}{x} dx$

6. Tarkistus laskimella, onko integrointi oikein suoritettu
Laske integroitavan funktion arvo kahdessa kohtaa
Laske integraalifunktion derivaatan arvot laskimella samoissa kohdissa
Jos saadut arvot ovat samoja, on integrointi todennäköisesti mennyt oikein.

2. Määrätty integraali

2.1. Tasokuvion pinta-alan laskeminen.

1. Murtoviivan rajoittaman alueen pinta-alan laskeminen
Jaetaan alue esim. kolmioihin, joiden ala lasketaan. Koko ala on näiden alojen summa.

2. Käyräviivaisen alueen pinta-alan laskeminen reunaviiva-approksimaatiolla
Valitaan alueen kehältä pisteitä niin, että niiden välinen jänne on lähellä reunaviivaa.
Lasketaan näin muodostuneen monikulmion ala. Koko ala on likimäärin sama kuin monikulmion ala.

3. Käyräviivaisen alueen pinta-alan laskeminen suorakulmioiden (= porraskuvion) avulla
Jaetaan alue yhdensuuntaisilla suorilla suikaleisiin ja valitaan näille kantasivut niin, että suikaleesta pois jää-nyt ja liikaa tullut alue ovat likimäärin yhtä suuret. Koko ala on näiden suorakulmioiden alojen summa.

4. Käyrän ja x-akselin välisen alueen alan laskeminen välillä [a,b]
Jaetaan alue y-akselin suuntaisilla suikaleilla osiin, joiden alaa arvioidaan suorakulmioilla, joiden kanta on x-akselilla ja korkeus sellainen, että yli menevä osa on suorakulmiosta on suunnilleen yhtä suuri kuin suora-kulmiosta pois jäänyt osa. Koko ala on näiden suorakulmioiden yhteenlaskettu ala.

2.2.Ylä- ja alasummat. Välisummat

1. Käyrän ja x-akselin välisen alan arvioiminen ylä- ja alasummien avulla.
Jaetaan tarkasteluväli [a,b] n:ään yhtä suureen väliin $\Delta = (b - a) / n$
Yläsumma = $S_n = \sum f(c_k) \cdot \Delta = \sum M_k \cdot \Delta$, missä $M_k = f(c_k)$ on funktion suurin arvo k:nnella välillä
Alasumma = $s_n = \sum f(c_k) \cdot \Delta = \sum m_k \cdot \Delta$, missä $m_k = f(c_k)$ on funktion pienin arvo k:nnella välillä

2.2.1. Laske funktion f(x) = ln x ylä- ja alasummat S_{10} ja s_{10} välillä [1,21]

2. Pinta-alan virhe
Jos alan arvoksi valitaan keskiarvo ½(s + S) = A, niin virhe on korkeintaan ± ½(S - s)

2. Laske edellisen tehtävän 2.2.1. virhe.

3. Porrassumman laskeminen
Porrassummassa suikaleen ala saadaan valitsemalla korkeudeksi suikaleen puolivälissä oleva funktion arvo.
Laske jakopisteet, jakovälin pituus Δ ja välin keskipiste c_k.
Laske $f(c_1)\cdot\Delta + f(c_2)\cdot\Delta + \ldots = \sum f(c_k) \cdot \Delta$

3. Arvioi käyrän y = ln x ja x-akselin välinen pinta-ala välillä [1,21] jakamalla alue 10 portaaseen.

4. Riemannin summa
on porrassumma $\sum f(c_k) \cdot \Delta$, missä c_k:t voivat olla mitä tahansa välin x-koordinaatteja

5. Matka kappaleen liikkeen kuvaajasta tv-koordinaatistossa
Matka on tällöin sen alueen pinta-ala, mikä jää kuvaajan ja t-akselin väliin tarkasteluaikana.

4. Kappaleen vauhti kasvaa tasaisesti 8 sekunnissa levosta vauhtiin 10 m/s. Tämän jälkeen 6 sekunnissa vauhtiin 15 m/s ja sitten hidastuu 4 sekunnissa vauhtiin 5 m/s. Miten pitkän matkan kappale kulki?

2.3. Määrätty integraali ja pinta-ala

1. Käyrän (y > 0) ja x-akselin välisen alueen pinta-ala
on porrassummien raja-arvo, kun välin jakoa tihennetään rajattomasti niin, että kaikkien osavälien pituudet lähestyvät nollaa, jos tällainen raja-arvo on olemassa.

2. Milloin porrassummien raja-arvot voidaan muodostaa?
Jos funktio on 1° rajoitettu (arvoilla ala- ja yläraja, $c \le f(x) \le d$ kaikilla välin x:illä) ja
2° paloittain jatkuva (epäjatkuvuuskohtia äärellinen määrä)

3. Määrätyn integraalin määritelmä
Jos porrassummat lähestyvät tiettyä raja-arvoa, kun jakoa tihennetään rajattomasti niin raja-arvoa sanotaan funktion f määrätyksi integraaliksi välillä [a,b]. HUOM.! Tässä f:n ei tarvitse olla positiivinen.

4. Määrätyn integraalin merkintä
$\int_a^b f(x)dx$

5. Määrätyn integraalin arvon laskeminen graafisella menettelytavalla
Lasketaan käyrän ja x-akselin välisen alueen pinta-ala integroimisvälillä.
Jos kuvaaja on x-akselin yläpuolella, on määrätty integraali + A
Jos kuvaaja on x-akselin alapuolella, on määrätty integraali - A

2.3.1. Laske pinta-alan avulla a) $\int_1^3 (x+1)dx$ b) $\int_{-1}^3 (x+1)dx$ c) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$

6. Määrätyn integraalin arvon laskeminen graafisesti, jos kuvaajaa molemmilla puolilla x-akselia
Lasketaan ylä- ja alapuolella olevien alojen suuruus.
Määrätty integraali on yläpuolella oleva ala - alapuolella oleva ala

2. Laske pinta-alojen avulla a) $\int_{-3}^3 (x+1)dx$ b) $\int_{-1}^4 (3-2x)dx$

3. Määrätyn integraalin ominaisuuksia.

3.1. Perusominaisuuksia

1. Määrätyn integraalin ja pinta-alan yhteys, kun kuvaaja x-akselin yläpuolella
Määrätty integraali = + ala

2. Määrätyn integraalin ja pinta-alan yhteys, kun kuvaaja x-akselin alapuolella
Määrätty integraali = - ala

3. Tyhjä integroimisväli
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3.1.1. Mitä on $\int_1^1 (x^2+1)dx$

4. Integroimisvälin jakaminen osiin
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

2. Laske $\int_1^3 f(x)dx$, kun a) f(x) = | x - 2 | b) f(x) = $\begin{cases} 2x - 1, & \text{kun } x < 2 \\ 3 - x, & \text{kun } x \geq 2 \end{cases}$

5. Integroimisrajojen vaihto
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3. Laske $\int_3^1 (x+4)dx$

4. Laske $\int_1^2 e^{\sin x}dx + \int_2^1 e^{\sin x}dx$

6. Epäyhtälön säilyminen integroinnissa
Jos välillä [a,b] on f(x) ≤ g(x) , niin $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

5. Olkoon 2 < f(x) < 3. Millä välillä on integraalin $\int_1^4 f(x)dx$ arvo?

6. Mikä on funktion f(x) = xe^x pienin arvo? Miten suuri on $\int_{-e}^e f(x)dx$ vähintään?

7. Summafunktion määrätty integraali
$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

7. Laske $\int_1^2 (e^x+2)dx + \int_1^2 (1-e^x)dx$

8. Vakion siirtosääntö määrätyssä integraalissa
$$\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\cdot\int_a^b f(x)dx$$

8. Laske $\int_1^3 (1+2x^x)dx + 2\cdot\int_1^3 (3-x^x)dx$

9. Integroimismuuttujan vaihto
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

3.2. Määrätyn integraalin laskeminen integraalifunktion avulla

1. Kertymäfunktion määritelmä
$K(x) = \int_a^x f(t)dt$

2. Kertymäfunktion graafinen tulkinta
Kertymäfunktion arvo x:ssä on alusta (a:sta) x:ään asti kertyneen pinta-alan määrä (funktio positiivinen)

3.2.1. Laske kertymäfunktio a) $K(x) = \int_1^x (t-1)dt$ b) $K(x) = \int_0^x (2t+3)dt$

3. Kertymäfunktion derivaatta
K´(x) = f(x)

2. Laske K´(x), kun a) K(x) = $K(x) = \int_1^x \sin(t)dt$ b) $K(x) = \int_2^x \sin(t)\cdot e^t dt$.

4. Kertymäfunktion $K(x) = \int_a^x f(t)dt$ ominaisuudet
K´(x) = f(x) JA K(a) = 0

3. Olkoon $K(x) = \int_2^x t^3 dt$. Mitä on a) K(2) b) K´(2)

5. Kertymäfunktion määrittäminen
Mietitään minkä funktion derivaatta on integroitavana.
Funktiossa voi olla yhteenlaskettavana jokin vakio, olkoon se C.
C:n arvo saadaan tiedosta K(a) = f(a) = 0

4. Mikä on K´(x), kun $K(x) = \int_0^x 4tdt$? Mikä on tämän perusteella K(x)?

5. Määritä K(x), kun K(x) on a) $\int_1^x 4tdt$ b) $\int_2^x 4tdt$ c) $\int_{-3}^x 4tdt$

6. Laske kertymäfunktio a) $K(x) = \int_1^x (3t^2 - 4t - 5)dt$ b) $K(x) = \int_{-2}^x (6t^2 + 4t + 2)dx$

6. Määrätyn integraalin arvon laskeminen kertymäfunktiosta
Olkoon $K(x) = \int_a^x f(t)dt$. Tällöin $\int_a^b f(t)dt = K(b)$.

7. Olkoon $K(x) = \int_1^x 3t^2 dt$. Määritä K(x) ja laske K(2) eli $\int_1^2 3t^2 dt$

8. Laske ensin $K(x) = \int_1^x 4t^3 dt$ ja sen perusteella $\int_1^2 4t^3 dt$

9. Laske a) $\int_0^3 (6x+2)dx$ b) $\int_{-1}^2 (3x^2 - 4x)dx$

7. Määrätty integraali integraalifunktion avulla.
$\int_a^b f(x)dx = [K(b) = F(b) + C] = F(b) - F(a)$

10. Laske määrätyt integraalit a) $\int_1^2 (3t^2 - 4t - 5)dt$ b) $\int_{-2}^3 (6t^2 + 4t + 2)dt$

8. Määrätyn integraalin laskeminen
Lasketaan integraalifunktio ja merkitään siihen sijoitus ala- ja ylärajalla. Sijoitetaan rajat ja lasketaan arvo.
$\int_a^b f(x)dx = /_a^b F(x) = F(b) - F(a)$

11. Laske a) $\int_0^3 x^2 dx$ b) $\int_0^2 x^3 dx$ c) $\int_{-1}^1 (2x^2 - x + 1)dx$ d) $\int_2^5 (x^2 - 2x + 3)dx$

9. Määrättyyn integraaliin liittyvän yhtälön ratkaiseminen
Laske ensin määrätty integraali. Tee yhtälö. Ratkaise.

12. Ratkaise a yhtälöstä a) $\int_1^a (2x+1)dx = 4$ b) $\int_0^a (3x^2-2x-2)dx = 0$

13. Määritä vakio a siten, että $\int_{-1}^1 a(x^2+1)dx = 16$

10. Määrättyyn integraaliin liittyvän epäyhtälön ratkaiseminen
Laske ensin määrätty integraali. Tee epäyhtälö. Ratkaise.

14. Ratkaise epäyhtälö $\int_0^a 4x(x^2-2)dx \le 0$

15. Millä luonnollisen luvun n arvoilla $\int_0^1 x^n dx \le \frac{1}{101}$ $\int_0^1 x^n \, dx \le \frac{1}{101}$

11. Muita määrätyn integraalin laskemisesta tulevia tehtäviä
Laske ensin määrätty integraali. Suorita sitten vaadittava lasku.

16. Määritä a ja b siten, että funktiolle F(x) = $\int_0^x (at+b)dt$ pätee F(1) = 4 ja F´(1) = 5.

17. Laske $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{a-2}\int_2^a (ax+1)dx$

12. Paloittain määritellyn funktion määrätyn integraalin laskeminen
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, missä kohdassa x = c $\in$]a,b[funktion lauseke muuttuu.

18. Laske $\int_0^4 f(x)dx$, kun a) f(x) = | x - 3 | b) f(x) = | 2x - 1 | c) f(x) = $\begin{cases} 5 - 2x, \text{ kun } x \le 2 \\ 4x - 3, \text{ kun } x > 2 \end{cases}$

19. Laske $\int_{-3}^3 3\cdot|x^2-4|\,dx$

13. Määrätty integraali graafisella laskimella suoralla käskyllä.
$\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{\text{fnInt}}$ $\boxed{\text{f(x):n lauseke}}$ $\boxed{,}$ $\boxed{\text{x}}$ $\boxed{,}$ $\boxed{\text{a}}$ $\boxed{,}$ $\boxed{\text{b}}$ $\boxed{\text{sulku päättyy}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$

14. Määrätty integraali graafisella laskimella kuvaajasta.
Graph-näytössä $\boxed{\text{MORE}}$ $\boxed{\text{MATH}}$ $\boxed{\int \text{f(x) dx}}$ $\boxed{\text{kursori a:n kohdalle}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{\text{kursori b:n kohdalle}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$

3.3. Alkuehdon toteuttava integraalifunktio määrätyn integraalin avulla.

1. Alkuehdon F(a) = b toteuttava integraalifunktio määrätyn integraalin avulla laskettuna
F(x) = b + $\int_a^x f(t)dt$

3.3.1. Määritä se funktion f(x) = 3x^2 - 2x - 1 integraalifunktio, joka toteuttaa ehdon F(4) = 5.
2. Määritä se funktion f(x) = 4x + 5 integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen (6,7) kautta.

3.4. Parillinen ja pariton funktio

1. Parillinen funktio
Funktio f(x) on parillinen jos $\forall$ x : f(-x) = f(x). Kuvaaja on tällöin symmetrinen y-akselin suhteen.

3.4.1. Osoita, että funktio f(x) = x^2 + 1 on parillinen funktio.
2. Osoita, että funktio f(x) = cos x + | x | on parillinen funktio.
3. Olkoon f parillinen funktio ja sen yksi nollakohta on x = 3. Mikä on myös f:n nollakohta?

2. Parillisen funktion määrätyn integraalin laskeminen origon suhteen symmetrisellä välillä [-a,a]
$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\cdot\int_0^a f(x)dx$

4. Laske a) $\int_{-2}^{2}(x^4+x^2)dx$ b) $\int_{-4}^{4}e^{|x|}dx$ c) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2x)dx$

3. Pariton funktio
Funktio f(x) on pariton, jos ∀ x : f(-x) = - f(x). Kuvaaja on tällöin symmetrinen origon suhteen.

5. Osoita, että funktio f(x) = $4x^3$ - 2x on pariton funktio.
6. Osoita, että funktio f(x) = 2sin x + 3tan x on pariton funktio.

4. Parittoman funktion määrätyn integraalin laskeminen origon suhteen symmetrisellä välillä [-a,a]
$\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$

7. Laske a) $\int_{-1}^{1}(x^3+4x)dx$ b) $\int_{-2}^{2}(x^{99}-x^{97}+x^{95}-...-x^3+x)dx$ c) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3(4x)dx$

4. Integroimistekniikkaa

4.1. Potenssi- ja juurifunktiot

1. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C,\ n \neq -1$

4.1.1. Laske a) $\int x^{10}dx$ b) $\int \frac{1}{x^{10}}dx$ c) $\int x^{1½}dx$ d) $\int x^{2/3}dx$ e) $\int \sqrt{x}dx$ f) $\int \sqrt[3]{x}dx$

2. Laske a) $\int_{1}^{2}4x^3dx$ b) $\int_{1}^{4}\sqrt{x}dx$ c) $\int_{1}^{4}x\sqrt{x}dx$ d) $\int_{1}^{8}\sqrt[3]{x}dx$ e) $\int_{1}^{9}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

2. Integroitavalle ei suoraa integroimissääntöä
Sievennä integroitavaa (suorita kerto-, jakolasku, potenssiin korotus jne.), jotta jotakin sääntöä voi käyttää.

3. Laske a) $\int(3x-2)^2dx$ b) $\int_{0}^{1}(3x-2)^2dx$ c) $\int_{1}^{2}(x-2)(3x-4)dx$
4. Määritä f(x), kun f ´(x) = 3x(4x + 5) ja f(2) = 3.

4.2. Yhdistetyn funktion derivaattaan perustuva integroiminen

1. $\int g(f(x))\cdot f'(x)dx = G(f(x))+C$
Integroitavassa on oltava sisäfunktio f(x) ja tällä ulkofunktio g(x) ja tekijänä on oltava sisäfunktion derivaatta.
Tällöin integroidaan vain ulkofunktiota g(x), jonka integraalifunktiolla G(x) on sama sisäfunktio f(x).

2. Yhdistetyn funktion ulkofunktiona potenssifunktio $\int[f(x)]^n\cdot f'(x)dx = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1}+C,\ n\neq -1$

4.2.1. Laske a) $\int 3(3x-2)^2dx$ b) $\int 9(3x-2)^2dx$ c) $\int 2x(x^2+1)^3dx$ d) $\int_{0}^{1}10x(x^2+1)^4dx$
2. Mikä on se funktion f(x) = $35(4 + 5x)^6$ integraalifunktio, jonka nollakohta on x = -1?

3. Vakiotekijän lisääminen, jotta voisi käyttää yhdistetyn funktion integroimissääntöä
Lisätään sellainen vakiotekijä, että integroitavaan tulisi tekijäksi sisäfunktion derivaatta.
Jotta integraalin arvo ei muuttuisi, lisätään vielä tämän käänteisluku tekijäksi(, jolloin on kerrottu 1:llä)

3. Laske a) $\int(2x-1)^3dx$ b) $\int x(3x^2+4)^5dx$ c) $\int x^2(1-x^3)^4dx$ d) $\int(x-1)(x^2-2x)^3dx$

4. Laske a) $\int_{0}^{2}(½x-1)^4dx$ b) $\int_{-2}^{2}x^2(½x^3+2)^3dx$ c) $\int_{1}^{2}\frac{1}{(2x+1)^2}dx$ d) $\int_{0}^{2}\frac{3x}{(x^2+1)^3}dx$

5. Mikä on se funktion f(x) = $6x(x^2 + 1)^3$ integraalifunktio, joka toteuttaa ehdon F(1) =2?

4. Juurifunktio ulkofunktiona
Muutetaan juuri potenssiksi ja integroidaan potenssin integroimissääntöjen mukaisesti.

6. Laske a) $\int \sqrt{2x+3}dx$ b) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx$ c) $\int \sqrt[3]{3x+4}dx$

7. Laske a) $\int_0^3 \sqrt{5x+1}dx$ b) $\int_0^4 4x\sqrt{x^2+9}dx$ c) $\int_0^{4½} \sqrt[3]{8-2x}dx$

8. Määritä se funktion f(x) = $\frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}$ integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen (2,1) kautta?

4.3. Murtofunktion integroiminen

1. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

4.3.1. Laske a) $\int \frac{2}{x}dx$ b) $\int 3x^{-1}dx$ c) $\int \frac{3x^2-4x+5}{x^2}dx$

2. Laske a) $\int_1^2 \frac{4}{x}dx$ b) $\int_{-2}^{-1} \frac{5}{x}dx$ c) $\int_2^3 \frac{2x-1}{x}dx$

2. Nimittäjänä sisäfunktio $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$, ts. osoittajassa on oltava sisäfunktion derivaatta.

3. Laske a) $\int \frac{2}{2x+1}dx$ b) $\int \frac{4x}{x^2+1}dx$ c) $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}dx$ d) $\int \frac{x^2+4x+5}{x^2+2x+3}dx$

4. Laske a) $\int_0^1 \frac{6}{3x+4}dx$ b) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$ c) $\int_1^2 \frac{4x-2}{x^2-x+1}dx$

5. Määritä se funktion f(x) = $\frac{1}{2x-3}$ + 2x , x > 1½, integraalifunktio, jonka kuvaajalla on piste (2,3).

4.4. Eksponenttifunktioiden integroiminen

1. $\int e^x dx = e^x + C$

4.4.1. Laske a) $\int (e^x + 2x)dx$ b) $\int (2e^x - x^e)dx$

2. Laske a) $\int_0^1 (3e^x - 4x)dx$ b) $\int_1^{\ln 2} e^x dx$

3. Mikä on se funktion f(x) = $4e^x - 3x^2$ integraalifunktio, joka toteuttaa ehdon F(0) = 1?

2. Eksponentissa sisäfunktio $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$

4. Laske a) $\int e^{4x}dx$ b) $\int 3e^{2x}dx$ c) $\int 2e^{-x}dx$ d) $\int \frac{3}{e^{3x-1}}dx$ e) $\int 3xe^{x^2+1}dx$

5. Laske a) $\int_0^1 4e^{2x}dx$ b) $\int_{-1}^0 e^{-2x}dx$ c) $\int_0^{½} e^{3x}(e^{-x}+e^x)dx$ d) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$

6. Määritä funktion f(x) = $\frac{e^x}{\sqrt{e^x+2}}$ se integraalifunktio F, joka toteuttaa ehdon F(0) = $\sqrt{3}$

7. Määritä $\int \frac{1}{e^x+1}dx$ (Vihje: Laita osoittajaksi $e^x + 1 - e^x$)

8. Määritä $\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx$ (Vihje: Keksi sopiva laventaja)

3. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C$

9. Laske a) $\int 2^x dx$ b) $\int 2^x(3^x+4)dx$

10. Laske a) $\int_0^1 3^x dx$ b) $\int_0^2 4\cdot 2^x dx$

4. $\int f'(x)\cdot a^{f(x)}dx = \frac{1}{\ln a}a^{f(x)} + C$

11. Laske a) $\int 2^{3x}dx$ b) $\int 3^{-2x}dx$

12. Laske a) $\int_0^1 4^{3x}dx$ b) $\int_{-½}^{½} 3^{2x}dx$

4.5. Trigonometristen funktioiden integroiminen

1. $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$

4.5.1. Laske a) $\int 3\cos(x)dx$ b) $\int_0^{\pi/2}(4+5\cos(x))dx$

2. $\int f'(x)\cos f(x)dx = \sin f(x) + C$

2. Laske a) $\int \cos(2x)dx$ b) $\int_{\pi/4}^{\pi/2}[2\cos(3x) - 4\cos(5x)]dx$

3. $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$

3. Laske a) $\int 2\sin(x)dx$ b) $\int_0^{\pi}[2\sin(x) + 3\cos(x)]dx$

4. $\int f'(x)\cdot\sin f(x)dx = -\cos f(x) + C$

4. Laske a) $\int \sin(3x)dx$ b) $\int_0^{\pi} 20\sin(5x)dx$

5. Mikä on se funktion f(x) = 8cos 2x + 6sin 3x integraalifunktio F, joka toteuttaa ehdon F(π/12) = 4?

6. Laske a) $\int \sin^2(x)\cdot\cos(x)dx$ b) $\int \cos^3(x)\cdot\sin(x)dx$ c) $\int \sin(2x)\cdot\cos(x)dx$ d) $\int \cos^3(x)dx$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x) + C$

7. Laske a) $\int \frac{2}{\cos^2(x)}dx$ b) $\int \frac{3\cos^2(x)-2}{\cos^2(x)}dx$ c) $\int \frac{\cos\,(2x)}{\cos^2(x)}dx$ d) $\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}dx$

6. $\int (1+\tan^2 x)dx = \tan x + C$

8. Laske a) $\int (2+2\tan^2 x)dx$ b) $\int (2+\tan^2 x)dx$ c) $\int \tan^2 x\,dx$

7. $\int_a^{a+\pi}\sin^2(x)dx = \int_a^{a+\pi} ½ dx$

9. Laske a) $\int_0^{\pi}\sin^2(x)dx$ b) $\int_0^{2\pi}\cos^2(x)dx$ c) $\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^2(x)dx$

5. Muita integroimismenetelmiä

5.1. Osittaisintegrointi

1. $\int f'(x)\cdot g(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)dx$
- etsi tulo integroitavasta
- valitse g;ksi toinen tekijä (yleensä se, jonka derivaatta pienenee) ja derivoi se sekä integroi toinen tekijä
- Käytä kaavaa. (Jos ei pääse eteenpäin, valitse g ja f' toisin päin, tai tarkkaile tehtävää 4 alla!!)

5.1.1. Laske a) $\int e^x\cdot 2x dx$ b) $\int x\cdot e^{2x}dx$ c) $\int_1^2 2x\cdot\ln x\, dx$ d) $\int_1^2 x\cdot\ln 2x\, dx$

2. Laske a) $\int(3x+4)\cdot e^x dx$ b) $\int_0^1 (x+1)\cdot e^x\, dx$

3. Laske a) $\int x\sqrt{2x+1}dx$ b) $\int\frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$

4. Laske a) $\int e^x\cdot x^2 dx$ b) $\int e^x\cdot\sin(x)dx$

5.2. Murtofunktion integroiminen tekemällä osamurtohajoitelma

1. Jakaminen niin, että osoittaja alempaa astetta kuin nimittäjä
Suorita jakolasku (jakokulmassa). Vaillinainen osamäärä on polynomi, jota integroidaan normaalisti.
Jakojäännös / jakajaa integroidaan säännön 4.3.2. mukaisesti.

5.2.1. Laske a) $\int\frac{4x^2-6x+5}{2x+1}dx$ b) $\int\frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+1}dx$

2. Nimittäjän jakaminen osamurtolukuihin
Jaetaan nimittäjä tekijöihinsä. Toivotaan osamäärän saatavan muotoon $\frac{a}{\text{tekijä 1}}+\frac{b}{\text{tekijä 2}}$
Ratkaistaan a:lle ja b:lle arvo laventamalla murtolausekkeet samannimisiksi.
Tällöin saatu osoittaja on oltava sama kuin alkuperäinen osoittaja ts. samankorkuisia termejä sama määrä.
Kun osamurtoluvut on saatu, integroidaan niitä kaavan 4.3.2. mukaisesti.

2. Laske a) $\int\frac{1}{x(x+1)}dx$ b) $\int\frac{x+1}{x(x-1)}dx$ c) $\int\frac{1}{x^2+3x+2}dx$

5.3. Paloittain määritellyn funktion integroiminen

1. Jatkuvan funktion integraalifunktio
Jatkuvalla funktiolla on integraalifunktio.
Joillakin epäjatkuvilla funktioilla on integraalifunktio, mutta ei nyt sentään koulukurssissa.
Siis: Tutkitaan onko funktio jatkuva. Jos ei, niin sanotaan, ettei integraalifunktioa ole.

2. Integroimisvakioiden yhteyden määrittäminen, kun integroitavana jatkuva paloittain määritelty funktio.
Integroidaan eri alueilla olevat funktiot. Jokaiseen laitetaan eri integroimisvakiot, C, D, …
Koska integraalifunktionkin on oltava jatkuva, on liitoskohdan molemmilta puolin lasketut raja-arvot oltava samat. Tästä saadaan yhtälö integroimisvakioiden välille.

5.3.1. Määritä funktion a) $f(x) = |2x - 6|$ b) $f(x) = |4x^3 + 4x|$ c) $f(x) = |3x^2 - 6x|$ kaikki integraalifunktiot.

2. Määritä funktion a) $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ kun } x < 0 \\ 3x^2 - 4x, \text{ kun } x \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 1, \text{ kun } x < 2 \\ 2x - 3, \text{ kun } x \geq 2 \end{cases}$ kaikki integraalifunktiot.

3. Tietyn integraalifunktion määrittäminen
Kun kaikki integraalifunktiot on saatu, ratkaistaan annetusta tiedosta integroimisvakion arvo.
Annetaan vastaus käyttäen integroimisvakion paikalla sen saatua arvoa.

3. Määritä se funktion $f(x) = |\, 4x - 12\, |$ integraalifunktio, joka toteuttaa ehdon $F(1) = 2$.

4. Mikä on se funktion $f(x) = \begin{cases} 4x - 3, & x < 1 \\ 3x^2 - 2x, & x \geq 1 \end{cases}$ integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen (2,-1) kautta?

5. Laske f(3), kun $f'(x) = \begin{cases} 2x - 3x^2, & x < 2 \\ -4x, & x \geq 2 \end{cases}$ ja f(1) = 2.

6. Pinta-ala ja tilavuus

6.1. Käyrän ja x-akselin välisen alueen ala

1. Ala, kun käyrä x-akselin yläpuolella

$$A = +\int_a^b f(x)dx$$

Laske 1° rajat, 2° tutki kummalla puolen x-akselia käyrä on esim. piirtämällä kuvaaja, 3° laske ala.

6.1.1. Laske käyrän $y = x^2$, x-akselin sekä suorien x = 1 ja x = 2 rajoittaman alueen ala.
2. Laske paraabeli $y = x^2 + 3$, x-akselin sekä suorien x = -1 ja x = 2 rajoittaman alueen ala.
3. Laske sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat $y = \sqrt{x + 1}$, y = 0, x = 2 ja x = 5.
4. Laske käyrän $y = x - x^2$ ja x-akselin rajoittaman alueen ala.
5. Laske käyrän $y = - x^2 + 8x - 7$ ja x-akselin rajoittaman alueen ala.
6. Mikä on käyrän $y = x^3 - x$ ja x-akselin rajoittaman, x-akselin yläpuolella olevan alueen ala?

2. Ala, kun käyrä x-akselin alapuolella

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

7. Laske paraabelin $y = x^2 - 6x + 5$ ja x-akselin rajoittaman alueen ala.
8. Laske käyrien $y = \frac{1}{x}$, y = 0, x = -1 ja x = -2 rajoittaman alueen ala.
9. Mikä on a, kun käyrän $y = x^2 - a^2$ ja x-akselin rajoittaman alueen ala on 36?
10. Määritä a, kun suora x = a jakaa käyrien $y = 1 - e^x$, y = 0, x = 0 ja x = 1 rajoittaman alueen kahteen yhtä suureen osaan.

3. Ala, kun käyrää molemmilla puolilla x-akselia
Laske rajat ja piirrä kuvaaja. Jos kuvaaja on x-akselin alapuolella välillä [a,c] ja yläpuolella välillä [c,b], on

$$A = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

11. Laske käyrän $y = x - x^3$ ja x-akselin rajoittaman 2-osaisen kuvion ala.
12. Laske käyrän $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ ja x-akselin rajoittaman 2-osaisen alueen ala.
13. Laske käyrän $y = e^x - 2$, x-akselin, y-akselin ja suoran x = 3 rajoittaman 2-osaisen alueen ala.
14. Laske käyrän y = sin x ja x-akselin välillä $[0,2\pi]$ rajoittaman 2-osaisen alueen ala.

4. Parillisen funktion ja x-akselin välisen alan laskeminen origon suhteen symmetrisellä välillä [-a,a]

$A = \pm\int_{-a}^{+a} f(x)dx = \pm 2\cdot\int_0^a f(x)dx$. + merkki, jos f(x) > 0 ja - merkki, jos f(x) < 0

15. Laske käyrän $y = 16 - x^4$ ja x-akselin rajoittaman alueen ala.

5. Parittoman funktion ja x-akselin välisen alan laskeminen origon suhteen symmetrisellä välillä [-a,a]

$A = 2\cdot\int_0^a f(x)dx$, jos käyrä on tällä välillä [0,a] x-akselin yläpuolella.

16. Laske käyrän $y = x^3 - x$ ja x-akselin välisen alueen pinta-ala.
17. Laske käyrän $y = x^5 - 5x^3 + 4x$ ja x-akselin rajoittaman alueen ala.

6.2. Ala pinta-alkioiden summana

1. Differentiaalinen tarkastelu alan laskemiseksi
Muodostetaan kapea pystysuora suikale (leveys dx). Lasketaan sen korkeus h(x).
Suikaleen ala on dA = h(x)dx. Koko ala on A = $\sum$ h(x) dx $\rightarrow$ $A = \int_a^b h(x)dx$
Samaa ideaa voi käyttää paitsi alalle, myös tilavuudelle, työlle, matkalle, voimalle, energialle,…

6.3. Kahden käyrän välinen pinta-ala

1. Kahden käyrän välisen alan laskemistapa
Laske käyrien leikkauspisteet (a ja b).
Piirrä kuvaajat, josta saat selville kumpi käyristä kulkee korkeammalla (olkoon f(x) > g(x)).
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

6.3.1. Laske sen alueen ala, jota rajoittavat käyrät $y = x^2 + 3$, $y = x^2 - 4$, $x = -1$ ja $x = 3$.
2. Laske suoran $y = 3x + 4$ paraabelista $y = x^2$ erottaman alueen ala.
3. Laske paraabelien $y = x^2 - x - 1$ ja $y = -x^2 + x + 3$ rajoittaman alueen ala.
4. Laske käyrien $xy = 4$ ja $x + y = 5$ rajoittaman alueen ala.
5. Laske sen alueen ala, jota rajoittavat $y = e^x$, $y = e^{2x} - e^x$ ja y-akseli.

6.4. Käyrän ja y-akselin välinen alue.

1. Integroiminen y-akselia pitkin
Laske rajat (a, b). Piirrä kuvaaja (kummalla puolella y-akselia). Käyrä yleensä muotoa $x = x(y)$.
$A = \int_a^b x(y)dx$, jos käyrä on y-akselin oikealla puolella.

6.4.1. Laske käyrän $x = 4 - y^2$ ja y-akselin rajoittaman alueen ala.
2. Laske paraabelin $y^2 = 2x + 1$ ja suoran $x - y = 1$ rajoittaman alueen ala.
3. Laske käyrän $y = \ln x$, y-akselin sekä suorien $y = 0$ ja $y = 1$ rajoittaman alueen ala.

2. Muuttujan vaihto alan laskemiseksi
Vaihda $x \leftrightarrow y$, jolloin pääsee laskemaan näin saadun käyrän ja x-akselin välistä alaa, mikä tutumpaa.

4. Laske 6.4.3. vaihtamalla $x \leftrightarrow y$.

6.5. Käyrän rajoittama silmukka

1. Käyrän yhtälön määrittelevät kaksi funktioa
Ratkaistaan y. Jos tulee kaksi mahdollisuutta $y = \pm y(x)$, niin $f(x) = + y(x)$ ja $g(x) = - y(x)$

6.5.1. Mitkä funktiot määrittelevät ympyrän $x^2 + y^2 = 16$?
2. Minkä käyrän määrittelevät funktiot $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ ja $g(x) = -\sqrt{8 - 2x^2}$?

2. Silmukan alan laskeminen
Lasketaan ylemmän käyrän ja symmetria-akselin välinen ala, joka kerrotaan kahdella.

3. Laske silmukan $y^2 = 4x^2 - x^4$ pinta-ala.
4. Laske käyrän $y^2 = x(1 - x)^2$ muodostaman silmukan pinta-ala.

6.6. Pyörähdyskappaleen tilavuus

1. Tilavuus, kun käyrä pyörähtää x-akselin ympäri
$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

6.6.1. Paraabelin $y = x^2$, x-akselin ja suoran $x = 2$ rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske tilavuus.
2. Paraabelin $y = 3x - x^2$ ja x-akselin rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske tilavuus.
3. Käyrä $y = \sqrt{x(2 - x)}$ ja $y = 0$, joka pyörähtää x-akselin ympäri. Laske tilavuus.
4. Käyrän $y^2 = x(4 - x)^2$ muodostama silmukka pyörähtää x-akselin ympäri. Laske tilavuus.

2. Tilavuus, kun käyrä pyörähtää y-akselin ympäri
$$V = \pi \cdot \int_a^b [x(y)]^2 dy$$

5. Käyrän $y = x^2$ ja $y = 8$ välinen alue pyörähtää y-akselin ympäri. Laske tilavuus.
6. Käyrän $y^2 = 4 - 2x$ ja y-akselin välinen alue pyörähtää y-akslin ympäri. Laske tilavuus.
7. Käyrien $y = \ln(x + 1)$, $y = 1$ja $x = 0$ välinen alue pyörähtää y-akselin ympäri. Laske tilavuus.
8. Ellipsi $x^2 + 4y^2 = 1$ pyörähtää y-akselin ympäri. Laske ellipsoidin tilavuus.

3. Tilavuus, kun kappaleella on ulko- ja sisäpinta
Lasketaan koko ulkopinnan sisään jäävä tilavuus ja sisäpinnan sisälle jäävä tilavuus.
Kappaleen kokonaistilavuus on näiden erotus.

9. Käyrien $y = x^2$ ja $y = \frac{3}{4}x^2 + 1$ rajoittama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske tilavuus.
10. Käyrien $y = x^2$ ja $y = \frac{3}{4}x^2 + 1$ rajoittama alue pyörähtää y-akseli ympäri. Laske tilavuus.
11. Käyrien $4y = x^2$ ja $y = x$ välinen alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske tilavuus.
12. Ympyrän $x^2 + y^2 = 4$ ja suoran $y = x + 2$ välinen pienempi segmentti pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.

4. Pallon tilavuuden kaavan johtaminen
Pallo syntyy, kun ympyrä pyörähtää x-akselin ympäri.

5. Tilavuuden laskeminen, kun käyrä pyörähtää x-akselin suuntaisen suoran y = a ympäri.
Lasketaan differentiaalinen tilavuusalkio dV, jota sitten integroidaan rajalta rajalle
TAI käytetään kaavaa $V = \pi \cdot \int_a^b [f(x) - a]^2 dx$

13. Suoran $y = x - 2$ ja suorien $x = 1$ ja $y = 2$ rajoittama alue pyörähtää suoran $y = 2$ ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.
14. Paraabelin $y = 4x - x^2$ ja suoran $y = 3$ rajoittama alue pyörähtää suoran $y = 3$ ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.

6. Tilavuuden laskeminen, kun pyörähdysakselina y-akselin suuntainen suora x = a.
Lasketaan differentiaalinen tilavuusalkio dV, jota sitten integroidaan rajalta rajalle.
TAI käytetään kaavaa $V = \pi \cdot \int_a^b [x(y)]^2 dy$

15. Paraabelin $y = 4x - x^2$ ja x-akselin rajoittama alue pyörähtää suoran $x = 2$ ympäri. Laske tilavuus.
16. Käyrän $y = x^3$, x-akselin ja suoran $x = 2$ välinen alue pyörähtää suoran $x = 2$ ympäri. Laske tilavuus.

7. Tilavuuden laskeminen, kun tunnetaan integroimisakselia vastaan kohtisuorien poikkileikkausten ala
$V = \int_a^b A(x)dx$

17. Välillä [1,3] kappaleen x-akselia vastaan kohtisuorien poikkileikkausten ala jokaisella kohdalla x on $A(x) = 3x^2 + 4x + 5$. Mikä on kappaleen tällä välillä olevan osan tilavuus?
18. Kappaleen pohjana on ympyrä $x^2 + y^2 = 4$. Kun kappaletta leikataan x-akselia vastaan kohtisuoralla tasolla on poikkileikkauskuvio a) neliö b) tasasivuinen kolmio. Laske kappaleen tilavuus.
19. Kappaleen pohja on paraabelin $y^2 = 4x$ ja suoran $x = 4$ välinen alue sekä x-akselia vastaan kohtisuorat poikkileikkauskuviot ovat a) neliöitä b) tasasivuisia kolmioita. Laske kappaleen tilavuus.

8. Lieriön tilavuuden kaavan johtaminen
Olkoon x-akseli pohjia vastaan kohtisuora suora.
Sitä vastaan kohtisuorat poikkileikkausalat ovat kaikki yhtäsuuret = A.
Edellisen kohdan 6.6.7. perusteella lasketaan tilavuus = Ah

9. Kartion tilavuuden kaavan johtaminen
Valitaan x-akseliksi huipun kautta pohjaa vastaan kohtisuoraan menevä suora.
Sitä vastaan kohtisuorat poikkileikkaukset ovat pohjan kanssa yhdenmuotoisia korkeuksien suhteessa.
Tilavuus saadaan kaavan 6.6.7. perusteella.

7. Epäoleelliset integraalit.

7.1. Integroimisväli on ääretön

1. Määrätyn integraalin $\int_a^\infty f(x)dx$ dx laskeminen eli kun integroimisraja on ∞ .

Lasketaan ensin määrätty integraali $\int_a^M f(x)dx$ ja sitten sille raja-arvo, kun $M \to \infty$.

7.1.1. Laske a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$ b) $\int_2^\infty \frac{2}{x^2}dx$ c) $\int_3^\infty \frac{1}{x}dx$ d) $\int_4^\infty \sqrt{\frac{1}{x}}dx$ e) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^4}dx$

2. Laske käyrän $y = \frac{1}{2x^2}$ ja x-akselin välisen alueen ala alueella $x \geq 1$

3. Käyrän $y = \frac{2}{x}$, x-akselin sekä suorien x = 2 ja x = a välisen alueen pyörähtää x-akselin ympäri. a) Mikä on tilavuus, kun a = 10? b) Millä a:n arvolla tilavuus on 1,9π. c) Mikä on tilavuuden raja-arvo, kun $a \to \infty$?

7.2. Funktion arvoa ei määritelty integroimisvälillä

> 1. Määrätyn integraalin arvon laskeminen, kun integroitavaa funktiota ei ole määritelty integroimisvälillä.
> Lasketaan ensin määrätty integraali kohtaan m asti, joka on lähellä määrittelemättömyyskohtaa.
> Lasketaan sitten raja-arvo, kun m lähestyy tätä kohtaa.

7.2.1.Laske a) $\int_0^1 \frac{1}{x^{½}}dx$ b) $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^2}dx$ c) $\int_0^3 \sqrt[3]{\frac{1}{x}}dx$ dx.

2. Laske $\int_{-1}^8 \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}dx$

8. Muita sovelluksia.

8.1. Matka ja nopeus.

> 1. Kappaleen sijaintifunktio, kun tunnetaan sen nopeus
> $s(t) = \int_{t_0}^t v(t)dt$

8.2. Voiman tekemä työ

> 1. Työn laskeminen, kun tunnetaan tarvittava voima jokaisella kohtaa
> $W = \int_a^b F(x)dx$

8.3. Jousen potentiaalienergia

> 1. Harmonisen voiman tekemä työ
> F(x) = kx, jolloin $W = \int_o^s kx\,dx = ½ks^2$

8.4. Nosto avaruuteen

> 1. Nostotyön laskeminen, kun otetaan huomioon maan vetovoiman pieneneminen
> Maan vetovoima pienenee korkeammalle siirryttäessä vetovoimalain mukaisesti $F(x) = \gamma\frac{mM}{x^2}$
> $W = \int_R^{R+h} F(x)dx$

8.5. Liike-energia

> 1. Tehtävän työn suuruus, jotta kappale saisi nopeuden v
> $dW = F\,ds = m\frac{dv}{dt}ds = mv\,dv$ $W = \int_0^{v_0} mv\,dv = ½mv_0^2$

8.6. Levyn painopiste

1. Tasapaksun levyn painopisteen koordinaattien laskeminen
Painopisteessä olevan kappaleen massaisen pistemassan momentti on sama kuin koko kappaleen momentti. Levyn ollessa tasapaksu on massa verrannollinen pinta-alaan, jolloin massana voi pitää alaa.

$$A \cdot x_p = \int_a^b x\,dA$$

8.7. Vaihtovirta

1. Vaihtovirran tekemä työ

$$W = \int_0^T ui\,dt$$

2. Vaihtovirran tehollisarvo
= se tasavirta, joka tekee jakson aikana saman työn kuin vaihtovirta.

8.8. Jatkuva jakauma todennäköisyyslaskennassa

1. Tietyllä alueella olemisen suhteellisen osuuden laskeminen tiheyskäyrän avulla
Lasketaan kyseisellä välillä oleva tiheyskäyrän ja x-akselin välinen ala ja koko alueen ala.
Suhteellinen osuus on kysytyn alueen alan ja koko alan suhde.

Vastaukset esimerkkitehtäviin

1.1.1. on
2. on
3. a) $e^x(\sin x + \cos x)$
b) $x(2\cos x - x\sin x)$

1.2.1. $4x^2 - 5$
2. $x^2 + 3x - 28$
3. $2x^2 - 5x + 5$
4. $x - x^2 + 10$
5. $2x^2 - 5x + 3$
6. $x^2 - 6x + 13$
7. $x^2 - 6x + 25$
8. $x^2 + 4x + 7$
9. $x^3 - 3x^2 + 5$; 1
10. $x^2 - 6x + 5$

1.3.1. a) $\frac{1}{3}x^3$ b) $\frac{1}{4}x^4$ c) $\frac{1}{5}x^5$ d) $\frac{1}{6}x^6$
e) $-x^{-1}$ f) $\frac{-1}{2x^2}$ g) $\frac{-1}{3x^3}$ h) $½x^2$ i) x
2. a) $\frac{1}{3}x^3 + ½x^2$ b) $\frac{1}{4}x^4 + \ln|x|$
c) $\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4$
3. a) $2x^3$ b) $2x^5$ c) $½x^4$ d) $\frac{1}{8}x^4$
4. a) $x^3 - 2x^2 + 5x$
b) $x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 5x$
c) $4x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 22x$
5. a) $x^3 - x^2 - 8x$ b) $\frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 9x$
c) $1½x^2 - 4x + 5\ln|x|$

2.2.1. 46,69 ; 40,60
2. 3,05
3. 44,07
4. 155 m

2.3.1. a) 6 b) 8 c) $½\pi$
2. a) 6 b) 0

3.1.1. 0
2. a) 1 b) 2½
3. -12
4. 0
5. [6,9]
6. -1/e ; -2
7. 3
8. 14

3.2.1. a) $½x^2 - x + ½$ b) $x^2 + 3x$
2. a) sin x b) $\sin x \cdot e^x$
3. a) 0 b) 8
4. 4x ; $2x^2$
5. a) $2x^2 - 2$ b) $2x^2 - 8$
c) $2x^2 - 18$
6. a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
b) $2x^3 + 2x^2 + 2x + 12$
7. $x^3 - 1$; 7
8. $x^4 - 1$; 15
9. a) 33 b) 3
10. a) - 4 b) 90
11. a) 9 b) 4 c) 10/3 d) 27
12. a) a = 2, a = - 3 b) a = - 1, a = 0, a = 2
13. 6
14. $-2 \le a \le 2$
15. $n \ge 100$
16. a = 2, b = 3
17. 5
18. a) 5 b) 12½ c) 24
19. 46

3.3.1. $x^3 - x^2 - x - 39$
2. $2x^2 + 5x - 95$

3.4.3. -3
4. a) $18\frac{2}{15}$ b) $2(e^4 - 1)$ c) 0
7. a) 0 b) 0 c) 0

4.1.1. a) $\frac{1}{11}x^{11}$ b) $\frac{-1}{9x^9}$ c) $\frac{2}{5}x^{2½}$
d) $\frac{3}{5}x^{5/3}$ e) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ f) $\frac{3}{4}x^{4/3}$
2.a)15 b) $4\frac{2}{3}$ c) 12,4 d) 11¼ e)4
3. $3x^3 - 6x^2 + 4x + C$ b) 1 c) 0
4. $4x^3 + 7½x^2 - 59$

4.2.1. a) $\frac{1}{3}(3x - 2)^3$ b) $(3x - 2)^3$
c) $¼(x^2 + 1)^4$ d) 31
2. $(4 + 5x)^7 + 1$
3. a) $\frac{1}{8}(2x - 1)^4$
b) $\frac{1}{36}(3x^2 + 4)^6$ c) $\frac{-1}{15}(1 - x^3)^5$
d) $\frac{1}{8}(x^2 - 2x)^4$
4. a) $\frac{2}{5}$ b) $213\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{15}$ d) $\frac{18}{25}$
5. $¾(x^2 + 1)^4 - 10$

6. a) $\frac{1}{3}(2x + 3)\sqrt{2x + 3}$
b) $\sqrt{x^2 + 3}$
c) $\frac{1}{4}(3x + 4)\sqrt[3]{3x + 4}$
7. a) $8\frac{2}{5}$ b) $130\frac{2}{3}$ c) $5\frac{5}{8}$
8. $3\sqrt{x^2 + 5} - 8$

4.3.1. a) $2\ln|x|$ b) $3\ln|x|$
c) $3x - 4\ln|x| - \frac{5}{x}$
2. a) $4\ln 2$ b) $-5\ln 2$
c) $2 + \ln 2 - \ln 3$
3. a) $\ln|2x + 1|$ b) $2\ln(x^2 + 1)$
c) $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 4x + 5)$
d) $x + \ln(x^2 + 2x + 3)$
4. a) $2\ln 7/4$ b) $\frac{1}{2}\ln 2$ c) $2\ln 3$
5. $x^2 + \frac{1}{2}\ln(2x - 3) - 1$

4.4.1. a) $e^x + x^2$ b) $2e^x - \frac{1}{e+1}x^{e+1}$
2. a) $3e - 5$ b) $2 - e$
3. $4e^x - x^3 - 3$
4. a) $\frac{1}{4}e^{4x}$ b) $1\frac{1}{2}e^{2x}$ c) $-2e^{-x}$
d) $-e^{1-3x}$ e) $1\frac{1}{2}e^{x^2+1}$
5. a) $2(e^2 - 1)$ b) $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$
c) $\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{2}e - \frac{3}{4}$ d) $\ln\frac{1}{2}(e + 1)$
6. $2\sqrt{e^x + 2} - \sqrt{3}$
7. $x - \ln(e^x + 1)$
8. $\ln(e^x + 1)$
9. a) $\frac{1}{\ln 2}2^x$ b) $\frac{1}{\ln 6}6^x + \frac{4}{\ln 2}2^x$
10. a) $\frac{2}{\ln 3}$ b) $\frac{12}{\ln 2}$
11. a) $\frac{3^x}{3\ln 2}$ b) $\frac{-3^{-2x}}{2\ln 3}$
12. a) $\frac{21}{2\ln 2}$ b) $\frac{4}{3\ln 3}$

4.5.1. a) $3\sin x$ b) $2\pi + 5$
2. a) $\frac{1}{2}\sin 2x$ b) $-\frac{22 + 11\sqrt{2}}{15}$
3. a) $-2\cos x$ b) 4
4. a) $-\frac{1}{3}\cos 3x$ b) 8
5. $4\sin 2x - 2\cos 3x + 2 + \sqrt{2}$
6. a) $\frac{1}{3}\sin^3 x$ b) $-\frac{1}{4}\cos^4 x$
c) $-\frac{2}{3}\cos^3 x$ d) $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$
7. a) $2\tan x$ b) $3x - 2\tan x$
c) $2x - \tan x$ d) $\frac{1}{\cos x}$
8. a) $2\tan x$ b) $x + \tan x$
c) $\tan x - x$
9. a) $\frac{1}{2}\pi$ b) π c) $\frac{1}{4}\pi$

5.1.1. a) $2(x - 1)e^x$
b) $\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$ c) $4\ln 2 - 1\frac{1}{2}$
d) $3\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{3}{4}$

2. a) $(3x + 1)e^x$ b) e
3. a) $\frac{1}{15}(2x + 1)(3x - 1)\sqrt{2x + 1}$
4. a) $e^x(x^2 - 2x + 2)$
b) $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$

5.2.1. a) $x^2 - 4x + 4\frac{1}{2}\ln|2x + 1|$
b) $\frac{1}{2}x^2 + x + \ln(x^2 + 1)$
2. a) $\ln\frac{|x|}{|x+1|}$ b) $\ln\frac{(x - 1)^2}{|x|}$
c) $\ln\frac{|x + 1|}{|x + 2|}$

5.3.1.a)
$F(x)=\begin{cases} x^2 - 6x + C, & x \geq 3 \\ 6x - x^2 - 18 + C, & x < 3 \end{cases}$
b) $F(x) = \begin{cases} x^4 + 2x^2 + C, & x \geq 0 \\ -x^4 - 2x^2 + C, & x < 0 \end{cases}$
c) $F(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + C, & x \leq 0 \\ -x^3 + 3x^2 + C, & 0<x<2 \\ x^3 - 3x^2 + 8 + C, & x \geq 2 \end{cases}$
2. a) $F(x)=\begin{cases} x^2 - x + C, & x < 0 \\ x^3 - 2x^2 + C, & x \geq 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + C, & x < 2 \\ x^2 - 3x + 2 + C, & x \geq 2 \end{cases}$
3. $F(x)=\begin{cases} 2x^2 - 12x + 28, & x \geq 3 \\ -2x^2 + 12x - 8, & x < 3 \end{cases}$
4. $F(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x - 4, & x < 1 \\ x^3 - x^2 - 5, & x \geq 1 \end{cases}$
5. -12

6.1.1. $2\frac{1}{3}$
2. 12
3. $4\sqrt{6} - 2\sqrt{3}$
4. $\frac{1}{6}$
5.36
6. ¼
7. $10\frac{2}{3}$
8. $\ln 2$
9. ±3
10. $a \approx 0,7429$
11. ½
12. ½
13. $e^3 + 4\ln 2 - 9$
14. 4
15. 51,2
16. ½
17. $6\frac{1}{3}$

6.3.1. 28
2. $20\frac{5}{6}$
3. 9
4. $7\frac{1}{2} - 4\ln 4$
5. ½

6.4.1. $10\frac{2}{3}$
2. $5\frac{1}{3}$
3. $e - 1$
4. $e - 1$

6.5.1. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$,
$g(x) = -\sqrt{16 - x^2}$
2. $2x^2 + y^2 = 8$
3. $10\frac{2}{3}$
4. $\frac{8}{15}$

6.6.1. $\frac{32\pi}{5}$
2. $\frac{81\pi}{10}$
3. $\frac{4\pi}{3}$
4. $\frac{64\pi}{3}$
5. 32π
6. $\frac{128\pi}{15}$
7. $\frac{\pi(e^2 - 4e + 5)}{2}$
8. $\frac{2\pi}{3}$
9. $\frac{32\pi}{5}$
10. $\frac{4\pi}{3}$
11. $\frac{128\pi}{15}$
12. $\frac{8\pi}{3}$
13. 9π
14. $\frac{16\pi}{5}$
15. 8π
16. $\frac{16\pi}{5}$
17. 52
18. a) $\frac{128}{3}$ b) $\frac{32\sqrt{3}}{3}$
19. a) 128 b) $32\sqrt{3}$

7.1.1. a)½ b) 1 c) ei d) ei e) 1/24
2. ½
3. a) 8p/5 b) 40 c) 2p

7.2.1. a) 2 b) ei c) ei
2. 9

Koetehtäviä aiemmilta vuosilta

90.1.1. Olkoon F(x) = $(x + \frac{1}{x})^2$ ja G(x) = $x^2 + \frac{1}{x^2}$. Ovatko F ja G saman funktion integraalifunktioita? [ovat]

90.1.2. Määritä a) $\int [\sin(x) + \cos(x) + e^x - \frac{1}{x}]dx$ b) $\int \frac{x^4+7}{x^3}dx$ c) $\int (2-3x)^4 dx$
[a)sin x - cos x + e^x - ln |x| + C b) ½x^2 - 3½x^{-2} + C c) - $\frac{1}{15}$ $(2 - 3x)^5$ + C]

90.1.3. Määritä funktion f(x) = $\frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$ se integraalifunktio, jolle F(2) = 5. [½$\sqrt{2x^2+1}$ + 3½]

90.1.4. Määritä se toisen asteen polynomifunktio f, jolla on seuraavat ominaisuudet f(0) = f ' (1) = 1 ja F(1) = F(-1), kun funktio F on funktion f integraalifunktio. [- $3x^2$ + 7x + 1]

90.1.5. Laske $\int (1-x)^2\sqrt{x}\,dx$ [$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ - $\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}$ + $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}$+ C]

90.1.6. Etsi funktiolle f(x) = $\frac{e^{nx}}{e^{nx}+3}$ se integraalifunktio, joka n:n arvolla 2 ja x:n arvolla 0 saa arvon ln 6.
[$\frac{1}{n}$ln $(e^{nx} + 3)$ + ln 3]

90.1.7. Funktiolla f(x) = $e^{|x|}$ + 1 on integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen (1,e) kautta. Piirrä tämän integraalifunktion kuvaaja. [F(x) = $\begin{cases} e^x + x - 1, & \text{kun } x \geq 0 \\ -e^{-x} + x + 1, & \text{kun } x < 0 \end{cases}$]

90.2.1. Laske a) $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ b) $\int_2^\infty \frac{dx}{(2x-1)^2}$ [a) 2 b) $\frac{1}{6}$]

90.2.2. Millä a:n arvoilla $\int_0^2 (3x^2 + ax + a)dx$ on positiivinen? [a > - 2]

90.2.3. Laske suoran y = x + 1 paraabelista y = x^2 - 1 erottaman segmentin pinta-ala. [4½]

90.2.4. Laske sen kappaleen tilavuus, joka muodostuu, kun käyrän y = x^2 + 2 ja suoran y = 6 rajoittama alue pyörähtää y-akselin ympäri. [8π]

90.2.5. Millä a:n arvolla funktio f(x) = a · cos x , kun -½π ≤ x ≤ ½π on jatkuvan satunnaismuuttujan x tiheysfunktio? Laske P(x > ¼π) . Määritä kertymäfunktio. [a = ½ ; ½(1 - ½$\sqrt{2}$) ; ½sin x + ½]

90.2.6. Kuinka suuri on sen kaksiosaisen kahdeksikon muotoisen alueen pinta-ala, jota rajoittavat viivat y = x^2 , y = - 3x + 4 ja y = 4 ? [16½]

90.2.7. Piirrä funktion f(x) = $\int_0^x |t-2|\,dt$ kuvaaja. [f(x) = $\begin{cases} 2x - \frac{1}{2}x^2, & \text{kun } x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$]

92.1.1. Määritä a) $\int (2x^3 + 6x^2 - 8x - 10)dx$ b) $\int (\sin x + \cos x + \tan^2 x)dx$ c) $\int (3e^x + \frac{4}{x})dx$
[a) ½x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 10x + C b) - cos x + sin x + tan x - x + C c) 3e^x + 4ln | x | + C]

92.1.2. Mikä on funktion f(x) = 6x^2 - ½ x + 1 se integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen (2,-3) kautta? [2x^3 - ¼x^2 + x - 20]

92.1.3. Olkoon $\int f(x)dx$ = x^3 + 2x^2 - 3x - 4 . Määritä f(2). [17]

92.1.4. Mikä on a, kun funktion f(x) = x + a on integraalifunktio F toteuttaa ehdot F(0)=10 ja F(1)=11. [a=½]

92.1.5. Määritä funktion f integraalifunktiot, kun $f'(x) = e^{-x} + e^{2x-1}$ ja f(0) = 1. [$e^{-x} + \frac{1}{4}e^{2x-1} + 2x - \frac{x}{2e} + C$]

92.1.6. Määritä a) $\int \frac{8x^2}{2x-1}dx$ b) $\int \left(\frac{x}{x^3+1}\right)^2 dx$ [a) $2x^2 + 2x + \ln|2x-1| + C$ b) $\frac{-1}{3(x^3+1)} + C$]

92.1.7. Funktiolla f(x) = 3x + | 5x - 10 | on integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen (1,2) kautta. Määritä F(3). [$F(x) = \begin{cases} 4x^2 - 10x + 13, & \text{kun } x \geq 2 \\ -x^2 + 10x - 7, & \text{kun } x < 2 \end{cases}$; 19]

92.2.1. Laske $\int_1^4 6x(x+1)dx$ [171]

92.2.2. Laske viivojen $y = 1 - 2e^x$, x = 0 , y = 0 ja x = 2 rajoittaman äärellisen alueen pinta-ala. [$2e^2 - 4$]

92.2.3. Ratkaise a yhtälöstä $\int_0^a (ax-2)dx = a$. [0 ; $\pm\sqrt{6}$]

92.2.4. Käyrän $y = x^2 - x - 2$ ja x-akselin välinen suljettu alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus. [$\frac{81}{10}\pi$]

92.2.5. Käyrä $y = \frac{1}{x^4}$, y = 1 ja y = a rajoittavat äärellisen alueen, joka pyörähtää y-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus. Mitä arvoa tilavuus lähestyy, kun a lähestyy ääretöntä? [$2\pi(\sqrt{a} - 1)$; ∞]

92.2.6. Arvioi määrätyn integraalin $\int_0^8 \frac{1}{x+1}dx$ arvoa jakamalla integroimisväli 8 yhtä suureen osaan ja laskemalla puolisuunnikasmenetelmällä suikaleiden ala. Kuinka suuri on oikea arvo ja virhe?
(Jos suikaleen reunojen x-koordinaatit ovat x_1 ja x_2, on yhdensuuntaisten kanta-sivujen suuruudet $f(x_1)$ ja $f(x_2)$ sekä ala $A = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot (x_2 - x_1)$) [2,273 ; ln 9 ; 0,176 = 8%]

92.2.7. Laske funktion $f(x)=x^3+ x^2+ x$ ja sen käänteisfunktion kuvaajien rajoittaman äärellisen alueen ala. [$\frac{1}{6}$]

92.3.1. Määritä a) $\int(\cos x - e^x)dx$ b) $\int 6x(x-1)dx$ c) $\int 2x(x^2+1)^3 dx$
[a) $\sin x - e^x + C$ b) $2x^3 - 3x^2 + C$ c) $\frac{1}{4}(x^2 + 1)^4 + C$]

92.3.2. Määritä funktion $f(x) = (3x+1)^2$ se integraalifunktio, joka toteuttaa ehdon F(2) = 3 [$3x^3 + 3x^2 + x - 35$]

92.3.3. Määritä funktion f(x) = 2x - 4 se integraalifunktio, jonka kuvaaja sivuaa suoraa y = f(x). [$x^2 - 4x + 5$]

92.3.4. Määritä a) $\int \frac{4e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$ b) $\int (xe^{x^2} + \sin 3x)dx$ [a) $8\sqrt{e^x + 1} + C$ b) $\frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{3}\cos 3x + C$]

92.3.5. Määritä a ja b, kun funktio $a(2x+1)^5+ b(2x+1)^4$ on funktion $x(2x+1)^3$ integraalifunktio. [$a = \frac{1}{20}$ $b = -\frac{1}{16}$]

92.3.6. Määritä funktion f(x) = 2x - 2 ne integraalifunktiot, jotka ovat kaikkialla positiivisia. [$x^2 - 2x+C$, C > 1]

92.3.7. Funktiolla $f(x)=\begin{cases} 6x^2 + 5, & x \geq 1 \\ 5x^4 + 6, & x < 1 \end{cases}$ on int.funktio, jonka suurin arvo välillä [0,2] on 3. Laske F(-1). [- 30]

92.4.1. Laske $\int_1^4 \frac{x+1}{x}dx$. [3 + ln 4]

92.4.2. Laske käyrän $y = 2x - x^2$ ja x-akselin rajoittaman äärellisen alueen pinta-ala. [$\frac{4}{3}$]

92.4.3. Käyrän $y = \sqrt{5 - x}$, suoran x = 1 ja x-akselin välinen alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus. [8π]

92.4.4. Ratkaise yhtälö $\int_1^a (4x-3)dx = \int_a^{a+1} 2x dx$ [a = 0 , a = 2½]

92.4.5. Laske käyrien $x = 1 - y^2$ ja $x = 3y^2 - 4y - 7$ rajoittaman suljetun alueen pinta-ala. [18]

92.4.6. Kolmion kärkinä ovat pisteet (0,0) , (2,3) ja (3,1). Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy, kun tämä kolmio pyörähtää y-akselin ympäri. [$\frac{35}{3}\pi$]

92.4.7. Kaavasta $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}[\,f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4)...+4f(x_n) + f(b)\,]$ saadaan Simpsonin menetelmällä likiarvo määrätylle integraalille, kun integroimisväli on jaettu parilliseen määrään yhtä leveitä suikaleita ja a, x_1 , x_2 ,..,b ovat x-akselilla olevat jakopisteet ja h on suikaleen leveys. Laske Simpsonin menetelmällä likiarvo määrätylle integraalille $\int_0^8 (1 + x^2)\,dx$ jakamalla integroimisväli 8 yhtä suureen osaan. Mikä on oikea arvo ja virhe? [$178\frac{2}{3}$; 0]

93.1.1. Määritä a) $\int (e^x - \cos 3x)dx$ b) $\int \frac{2x^2+3}{x}dx$ c) $\int \frac{x}{2x^2+3}dx$.

93.1.2. Määritä se funktion f: $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen (-1,2) kautta.

93.1.3. Mikä on funktio f(x) , kun f ' (x) = sin 2x + cos x ja sen nollakohta on $\frac{\pi}{6}$?

93.1.4. Määritä vakiot a, b ja c siten, että funktio f : $f(x) = e^{2x}(ax^2 + bx + c)$ on funktion g : $g(x) = e^{2x}(x^2 + x + 1)$ integraalifunktio.

93.1.5. Määritä funktion f : $f(x) = x^4 - 3x^2 - 3$ ne integraalifunktiot, joiden kuvaajat sivuavat suoraa y = x.

93.1.6. Määritä F(3) - F(1) , kun F on funktion f : f(x) = x + | x - 2 | integraalifunktio.

93.1.7. Määritä se toisen asteen polynomifunktio P , jolle P(-x) = P(x) kaikilla x:n arvoilla ja jonka erään integraalifunktion kuvaaja kulkee pisteiden (0,1) , (1,0) ja (2,5) kautta.

1.a) $\int (e^x - \cos 3x)dx = \int e^x dx - \frac{1}{3}\int 3\cos 3x dx$ = $\mathbf{e^x - \frac{1}{3}\sin 3x + C}$ b) $\int \frac{2x^2+3}{x}dx = \int (2x + \frac{3}{x}dx$ = $\mathbf{x^2 + 3\ln\lvert x\rvert + C}$ c) $\int \frac{x}{2x^2+3}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x}{2x^2+3}dx$ = $\mathbf{\tfrac{1}{4}\ln(2x^2 + 3) + C}$
2. F(x) = $\int \sqrt{2x+3}dx = ½\int 2(2x+3)^{½}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x+3)^{1½} + C = \frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C$ F(-1) = 2 ; $\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1$ + C = 2 ; C = $\frac{5}{3}$; $\mathbf{F(x) = \frac{1}{3}(2x + 3)\sqrt{2x + 3} + \frac{5}{3}}$
3. f(x) = - ½ cos 2x + sin x + C ; $f(\frac{\pi}{6}) = 0$; - ½ cos $\frac{\pi}{3}$ + sin $\frac{\pi}{6}$ + C = 0 ; - ¼ + ½ + C = 0 ; C = - ¼ **f(x) = sin x - ½ cos 2x - ¼**
4. f on g:n integraalifunktio, jos f ' (x) = g(x) . $f'(x) = 2e^{2x}(ax^2 + bx + c) + e^{2x}(2ax + b)$ $= e^{2x}[(2ax^2 + (2b + 2a)x + (2c + b)] = e^{2x}(x^2 + x + 1)$; $\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 1 \\ b + 2c = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} \mathbf{a = ½} \\ \mathbf{b = 0} \\ \mathbf{c = ½} \end{cases}$

5. $F(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^3 - 3x + C$; $F'(x) = k_T = 1$; $x^4 - 3x^2 - 3 = 1$; $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; $t^2 - 3t - 4 = 0$ $\quad t = 4$ tai $t = -1$

$x^2 = 4$ (tai $x^2 = -1$) ; $x = \pm 2$; $y = \pm 2$; $F(2) = 2$; $\frac{32}{5} - 8 - 6 + C = 2$ $\quad C = \frac{48}{5}$; $F(-2) = -2$

$-\frac{32}{5} + 8 + 6 + C = -2$; $C = -\frac{48}{5}$ $\quad \mathbf{F(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^3 - 3x \pm \frac{48}{5}}$

6. $f(x) = \begin{cases} 2 \text{ , kun } x < 2 \\ 2x - 2 \text{ , kun } x \ge 2 \end{cases}$ on itseisarvofkt:na jva. $F(x) = \begin{cases} 2x + C \text{ , kun } x < 2 \\ x^2 - 2x + D \text{ , kun } x \ge 2 \end{cases}$

F on jva kohdassa $x = 2$; $4 + C = 4 - 4 + D$; $D = C + 4$; $F(3) - F(1) = 9 - 6 + C + 4 - 2 - C = \mathbf{5}$

7. Kuvaaja on symmetrinen y-akselin suhteen, ts huippu on y-akselilla, $P(x) = ax^2 + c$

$F(x) = \frac{1}{3}ax^3 + cx + d$; $\begin{cases} F(0) = 1 \\ F(1) = 0; \\ F(2) = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} d = 1 \\ a/3 + c + d = 0 \\ 8a/3 + 2c + d = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} a/3 + c = -1 \ \| \cdot(-2) \\ 8a/3 + 2c = 4 \ \| \cdot 1 \end{cases}$; $2a = 6$; $a = 3$ $\quad 3/3 + c = -1$

$c = -2$; $\mathbf{P(x) = 3x^2 - 2}$

93.2.1. Laske a) $\int_{-1}^{2}(3x-2)^2\,dx$ b) $\int_0^3 \sqrt{9-3x}\,dx$

93.2.2. Käyrä $y = e^{½x}$, positiiviset koordinaattiakselit ja suora $x = 2$ rajoittavat äärellisen alueen. Laske a) alueen pinta-ala b) sen pyörähdyskappaleen tilavuus, joka syntyy, kun em. alue pyörähtää x-akselin ympäri.

93.2.3. Paraabelin $y = 2x - x^2$ pisteeseen (0,0) piirretään paraabelin normaali, joka rajoittaa paraabelin kanssa äärellisen alueen. Laske alueen pinta-ala.

93.2.4. Funktio $f(x) = a(2x - x^2)$, kun $0 \le x \le 2$, on erään jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio. Määritä vakio a ja laske todennäköisyys $P(\underline{x} > 1½)$. Mikä on kertymäfunktio?

93.2.5. Määritä ne toisen asteen polynomifunktiot P, joille $P(0) = 1$ ja $\int_0^1 P(x)dx = \int_1^2 P(x)dx$.

93.2.6. Positiiviset koordinaattiakselit ja käyrä $y = \sqrt{a - x}$, $a > 0$, rajoittavat äärellisen alueen. Kun tämä alue pyörähtää x-akselin ympäri, syntyy pyörähdyskappale ja toinen, kun alue pyörähtää y-akselin ympäri. Millä a:n arvoilla nämä kaksi kappaletta ovat tilavuudeltaan yhtä suuret?

93.2.7. Mikä on määrätyn integraalin $\int_1^3 (x+t)^4\,dt$ pienin arvo?

1.a) $\int_{-1}^{2}(3x-2)^2dx = \int_{-1}^{2}(9x^2 - 12x + 4)dx = \left[3x^3 - 6x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} = (24 - 24 + 8) - (-3 - 6 - 4) = \mathbf{21}$

b) $\int_0^3 \sqrt{9-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\int_0^3 -3(9-3x)^{½}dx = -\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}(9-3x)^{1½}\right]_0^3 = -\frac{2}{9}\left[(9-3x)\sqrt{9-3x}\right]_0^3 = 0 + \frac{2}{9}\cdot 9 \cdot 3 = \mathbf{6}$

2.a) $A = \int_0^2 e^{½x}dx = 2\int_0^2 ½e^{½x}dx = 2\cdot\left[e^{½x}\right]_0^2 = \mathbf{2(e-1)}$ b) $V = \pi\int_0^2 (e^{½x})^2dx = \pi\int_0^2 e^x dx = \pi\left[e^x\right]_0^2 = \mathbf{\pi(e^2 - 1)}$

3. $k_T = y'(0) = 2$; $k_N = -½$; normaali $y = -½x$. LP: $y = -½x$ ja $y = 2x - x^2$; $-½x = 2x - x^2$; $x^2 - 2½x = 0$

$x = 0$ tai $x = 2½$; $A = \int_0^{2½}(2x - x^2 - (-½x))dx = \left[\frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{2½} = \frac{5}{4}\cdot\frac{25}{4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{125}{8} = \mathbf{\frac{125}{48}}$

4. 1° f on JVA 2° $f(x) \ge 0$, jos $a \ge 0$ 3° TDN = 1 $\int_0^2 a(2x - x^2)dx = \left[a(x^2 - \tfrac{1}{3}x^3)\right]_0^2 = a(4 - \frac{8}{3}) = \frac{4a}{3} = 1$, jolloin $a = \mathbf{\frac{3}{4}}$

Kertymäfunktio $F(x) = \int_0^x a(2t - t^2)dt = a\left[t^2 - \tfrac{1}{3}t^3\right]_0^x = \frac{3}{4}(x^2 - \frac{1}{3}x^3) = \mathbf{¾x^2 - ¼x^3}$

$P(x > 1½) = 1 - P(x \le 1½) = 1 - F(1½) = 1 - ¾(1½)^2 + ¼(1½)^3 = \mathbf{\frac{5}{32}}$

5. Olk. P(x) = $ax^2 + bx + c$; P(0) = 1; c = 1 ; $\int_0^1 (ax^2+bx+1)dx = \int_1^2 (ax^2+bx+1)dx$; $\left[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+x\right]_0^1 = \left[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+x\right]_1^2$; $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+1 = (\frac{8a}{3}+2b+2) - (\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+1)$; b = - 2a P(x) = **$ax^2 - 2ax + 1$, $a \neq 0$**
6. Mj: $x \le a$. Kun x = 0 , on y = $\sqrt{a}$ Käyrät $y = \sqrt{a-x}$ ja $x = a - y^2$; $V_x = V_y$; $\pi\int_0^a (\sqrt{a-x})^2 dx = \pi\int_0^{\sqrt{a}} (a-y^2)^2 dy$; $\int_0^a (a-x)dx = \int_0^{\sqrt{a}} (a^2-2ay^2+y^4)dy$ $\left[ax - \frac{1}{2}x^2\right]_0^a = \left[a^2y - \frac{2}{3}ay^3 + \frac{1}{5}y^5\right]_0^{\sqrt{a}}$; $\frac{a^2}{2} = \frac{8a^2\sqrt{a}}{15}$; (a = 0) tai $\sqrt{a} = \frac{15}{16}$; a = $\mathbf{\frac{225}{256}}$
7. f(x) = $\int_1^3 (x+t)^4 dt = \left[\frac{1}{5}(x+t)^5\right]_1^3$ = $\frac{1}{5}(x+3)^5 - \frac{1}{5}(x+1)^5$; f ' (x) = $(x+3)^4 - (x+1)^4$ f ' (x) > 0 ; $(x+3)^4 > (x+1)^4$; $(x+3)^2 > (x+1)^2$; $x^2 + 6x + 9 > x^2 + 2x + 1$; 4x > -8 ; x > - 2 Siis f:n pienin arvo saadaan, kun x = - 2 , Pienin arvo = $\frac{1}{5}(1)^5 - \frac{1}{5}(-1)^5 = \mathbf{\frac{2}{5}}$.

95.1.1. Laske a) $\int(\sin x - x)dx$ b) $\int(1+\sqrt{x})^2 dx$

95.1.2. Määritä funktion $f(x) = 2x^2 - 2x - 1$ (x<0) integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen (-1,1) kautta.

95.1.3. Laske paraabelin $y = x^2 - 2x$ ja x-akselin rajoittaman alueen pinta-ala.

95.1.4. Määritä vakio a (>0) siten, että $\int_a^{a^2} (\frac{2}{x})dx = 4$

95.1.5. Määritä a ja b siten, että funktio $ax^3 + (b - x)\ln x$ on funktion $3x^2 - \ln x - 1$ integraalifunktio, kun x > 0.

95.1.6. Laske suoran 2x - 2y - 5 = 0 ja käyrän $y = -\frac{1}{x}$ rajoittaman alueen ala.

95.1.7. Määritä $\int_{-1}^{2} (|x| + 2 - x)dx$

95.1.8. Laske määrätyn integraalin $\int_1^3 x^2 dx$ likiarvo jakamalla integroimisväli 10 yhtä leveään suikaleeseen ja arvioimalla kunkin suikaleen ala suorakulmiolla, jonka korkeus on funktion arvo suikalevälin puolivälissä olevalla x:llä ja leveys suikaleen leveys. Montako % likiarvo poikkeaa oikeasta?

95.1.9. Muodosta jatkuvalle satunnaismuuttujalle $\underline{x}$ jokin kertymä- ja tiheysfunktio, joka täyttää ehdot:
1° $\underline{x} \in [0,2]$ 2° $P(\underline{x} < 1) = 0{,}6$.

95.1.10. Lasten uima-allas on ylhäältä katsottuna ympyrä, halkaisijan ollessa 12 m. Syvyys on keskeltä 1 m. Allas voidaan ajatella syntyneen siten, että mittoihin sopiva paraabeli on pyörähtänyt pystysuoran akselin ympäri. Montako m^3 vettä on täysinäisessä altaassa?

1.a) $\int(\sin x - x)dx = \mathbf{-\cos x - \frac{1}{2}x^2 + C}$ b) $\int(1+\sqrt{x})^2 dx = \int(1 + 2x^{1/2} + x)dx = x + 2\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{3/2} + \frac{1}{2}x^2 + C = \mathbf{x + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 + C}$
2. $f(x) = 2x^2 - 2x^{-1} = 2x^2 - 2\cdot\frac{1}{x}$, x < 0 ; $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2\ln\|x\| + C$; F(-1) = 1 ; $-\frac{2}{3} - 2\ln 1 + C = 1$; $C = 1\frac{2}{3}$ **$F(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2\ln(-x) + 1\frac{2}{3}$**
3. RAJAT: $y = x^2 - 2x = 0$; x(x - 2) = 0 ; x = 0 tai x = 2 . SIJAINTI : YAP, joka NK:ien välillä x-aks. alapuolella $A = -\int_0^2 (x^2 - 2x)dx = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \Big/_0^2 (x^2 - \frac{1}{3}x^3) = (4 - \frac{8}{3}) - (0 - 0) = \mathbf{1\frac{1}{3}}$

4. $\int_a^{a^2}\left(\frac{2}{x}\right)dx = 4$ ||:2 ; $\int_a^{a^2}\left(\frac{1}{x}\right)dx = 2$; $\Big/_{a}^{a^2} \ln x = 2$; $\ln a^2 - \ln a = 2$; $\ln\frac{a^2}{a} = 2$; $\ln a = 2$; $\mathbf{a = e^2}$

---

5. $F(x) = ax^3 + (b - x)\ln x$ ja $f(x) = 3x^2 - \ln x - 1$.

$F'(x) = 3ax^2 + (-1)\cdot\ln x + (b - x)\cdot\frac{1}{x} = 3ax^2 - \ln x + \frac{b}{x} - 1 \equiv 3x^2 - \ln x - 1$; $3a = 3$ ja $b = 0$; **$a = 1$ ja $b = 0$**

---

6. RAJAT: $\begin{cases} 2x - 2y - 5 = 0 \\ y = -\frac{1}{x} \end{cases}$; $2x - 2\cdot(-\frac{1}{x}) - 5 = 0$ ||$\cdot x$; $2x^2 - 5x + 2 = 0$ $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$; $x = 2$ tai $x = ½$

SIJAINTI: Hyperbeli on kupera ylöspäin, joten se on korkeammalla kuin suora

$A = \int_{½}^{2}[(-\frac{1}{x}) - (x - 2½)]dx = \Big/_{½}^{2}(-\ln x - ½x^2 + 2½x) = (-\ln 2 - 2 + 5) - (-\ln ½ - \frac{1}{8} + 1\frac{1}{4}) = \mathbf{1\frac{7}{8} - 2\ln 2 \approx 0,49}$

---

7. $\int_{-1}^{2}(\,|x| + 2 - x\,)dx = \int_{-1}^{0}(-x + 2 - x)dx + \int_{0}^{2}(x + 2 - x)dx = \int_{-1}^{0}(2 - 2x)dx + \int_{0}^{2}(\,2\,)dx =$

$\Big/_{-1}^{0}(2x - x^2) + \Big/_{0}^{2}(\,2x\,) = (0 - 0) - (-2 - 1) + 4 - 0 = \mathbf{7}$

---

8. $\int_1^3 x^2\,dx \approx f(x_1)\cdot Dx + f(x_2)\cdot Dx + ... = 1,1^2\cdot 0,2 + 1,3^2\cdot 0,2 + ... + 2,9^2\cdot 0,2 = \mathbf{8,66}$

$\int_1^3 x^2\,dx = \Big/_{1}^{3} \frac{1}{3}x^3 = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}$; $8,66 - 8\frac{2}{3} = \frac{x}{100}\cdot 8\frac{2}{3}$; **$x = -0,077\%$**

---

9. Alussa ei todennäköisyyttä ts. $P(\underline{x} < 0) = 0$, lopussa todennäköisyys on 1 ts. $P(\underline{x} < 2) = 1$ sekä $P(\underline{x} < 1) = 0,6$. Täten kertymäfunktio saa arvot $F(0) = 0$ ja $F(1) = 0,6$ ja $F(2) = 1$.

Yksi tällainen funktio on se, joka kulkee suoraviivaisesti ko. pisteiden kautta ; $0 \le x \le 1$: $y = 0,6x$

$1 < x \le 2$: $k = \frac{1 - 0,6}{2 - 1} = 0,4$; $y - 1 = 0,4(x - 2)$; $y = 0,4x + 0,2$

$\mathbf{F(x) = \begin{cases} 0,6x\ ,\ 0 \le x \le 1 \\ 0,4x + 0,2\ ,\ 1 < x \le 2 \end{cases}}$ **;** $\mathbf{f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0,6\ ,\ 0 \le x \le 1 \\ 0,4\ ,\ 1 < x \le 2 \end{cases}}$

---

10. Olkoon paraabelin yhtälö muotoa $y = ax^2 - 1$, jolloin y-akseli altaan keskellä ; $y = 0$, kun $x = 6$

ts. $0 = a\cdot 36 - 1$; $a = \frac{1}{36}$; Paraabelin yhtälö on $y = \frac{1}{36}x^2 - 1$; $x^2 = 36(y + 1)$

$V = \pi\int_{-1}^{0}[x(y)]^2\,dy = \pi\int_{-1}^{0} 36(y + 1)\,dy = 36\pi \Big/_{-1}^{0} ½y^2 + y = 36\pi[(0 + 0) - (½ - 1)] = 18\pi \approx \mathbf{56,5\ (m^3)}$

95.2.1. Integroi a) $\int x(\,3x - 4\,)dx$ b) $\int(\,2x + 3\,)^4 dx$

95.2.2. Laske a) $\int_0^3 \sqrt{x + 1}\,dx$ b) $\int_0^{e - 1}\frac{2}{x + 1}dx$

95.2.3. Määritä se funktion $f(x) = \sqrt{x} - 1$ integraalifunktio, joka toteuttaa ehdon $F(4) = 5$.

95.2.4. Laske käyrän $y = (1 + x)(2 - x)$ ja x-akselin rajoittaman alueen ala.

95.2.5. Määritä vakio a siten, että $\int_{-1}^{1}(\,\frac{a}{3}x^2 - 2x\,)dx = 2$

95.2.6. Laske sen pyörähdyskappaleen tilavuus, joka syntyy käyrän $y = \frac{1}{\cos x}$, koordinaattiakselien sekä suoran $x = \frac{\pi}{4}$ rajoittaman alueen pyörähtäessä x-akselin ympäri.

95.2.7. Funktion f kuvaaja sivuaa positiivista x-akselia ja $f'(x) = 3x^2 - 3$. Määritä f(x) sekä ne pisteet, joissa kuvaaja leikkaa koordinaattiakselit.

95.2.8. Laske käyrän $y = e^x$, suorien $y = -x + 1$ ja $x = 2$ sekä x-akselin rajoittaman alueen ala.

95.2.9. Määritä luku a siten, että funktio $f(x) = a(9 - x^2)$, $x \in [-3,3]$ on erään jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio. Laske todennäköisyys $P(\underline{x} > 1)$.

95.2.10. Laske $\int_{-1/t}^{t} (e^{-|x|})dx$, kun t > 0. Määritä tämän määrätyn integraalin raja-arvo, kun t kasvaa rajatta.

1. a) $\int x(3x - 4)dx = \int(3x^2 - 4x)dx = \mathbf{x^3 - 2x^2 + C}$

b) $\int(2x + 3)^4dx = ½\int 2\cdot(2x + 3)^4dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}(2x + 3)^5 + C = \mathbf{\frac{1}{10}(2x + 3)^5 + C}$

2. a) $\int_0^3\sqrt{x + 1}dx = \int_0^3(x + 1)^{½}dx = \Big/_0^3 \frac{2}{3}(x + 1)^{3/2} = \Big/_0^3 \frac{2}{3}(x + 1)\sqrt{x + 1} = \frac{2}{3}\cdot 4\cdot 2 - \frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1 = \mathbf{4\frac{2}{3}}$

b) $\int_0^{e-1}\frac{2}{x + 1}dx = \Big/_0^{e-1} 2\ln(x + 1) = 2\ln(e - 1 + 1) - 2\ln 1 = 2\ln e - 2\ln 1 = 2\cdot 1 - 2\cdot 0 = \mathbf{2}$

3. $f(x) = \sqrt{x} - 1 = x^{½} - 1$; $F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} - x + C = \frac{2}{3}\cdot x\cdot\sqrt{x} - x + C$

$F(4) = 5$; $\frac{2}{3}\cdot 4\cdot 2 - 4 + C = 5$; $C = 3\frac{2}{3}$; $\mathbf{F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + 3\frac{2}{3}}$

4. $y = (1 + x)(2 - x) = 2 + x - x^2$; NK: $1 + x = 0$ tai $2 - x = 0$; $x = -1$ tai $x = 2$; Kuvaaja alasp. auk. par., joka NK:ien välillä x-akselin yläp. $A = \int_{-1}^2(2 + x - x^2)dx = \Big/_{-1}^2 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 = (4 + 2 - \frac{8}{3}) - (-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \mathbf{4\frac{1}{2}}$

5. $\int_{-1}^1(\frac{a}{3}x^2 - 2x)dx = 2$; $\Big/_{-1}^1 \frac{a}{9}x^3 - x^2 = 2$; $(\frac{a}{9} - 1) - (-\frac{a}{9} - 1) = 2$; $\frac{2a}{9} = 2$; **a = 9**

6. $V = \pi\int_0^{\pi/4}(\frac{1}{\cos x})^2dx = \pi\Big/_0^{\pi/4}\tan x = \pi(\tan\pi/4 - \tan 0) = \pi(1 - 0) = \boldsymbol{\pi}$

7. $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f(x) = x^3 - 3x + C$
Huiput: $f' = 0$; $3x^2 - 3 = 0$; $x = \pm 1$, joten sivuamiskohta on $x = 1$
$f(1) = 0$; $1 - 3 + C = 0$; $C = 2$; $f(x) = x^3 - 3x + 2$
x-aks LP: $x^3 - 3x + 2 = 0$; $(x - 1)^2(x + 2) = 0$; **x = 1 tai x = - 2** ; y-aks. LP: x = 0 ; **y = 2**

8. $y = e^x$ on kasvava ja $y = 1 - x$ on laskeva. Molemmat leikkaavat y-akselin (0,1):ssä. Siis $y = e^x$ ylempänä
$A = \int_0^1(e^x - 1 + x)dx + \int_1^2 e^xdx = \Big/_0^1 e^x - x + ½x^2 + \Big/_1^2 e^x = (e - 1 + ½) - (1 - 0 + 0) + e^2 - e = \mathbf{e^2 - 1½}$

9. $\int_{-3}^3 a(9 - x^2)dx = 1$; $\Big/_{-3}^3 a(9x - \frac{1}{3}x^3) = 1$; $a[(27 - 9) - (-27 + 9)] = 1$; $36a = 1$; $\mathbf{a = \frac{1}{36}}$

$P(\underline{x} > 1) = \int_1^3\frac{1}{36}(9 - x^2)dx = \frac{1}{36}\Big/_1^3(9x - x^3) = \frac{1}{36}[(27 - 9) - (9 - \frac{1}{3})] = \frac{1}{36}\cdot 9\frac{1}{3} = \mathbf{\frac{7}{27}}$

10. $\int_{-1/t}^t e^{-|x|}dx = \int_{-1/t}^0 e^xdx + \int_0^t e^{-x}dx = \Big/_{-1/t}^0 e^x - \Big/_0^t e^{-t} = e^0 - e^{-1/t} - e^{-t} + e^0 = \mathbf{2 - e^{-1/t} - e^{-t}}$

$\lim_{t\to\infty}(2 - e^{-1/t} - e^{-t}) = 2 - e^0 - 0 = \mathbf{1}$

96.1.1. Integroi a) $\int(e^x - \cos x)dx$ b) $\int 2x(3x + 4)dx$ c) $\int\frac{2x + 3}{x}dx$

96.1.2. Laske $\int_1^2(2x - 3)^4dx$

96.1.3. Osoita, että funktio $F(x) = x^2\cdot\sin 2x$ on funktion $f(x) = 2x(\sin 2x + x\cdot\cos 2x)$ integraalifunktio

96.1.4. Käyrä $y = \sqrt{3x - x^2}$ pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus.

96.1.5. Millä vakion a arvolla on $\int_0^1\frac{ax}{1 + 2x^2}dx = \ln 3$

96.1.6. Laske $\int_{\pi/6}^{\pi/2}(\frac{\sin x}{x} - ½)dx - \int_{\pi/2}^{\pi/6}(1½ - \frac{\sin x}{x})dx$

96.1.7. Määritä funktion $f(x) = x^2 + ax + 2$ se integraalifunktio, jonka kuvaaja sivuaa x-akselia kohdassa x=2.

96.1.8. Neliön lävistäjän päätepisteet ovat (0,0) ja (4,4). Käyrä $y = \frac{1}{x^2}$ leikkaa ko. neliön kahteen osaan. Laske näiden osien alojen suhde.

96.1.9. Olkoon $f(x) = \int_0^x |2t - 4|\, dt$. Määritä funktion f(x) lauseke.

96.1.10. Funktio $f(x) = ax + b$, $0 < x < 4$, on erään jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio. Laske $P(1 < \underline{x} < 3)$, kun kertymäfunktion arvo on 0,4, kun x = 2.

---

1. a) $\int (e^x - \cos x)dx = e^x - \sin x + C$ b) $\int 2x(3x + 4)dx = \int (6x^2 + 8x)dx = 2x^3 + 4x^2 + C$

c) $\int \frac{2x + 3}{x}dx = \int (2 + \frac{3}{x})dx = 2x + 3\ln |x| + C$

2. $\int_1^2 (2x - 3)^4 dx = ½\int_1^2 2(2x - 3)^4 dx = ½\Big/_1^2 \frac{1}{5}(2x - 3)^5 dx = \frac{1}{10}(1 -(-1)) = \frac{1}{5}$

3. $F(x) = x^2\cdot\sin 2x$; $F'(x) = 2x\cdot\sin 2x + x^2\cdot 2\cos 2x = 2x(\sin 2x + x\cdot\cos 2x) = f(x) \Rightarrow$ F on f:n integraalifunktio

4. Rajat: $3x - x^2$ ³ 0 ; NK: $x(3 - x) = 0$; x = 0 tai x = 3. Ylöspäin auk. par. $\Rightarrow 0 \le x \le 3$

$V = \pi \int_0^3 (\sqrt{3x - x^2})^2 dx = \pi \int_0^3 (3x - x^2)dx = \pi \Big/_0^3 (\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3) = \pi [(13½ - 9) - (0 - 0)] = 4½\, \pi$

5. $\int_0^1 \frac{ax}{1 + 2x^2} dx = \frac{a}{4} \int_0^1 \frac{4x}{1 + 2x^2} dx = \frac{a}{4}\Big/_0^1 \ln (1 + 2x^2) = \frac{a}{4} (\ln 3 - \ln 1) = \frac{a\cdot\ln 3}{4} = \ln 3$, jos a = 4

6. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} (\frac{\sin x}{x} - ½)dx - \int_{\pi/2}^{\pi/6} (1½ - \frac{\sin x}{x})dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} (\frac{\sin x}{x} - ½)dx + \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1½ - \frac{\sin x}{x})dx =$

$\int_{\pi/6}^{\pi/2} (\frac{\sin x}{x} - ½ + 1½ - \frac{\sin x}{x})dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1)dx = \Big/_{\pi/6}^{\pi/2} (x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

7. $f(x) = x^2 + ax + 2$; $F(x) = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} ax^2 + 2x + C$; F sivuaa x-akselia kun $x = 2 \Rightarrow F`(2) = 0$; $4 + 2a + 2 = 0$ a

= -3 . $F(2) = 0$; $\frac{8}{3} + ½\cdot(-3)\cdot 4 + 2\cdot 2 + C = 0$; $C = -\frac{2}{3}$; $F(x) = \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{2}{3}$

8. Neliön ala = 4·4 = 16. Käyrä leikkaa neliön yläreunan kun y = 4. $\frac{1}{x^2} = 4$; $x = \pm ½$.

Ylänurkan ala = $\int_{½}^{4} (4 - x^{-2})\, dx = \Big/_{½}^{4} 4x + x^{-1} = (16 + ¼) - (2 + 2) = 12¼$. Alaosan ala = 3¾ Suhde = 49:15

9. $| 2t - 4 | = \begin{cases} 2t - 4, \text{ kun } t \text{ ³ } 2 \\ -2t + 4, \text{ kun } t < 2 \end{cases}$

Kun x < 2 , on $\int_0^x |2t - 4|\, dt = \int_0^x (-2t + 4)\, dt = \Big/_0^x -t^2 + 4t = 4x - x^2$

Kun $x \geq 2$, on $\int_0^x |2t - 4|\, dt = \int_0^2 (-2t + 4)\, dt + \int_2^x (2t - 4)\, dt = \Big/_0^2 (-t^2 + 4t)\, dt + \Big/_2^x (t^2 - 4t)\, dt =$

$(-4 + 8) - 0 + (x^2 - 4x) -(4 - 8) = x^2 - 4x + 8$ $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 8, \text{ kun } x \geq 2 \\ 4x - x^2, \text{ kun } x < 2 \end{cases}$

10. $f(x) = ax + b$; $F(x) = ½ax^2 + bx + c$

$\begin{cases} F(0) = 0 \\ F(4) = 1 \\ F(2) = 0{,}4 \end{cases}$; $\begin{cases} c = 0 \\ 8a + 4b = 1 \;||\; \cdot 1 \\ 2a + 2b = 0{,}4 \;||\; \cdot(-2) \end{cases}$; 4a = 0,2 ; a = 0,05 ; 0,1 + 2b = 0,4 ; b = 1,15 ; $F(x) = 0{,}025x^2 + 0{,}15x$

$P(1 < \underline{x} < 3) = F(3) - F(1) = (0{,}225 + 0{,}45) - (0{,}025 + 0{,}15) = 0{,}5$

96.2.1. Integroi a) $\int (e^{2x} - e^{-x})dx$ b) $\int (2x + 3)(4x - 5)dx$

96.2.2. Laske $\int_0^4 10 (\frac{x}{2} - 1)^4\, dx$

96.2.3. Määritä funktion $f(x) = x^2 + 3x + 2$ se integraalifunktio, joka leikkaa x-akselin kohdassa x = 2.

96.2.4. Onko funktio $e^{-x} \cdot \cos 2x$ funktion $-e^{-x} \cdot (\cos 2x + 2\sin 2x)$ integraalifunktio?

96.2.5. Mikä on käyrän $y = x^3 - x^2 - 2x$ ja x-akselin rajoittaman kaksiosaisen alueen pinta-ala?

96.2.6. Millä vakion a arvolla $\int_1^a (3x^2 - 4x - 5)\,dx = 3a + 6$

96.2.7. Käyrän $y = 3x - x^2$ ja x-akselin välinen äärellinen alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus.

96.2.8. Laske $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

96.2.9. Määritä vakio a siten, että funktio $f(x) = ax^2$, $1 \le x \le 3$, on erään jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio. Laske $P(\underline{x} < 2)$.

96.2.10. Olkoon $f(x) = \int_0^2 |t + x|\,dt$. Määritä funktion f(x) lauseke.

---

1. a) $\int (e^{2x} - e^{-x})dx = \int (\tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot e^{2x} + (-1)e^{-x})dx = \tfrac{1}{2}e^{2x} + e^{-x} + C$

b) $\int (2x + 3)(4x - 5)dx = \int (8x^2 + 2x - 15)dx = \frac{8}{3}x^3 + x^2 - 15x + C$

---

2. $\int_0^4 10(\tfrac{1}{2}x - 1)^4\,dx = \int_0^4 20\cdot\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}x - 1)^4\,dx = \Big/_0^4 \frac{20}{5}(\tfrac{1}{2}x - 1)^5 = 4(1)^5 - 4(-1)^5 = 8$

---

3. $f(x) = x^2 + 3x + 2$; $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$; $F(2) = 0$; $\frac{8}{3} + 6 + 4 + C = 0$; $C = -12\frac{2}{3}$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x - 12\frac{2}{3}$

---

4. $F(x) = e^{-x}\cdot\cos 2x$; $F'(x) = -e^{-x}\cdot\cos 2x + e^{-x}\cdot(-2\sin 2x) = e^{-x}(\cos 2x + 2\sin 2x) = f(x)$ V: On

---

5. NK: $x(x^2 - x - 2) = 0$; $x = 0$ tai $x^2 - x - 2 = 0$; $x = 0$, $x = 2$, $x = -1$ SIJ:

$A = +\int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x)dx - \int_0^2 (x^3 - x^2 - 2x)dx = \Big/_{-1}^0 \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \Big/_0^2 -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2$

$= (0) - (\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1) + (-4 + \frac{8}{3} + 4) = \frac{37}{12} = 3\frac{1}{12}$

---

6. $\int_1^a (3x^2 - 4x - 5)dx = \Big/_1^a x^3 - 2x^2 - 5x = a^3 - 2a^2 - 5a - (1 - 2 - 5) = a^3 - 2a^2 - 5a + 6$

$a^3 - 2a^2 - 5a + 6 = 3a + 6$; $a^3 - 2a^2 - 8a = 0$; $a(a^2 - 2a - 8) = 0$; $a = 0$ tai $a^2 - 2a - 8 = 0$; $a = 4$, $a = -2$

---

7. LP; $3x - x^2 = 0$; $x(3 - x) = 0$; $x = 0$ tai $x = 3$

$V = \pi\int_0^3 (3x - x^2)^2dx = \pi\int_0^3 (9x^2 - 6x^3 + x^4)dx = \pi\Big/_0^3 3x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5 = \pi(81 - \frac{243}{2} + \frac{243}{5} - 0) = \frac{81\pi}{10}$

---

8. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \int_1^2 (x - 1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{m\to 0}\int_m^2 (x - 1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{m\to 0}\Big/_m^2 2(x - 1)^{\frac{1}{2}} = \lim_{m\to 0}\Big/_m^2 2\sqrt{x-1} =$

$\lim_{m\to 0} (2\sqrt{2-1} - 2\sqrt{m-1}) = 2\cdot 1 - 2\cdot 0 = 2$

---

9. $\int_1^3 ax^2\,dx = \Big/_1^3 \frac{1}{3}ax^3 = 9a - \frac{1}{3}a = \frac{26}{3}a$; $\frac{26}{3}a = 1$; $a = \frac{3}{26}$; $P(\underline{x} < 2) = \int_1^2 \frac{3}{26}x^2\,dx = \Big/_1^2 \frac{1}{26}x^3 = \frac{8}{26} - \frac{1}{26} = \frac{7}{26}$

---

10. $x < -2 \Rightarrow t + x < 0 \Rightarrow |t + x| = -t - x$; $\int_0^2 |t + x|\,dt = \int_0^2 (-t - x)\,dt = \Big/_0^2 -\tfrac{1}{2}t^2 - xt = -2 - 2x$

$-2 \le x \le 0 \Rightarrow t + x < 0$, kun $t < -x$ ja $t + x > 0$, kun $t \ge -x$

$\int_0^2 |t + x|\,dt = \int_0^{-x} (-t - x)dt + \int_{-x}^2 (t + x)dt = \Big/_0^{-x} -\tfrac{1}{2}t^2 - xt + \Big/_{-x}^2 \tfrac{1}{2}t^2 + xt = -\tfrac{1}{2}x^2 + x^2 + 2 + 2x - \tfrac{1}{2}x^2 + x^2$

$= x^2 + 2x + 2$

$x > 0 \Rightarrow x + t > 0 \Rightarrow |t + x| = t + x$; $\int_0^2 |t + x|\,dt = \int_0^2 (t + x)dt = \Big/_0^2 \tfrac{1}{2}t^2 + xt = 2 + 2x - 0 = 2 + 2x$

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 \text{ , kun } x < -2 \\ x^2 + 2x + 2 \text{ , kun } -2 \le x \le 0 \\ 2x + 2 \text{ , kun } x > 0 \end{cases}$$

96.3.1. Integroi a) $\int 10x^5\,dx$ b) $\int x\sqrt{x}\,dx$ c) $\int (x + \sqrt{x})^2\,dx$

96.3.2. Määritä funktio, jonka integraalifunktion lauseke on $(5x + 4x^2)^3$.

96.3.3. Määritä funktion $f(x) = \cos 2x$ se integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(\pi/4,5)$ kautta.

96.3.4. Laske $\int_1^{\sqrt{6}} x\sqrt{3 + x^2}\,dx$

96.3.5. Laske käyrien $y = x^2 - 2$ ja $y = 6 - x^2$ väliin jäävän alueen pinta-ala.

96.3.6. Määritä sellainen reaaliluku a, että $\int_1^{a+1} e^{x^2}\,dx + \int_1^{a+1} (3 - e^{x^2})\,dx = 2$

96.3.7. Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy, kun käyrän $y = \sqrt{x - 2}$, koordinaattiakselien ja suoran y = 2 rajoittama alue pyörähtää y-akselin ympäri.

96.3.8. Määritä vakiot a ja b siten, että $F(x) = \int_0^x (at + b)\,dt$ täyttää ehdot $F(1) = 0$ ja $F(2) = 1$.

96.3.9. Laske käyrän $y = \sqrt{x - 3}$ sekä suorien $x + y = 2$, $y = 0$ ja $y = 2$ väliin jäävän alueen pinta-ala.

96.3.10. Määritä sellainen vakio a, että funktio $f(x) = ax^2$, kun $-2 \le x \le 2$ on erään jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio. Laske $P(\underline{x} < 1)$

---

1. a) $\int 10x^5\,dx = \frac{10}{6}x^6 + C = \frac{5}{3}x^6 + C$ b) $\int x\sqrt{x}\,dx = \int x^{3/2}\,dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + C = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$

c) $\int (x + \sqrt{x})^2\,dx = \int (x^2 + 2x^{3/2} + x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 + C$

2. $F(x) = (5x + 4x^2)^3$; $f(x) = F'(x) = 3(5x + 4x^2)^2(5 + 8x)$

3. $f(x) = \cos 2x$; $F(x) = ½\sin 2x + C$

$F(\pi/4) = 5$; $½\sin ½\pi + C = 5$; $½ \cdot 1 + C = 5$; $C = 4½$; $F(x) = ½\sin 2x + 4½$

4. $\int_1^{\sqrt{6}} x\sqrt{3 + x^2}\,dx = ½\int_1^{\sqrt{6}} 2x(3 + x^2)^{1/2}\,dx = ½ \Big/_1^{\sqrt{6}} \frac{2}{3}(3 + x^2)^{3/2} = \Big/_1^{\sqrt{6}} \frac{1}{3}(3 + x^2)\sqrt{3 + x^2}$

$= \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{9} - \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{4} = 9 - \frac{8}{3} = 6\frac{1}{3}$

5. LP: $\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = 6 - x^2 \end{cases}$; $x^2 - 2 = 6 - x^2$; $2x^2 = 8$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$ SIJAINTI:

$A = \int_{-2}^{2} [(6 - x^2) - (x^2 - 2)]\,dx = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)\,dx = \Big/_{-2}^{2} 8x - \frac{2}{3}x^3 = (16 - \frac{16}{3}) - (-16 + \frac{16}{3}) = 32 - \frac{32}{3} = 21\frac{1}{3}$

6. $\int_1^{a+1} e^{x^2}\,dx + \int_1^{a+1} (3 - e^{x^2})\,dx = \int_1^{a+1} (e^{x^2} + 3 - e^{x^2})\,dx = \int_1^{a+1} 3\,dx = \Big/_1^{a+1} 3x = 3a + 3 - 3 = 3a$.

$3a = 2$; $a = \frac{2}{3}$

7. $y = \sqrt{x - 2}$ || $(\,)^2$; $y^2 = x - 2$; $x = y^2 + 2$;

$V = \pi\int_0^2 (y^2 + 2)^2\,dy = \pi\int_0^2 (y^4 + 4y^2 + 4)\,dy = \pi \Big/_0^2 \frac{1}{5}y^5 + \frac{4}{3}y^3 + 4y = \pi(\frac{32}{5} + \frac{32}{3} + 8) = \frac{376\pi}{15}$

8. $F(x) = \int_0^x (at + b)\,dt = \int_0^x ½at^2 + bt = ½ax^2 + bx - 0$ $\begin{cases} F(1) = 0 \\ F(2) = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} ½a + b = 0 \text{ || } \cdot(-2) \\ 2a + 2b = 1 \text{ || } \cdot 1 \end{cases}$; $a = 1$; $b = -½$

9. $y = 2$ JA $y = \sqrt{x - 3}$; $2 = \sqrt{x - 3}$; $4 = x - 3$; $x = 7$. KUVIO:

$A = 7 \cdot 2 - ½ \cdot 2 \cdot 2 - \int_3^7 \sqrt{x - 3}\,dx = 14 - 2 - \Big/_3^7 \frac{2}{3}(x - 3)^{3/2} = 12 - (\frac{2}{3} \cdot 8 - 0) = 6\frac{2}{3}$

10. $f(x) = ax^2$ on jva ja posit. kun $a > 0$, jolloin f on tiheysfkt, jos $P(-2 \le \underline{x} \le 2) = 1$

$\int_{-2}^{2} ax^2\,dx = 1$; $\Big/_{-2}^{2} \frac{a}{3}x^3 = 1$; $\frac{8a}{3} + \frac{8a}{3} = 1$; $\frac{16a}{3} = 1$; $a = \frac{3}{16}$;$P(\underline{x} < 1) = \int_{-2}^{1} \frac{3}{16}x^2\,dx = \Big/_{-2}^{1} \frac{1}{16}x^3 = \frac{1}{16} + \frac{8}{16} = \frac{9}{16}$

96.4.1. Esitä millaisia laskuja olet oppinut tällä kurssilla kertomalla a) laskun aihe b) siihen liittyvä tehtävä ja c) suorittamalla ko. tehtävä. (Taulukkokirjan kaavojen esittelystä ei saa pisteitä eikä saman integraalin esittelystä monta kertaa saa lisäpisteitä)

Määritelmiä, ominaisuuksia	a	b	c		a	b	c
Pinta-ala porrassummista				Potenssi ulkofunktiona			
Määrätyn integraalin määritelmä				Juuri ulkofunktiona			
Tyhjä integroimisväli				Nimittäjä sisäfunktiona			
Integroimisvälin jakaminen osiin				Sisäfkt. eksp tai trig.fkt:ssa			
Integroimisrajojen vaihto				Osittaisintegroiminen			
Kertymäfunktio				Murtofunktion integroiminen			
Kertymäfunktion derivaatta				Osamurtohajoitelman tekeminen			
Integraalifunktion määritelmä				**Määrätty integraali**			
Funktion parillisuuden tutkiminen				Määrätyn integraalin laskeminen			
Integraalifunktio				Yhtälö määrätystä integraalista			
Onko funktio toisen integraalifunktio				Pal.määr.fkt:n määräty integraali			
Funktio, jonka integraalifunktio tunn.				**Aloja ja tilavuuksia**			
Kaikki integraalifunktiot				Ala: käyrä x-akselin yläpuolella			
Integraalifunktio ehdosta F(a) = b				Ala: käyrä x-akselin alapuolella			
Ehtona kulkee pisteen (a,b) kautta				Ala: käyrää x-aks. mol. puolilla			
Ehtona sivuaa suoraa				Ala: kaksi reunakäyrää			
Ehtona ääriarvo annettu				Ala: integrointi y-akselia pitkin			
Paloittain määritellyn funktion int.				Ala: silmukka			
Integroimissääntöjä				Tilavuus: pyör. x-aks. ympäri			
Potenssin integraalifunktio				Tilavuus: pyör. y-aks. ympäri			
1/x:n integroiminen				Tilavuus: kpl:lla ylä- ja alapinta			
Polynomin integroiminen				Tilavuus: pyör. muun aks. ympäri			
Integroiminen suorittamalla sievennys				Tilavuus: tunn. poikkileikkausala			
Eksponenttifunktio				Parillisen funktion määr. int. symm.			
Trigonometriset funktiot				Määr. integr. pinta-alan avulla			

96.5.1. Muodosta funktion f integraalifunktio F(x), kun $f(x) = e^{½x}$ ja F(0) = 3

96.5.2. Määritä a) $\int e^x\sqrt{1 + e^x}\,dx$ b) $\int \frac{x + 2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

96.5.3. Onko funktio F funktion f integraalifunktio, kun $F(x) = (x - 1)\ln x$ ja $f(x) = \ln x + 1 - x^{-1}$

96.5.4. Laske a) $\int_{-1}^{2} (x^2 + x + 1)\,dx$ b) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$

96.5.5. Millä vakion a arvoilla $\int_0^a (3x^2 + 4x - 5)dx = a^3 - 2$?

96.5.6. Määritä $\int_0^2 |4x - 2|\,dx$.

96.5.7. Laske käyrien xy = 5, x = 7, y = 0 ja x = 4 rajoittamana alueen pinta-ala sekä tilavuus, kun alue pyörähtää x-akselin ympäri.

96.5.8. Olkoon $F(x) = \int_2^x (t^3 + t^2 - 2t)dt$. Määritä funktion F paikalliset ääriarvokohdat.

96.5.9. Laske käyrien $y = x^3$ ja $y = \sqrt{x}$ väliin jäävän suljetun alueen ala.

96.5.10. Käyrä $y = f(x)$, $x \in [0,1]$, $f(x) \geq 0$, pyörähtää x-akselin ympäri ja muodostaa kappaleen, jonka tilavuus jokaisella välillä $[0,x]$, $0 < x < 1$, on x^3. Määritä $f(x)$.

1. $f(x) = e^{½x}$; $F(x) = 2e^{½x} + C$; $F(0) = 3$; $2e^0 + C = 3$; $2\cdot 1 + C = 3$; $C = 1$; $F(x) = 2e^{½x} + 1$

2. a) $\int e^x\sqrt{1 + e^x}dx = \int e^x(1 + e^x)^{½}\, dx = \frac{2}{3}(1 + e^x)^{3/2} + C = \frac{2}{3}(1 + e^x)\sqrt{1 + e^x} + C$

b) $\int \frac{x + 2}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{x + 2}{x^{1/3}}dx = \int \left(\frac{x}{x^{1/3}} + \frac{2}{x^{1/3}}\right)dx = \int (x^{2/3} + 2x^{-1/3})dx = \frac{3}{5}x^{5/3} + \frac{3}{2}\cdot 2x^{2/3} + C = \frac{3}{5}x^{5/3} + 3x^{2/3} + C$

3. $F(x) = (x - 1)\ln x$ on $f(x) = \ln x + 1 + x^{-1}$:n integraalifunktio, jos $F´= f$.
$F´(x) = 1\cdot\ln x + (x - 1)\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x} = \ln x + 1 - x^{-1} = f(x)$ V: on.

4. a) $\int_{-1}^{2} (x^2 + x + 1)\, dx = \Big/_{-1}^{2} (\frac{1}{3}x^3 + ½x^2 + x) = (\frac{8}{3} + 2 + 2) - (-\frac{1}{3} + ½ - 1) = 7½$

b) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x}\, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\cdot(\sin x)^{-3}\, dx = \Big/_{\pi/6}^{\pi/2} -½(\sin x)^{-2} = -½[1 - (½)^{-2}] = -½[1 - 4] = 1½$

5. $\int_0^a (3x^2 + 4x - 5)\, dx = \Big/_0^a x^3 + 2x^2 - 5x = a^3 + 2a^2 - 5a$

$a^3 + 2a^2 - 5a = a^3 - 2$; $2a^2 - 5a + 2 = 0$; $a = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$; $a = 2$ tai $a = ½$

6. $\int_0^2 |4x - 2|\, dx = \int_0^{½} (-4x + 2)\, dx + \int_{½}^{2} (4x - 2)\, dx = \Big/_0^{½} -2x^2 + 2x + \Big/_{½}^{2} 2x^2 - 2x$
$= (-½ + 1) - (0) + (8 - 4) - (½ - 1) = 5$

7. $A = + \int_4^7 \frac{5}{x}\, dx = \Big/_4^7 5\ln x = 5\ln 7 - 5\ln 4 = 5\ln\frac{7}{4}$

$V = \pi\int_4^7 (\frac{5}{x})^2\, dx = \pi\int_4^7 25x^{-2}\, dx = \pi\Big/_4^7 -25x^{-1} = \pi(-\frac{25}{7} + \frac{25}{4}) = \frac{75\pi}{28}$

8. $F(x) = \int_2^x (t^3 + t^2 - 2t)\, dt$; F on jva, dva, ei reunoja. Ääriarvo on derivaatan nollakohdassa.
$F´(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2)$
$F´(x) = 0$; $x(x^2 + x - 2) = 0$; $x = 0$, $x = 1$ tai $x = -2$
$F´$:n merkit kuvaajasta
Minimikohdat $x = -2$ ja $x = 1$. Maksimikohta $x = 0$

9. LP: $\begin{cases} y = x^3 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$; $x^3 = \sqrt{x}$ || $(\ )^2$; $x^6 = x$; $x(x^5 - 1) = 0$; $x = 0$, $x = 1$ Sijainti:

$A = \int_0^1 (x^{½} - x^3)\, dx = \Big/_0^1 \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^4 = (\frac{2}{3} - \frac{1}{4}) - 0 = \frac{5}{12}$

10. $V = \pi\int_0^x [f(t)]^2\, dt = x^3$; derivoidaan yhtälön molemmat puolet; $\pi[f(x)]^2 = 3x^2$; $[f(x)]^2 = \frac{3}{\pi}x^2$; $f(x) = \pm\sqrt{\frac{3}{\pi}}\,x$.

Koska $f \geq 0$, on $f(x) = \sqrt{\frac{3}{\pi}}\,x$

96.6.1. Integroi a) $\int (6x + 7)(8x - 9)\, dx$ b) $\int_{-2}^{3} (e^x + \frac{1}{x + 3})\, dx$

96.6.2. Minkä funktion integraalifunktio on $F(x) = \sin 2x + \cos 3x$? Mikä saadun funktion integraalifunktioista on se, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(½\pi, 3)$ kautta?

96.6.3. Laske käyrän $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ ja x-akselin rajoittaman 2-osaisen alueen pinta-ala.

96.6.4. Määritä funktion $f(x) = \frac{3x}{(x^2 + 3)^4}$ se integraalifunktio, joka toteuttaa ehdon $F(1) = -2$

96.6.5. Olkoon $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \geq 1 \\ 3x^2 + 2x, & x < 1 \end{cases}$. Määritä funktion f integraalifunktiot

96.6.6. Laske käyrän $y = e^x$, sille kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin ja y-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala.

96.6.7. Tutki funktion $f(x) = x^4 \cdot e^{|x|} \cdot \sin x$ parillisuutta. Laske $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

96.6.8. Suora $x + y = 0$ on käyrän $y = F(x)$ tangentti. Määritä F, kun $F'(x) = x^3$.

96.6.9. Integroi $\int \frac{x}{e^x}\,dx$

96.6.10. Määritä α, $\alpha \in [\pi, 2\pi]$ siten, että $\int_{½\pi}^{\alpha} \sin x\,dx = \sin 2\alpha$.

1. a) $\int (6x + 7)(8x - 9)dx = \int (48x^2 - 54x + 56x - 63)dx = \int (48x^2 + 2x - 63)dx = 16x^3 + x^2 - 63x + C$

b) $\int_{-2}^{3} (e^x + \frac{1}{x + 3})dx = \Big/_{-2}^{3} (e^x + \ln(x + 3)) = (e^3 + \ln 6) - (e^{-2} + \ln 1) = e^3 - e^{-2} + \ln 6$

2. $F(x) = \sin 2x + \cos 3x$; $f(x) = F'(x) = 2\cos 2x - 3\sin 3x$. Kaikki $F(x) = \sin 2x + \cos 3x + C$
$F(½\pi) = 3$; $\sin \pi + \cos 1½\pi + C = 2$; $0 + 0 + C = 3$; $C = 3$. $F(x) = \sin 2x + \cos 3x + 3$

3. LP: $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$; $x(x^2 - 4x + 3) = 0$; $x = 0$, $x^2 - 4x + 3 = 0$; $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$; $x = 1$ tai $x = 3$ SIJ:

$A = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)dx - \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)dx = \Big/_0^1 (\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2) - \Big/_1^3 (\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2)$

$= (\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}) - (0) - [(\frac{81}{4} - 36 + \frac{27}{2}) - (\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2})] = 3\frac{1}{12}$

4. $F(x) = \int \frac{3x}{(x^2 + 3)^4}dx = \int 3x(x^2 + 3)^{-4}dx = \frac{3}{2}\int 2x(x^2 + 3)^{-4}dx = \frac{3}{2}(-\frac{1}{3})(x^2 + 3)^{-3} + C = -\frac{1}{2(x^2 + 3)^3} + C$ $F(1)$

$= -2$; $-\frac{1}{2 \cdot 64} + C = -2$; $C = -1\frac{127}{128}$; $F(x) = -\frac{1}{2(x^2 + 3)^3} - 1\frac{127}{128}$

5. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \geq 1 \\ 3x^2 + 2x, & x < 1 \end{cases}$. f JVA? $\lim_{x \to 1+}(2x + 3) = 5 = \lim_{x \to 1-}(3x^2 + 2x) = f(1)$; $F(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + C, & x \geq 1 \\ x^3 + x^2 + D, & x < 1 \end{cases}$

F JVA. $\lim_{x \to 1-}(x^3 + x^2 + D) = \lim_{x \to 1+}(x^2 + 3x + C)$ $1 + 1 + D = 1 + 3 + C$; $D = 2 + C$

$F(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + C, & x \geq 1 \\ x^3 + x^2 + 2 + C, & x < 1 \end{cases}$

6. $y = e^x$. Piste $(1,e)$; $y' = e^x$; $k_T = y'(1) = e$ TANG: $y - e = e(x - 1)$; $y = ex$. SIJ:
$A = \int_0^1 (e^x - ex)dx = \Big/_0^1 (e^x - ½ex^2) = (e - ½e) - (1 - 0) = ½e - 1$

7. $f(-a) = (-a)^4 \cdot e^{|-a|} \cdot \sin(-a) = a^4 \cdot e^{|a|} \cdot (-\sin a) = -a^4 \cdot e^{|a|} \cdot \sin a = -f(a) \Rightarrow$ f pariton
ja koska f on pariton $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$

8. $x + y = 0$; $y = -x$; $k_T = -1$; $F'(x) = x^3 = k_T$; $x^3 = -1$; $x = -1$; $y = -(-1) = 1$
$F(x) = ¼x^4 + C$; $F(-1) = 1$; $¼ + C = 1$; $C = ¾$; $F(x) = ¼x^4 + ¾$

9. Valitaan $f = x$ ja $g' = e^{-x}$; $f' = 1$ ja $g = -e^{-x}$

$\int \frac{x}{e^x}dx = \int xe^{-x}dx = x \cdot (-e^{-x}) - \int 1 \cdot (-e^{-x})dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$

10. $\int_{½\pi}^{\alpha} \sin x\,dx = \sin 2\alpha$; $\Big/_{½\pi}^{\alpha} -\cos x = \sin 2\alpha$; $-\cos\alpha + \cos ½\pi = \sin 2\alpha$; $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha = 0$

$\cos\alpha\,(2\sin\alpha + 1) = 0$; $\cos\alpha = 0$ tai $\sin\alpha = -½$; $\alpha = 1½\pi$ tai $\alpha = 7\pi/6$ tai $\alpha = 11\pi/6$ (kaikki taulukosta!)

97.1.1. Integroi a) $\int_1^2 \frac{2x^2 + 3x}{x}dx$ b) $\int e^{3x}dx$

97.1.2. Määritä funktion $f(x) = 3x^2 - 2x$ se integraalifunktio, joka saa arvon 3, kun muuttuja on 2.

97.1.3. Tutki onko $\int x^2e^x\,dx = e^x(x^2 - 2x + 2)$

97.1.4. Laske käyrien $y = x^2 - 4$ ja $y = 2x - x^2$ välisen äärellisen alueen ala.

97.1.5. Käyrän $y = \sqrt{x + 4}$ sekä suorien $y = 0$ ja $x = 5$ välinen alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske muodostuneen kappaleen tilavuus.

97.1.6. Laske määrätyn integraalin $\int_1^7 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx$ tarkka arvo.

97.1.7. Integroi $\int \frac{4x^2 + x + 1}{2x + 3}\, dx$

97.1.8. Laske määrätyn integraalin $\int_0^\pi x \cdot \cos x\, dx$ arvo.

97.1.9. Määritä funktion $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ se integraalifunktio, jonka kuvaaja rajoittaa x-akselin sekä suorien $x = 1$ ja $x = 2$ kanssa alueen, jonka pinta-ala on ln 6.

97.1.10. Integraalilaskennan väliarvolause kuuluu: Jos funktio f on välillä [a,b] jatkuva, niin välillä]a,b[on ainakin yksi sellainen piste x_0, että $\int_a^b f(x)\, dx = f(x_0)(b - a)$

a) Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä [a,b] ja $f(x) > 0$. Miten integraalilaskennan väliarvolausetta voidaan havainnollistaa geometrisesti?

b) Määritä $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x - 2} \int_2^x \sqrt{t^2 + 1}\, dt$

---

1. a) $\int_1^2 \frac{2x^2 + 3x}{x}\, dx = \int_1^2 (2x + 3)\, dx = \Big/_1^2\, x^2 + 3x = (4 + 6) - (1 + 3) = 6$

b) $\int e^{3x}\, dx = \frac{1}{3} \int 3e^{3x}\, dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C$

---

2. $f(x) = 3x^2 - 2x$; $F(x) = x^3 - x^2 + C$; $F(2) = 3$; $8 - 4 + C = 3$; $C = -1$; $F(x) = x^3 - x^2 - 1$

---

3. $\int x^2e^x\, dx = e^x(x^2 - 2x + 2)$, jos OP:n derivaatta = VP:n integroitava.

$D(e^x(x^2 - 2x + 2)) = e^x(x^2 - 2x + 2) + e^x(2x - 2) = e^x(x^2 - 2x + 2 + 2x - 2) = e^xx^2$

---

4. LP: $y = x^2 - 4$ JA $y = 2x - x^2$; $x^2 - 4 = 2x - x^2$; $2x^2 - 2x - 4 = 0$; $x^2 - x - 2 = 0$; $x = -1$, $x = 2$

SIJ: alaspäin aukeava paraabeli on ylempänä kuin ylöspäin aukeava paraabeli.

$A = \int_{-1}^2 [(2x - x^2) - (x^2 - 4)]\, dx = \int_{-1}^2 (2x - 2x^2 + 4)\, dx = \Big/_{-1}^2 (x^2 - \frac{2}{3}x^3 + 4x) = (4 - \frac{16}{3} + 8) - (1 + \frac{2}{3} - 4)] = 9$

---

5. $y = \sqrt{x + 4}$; MJ: $x + 4 \geq 0$; $x \geq -4$. Toinen raja $x = 5$.

$V = \pi\int_{-4}^5 (\sqrt{x + 4})^2\, dx = \pi\int_{-4}^5 (x + 4)\, dx = \pi\Big/_{-4}^5\, ½x^2 + 4x = \pi[(12½ + 20) - (8 - 16)] = 40½\pi$

---

6. $\int_1^7 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx = ½\int_1^7 2x(x^2 + 1)^{-½}\, dx = ½\Big/_1^7\, 2(x^2 + 1)^{½} = \sqrt{50} - \sqrt{2} = \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{2} = 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

---

7. $\int \frac{4x^2 + x + 1}{2x + 3}\, dx = \int (2x - 2½ + 8½ \cdot ½ \cdot \frac{2}{2x + 3})\, dx = x^2 - 2½x + \frac{17}{4}\ln|2x + 3| + C$

Jakamalla jakokulmassa $(4x^2 + x + 1) : (2x + 3) = 2x - 2½$ jää 8½

---

8. $\int_0^\pi x \cdot \cos x\, dx = \Big/_0^\pi\, x \cdot \sin x - \int_0^\pi 1 \cdot \sin x\, dx = \Big/_0^\pi (x \cdot \sin x + \cos x)$

$= (\pi \cdot \sin \pi + \cos \pi) - (0 \cdot \sin 0 + \cos 0) = \pi \cdot 0 + (-1) - 0 \cdot 0 - 1 = -2$

$f = x$; $g´ = \cos x$
$f´ = 1$; $g = \sin x$

---

9. $f(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$; $F(x) = -(-x^{-1}) + C = \frac{1}{x} + C$; Käyrä voi olla x-akselin ylä- tai alapuolella

$A = \pm \int_1^2 (\frac{1}{x} + C)\, dx = \pm \Big/_1^2\, \ln x + Cx = \pm (\ln 2 + 2C - \ln 1 - C) = \pm(\ln 2 + C)$

$\ln 2 + C = \ln 6$; $C = \ln 6 - \ln 2$; $C = \ln 3$, jolloin $1/x + \ln 3 > 0$ välillä [1,2]

$-\ln 2 - C = \ln 6$; $-C = \ln 6 + \ln 2 = \ln 12$; $C = -\ln 12$, jolloin $1/x - \ln 12 < 0$ välillä [1,2]

Vastaus: $F(x) = 1/x + \ln 3$ tai $F(x) = 1/x - \ln 12$.

---

10. $\int_a^b f(x)\, dx$ on käyrän $y = f(x)$ ja x-akselin välisen alueen pinta-ala.

$f(x_0) \cdot (b - a)$ on suorakulmion ala, jonka kanta on $(b - a)$ ja korkeus $f(x_0)$

a) on olemassa ainakin yksi välin]a,b[kohta x_0, missä funktion arvo kelpaa korkeudeksi niin, että sen korkuisen ja välin levyisen suorakulmion ala on käyrän ja x-aks. välinen ala

b) $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} \int_2^x \sqrt{x^2+1}\, dx = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} \sqrt{x_0^2+1} \cdot (x-2) = \sqrt{2^2+1} = \sqrt{5}$

Kun $2 < x_0 < x$ ja $x \to 2$, niin $x_0 \to 2$

97.2.1. Integroi a) $\int x(2x^2 + 3x)\, dx$ b) $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \cos x\, dx$

97.2.2. Määritä se funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen (4,5) kautta.

97.2.3. Tutki, onko $\int x \cdot \sin x\, dx = \sin x - x \cdot \cos x$.

97.2.4. Laske määrätyn integraalin $\int_1^7 \frac{x}{x^2+1}\, dx$ tarkka arvo.

97.2.5. Käyrä $y = x + \frac{1}{x}$ pyörähtää x-akselin ympäri . Laske välillä $\frac{1}{2} \le x \le 2$ olevan kappaleen tilavuus.

97.2.6. Laske $\int_1^2 (e^{\sin x} - \sin e^x)\, dx + \int_1^2 (x - e^{\sin x} + \sin e^x)\, dx$ tarkka arvo.

97.2.7. Laske integroimalla $\int_0^3 |2x - 1|\, dx$.

97.2.8. Suora leikkaa paraabelin $y = x^2$ pisteissä, joiden x-koordinaatit ovat -2 ja 4. Laske suoran ja paraabelin rajoittaman alueen pinta-ala.

97.2.9. Integroi $\int \frac{3x+2}{x(x+1)}\, dx$

97.2.10. Funktion f kuvaajan pisteiden missä x = a ja x = b välissä olevan kaaren pituus saadaan kaavalla $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$. Laske funktion $f(x) = \frac{x^2}{8} - \ln x$ kuvaajan kohtien x = 1 ja x = e välissä olevan kaaren pituus.

1. a) $\int x(2x^2 + 3x)\, dx = \int (2x^3 + 3x^2)\, dx = \frac{1}{2}x^4 + x^3 + C$

b) $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \cos x\, dx = \Big/_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin x = \sin \frac{1}{4}\pi - \sin 0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - 0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$; $F(x) = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$; $F(4) = 5$; $2\sqrt{4} + C = 5$; $4 + C = 5$; $C = 1$ $F(x) = 2\sqrt{x} + 1$

3. On, jos oikean puolen derivaatta on vasemman puolen integroitava.
$D(\sin x - x \cdot \cos x) = \cos x - 1 \cdot \cos x - x \cdot (-\sin x) = x \cdot \sin x$. V: ON

4. $\int_1^7 \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^7 \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \Big/_1^7 \ln(x^2+1) = \frac{1}{2}(\ln 50 - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln \frac{50}{2} = \frac{1}{2}\ln 25$
$= \frac{1}{2}\ln 5^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln 5 = \ln 5$

5. $V = \pi\int_{\frac{1}{2}}^2 (x + \frac{1}{x})^2\, dx = \pi\int_{\frac{1}{2}}^2 (x^2 + 2 + x^{-2})\, dx = \pi\Big/_{\frac{1}{2}}^2 (\frac{1}{3}x^3 + 2x - x^{-1}) = \pi[(\frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2}) - (\frac{1}{24} + 1 - 2)] = 7\frac{1}{8}\pi$

6. $\int_1^2 (e^{\sin x} - \sin e^x)dx + \int_1^2 (x - e^{\sin x} + \sin e^x)\, dx = \int_1^2 (e^{\sin x} - \sin e^x + x - e^{\sin x} + \sin e^x)\, dx = \int_1^2 x\, dx =$
$\Big/_1^2 \frac{1}{2}x^2 = 2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

7. $|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1, \text{ kun } x \ge \frac{1}{2} \\ -2x + 1, \text{ kun } x < \frac{1}{2} \end{cases}$; $\int_0^3 |2x - 1|\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (-2x + 1)dx + \int_{\frac{1}{2}}^3 (2x - 1)\, dx = \Big/_0^{\frac{1}{2}} (-x^2 + x) +$
$\Big/_{\frac{1}{2}}^3 (x^2 - x) = (-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}) - (0 - 0) + (9 - 3) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) = 6\frac{1}{2}$

8. A = (-2,4) B = (4,16) ; $k_{AB} = \frac{16-4}{4+2} = 2$; AB:n yhtälö: y - 4 = 2(x + 2) ; y = 2x + 8

Sijainti: Suora on korkeammalla kuin ylöspäin aukeava paraabeli

$A = \int_{-2}^{4} (2x + 8 - x^2)\,dx = \Big/_{-2}^{4} (x^2 + 8x - x^3/3) = (16 + 32 - \frac{64}{3}) - (4 - 16 + \frac{8}{3}) = 36$

9. $\frac{3x+2}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)}{x(x+1)} + \frac{Bx}{x(x+1)} = \frac{Ax + A + Bx}{x(x+1)}$; A + B = 3 JA A = 2 ⇒ B = 1

$\int \frac{3x+2}{x(x+1)}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx = 2 \ln|x| + \ln|x+1| + C$

10. $f(x) = \frac{x^2}{8} - \ln x$; $f'(x) = \frac{1}{4}x - 1/x$

pituus $= \int_1^e \sqrt{1 + (\frac{x}{4} - \frac{1}{x})^2}\,dx = \int_1^e \sqrt{(1 + \frac{x^2}{16} - \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2})}\,dx = \int_1^e \sqrt{(\frac{x^2}{16} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2})}\,dx =$

$\int_1^e \sqrt{(\frac{x}{4} + \frac{1}{x})^2}\,dx = \int_1^e (\frac{x}{4} + \frac{1}{x})\,dx = \Big/_1^e (\frac{x^2}{8} + \ln|x|) = (\frac{e^2}{8} + 1) - (\frac{1}{8} + 0) = \frac{e^2 + 7}{8}$

98.1.1. Onko funktio $F(x) = 6x^2 + 4x + 2$ funktion $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$ integraalifunktio?

98.1.2. Määritä funktion $f(x) = 6x^2 + 6x$ se integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen (-2,3) kautta.

98.1.3. Laske käyrien $y = 2 - x^2$ ja $y = x$ rajoittaman alueen ala.

98.1.4. Integroi a) $\int \frac{x+1}{x}\,dx$ b) $\int \frac{x}{x+1}\,dx$

98.1.5. Käyrä $y = \sqrt{3x - x^2}$ pyörähtää x-akselin ympäri. Laske näin syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus.

98.1.6. Laske $\int_1^2 \sin \frac{\pi x}{3}\,dx$

98.1.7. Integroi $\int x^2 \cdot \ln x\,dx$

98.1.8. Laske $\int_{-1}^{2} \frac{5dx}{(x+2)(x-3)}$

98.1.9. Käyrä $y = 3x - x^2$, x-akseli sekä suorat x = t ja x = t + 1, missä 0 < t < 2, rajoittavat alueen. Millä t:n arvolla tämän alueen pinta-ala on mahdollisimman suuri?

98.1.10. Laske F(2), kun funktion $f(x) = 12x|x - 1|$ integraalifunktio F toteuttaa ehdon F(0) = 1.

1. $F(x) = 6x^2 + 4x + 2$; $F'(x) = 12x + 4 \neq f(x) = 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$ V: EI OLE.

2. $f(x) = 6x^2 + 6x$; $F(x) = 2x^3 + 3x^2 + C$; F(-2) = 3 ; 2·(-8) + 3·4 + C = 3 ; -16 + 12 + C = 3 C = 7
V: $F(x) = 2x^3 + 3x^2 + 7$

3. Rajat : LP:t $y = x = 2 - x^2$; $x^2 + x - 2 = 0$; $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$; x = 1 tai x = -2

Sijainti: Alaspäin aukeavan paraabelin yläosa on suoran yläpuolella

$A = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\,dx = \Big/_{-2}^{1} 2x - x^3/3 - \frac{1}{2}x^2 = (2 - 1/3 - \frac{1}{2}) - (-4 + 8/3 - 2) = 4\frac{1}{2}$

4. a) $\int \frac{x+1}{x}\,dx = \int 1 + \frac{1}{x}\,dx = x + \ln|x| + C$

b) $\int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx = \int (1 - \frac{1}{x+1})\,dx = x - \ln|x+1| + C$

5. Rajat: juurrettava ≥ 0 ; $3x - x^2 \geq 0$: NK x(3 - x) = 0 ; x = 0 tai x = 3 ; AAP ; $0 \leq x \leq 3$

$V = \pi\int_0^3 (\sqrt{3x - x^2})^2\,dx = \pi\int_0^3 (3x - x^2)\,dx = \pi\Big/_0^3 1\tfrac{1}{2}x^2 - x^3/3 = \pi[(13\tfrac{1}{2} - 9) - (0 - 0)] = 4\tfrac{1}{2}\pi$

6. $\int_1^2 \sin\frac{\pi x}{3}\,dx = \frac{3}{\pi}\int_1^2 \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi x}{3}\,dx = \frac{3}{\pi}\Big/_1^2 -\cos\frac{\pi x}{3} = \frac{3}{\pi}\left(-\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{\pi}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right) = \frac{3}{\pi}$

7. $f = \ln x$ & $g´ = x^2$, jolloin $f´ = 1/x$ & $g = x^3/3$

$\int x^2 \cdot \ln x\,dx = x^3/3 \cdot \ln x - \int x^3/3 \cdot 1/x\,dx = x^3/3 \cdot \ln x - \int x^2/3\,dx = x^3/3 \cdot \ln x - x^3/9 + C$

8. $\frac{5}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 3} = \frac{A(x - 3) + B(x + 2)}{(x + 2)(x - 3)}$; $\begin{cases} A + B = 0 \\ -3A + 2B = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$

$\int_{-1}^2 \frac{5}{(x + 2)(x - 3)}\,dx = \int_{-1}^2 \left(-\frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x - 3}\right)dx = \Big/_{-1}^2 -\ln|x + 2| + \ln|x - 3|$

$= (\ln 1 - \ln 4) - (\ln 4 - \ln 1) = -2\cdot\ln 4 = -\ln 4^2 = -\ln 16$

9. $0 < t < 2 \Rightarrow 1 < t + 1 < 3 \Rightarrow$ t ja t + 1 on välillä]0,3[, jolla paraabeli on x-akselin yläp.

$A(t) = \int_t^{t+1} (3x - x^2)\,dx = \Big/_t^{t+1} 1\tfrac{1}{2}x^2 - x^3/3 = 1\tfrac{1}{2}(t + 1)^2 - (t + 1)^3/3 - 1\tfrac{1}{2}t^2 + t^3/3$

$A´(t) = 3(t + 1) - (t + 1)^2 - 3t + t^2 = 3t + 3 - t^2 - 2t - 1 - 3t + t^2 = 2 - 2t$

$A´(t) = 0$; $2 - 2t = 0$; $t = 1$. A´:n kuvaaja on laskeva suora, joten merkit muuttuvat + → - ja näin ollen A saa suurimman arvonsa, kun t = 1.

10. $f(x) = 12x|x - 1| = \begin{cases} 12x(x - 1), \text{ kun } x \ge 1 \\ 12x(-x + 1), \text{ kun } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 12x^2 - 12x, \text{ kun } x \ge 1 \\ -12x^2 + 12x, \text{ kun } x < 1 \end{cases}$ on jatkuva

$F(x) = \begin{cases} 4x^3 - 6x^2 + C, \text{ kun } x \ge 1 \\ -4x^3 + 6x^2 + D, \text{ kun } x < 1 \end{cases}$. F on jatkuva, $\lim_{x \to 1+} = \lim_{x \to 1-}$; $4 - 6 + C = -4 + 6 + D$

$C = 4 + D$; $F(0) = 1$; $0 + 0 + D = 1$; $D = 1$; $C = 4 + 1 = 5$; $F(2) = 4\cdot 8 - 6\cdot 4 + 5 = 13$

98.2.1. Laske $\int_{-1}^3 (2x^3 - 4x + 5)\,dx$

98.2.2. Määritä vakiot a ja b siten, että $\int (ax + 3)\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + bx$.

98.2.3. Millä a:n arvoilla on voimassa yhtälö $\int_a^0 (2t - 1)\,dt = -2$

98.2.4. Määritä a) $\int (3x - 1)^3\,dx$ b) $\int (x + 2)\sqrt{x}\,dx$

98.2.5. Onko $\int \frac{1}{3x}\,dx = \ln \sqrt[3]{x} + C$, $x > 0$

98.2.6. Määritä se funktion f(x) = x integraalifunktio, jonka kuvaava sivuaa itse funktion f kuvaajaa.

98.2.7. Laske käyrän $x = y^2$ ja suoran $y = x - 2$ rajoittaman alueen ala.

98.2.8. Kun käyrä $y = \cos 2x$ pyörähtää x-akselin ympäri muodostuu helminauhan näköinen kappale. Laske yhden helmen tilavuus.

98.2.9. Laske $\int_{-1}^2 |x - t|\,dt$, kun $0 \le x \le 1$

98.2.10. Integroi $\int \frac{3x - 1}{x(x - 1)}\,dx$

1. $\int_{-1}^3 (2x^3 - 4x + 5)dx = \Big/_{-1}^3 (\tfrac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 5x) = (40\tfrac{1}{2} - 18 + 15) - (\tfrac{1}{2} - 2 - 5) = 44$

2. $\int (ax + 3)dx = \tfrac{1}{2}x^2 + bx$; integroitava = OP:n derivaatta ; $ax + 3 = x + b$; a = 1 ja b = 3

3. $\int_a^0 (2t - 1)dt = -2$; $\Big/_a^0 (t^2 - t) = -2$; $0 - (a^2 - a) = -2$, $a^2 - a - 2 = 0$; a = -1 tai a = 2

4. a) $\int (3x - 1)^3dx = 1/3 \int 3(3x - 1)^3dx = 1/3 \cdot \tfrac{1}{4}(3x - 1)^4 + C = 1/12 \cdot (3x - 1)^4 + C$

b) $\int (x+2)\sqrt{x}dx = \int (x+2)x^{½}dx = \int (x^{3/2} + 2x^{½})dx = 2/5 \cdot x^{5/2} + 2 \cdot 2/3 \cdot x^{3/2} + C$ $= 2/5 \cdot x^2\sqrt{x} + 4/3 \cdot x\sqrt{x} + C = \sqrt{x}(2/5 \cdot x^2 + 4/3 \cdot x) + C$
5. $\int \frac{1}{3x}dx = \ln \sqrt[3]{x} + C$, $x > 0$, jos OP:n derivaatta = integroitava $D(\ln \sqrt[3]{x}) = D(\ln x1/3) = D(1/3 \cdot \ln x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3x}$ V: ON

6. $f(x) = x$ on myös tangentti ; $F(x) = ½x^2 + C$; $F'(x) = k_T$; $x = 1$, jolloin $y = f(1) = 1$ eli sivuamispiste on (1,1) $F(1) = 1$; $½ + C = 1$; $C = ½$ V: $F(x) = ½x^2 + ½$
7. Käyrien $x = y^2$ ja $y = x - 2$ välinen ala on sama kuin käyrien $y = x^2$ ja $x = y - 2$ välinen ala   LP : $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$, $x^2 = x + 2$; $x^2 - x - 2 = 0$; $x = -1$ tai $x = 2$ Sijainti: Suora on korkeammalla kuin ylöspäin aukeava paraabeli leikkauspisteiden välissä $A = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)dx = \Big/_{-1}^{2} (½x^2 + 2x - 1/3 \cdot x^3) = (2 + 4 - 8/3) - (½ - 2 + 1/3) = 4½$
8. LP: $y = 0$; $\cos 2x = 0$; $2x = ½\pi + n2\pi$, $x = ¼\pi + n\pi$. Rajat: $x = ¼\pi$, $x = ¾\pi$ $V = \pi\int_{¼\pi}^{¾\pi} (\cos 2x)^2dx = \pi\int_{¼\pi}^{¾\pi} ½(\cos^2 2x + \sin^2 2x)dx = \pi\int_{¼\pi}^{¾\pi} ½dx = \pi\Big/_{¼\pi}^{¾\pi} ½x = ½\pi(¾\pi - ¼\pi) = ¼\pi^2$
9. $\int_{-1}^{2} \|x - t\|dt = \int_{-1}^{x} (x - t)dt + \int_{x}^{2} (t - x)dt = \Big/_{-1}^{x} (xt - ½t^2) + \Big/_{x}^{2} (½t^2 - xt) =$ $(x^2 - ½x^2) - (-x - ½) + (2 - 2x) - (½x^2 - x^2) = x^2 - x + 2½$
10. $\frac{3x}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{Ax - A + Bx}{x(x-1)}$; $\begin{cases} A + B = 3 \\ -A = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases}$; $\int \frac{3x}{x(x-1)}dx = \int (\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1})dx$ $= \ln \| x \| + 2\ln \|x - 1 \| + C = \ln \|x(x - 1)^2 \| + C$

99.1.1. Määritä $\int x(2x^2 - 1)^3 dx$

99.1.2. Millä x:n arvoilla on voimassa yhtälö $\int_0^x (2t - 1)dt = 6$?

99.1.3. Määritä funktio f(x) siten, että $\int f(x)\, dx = \sin^2 x + C$

99.1.4. Laske $\int_0^{\ln 2} (e^{3x} - e^{-x})\, dx$

99.1.5. Paraabelin $y = 3x - x^2$ ja x-akselin rajoittama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus.

99.1.6. Määritä se funktion $f(x) = 2x - 3x^2$ integraalifunktio, jonka paikallinen maksimiarvo on 1.

99.1.7. Laske paraabelien $y = x^2 - 2x$ ja $y = 4 - x^2$ rajoittaman äärellisen alueen pinta-ala.

99.1.8. Määritä funktion $f(x) = 2x - |2x - 4|$ se integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee origon kautta.

99.1.9. Laske $\int xe^{-x}\, dx$

99.1.10. Määritä $\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}\, dx$, kun $0 < x < ½\pi$.

1. $\int x(2x^2 - 1)^3 dx = ¼ \int 4x(2x^2 - 1)^3 dx = ¼ \cdot ¼ (2x^2 - 1)^4 + C = 1/16 \cdot (2x^2 - 1)^4 + C$
2. $\int_0^x (2t - 1)dt = 6$; $\Big/_0^x (t^2 - t) = 6$; $x^2 - x - 0 = 6$; $x^2 - x - 6 = 0$; $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$ $x = 3$ tai $x = -2$
3. $f(x) = D(\sin^2 x + C) = D[(\sin x)^2 + C] = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$

4. $\int_0^{\ln 2} (e^{3x} - e^{-x})\, dx = \Big/_0^{\ln 2} (\frac{1}{3}e^{3x} + e^{-x}) = (\frac{1}{3} e^{3\ln 2} + e^{-\ln 2}) - (\frac{1}{3} e^0 + e^0)$

$= (\frac{1}{3} e^{\ln 8} + e^{\ln ½}) - (\frac{1}{3} + 1) = \frac{1}{3} \cdot 8 + ½ - \frac{1}{3} - 1 = \frac{11}{6}$

5. Rajat: $y = 0$; $3x - x^2 = 0$; $x(3 - x) = 0$; $x = 0$ tai $x = 3$

$V = \pi\int_0^3 (3x - x^2)^2\, dx = \pi\int_0^3 (9x^2 - 6x^3 + x^4)\, dx = \pi\Big/_0^3 (3x^3 - 1½x^4 + 1/5\, x^5)\, dx$

$= \pi\,(81 - \frac{243}{2} + \frac{243}{5} - 0) = \frac{81\pi}{10}$

6. $f(x) = 2x - 3x^2$; $F(x) = x^2 - x^3 + C$. F on JVA, DVA, ei reunoja. Maksimi F´:n NK:ssa

$F' = 0$; $2x - 3x^2 = 0$; $x(2 - 3x) = 0$; $x = 0$ tai $x = 2/3$

F´:n kuvaaja ylöspäin aukeava paraabeli; Merkit: --- 0 +++ 2/3 ---.

Kulku: vähenee 0 kasvaa 2/3 vähenee $\Rightarrow$ Maksimi saadaan siis kohdassa $x = 2/3$.

$F(2/3) = 1$; $\frac{4}{9} - \frac{8}{27} + C = 1$; $C = \frac{23}{27}$; $F(x) = x^2 - x^3 + \frac{23}{27}$

7. Rajat; $y = x^2 - 2x = 4 - x^2$; $2x^2 - 2x - 4 = 0$; $x^2 - x - 2 = 0$; $x = 2$ tai $x = -1$

Sijainti: Alaspäin aukeavan paraabelin yläosa on ylempänä kuin ylöspäin aukeavan paraabelin alaosa.

$A = \int_{-1}^{2} [(4 - x^2) - (x^2 - 2x)]\, dx = \int_{-1}^{2} (4 + 2x - 2x^2)\, dx\, dx = \Big/_{-1}^{2} (4x + x^2 - 2/3 \cdot x^3)\, dx$

$= (8 + 4 - 16/3) - (-4 + 1 + 2/3) = 9$

8. f on JVA, koska polynomi- ja itseisarvofunktiot JVIA sekä JVien fkt:iden erotus JVA

$f(x) = 2x - |2x - 4| = \begin{cases} 2x + 2x - 4, & x \le 2 \\ 2x - 2x + 4, & x > 2 \end{cases} = \begin{cases} 4x - 4, & x \le 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases}$; $F(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x + C, & x \le 2 \\ 4x + D, & x > 2 \end{cases}$

$F(0) = 0$; $C = 0$; F JVA, kun $x = 2$, jos

$\lim_{x \to 2} (2x^2 - 4x) = \lim_{x \to 2} (4x + D)$; $8 - 8 = 8 + D$; $D = -8$. $F(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x, & x \le 2 \\ 4x - 8, & x > 2 \end{cases}$

9. $\int xe^{-x}\, dx$ lasketaan osittaisintegroinnilla. Valitaan $f = x$ ja $g' = e^{-x}$; $f' = 1$ ja $g = -e^{-x}$

$\int xe^{-x}\, dx = x\cdot(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x})dx = - xe^{-x} - \int -1\cdot e^{-x}\, dx = - xe^{-x} - e^{-x} + C$

10. $\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}\, dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x}\, dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}\, dx$

$= - \int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx + \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = - \ln|\cos x| + \ln|\sin x| + C = \ln|\tan x| + C = \ln \tan x + C$

00.1.1. Laske integraalit a) $\int (\sin x + e^x)\, dx$ b) $\int 6x(5x + 4)\, dx$ c) $\int 2x(x^2 + 3)^4\, dx$

00.1.2. Määritä funktion $f(x) = 6x^2 - x - 3$ se integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(-1, 0)$ kautta.

00.1.3. Onko funktio xe^{2x} funktion $e^{2x}(2x + 1)$ integraalifunktio ?

00.1.4. Laske $\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{3x + 1}}\, dx$.

00.1.5. Laske käyrän $y = x^3 - 25x$ ja x-akselin rajoittaman 2-osaisen alueen ala.

00.1.6. Käyrän $y = 2 - \sqrt{x}$ ja koordinaattiakselien rajoittama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus.

00.1.7. Millä vakion t arvoilla $\int_2^t (3x - 6)\, dx > \int_1^t (2x - 3)\, dx$?

00.1.8. Käyrän $x^2y^2 = 4$ sekä suorien $x = 1$ ja $x = M$, $M > 1$, rajoittama alue pyörähtää x-akselin ympäri. Määritä syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuuden raja-arvo, kun $M \to \infty$.

00.1.9. Käyrät $y = \cos x$ ja $y = \sqrt{3} - \cos x$ rajoittavat kaksi erikokoista silmukanmuotoista aluetta. Laske silmukoiden alojen summa.

00.1.10. Funktion $f(x) = |\,½x + 1\,|$ integraalifunktio F toteuttaa ehdon $F(0) = 2$. Piirrä funktion F kuvaaja.

1. a) $\int (\sin x + e^x)\, dx = -\cos x + e^x + C$ b) $\int 6x(5x + 4)\, dx = \int (30x^2 + 24x)\, dx = 10x^3 + 12x^2 + C$

c) $\int 2x(x^2 + 3)^4\, dx = \frac{1}{5}(x^2 + 3)^5 + C$

2. $f(x) = 6x^2 - x - 3$. $F(x) = 2x^3 - ½x^2 - 3x + C$ $F(-1) = 0$; $-2 - ½ + 3 + C = 0$; $C = -½$ V: $F(x) = 2x^3 - ½x^2 - 3x - ½$

3. Funktio $F(x) = xe^{2x}$ funktion $f(x) = e^{2x}(2x + 1)$ integraalifunktio, jos $F'(x) = f(x)$
$F'(x) = 1\cdot e^{2x} + x\cdot e^{2x}\cdot 2 = e^{2x}(1 + 2x) = f(x)$. V : ON.

4. $\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\, dx = \int_0^5 \frac{1}{3}\cdot 3(3x + 1)^{-½}\, dx = \Big/_0^5 \frac{2}{3}(3x + 1)^{½} = \Big/_0^5 \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} = \frac{2}{3}\cdot 4 - \frac{2}{3}\cdot 1 = 2$

5. RAJAT: $y = 0 : x^3 - 25x = 0$; $x(x^2 - 25) = 0$; $x = 0$ tai $x^2 - 25 = 0$; $x^2 = 25$; $x = \pm 5$
SIJAINTI: Välillä $[-5,0]$ kuvaaja on x-akselin yläpuolella ja välillä $[0,5]$ alapuolella, koska kuvaaja on alhaalta vasemmalta ylös oikealle menevä III asteen käyrä
ALA: $A = \int_{-5}^0 (x^3 - 25x)\, dx - \int_0^5 (x^3 - 25x)\, dx = \Big/_{-5}^0 (¼x^4 - 25\cdot ½x^2)\, dx - \Big/_0^5 (¼x^4 - 25\cdot ½x^2)\, dx =$
$[(0 - 0) - (¼\cdot 625 - 25\cdot ½\cdot 25)] - [(¼\cdot 625 - 25\cdot ½\cdot 25) - (0 - 0)] = 312½$

6. Rajat: MJ: $x \ge 0$; $y = 0$; $2 - \sqrt{x} = 0$; $\sqrt{x} = 2$; $x = 4$
$V = \pi\int_0^4 (2 - \sqrt{x})^2\, dx = \pi\int_0^4 (4 - 4\sqrt{x} + x)\, dx = \pi\int_0^4 (4 - 4x^{½} + x)\, dx = \pi\Big/_0^4 (4x - \frac{8}{3}x^{3/2} + ½x^2)$

$= \pi[(16 - 64/3 + 8) - (0 - 0 + 0)) = \frac{8\pi}{3}$

7. $\int_2^t (3x - 6)\, dx > \int_1^t (2x - 3)\, dx$; $\Big/_2^t (1½x^2 - 6x) > \Big/_1^t (x^2 - 3x)$
$(1½t^2 - 6t) - (6 - 12) > (t^2 - 3t) - (1 - 3)$; $1½t^2 - 6t + 6 > t^2 - 3t + 2$; $½t^2 - 3t + 4 > 0 \;||\cdot 2$; $t^2 - 6t + 8 > 0$
NK: $t = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$; $t = 4$ tai $t = 2$ KUV: YAP +++ 2 --- 4 +++ V: $t < 2$ tai $t > 4$

8. $x^2y^2 = 4$; $y^2 = 4/x^2 = 4x^{-2}$. $V = \pi\int_1^M (y(x))^2\, dx = \pi\int_1^M 4x^{-2}\, dx = \pi\Big/_1^M -4x^{-1} = \pi\Big/_1^M -\frac{4}{x} = \pi(-\frac{4}{M} - (-4)) \to 4\pi$

9. LP: $\cos x = \sqrt{3} - \cos x$; $2\cos x = \sqrt{3}$; $\cos x = ½\sqrt{3}$; $\cos x = \cos \pi/6 : x = \pm \pi/6 + n\cdot 2\pi$
Sijainti: Välillä $[-\pi/6,\pi/6]$ $\cos x > \sqrt{3} - \cos x$ ja välillä $[\pi/6,11\pi/6]$ on $\cos x < \sqrt{3} - \cos x$
$A_1 = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} (\cos x - (\sqrt{3} - \cos x))\, dx = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} (2\cos x - \sqrt{3})\, dx = \Big/_{-\pi/6}^{\pi/6} (2\sin x - x\sqrt{3})$
$= (2\sin \pi/6 - \pi/6\cdot\sqrt{3}) - (-2\sin \pi/6 + \pi/6\cdot\sqrt{3}) = 2 - \pi/3\cdot\sqrt{3}$
$A_2 = \int_{\pi/6}^{11\pi/6} (\sqrt{3} - \cos x - \cos x)\, dx = \int_{\pi/6}^{11\pi/6} (\sqrt{3} - 2\cos x)\, dx = \Big/_{\pi/6}^{11\pi/6} (x\sqrt{3} - 2\sin x)$
$= (11\pi/6\cdot\sqrt{3} - 2\sin 11\pi/6) - (\pi/6\cdot\sqrt{3} - 2\sin \pi/6) = 2 + 5\pi/3\cdot\sqrt{3}$
$A = A_1 + A_2 = 2 - \pi/3\cdot\sqrt{3} + 2 + 5\pi/3\cdot\sqrt{3} = 4 + 4\pi/3\cdot\sqrt{3}$

10. $f(x) = |\,½x + 1\,| = \begin{cases} -½x - 1, & x < -2 \\ ½x + 1, & x \ge -2 \end{cases}$ on jatkuva $\Rightarrow$ F on olemassa. $F(x) = \begin{cases} -¼x^2 - x + C, & x < -2 \\ ¼x^2 + x + D, & x \ge -2 \end{cases}$
F jva. $\lim_{x \to -2-} (-¼x^2 - x + C) = \lim_{x \to -2+} (¼x^2 + x + D) = F(-2)$; $-1 + 2 + C = 1 - 2 + D$; $C = D - 2$
$F(0) = 2$; $D = 2$; $C = 0$ V : $F(x) = \begin{cases} -¼x^2 - x, & x < -2 \\ ¼x^2 + x + 2, & x \ge -2 \end{cases}$
Kuvaaja on rajan $x = -2$ vasemmalla puolella alaspäin aukeava paraabeli ja oikealla puolella ylöspäin aukeava paraabeli. Kuvaaja leikkaa y-akselin korkeudella 2.

00.2.1.Laske integraalifunktiot a) $\int (\cos x + \frac{1}{\cos^2 x})\, dx$ b) $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x}\, dx$ c) $\int x(x^2 + 1)^3\, dx$

00.2.2.Olkoon $f'(x) = 3x^2 + 4x - 5$ ja $f(1) = 2$. Määritä $f(x)$ ja $f(2)$.

00.2.3.Minkä funktion integraalifunktio on $g(x) = \cos 2x + e^{3x} + 4$?

00.2.4.Laske paraabelin $x = y^2 - 4y - 5$ ja y-akselin välisen alueen pinta-ala.

00.2.5.Laske $\int_{-1}^1 (\,|x| + 1\,)\, dx$

00.2.6.Käyrät $y = 2x^2 – x^3$ ja $y = 2x – x^2$ rajoittavat ensimmäisessä neljänneksessä kaksi silmukkaa. Laske silmukoiden alat.

00.2.7.Käyrän $y = 2 - \sqrt{x}$ ja koordinaattiakselien välinen alue pyörähtää y-akselin ympäri. Laske syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus.

00.2.8.Integroi a) $\int \sin^5 x \cdot \cos x\, dx$ b) $\int x\sqrt{x + 1}\, dx$

00.2.9.Ratkaise yhtälö $\int_{e^2}^{k} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \frac{1}{6}$

00.2.10.Osoita, että käyrän $y = ½(1 – e^{2x})$ mielivaltaiseen pisteeseen $P(x_0,y_0)$ koordinaateilla on sellainen ominaisuus, että yhtälö $½(x_0 + y_0) = \int_0^{x_0} y\, dx$ on identtisesti tosi.

1. a) $\int (\cos x + \frac{1}{\cos^2 x})\, dx = \sin x + \tan x + C$ b) $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x}\, dx = \int (x + 2 + \frac{3}{x})\, dx = ½x^2 + 2x + 3\ln \lvert x\rvert + C$ c) $\int x(x^2 + 1)^3\, dx = ½\int 2x(x^2 + 1)^3\, dx = ½ \cdot ¼ \cdot (x^2 + 1)^4 + C = 1/8 \cdot (x^2 + 1)^4 + C$
2. $f'(x) = 3x^2 + 4x - 5$; $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + C$ $f(1) = 2$; $1 + 2 - 5 + C = 2$; $C = 4$; $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 4$; $f(2) = 8 + 8 - 10 + 4 = 10$
3. integraalifunktio on $g(x) = \cos 2x + e^{3x} + 4$ integroitava funktio on $g'(x) = - 2\sin 2x + 3e^{3x}$
4. y-akselin lp:t : $x = 0$; $y^2 - 4y - 5 = 0$; $y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2}\, dx = \frac{4 \pm 6}{2}$; $y = 5$ tai $y = -1$ Sijainti: kuvaaja on y-akselin vasemmalla puolella eli $x < 0$ $A = -\int_{-1}^{5} (y^2 - 4y - 5)\, dy = \Big/_{-1}^{5} (-1/3 \cdot y^3 + 2y^2 + 5y) = (-125/3 + 50 + 25) - (1/3 + 2 - 5) = 36$
5. $\lvert x \rvert = x$, kun $x \geq 0$ ja $\lvert x \rvert = -x$, kun $x < 0$ $\int_{-1}^{1} (\lvert x \rvert + 1)\, dx = \int_{-1}^{0} (-x + 1)\, dx + \int_0^1 (x + 1)\, dx = \Big/_{-1}^{0} (-½x^2 + x) + \Big/_0^1 (½x^2 + x)$ $= (0 + 0) - (-½ - 1) + (½ + 1) - (0 + 0) = 3$
6. Rajat: $\begin{cases} y = f(x) = 2x^2 - x^3 \\ y = g(x) = 2x - x^2 \end{cases}$ $2x - x^2 = 2x^2 - x^3$; $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$; $x(x^2 - 3x + 2) = 0$ $x = 0$ tai $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$ $x = 2$ tai $x = 1$ Sijainti: $f(½) = 3/8 < g(½) = ¾$; $f(1½) = 9/8 > g(1½) = ¾$ $A_1 = \int_0^1 [(2x - x^2) - (2x^2 - x^3)]\, dx = \int_0^1 [x^3 - 3x^2 + 2x]\, dx = \Big/_0^1 [¼x^4 - x^3 + x^2] = (¼ - 1 + 1) - (0 - 0 + 0) = ¼$ $A_2 = \int_1^2 [(2x^2 - x^3) - (2x - x^2)]\, dx = \int_1^2 [-x^3 + 3x^2 - 2x] = \Big/_1^2 [-¼x^4 + x^3 - x^2] = (-4 + 8 - 4) - (-¼ + 1 - 1) = ¼$
7. $y = 2 - \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 - y \Leftrightarrow x = (2 - y)^2$ Rajat: $y = 0$ ja kun $x = 0$ on $y = 2$ $V = \pi\int_0^2 [x(y)]^2\, dy = \pi\int_0^2 (2 - y)^4 = -\frac{\pi}{5} \Big/_0^2 (2 - y)^5 = -\frac{\pi}{5} (0 - 32) = \frac{32\pi}{5}$
8. a) $\int \sin^5 x \cdot \cos x\, dx = \frac{1}{6} \sin^6 x + C$ b) $\int x \sqrt{x + 1}\, dx$ Olkoon $f = x$ ja $g' = \sqrt{x + 1} = (x + 1)^{½}$ jolloin $f' = 1$ ja $g = \frac{2}{3} (x + 1)^{3/2}$ $= x \cdot \frac{2}{3} (x + 1)^{3/2} - \int 1 \cdot \frac{2}{3}(x + 1)^{3/2}\, dx = \frac{2x}{3} (x + 1)^{3/2} - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} (x + 1)^{5/2} + C = \frac{4(x + 1)\sqrt{x + 1}}{15} [2½x - (x + 1)] + C =$ $\frac{4(x + 1)(1½ x - 1)\sqrt{x + 1}}{15} + C = \frac{(x + 1)(6x - 4)\sqrt{x + 1}}{15} + C$

9. $\int_{e^2}^{k} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \int_{e^2}^{k} \frac{1}{x}\cdot(\ln x)^{-2}\,dx = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \Big/_{e^2}^{k} -(\ln x)^{-1} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow -(\ln k)^{-1} + (\ln e^2)^{-1} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{\ln k}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{\ln k} \Leftrightarrow \ln k = 3 \Leftrightarrow k = e^3$

10. $y = ½(1 - e^{2x})$; $y_0 = ½(1 - e^{2x_0})$
$\int_0^{x_0} ½(1 - e^{2x})\,dx = ½\Big/_0^{x_0} (x - ½e^{2x}) = ½[(x_0 - ½e^{2x_0}) - (0 - ½)] = ½[x_0 + ½ - ½e^{2x_0}]$
$= ½[x_0 + ½(1 - e^{2x_0})] = ½[x_0 + y_0]$

01.1.1. Osoita, että funktio $F(x) = (x^2 – 2x + 2) \cdot e^x$ on funktion $f(x) = x^2 \cdot e^x$ integraalifunktio.

01.1.2. Integroi a) $\int (x + 1)\sqrt{x}\,dx$, b) $\int \cos(3x - 5)\,dx$.

01.1.3. Määritä funktion $f(x) = 3x^2 – 4x$ se integraalifunktio, jonka nollakohta on 3.

01.1.4. Laske suoran $y = x$ paraabelista $y = x^2 – 4x$ erottaman segmentin ala.

01.1.5. Millä vakion a arvolla $\int_0^a e^{3x}\,dx = 2\frac{1}{3}$?

01.1.6. Määritä funktion $f(x) = |3 – x|$ se integraalifunktio $F(x)$, joka toteuttaa ehdon $F(0) = 1$. Laske $F(5)$.

01.1.7. Laske $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 nx(1 - x^2)^n\,dx$.

01.1.8. Millä muuttujan arvoilla funktio $f(x) = \sqrt{8 \cdot \sin x \cdot \cos x}$ on määritelty ? Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy, kun käyrä $y = f(x)$, $0 \le x \le ½\pi$, pyörähtää x-akselin ympäri.

01.1.9. Käyrä $y = (2 + x)(x – 2a)$, $a > 0$, leikkaa positiivisen x-akselin pisteessä P_1 ja negatiivisen y-akselin pisteessä P_2 . Käyrä rajoittaa positiivisen x-akselin ja negatiivisen y-akselin kanssa alueen. Millä vakion a arvolla suora P_1P_2 jakaa em. alueen kahteen yhtä suureen osaan ?

01.1.10. Laske $\int_{-2}^{2} |x|(3x - 2)\,dx$.

1. $F(x) = (x^2 - 2x + 2)\,e^x$; F on f:n integraalifunktio, jos $F' = f$
$F'(x) = (2x - 2)\,e^x + (x^2 - 2x + 2)\,e^x = (2x - 2 + x^2 - 2x + 2)\,e^x = x^2 e^x = f(x)$

2.a) $\int (x + 1)\sqrt{x}\,dx = \int (x + 1)x^{½}\,dx = \int (x^{3/2} + x^{½})\,dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{3}x^{3/2} + C = \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$

b) $\int \cos(3x - 5)\,dx = \frac{1}{3}\int 3\cos(3x - 5)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x - 5) + C$

3. $f(x) = 3x^2 - 4x$; $F(x) = x^3 - 2x^2 + C$; $F(3) = 0$; $3^3 - 2\cdot3^2 + C = 0$; $27 - 18 + C = 0$; $C = -9$; $F(x) = x^3 - 2x^2 - 9$

4. LP: $\begin{cases} y = x \\ y = x^2 - 4x \end{cases}$; $x^2 - 4x = x$; $x^2 - 5x = 0$ $x(x - 5) = 0$; $x = 0$ tai $x = 5$
Sijainti: Paraabeli aukeaa ylöspäin, joten sen alaosa on suoran alapuolella
$A = \int_0^5 [x - (x^2 - 4x)]\,dx = \int_0^5 [x - x^2 + 4x]\,dx = \int_0^5 [5x - x^2]\,dx = \Big/_0^5 [2½x^2 - 1/3\cdot x^3]$
$= [62½ - 41\ 2/3] - [0 - 0] = 20\ 5/6$

5. $\int_0^a e^{3x}\,dx = 2\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}\int_0^a 3e^{3x}\,dx = \frac{7}{3}$; $\Big/_0^a e^{3x}\,dx = 7$; $e^{3a} - e^0 = 7$; $(e^a)^3 = 8$; $e^a = 2$; $a = \ln 2$

6. $f(x) = |3 - x| = \begin{cases} 3 - x, & \text{kun } x \le 3 \\ x - 3, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$ on jatkuva, koska itseisarvofunktio on jva
$F(x) = \begin{cases} 3x - ½x^2 + C, & \text{kun } x \le 3 \\ ½x^2 - 3x + D, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$; $F(0) = 1$; $0 + 0 + C = 1$; $C = 1$
F on oltava jva, joten $\lim_{x \to 3-} F(x) = \lim_{x \to 3+} F(x)$; $9 - 4½ + 1 = 4½ - 9 + D$; $D = 10$
$F(x) = \begin{cases} 3x - ½x^2 + 1, & \text{kun } x \le 3 \\ ½x^2 - 3x + 10, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$; $F(5) = ½\cdot25 - 3\cdot5 + 10 = 7½$

7. $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 nx(1 - x^2)^n\,dx = \lim\limits_{n \to \infty} -\tfrac{1}{2}n\int_0^1 -2x(1 - x^2)^n\,dx = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{-n}{2} \Big/_0^1 \frac{1}{n+1}(1 - x^2)^{n+1}\,dx$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \frac{-n}{2(n+1)}\,[0 - 1] = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{2(n+1)} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2(1 + 1/n)} = \frac{1}{2(1+0)} = \frac{1}{2}$

8. $f(x) = \sqrt{8 \cdot \sin x \cdot \cos x} = \sqrt{4 \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = \sqrt{4 \cdot \sin 2x}$ on määritelty,
kun $\sin 2x \geq 0 \Leftrightarrow 0 + n \cdot 2\pi \leq 2x \leq \pi + n \cdot 2\pi \Leftrightarrow n \cdot \pi \leq x \leq \tfrac{1}{2}\pi + n \cdot \pi$

$V = \pi\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sqrt{4 \cdot \sin 2x})^2\,dx = \pi\int_0^{\frac{1}{2}\pi} 4\sin 2x\,dx = 2\pi\int_0^{\frac{1}{2}\pi} 2\sin 2x\,dx = 2\pi \Big/_0^{\frac{1}{2}\pi} -\cos 2x$

$= -2\pi(\cos \pi - \cos 0) = -2\pi(-1 - 1) = 4\pi$

9. x-akselin leikkauspisteet: $y = 0$; $(2 + x)(x - 2a) = 0$; $x = -2$, $x = 2a$; $P_1 = (2a,0)$
y-akselin leikkauspiste : $x = 0$; $y = -4a$; $P_2 = (0,-4a)$ $A_{KOLMIO} = \tfrac{1}{2} \cdot 4a \cdot 2a = 4a^2$

$A = -\int_0^{2a} (2 + x)(x - 2a)\,dx = -\int_0^{2a} (x^2 + 2x - 2ax - 4a)\,dx = -\Big/_0^{2a} 1/3 \cdot x^3 + x^2 - ax^2 - 4ax$

$= -(8/3 \cdot a^3 + 4a^2 - 4a^3 - 8a^2) - 0 = 4/3 \cdot a^3 + 4a^2$
$A = 2 \cdot A_{KOLMIO}$; $4/3 \cdot a^3 + 4a^2 = 2 \cdot 4a^2$; $4/3 \cdot a^3 = 4a^2 \;\|\; : 4a^2$; $1/3 \cdot a = 1$; $a = 3$

10. $\int_{-2}^{2} |x|\,(3x - 2)dx = \int_{-2}^{0} -x(3x - 2)dx + \int_0^2 x(3x - 2)dx =$

$\int_{-2}^{0} (2x - 3x^2)dx + \int_0^2 (3x^2 - 2x)dx = \Big/_{-2}^{0} (x^2 - x^3) + \Big/_0^2 (x^3 - x^2)$

$= (0 - 0) - (4 + 8) + (8 - 4) - (0 - 0) = -12 + 4 = -8$

01.2.1. Laske $\int_{-2}^{3} [x(3x - 4) + 5]\,dx$

01.2.2. Minkä funktion integraalifunktio on $3x^2 + 8x + 10$?

01.2.3. Integroi a) $\int e^x(e^x + 1)^2\,dx$ b) $\int \frac{x^3 + x - 1}{x^2}\,dx$.

01.2.4. Käyrän pisteeseen (x,y) piirretyn tangentin kulmakerroin on $3x^2 + \frac{1}{x}$ ja käyrä kulkee pisteen (1, 2) kautta. Määritä käyrän yhtälö .

01.2.5. Laske käyrien $y = \sqrt{4x + 1}$ ja $2y = 3x$ sekä y-akselin rajoittaman alueen pinta-ala.

01.2.6. Käyrä $y = 2x + 1$, x-akseli ja y-akseli rajoittavat alueen, joka pyörähtää x-akselin ympäri. Mikä on syntyneen kappaleen tilavuus?

01.2.7. Laske $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$, kun $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{kun } x \leq 1 \\ 3x^2 + 2x, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$

01.2.8. Määritä se funktion $e^{|2x|}$ integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen (1, e) kautta.

01.2.9. Määritä x , (–2 < x < –1) , siten, että $\int_{-2}^{x} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln 3$.

01.2.10. Integroi a) $\int \cos^3 x \sin x\,dx$ b) $\int x\sqrt{2x + 1}\,dx$

1. $\int_{-2}^{3} [x(3x - 4) + 5]\,dx = \int_{-2}^{3} (3x^2 - 4x + 5)\,dx = \Big/_{-2}^{3} (x^3 - 2x^2 + 5x) = (27 - 18 + 15) - (-8 - 8 - 10) = 50$

2. $F(x) = 3x^2 + 8x + 10$, $f(x) = F'(x) = 6x + 8$

3. a) $\int e^x(e^x + 1)^2\,dx = 1/3 \cdot (e^x + 1)^3 + C$

b) $\int \frac{x^3 + x - 1}{x^2}\,dx = \int (x + x^{-1} - x^{-2})\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + \ln|x| + x^{-1} + C$

4. $k_T = y' = 3x^2 + \frac{1}{x}$; $y = x^3 + \ln|x| + C$, $y = x^3 + \ln x + C$ (koska käyrällä $x = 1 > 0$)
$(1,2) \in$ käyrä ; $2 = 1 + 0 + C$; $C = 1$. $y = x^3 + \ln x + 1$

5. LP: $\begin{cases} y = \sqrt{4x+1} \\ 2y = 3x \end{cases}$; $2\sqrt{4x+1} = 3x$; $4(4x+1) = 9x^2$; $9x^2 - 16x - 4 = 0$

$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 144}}{18} = \frac{16 \pm 20}{18}$; $x = 2$ tai $x = -\frac{2}{9}$ KUVAAJA: neliöjuurifunktio ylempänä

$A = \int_0^2 (\sqrt{4x+1} - 1½x)\,dx = \int_0^2 (¼\cdot 4(4x+1)^{½} - 1½x)\,dx = \Big/_0^2 (¼\cdot 2/3(4x+1)^{3/2} - ¾x^2)$

$= (1/6\cdot 27 - 3) - (1/6\cdot 1 - 0) = 1\ 1/3$

6. $y = 2x + 1$; x-akselin LP: $0 = 2x + 1$; $x = -½$. y-akselilla $x = 0$

$V = \pi\int_{-½}^{0} (2x+1)^2\,dx = \pi\int_{-½}^{0} (4x^2 + 4x + 1)\,dx = \pi\Big/_{-½}^{0} 4/3\cdot x^3 + 2x^2 + x = \pi[(0 + 0 + 0) - (-1/6 + ½ - ½)] = \pi/6$

7. $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} (2x+3)\,dx + \int_{1}^{3} (3x^2 + 2x)\,dx = \Big/_{-2}^{1} (x^2 + 3x) + \Big/_{1}^{3} (x^3 + x^2)$

$= (1 + 3) - (4 - 6) + (27 + 9) - (1 + 1) = 4 + 2 + 36 - 2 = 40$

8. $f(x) = e^{|2x|} = \begin{cases} e^{-2x}, & x < 0 \\ e^{2x}, & x \geq 0 \end{cases}$; $F(x) = \begin{cases} -½e^{-2x} + C, & x < 0 \\ ½e^{2x} + D, & x \geq 0 \end{cases}$; $F(1) = e$; $½e^2 + D = e$; $D = e - ½e^2$

F JVA, $\lim_{x \to 0-} F(x) = \lim_{x \to 0+} F(x)$; $-½ + C = ½ + e - ½e^2$; $C = 1 + e - ½e^2$

$F(x) = \begin{cases} -½e^{-2x} + 1 + e - ½e^2, & x < 0 \\ ½e^{2x} + e - ½e^2, & x \geq 0 \end{cases}$

9. $\int_{-2}^{x} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln 3 \Leftrightarrow \Big/_{-2}^{x} \ln|t-1| - \ln|t+1|\,dt = \ln 3$

$\Leftrightarrow \ln|x-1| - \ln|x+1| - \ln 3 + \ln 1 = \ln 3 \Leftrightarrow \ln(1-x) = \ln(-x-1) + 2\ln 3$

$\Leftrightarrow \ln(1-x) = \ln 9(-1-x)$; $1 - x = -9 - 9x$; $8x = -10$; $x = -1¼$

10. a) $\int \cos^3 x \sin x\,dx = \int -(\cos x)^3(-\sin x)\,dx = -¼\cos^4 x + C$

b) $\int x\sqrt{2x+1}\,dx$. Osittaisintegroinnilla. $f = x$, $f' = 1$; $g' = (2x+1)^{½}$; $g = 1/3(2x+1)^{3/2}$

$= x/3(2x+1)^{3/2} - \int 1/3(2x+1)^{3/2}\,dx = x/3(2x+1)^{3/2} - 1/3\cdot ½\cdot 2/5(2x+1)^{5/2} + C$

$= \frac{x}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} - \frac{1}{15}(2x+1)^2\sqrt{2x+1} + C$

02.1.1. Määritä a) $\int 120x(5x^2 + 1)\,dx$ b) $\int \frac{120x}{(5x^2+1)^4}\,dx$.

02.1.2. Tutki, onko funktio $F(x) = 2 + x - \ln(e^x + 1)$ funktion $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ integraalifunktio.

02.1.3. Määritä käyrien $y = -x^2$ ja $y = x$ rajoittaman alueen ala.

02.1.4. Käyrän $y = \sqrt{1 - 2x}$ ja koordinaattiakselien välinen alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyneen kappaleen tilavuus.

02.1.5. Millä vakion *a* arvoilla $\int_0^2 (2ax + 1)\,dx = 10$.

02.1.6. Määritä se funktion $f(x) = 2x - 6$ integraalifunktio, jonka kuvaaja sivuaa *x*-akselia.

02.1.7. Laske käyrän $y = x^3$ ja y-akselin sekä suoran $y = 8$ rajoittaman alueen ala.

02.1.8. Laske $\int_{-2}^{0} |x^2 - 1|\,dx$.

02.1.9. Anna esimerkki jatkuvasta funktiosta f(x), jolla on ominaisuudet: $f(0) = f(1) = 0$ ja $\int_0^1 f(x)\,dx = 100$.

02.1.10. Määritä jokin luku M siten, että $\int_0^2 (e^{x+x^3})\,dx \leq M$. Perustele.

1. a) $\int 120x(5x^2 + 1)\,dx = \int (600x^3 + 120x)\,dx = 150x^4 + 60x^2 + C$

b) $\int \frac{120x}{(5x^2 + 1)^4}\,dx = \int 12\cdot 10x(5x^2 + 1)^{-4}\,dx = \frac{12}{-3}(5x^2 + 1)^{-3} + C = \frac{-4}{(5x^2 + 1)^3} + C$

2. $F(x) = 2 + x - \ln(e^x + 1)$ on funktion $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ integraalifunktio, jos $F'(x) = f(x)$.

$F'(x) = 1 - \frac{1}{e^x + 1}\cdot e^x = \frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - 1}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1} = f(x)$ V: on

3. LP: $y = -x^2$ JA $y = x \Leftrightarrow -x^2 = x \;\|\; : x \Leftrightarrow -x = 1$ tai $x = 0 \Leftrightarrow x = -1$ tai $x = 0$

SIJAINTI: Alaspäin aukeava paraabeli on korkeammalla kuin suora

$A = \int_{-1}^{0} (-x^2 - x)\,dx = \Big/_{-1}^{0} (-x^3/3 - ½x^2) = (0 - 0) - (1/3 - ½) = ½ - 1/3 = 3/6 - 2/6 = 1/6$

4. Rajat: $y = \sqrt{1 - 2x}$, MJ: $1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq ½$. $x = 0$ ja $y = 0$

$V = \pi\int_{0}^{½} [y(x)]^2\,dx = \pi\int_{0}^{½} [\sqrt{1 - 2x}]^2\,dx = \pi\int_{0}^{½} (1 - 2x)\,dx = \pi\Big/_{0}^{½} (x - x^2) = \pi[(½ - ¼) - 0] = ¼\pi$

5. $\int_{0}^{2} (2ax + 1)\,dx = 10$; $\Big/_{0}^{2} (ax^2 + x)\,dx = 10$; $4a + 2 - 0 = 10$; $4a = 8$; $a = 2$

6. $f(x) = 2x - 6$. $F(x) = x^2 - 6x + C$. F:n kuvaaja ylöspäin aukeava paraabeli, joka sivuaa x-akselia paraabelin huipussa, missä $F'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$F(3) = 0 \Leftrightarrow 9 - 18 + C = 0 \Leftrightarrow C = 9$. V: $F(x) = x^2 - 6x + 9$

7. $y = x^3 \Leftrightarrow x = y^{1/3}$ .Rajat: $y = 0$ ja $y = 8$, Sijainti: $x > 0$

$A = \int_{0}^{8} y^{1/3}\,dy = +\Big/_{0}^{8} ¾y^{4/3} = ¾\cdot 8\cdot 8^{1/3} = 6\cdot 2 = 12$

8. $| x^2 - 1 | = x^2 - 1$, kun $x^2 - 1 \geq 0$ eli, kun $x \geq 1$ tai $x \leq -1$

$| x^2 - 1 | = 1 - x^2$, kun $x^2 - 1 < 0$ eli, kun $-1 < x < 1$

$\int_{-2}^{0} | x^2 - 1 |\,dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\,dx + \int_{-1}^{0} (1 - x^2)\,dx = \Big/_{-2}^{-1} (x^3/3 - x) + \Big/_{-1}^{0} (x - x^3/3)$

$= (-1/3 + 1) - (-8/3 + 2) + 0 - (-1 + 1/3) = 2/3 + 2/3 + 2/3 = 2$

9. f voisi olla esim. polynomifunktio, jonka nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 1$.

$f(x) = ax(x - 1)$ täyttää ensimmäiset ehdot, koska sen nollakohdat ovat oikeat.

$\int_{0}^{1} ax(x - 1)\,dx = a\int_{0}^{1} (x^2 - x)\,dx = a\Big/_{0}^{1} (x^3/3 - ½x^2)\,dx = a[(1/3 - ½) - (0 - 0)] = -1/6a$

$-1/6a = 100$; $a = -600$ V: $f(x) = -600x(x - 1)$

10. $\int_{0}^{2} (e^{x+x^3})\,dx \leq M$. Tutkitaan integroitavaa funktiota $f(x) = e^{x+x^3}$

$f'(x) = e^{x+x^3}(1 + 3x^2) > 0$, joten f(x) on kasvava. Täten $f(x) \leq f(2)$ kaikilla $x \in [0,2]$

siis $f(x) \leq e^{10} \Leftrightarrow \int_{0}^{2} f(x)\,dx \leq \int_{0}^{2} e^{10}\,dx = \Big/_{0}^{2} e^{10}\cdot x = 2e^{10} - 0 = 2e^{10} = M$

02.2.1. Määritä a) $\int (x^3 - 4x + 5)dx$ b) $\int (\sin x + 2\cos x)dx$ c) $\int e^{3x}dx$

02.2.2. Määritä funktio f(x) siten, että $\int f(x)\,dx = \ln x^2 + C$.

02.2.3. Laske paraabelin $y = x^2 - 3x - 4$ ja x-akselin rajoittaman alueen ala.

02.2.4. Käyrän $y = e^{x/4}$, koordinaattiakselien sekä suoran $x = 2$ välinen alue pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyneen kappaleen tilavuus.

02.2.5. Määritä $\int 8x(1 + x^2)^3dx$.

02.2.6. Laske $a = \lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{0} \sqrt[n]{x + 1}\,dx$.

02.2.7. Laske osittaisintegroinnilla $\int xe^{3x}dx$

02.2.8. Määritä funktion $f(x) = 4x + 5$ se integraalifunktio, jonka tangenttina on suora $y = x + 1$.

02.2.9. Määritä vakio *a* siten, että $\int_1^a \frac{dx}{\sqrt{4x+5}} = 5.$

02.2.10. Laske sen alueen ala, jota rajoittavat käyrä $y = x^3 - 3x$ sekä tämän paikalliseen maksimipisteeseen piirretty tangentti.

---

1. a) $\int (x^3 - 4x + 5)dx = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 5x + C$ b) $\int (\sin x + 2\cos x)dx = -\cos x + 2\sin x + C$

c) $\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int 3e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$

---

2. $\int f(x)dx = \ln x^2 + C$, jos $f(x) = D(\ln x^2 + C) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$

---

3. Rajat: $y = 0$; $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$; $x = 4$ tai $x = -1$

Sijainti: Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten alue x-akselin alapuolella.

$A = -\int_{-1}^{4}(x^2 - 3x - 4)dx = \Big/_{-1}^{4} (4x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3) = (16 + 24 - \frac{64}{3}) - (-4 + \frac{3}{2} + \frac{1}{3}) = 20\frac{5}{6}$

---

4. $V = \pi\int_0^2 (e^{x/4})^2\,dx = \pi\int_0^2 e^{x/2}\,dx = 2\pi\int_0^2 \frac{1}{2}e^{x/2}\,dx = 2\pi\Big/_0^2 e^{x/2} = 2\pi(e^1 - e^0) = 2\pi(e - 1)$

---

5. $\int 8x(1 + x^2)^3dx = 4\int 2x(1 + x^2)^3dx = 4\cdot\frac{1}{4}(1 + x^2)^4 + C$

---

6. $a = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{0} \sqrt[n]{x+1}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{0} (x+1)^{1/n}dx = \lim_{n\to\infty} \Big/_{-1}^{0} \frac{1}{1+1/n}(x+1)^{1+1/n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{1+1/n}\cdot 1 - 0)$

$= \frac{1}{1+0} = 1$

---

7. $f = x$, $f' = 1$; $g' = e^{3x}$, $g = \frac{1}{3}e^{3x}$

$\int xe^{3x}dx = x\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int 1\cdot\frac{1}{3}e^{3x}dx = \frac{x\cdot e^{3x}}{3} - \frac{1}{9}\int 3\cdot e^{3x}dx = \frac{x\cdot e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C$

---

8. $f(x) = 4x + 5$; $F(x) = 2x^2 + 5x + C$.
Tangentti $y = x + 1$, $k_T = 1$, $F'(x) = 1$; $4x + 5 = 1$; $4x = -4$; $x = -1$; $y = -1 + 1 = 0$
$F(-1) = 0$, $2 - 5 + C = 0$; $C = 3$ V: $F(x) = 2x^2 + 5x + 3$

---

9. $\int_1^a \frac{dx}{\sqrt{4x+5}} = 5$; $\int_1^a (4x + 5)^{-1/2}dx = 5$; $\frac{1}{4}\int_1^a 4\cdot(4x + 5)^{-1/2}\,dx = 5$; $\Big/_1^a 2\cdot(4x + 5)^{1/2} = 20$
$(4a + 5)^{1/2} - 9^{1/2} = 10$; $(4a + 5)^{1/2} = 13$; $4a + 5 = 169$; $4a = 164$; $a = 41$

---

10. $y = x^3 - 3x$, $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0$; $3x^2 - 3 = 0$; $x^2 = 1$; $x = \pm 1$
y ':n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Merkit +++ -1 - - - 1 +++ . x = -1 on maksimikohta
Tangentti on $y = (-1)^3 - 3\cdot(-1) = -1 + 3 = 2$
Leikkauspiste $x^3 - 3x = 2$; $x^3 - 3x - 2 = 0$; $(x + 1)^2(x - 2) = 0$; $x = -1$ tai $x = 2$
Sijainti: Tangentti on käyrän yläpuolella.
$A = \int_{-1}^{2} [2 - (x^3 - 3x)]dx = \int_{-1}^{2} (2 + 3x - x^3) = \Big/_{-1}^{2} (2x + 1\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4)$
$= (4 + 6 - 4) - (-2 + 1\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = 6 + 2 - 1\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 6\frac{3}{4}$