PITKÄ

MATEMATIIKKA

KURSSI MA7

DIFFERENTIAALILASKENTA 2

Markku Männikkö
2003

Sisällysluettelo:

MA7. Differentiaalilaskenta 2.

1. Yhdistetty funktio

1.1. Funktioiden yhdistäminen

1. Funktioiden luonnolliset laskutoimitukset
$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $(f / g)(x) = f(x) / g(x)$

1.1.1. Olkoon $f(x) = 2x + 3$ ja $g(x) = 4x - 5$. Määritä funktio a) $f + g$ b) $f \cdot g$

2. Yhdistelemällä saatujen funktioiden määrittelyjoukko
on 1) koko R, jos ei muuta ilmoitettu
2) R, josta on itse osattava poistaa ne x:t, joilla funktion arvoa ei voi laskea (neliöjuuri, logaritmi tms.)
3) osana olevien funktioiden määrittelyjoukkojen leikkausjoukko

2. Olkoon $f(x) = 2x + 3$, $x \geq 1$ ja $g(x) = 4x - 5$, $x < 6$. Mikä on funktion $f - g$ määrittelyjoukko?

3. Olkoon $f(x) = \sqrt{x - 1}$ ja $g(x) = \lg(2 - x)$. Mikä on funktion a) $f \cdot g$ b) $\frac{g}{f}$ määrittelyjoukko?

3. Yhdistetyn funktion käsite
Yhdistetty funktio on kahdesta funktiosta muodostettu uusi funktio, jonka arvo jollakin kohdalla x saadaan laskemalla kohdalla x ensimmäisen funktion f (sisäfunktion) arvo (=y) ja sen jälkeen kohdalla y toisen funktion g (ulkofunktion) arvo, joka on yhdistetyn funktion arvo. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y)$

4. Sisä- ja ulkofunktio
ovat yhdistetyn funktion osafunktiot. Sisäfunktio on se, jonka arvo lasketaan ensin. Ulkonaisesti katsoen se on se funktio, joka on sulkeiden sisällä. Ulkofunktio on se, jonka arvo lasketaan sisäfunktion arvon kohdalla. Ulkofunktion lausekkeen saa, kun korvaa sisäfunktion lausekkeen x:llä (tai y:llä)

4. Mitkä voisivat olla sisä- ja ulkofunktiot, jos funktio $F(x) =$ a) $(2x + 3)^2$ b) $\sin 2x$ c) e^{-x} d) $f(4x - 5)$ on yhdistetty funktio?

5. Yhdistetyn funktion arvon laskeminen "hyppytekniikalla"
Ensin sisäfunktion arvo muuttujan kohdalla. Sitten ulkofunktion arvo sisäfunktion arvon kohdalla.

5. Olkoon $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ ja $f(3) = 1$ sekä $g(1) = 3$, $g(2)=1$ ja $g(3) = 2$. Mitä on a) (fog)(1) b) (fog)(2) c) (gof)(3) d) (gof)(1) e) (fof)(2) f) (gog)(3)?
6. Olkoon $f(x) = 2x + 3$ ja $g(x) = 4x - 5$. Laske a) (fog)(1) b) (gof)(2).
7. Olkoon $f(x) = 2x + 3$ ja $g(x) = 4x - 5$. Mikä on x, kun $(gof)(x) = 3$?

6. Yhdistetyn funktion lausekkeen laskeminen
Sijoita ulkofunktion lausekkeeseen muuttujan paikalle sisäfunktion lauseke.

8. Olkoon $f(x) = 2x + 3$ ja $g(x) = 4x - 5$. Muodosta funktio a) fog b) gof c) gog d) fof
9. Olkoon $f(x) = x^2 + 2x$ ja $g(x) = 2x - 1$. Muodosta funktio a) fog b) gof c) fof.
10. Olkoon $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2 + 2x$ ja $h(x) = \sqrt{x}$. Muodosta funktio a) hogof b) gohof.

7. Yhdistetty funktio yhtälöketjuna
$y = (g \circ f)(x) \Leftrightarrow y = g(s)$ JA $s = f(x)$

11. Esitä yhtälöketjuna gof, kun $f(x) = 2x + 3$ ja $g(x) = 4x^3 - 5x^2$.

1.2. Yhdistetyn funktion derivaatta

1. $D(g \circ f)$
$= g'(f(x)) \cdot f'(x)$

1.2.1. Derivoi a) $F(x) = (2x - 3)^4$ b) $F(x) = \sqrt{2x + 3}$ c) $F(x) = \left(\frac{2x - 3}{4x + 5}\right)^2$.

2. Olkoon $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 5$ ja $f'(2) = -4$ sekä $g(2) = 4$, $g(3) = 1$, $g'(2) = -3$ ja $g'(3) = 6$.
Laske a) (gof)´(1), b) (gof)´(2) c) (fog)´(2) d) (fog)´(3).

3. Olkoon $f(x) = x^2 + x$ ja $g(x) = \sqrt{x}$. Laske (gof)´(x) ja (gof)´(4).

4. Derivoi a) $F(x) = (4x + 5)\sqrt{6x + 7}$ b) $F(x) = \frac{\sqrt{2x + 1}}{4x + 3}$

2. Derivaatta, kun useampia funktioita yhdistetty $D(h \circ g \circ f) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$

5. Laske $f'(x)$, kun $f(x) = (\sqrt{2x + 1} + 3)^2$.
6. Olkoon $f(1) = 2$, $g(2) = 3$, $h(3) = 4$, $g(4) = 2$ ja $f(2) = -1$ sekä $f'(1) = 5$, $g'(2) = 6$, $h'(3) = 7$, $g'(4) = -3$ ja $f'(2) = -4$. Laske $(h \circ g \circ f)'(1)$.

3. Ketjusäännön käyttö derivoimisessa $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dx}$

7. Olkoon $y = g(s) = 3s^2 + 4s$ ja $s = f(x) = 5x - 5$. Muodosta $(g \circ f)'(x)$

2. Käänteisfunktio

2.1. Käänteisfunktio ja sen lauseke

1. Laskutoimitus ja sen käänteislaskutoimitus saatuun tulokseen peräkkäin suoritettuna antaa tulokseksi lähtöarvon

2.1.1. Mitä saadaan, kun a) lukuun 5 lisätään 6 ja siitä vähennetään 6 b) luku 7 kerrotaan 8:lla ja tulo jaetaan 8:lla c) luku 9 korotetaan kolmanteen ja saadusta potenssista otetaan kuutiojuuri?
2. Mitä saadaan, kun a) luku 3 b) 4 korotetaan toiseen, ja tuloksesta otetaan neliöjuuri?
3. Mitä saadaan, kun luvusta 5 otetaan 10-kantainen logaritmi ja sitten 10 korotetaan tähän potenssiin?

2. Käänteisfunktion käsite Funktion f käänteisfunktio f^{-1} on funktio, jonka arvona on f:n muuttuja, kun muuttujana on f:n arvo.

3. Funktion ja käänteisfunktion arvojen ja muuttujien yhteys $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

4. Funktiolla f on käänteisfunktio. $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ ja $f(3) = 1$. Mitä on a) $f^{-1}(1)$ b) $f^{-1}(2)$ c) $f^{-1}(3)$?

4. Funktion ja sen käänteisfunktion arvo- ja määrittelyjoukot $Mj(f^{-1}) = Aj(f)$; $Aj(f^{-1}) = Mj(f)$

5. Funktiolla $f: [1,2] \to [3,4]$ on käänteisfunktio. Mitä on a) $Mj(f^{-1})$ b) $Aj(f^{-1})$?

5. Käänteisfunktion arvon laskeminen alkuperäisen funktion avulla Pitäisi laskea $f^{-1}(y) = x$. Tehdään yhtälö $f(x) = y$, josta ratkaistaan x.

6. Funktiolla $f(x) = x^2 + 1$, $x > 0$, on käänteisfunktio. Määritä x, kun a) $f^{-1}(x) = 2$ b) $f^{-1}(2) = x$.
7. Funktiolla $f(x) = 2x - 1$ on käänteisfunktio. Määritä x, kun a) $f^{-1}(x) = 5$ b) $f^{-1}(7) = x$.
8. Laske $f^{-1}(1)$, kun a) $f(x) = x^3 + 3x + 1$ b) $f(x) = x^3 + x - 1$.

6. Käänteisfunktion lausekkeen muodostaminen 1) Merkitse $y = f(x)$. 2) Ratkaise siitä x. 3) Vaihda $x \leftrightarrow y$. 4) Kirjoita muodossa $y = f^{-1}(x)$

9. Laske $f^{-1}(x)$, kun a) $f(x) = 2x + 3$ b) $f(x) = x^2 - 3$, $x > 0$ c) $f(x) = x^2 - 3$, $x < 0$ d) $f(x) = x^3 - 4$.
10. Laske $f^{-1}(x)$, kun a) $f(x) = \lg x$, $x > 0$ b) $f(x) = \sqrt{x - 1}$, $x \geq 1$ c) $f(x) = 2^{3x}$.

2.2. Käänteisfunktion olemassaolo

1. Millaisella funktiolla on varmasti käänteisfunktio Jos funktio on aidosti kasvava tai vähenevä, niin funktiolla on käänteisfunktio

2.2.1. Osoita, että funktiolla $f(x) = x^3 + 4x - 5$ on käänteisfunktio.
2. Osoita, että funktiolla $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$ on käänteisfunktio. Laske $f^{-1}(2)$

2. Käänteisfunktion olemassaolon huomaaminen laskemalla käänteisfunktion lauseketta. Jos ratkaistaessa x:ää y:n avulla, saadaan vain yksi x, on funktiolla käänteisfunktio

3. Onko funktiolla a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = x^4$ d) $f(x) = x^2$, $x > 0$ käänteisfunktiota?
4. Onko funktiolla a) $f(x) = x^2 - 2x$ b) $f(x) = x^2 - 2x$, $x > 1$ käänteisfunktiota?

2.3. Käänteisfunktion kuvaaja

1. Funktion ja käänteisfunktion kuvaajat
ovat peilikuvia suoran $y = x$ suhteen.

2. Käänteisfunktion kuvaajan piirtäminen alkuperäisen funktion kuvaajan avulla
Tee alkuperäiselle funktiolle lukuparitaulukko. Käänteisfunktion lukuparitaulukon saa vaihtamalla $x \leftrightarrow y$

2.3.1. Piirrä funktion $f(x) = x^2 - 2x - 3,\ x \geq 1$ kuvaaja ja sen perusteella käänteisfunktion kuvaaja.
2. Piirrä funktion $f(x) = 2 - 3\cos x,\ x \in [0,\pi]$ kuvaaja ja sen perusteella f^{-1}:n kuvaaja.

3. Funktion ja sen käänteisfunktion kuvaajien leikkauspiste
on funktion kuvaajan ja suoran $y = x$ leikkauspiste

3. Laske funktion $f(x) = x^3 + x - 8$ ja sen käänteisfunktion kuvaajien leikkauspiste.

2.4. Käänteisfunktion derivaatta

1. Käänteisfunktion derivaatta tietyllä kohdalla
$(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, missä $y_0 = f(x_0)$

2.4.1. Olkoon $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 4$ ja $f'(2) = 5$. Laske a) $(f^{-1})'(2)$ b) $(f^{-1})'(3)$.
2. Olkoon $f(x) = x^2 + 2x,\ x \leq -1$. Laske $(f^{-1})'(3)$
3. Olkoon $f(x) = x^3 + 3x - 1$. Osoita, että f:llä on käänteisfunktio ja laske$(f^{-1})'(3)$

2. Funktion derivaattafunktion laskeminen käänteisfunktion derivaatan avulla
$f'(x) = \dfrac{1}{(f^{-1})'(y)}$ ja sijoita y:n paikalle f(x)

4. Johda funktion $f(x) = \sqrt{x}$ derivaattafunktio käyttäen käänteisfunktion derivaattaa.

2.5. Potenssi- ja juurifunktion derivaatta

1. Murtopotenssin derivoimissääntö
on sama kuin muidenkin potenssien derivoimissääntö $D(x^{m/n}) = \dfrac{m}{n}x^{m/n-1}$

2.5.1. Derivoi funktio a) $f(x) = x^{2/3}$ b) $f(x) = (2x - 1)^{5/4}$
2. Derivoi a) $f(x) = x^{-1/2}$ b) $f(x) = (3x - 4)^{-5/6}$

2. Juurifunktion derivoiminen
Neliöjuuren derivoimissäännön voisi muistaa $D(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
Muut juuret kannattanee muuttaa potensseiksi ja derivoida potenssin derivoimissääntöä käyttäen.
Anna parittoman juurifunktion derivaatan lauseke juurimuodosssa! (Juuren MJ = R, murtopotenssin MJ = R_+)

3. Derivoi a) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ b) $f(x) = \sqrt[3]{3x + 4}$

4. Derivoi a) $f(x) = \sqrt[4]{3x + 1}$ b) Laske $f'(5)$.

3. Trigonometriset funktiot

3.1. Kertausta

1. Radiaani
on kulman mitta. Sen suuruus on kulman kylkien väliin jäävän, saman ympyrän kaaren ja säteen suhde.

2. Asteiden ja radiaanien yhteys
$180° = \pi$ (rad). $\dfrac{t}{\pi} = \dfrac{\alpha}{180°}$, missä t ja α ovat saman kulman suuruudet radiaaneina ja asteina.

3.1.1. Montako radiaania on a) 90° b) 60° c) 225° d) 1000° ?
2. Montako astetta on a) 1 b) 0,45 c) $\pi/6$ d) $2\pi/5$ radiaania?

3. Kulmaa vastaava kehäpiste
on piste, missä kulman kääntynyt kylki leikkaa yksikköympyrän kehän. Piste on yksikäsitteinen.

3. Mikä on kulman a) 450° b) 270° c) 120° d) -45° kehäpiste?

4. Kehäpistettä vastaava kulma
on kulma, jonka toinen kylki kulkee kehäpisteen kautta ja toinen on positiivisella x-akselilla.
Kulmia on äärettömän monta.

4. Minkä kulman kehäpiste on a) (0,1) b) (-1,0) c) $(\frac{1}{2}\sqrt{3},\frac{1}{2})$ d) $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$?

5. Sinin ja kosinin määritelmä suorakulmaisessa kolmiossa

$\sin\alpha = \dfrac{\text{kulman vastainen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}$. $\cos\alpha = \dfrac{\text{kulman viereinen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}$

5. Suorakulmaisen kolmion sivut ovat 3,4 ja 5. Mikä on pienimmän kulman sini, kosini ja kulman suuruus?

6. Suorakulmaisen kolmion sini on $\frac{2}{5}$ ja hypotenuusa 20. Pitkäkö on vastainen kateetti?

6. Sinin ja kosinin määritelmä yksikköympyrässä.
$\sin\alpha = y$, joka on kehäpisteen y-koordinaatti. $\cos\alpha = x$, joka on kehäpisteen x-koordinaatti.

7. Kulman kehäpiste on (-0,6;-0,8). Mikä on kulman sini ja kosini?
8. Mikä on 150° kulman sinin ja kosinin tarkka arvo?

7. Sinin ja kosinin merkit (, kun kulman kehäpiste) eri neljänneksissä

SINI:		KOSINI:	
+	+	-	+
-	-	-	+

8. Sini- ja kosinifunktion kuvaajat
Molemmat ovat aaltofunktioita, joiden suurin arvo on 1 ja pienin arvo on -1.
Sinifunktio lähtee origosta kasvaen. Kosinifunktio lähtee pisteestä (0,1) väheten.

9. Piirrä samaan koordinaatistoon käyrät a) $y = \sin x$ ja $y = \sin x + 2$ b) $y = \cos x$ ja $y = 2\cos x$ c) $y = \sin x$ ja $y = 2\sin x + 3$

9. Jaksollisuus
Funktio on jaksollinen ja sen jakso on A, jos $\forall x$: $f(x + A) = f(x)$
eli funktio saa aina jakson päässä saman arvon kuin jakson verran pienemmälläkin x:llä.
Sinin ja kosinin perusjakso (= pienin jakso) on 2π.

10. Jonkin trigonometrisen funktion (jossa sini tai kosini) perusjakson laskeminen
Lasketaan muuttuja x_1, joilla kulma saa arvon 0 ja muuttuja x_2, jolla kulma saa arvon 2π.
Perusjakso = $x_2 - x_1$

10. Mikä on funktion a) $f(x) = \sin 3x$ b) $f(x) = \cos \frac{1}{2}x$ c) $f(x) = \sin (4x - \pi / 3)$ perusjakso

11. Funktioiden sin (kx + b) ja cos (kx + b) perusjakso
on $2\pi / k$

12. Sinin ja kosinin arvojoukot
on väli [-1,1] eli $-1 \le \sin x \le 1$ ja $-1 \le \cos x \le 1$

13. Funktion suurimman tai pienimmän arvon laskeminen funktiosta, jossa vain sin x tai cos x.
Sijoitetaan sin x:n paikalle 1 ja -1. Näin saaduista arvoista suurempi on suurin arvo ja pienempi pienin arvo.
Mutkikkaammassa tapauksessa mietittävä, mitä arvoja sini tai kosini saa määrittelyjoukossaan.

11. Mikä on funktion a) $f(x) = 3\sin x + 4$ b) $f(x) = 2 - 3\cos 4x$ suurin ja pienin arvo?
12. Mikä on funktion a) $f(x) = 5\sin x - 2$ b) $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - 3$ arvojoukko?

14. Saman kulman sinin ja kosinin välinen yhteys
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

13. Olkoon sin x = a. Mitä on cos x?
14. Sievennä $(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin x \cdot \cos x$

15. Parillinen funktio Funktio on parillinen, jos kaikilla x pätee $f(-x) = f(x)$

15. Osoita, että funktio a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^4 - x^2 + 3$ on parillinen.

16. Parillisen funktion kuvaaja on symmetrinen y-akselin suhteen

17. Pariton funktio Funktio on pariton, jos kaikilla x pätee $f(-x) = - f(x)$

16. Osoita, että funktio a) $f(x) = x^3 - 4x$ b) $f(x) = (x^3 + x)^5$ on pariton.

18. Parittoman funktion kuvaaja on symmetrinen origon suhteen, kulkee siis origon kautta.

19. Sinin parittomuus Sinifunktio on pariton funktio ts. $\sin(-x) = -\sin x$

17. Olkoon $\sin x = a$. Mitä on $\sin(-x)$?
18. Minkä kulman sini on $-\sin x$?

20. Kosinin parillisuus Kosinifunktio on parillinen funktio ts. $\cos(-x) = \cos x$

19. Olkoon $\cos x = a$. Mitä on $\cos(-x)$?
20. Tutki funktion a) $f(x) = \sin x + 2x$ b) $f(x) = \cos 2x + \sin^2 x$ c) $f(x) = \sin 2x + 3$ parillisuutta.

21. Suplementtikulmien sinien yhteys $\sin(\pi - x) = \sin x$

21. Olkoon $\sin x = a$. Mitä on $\sin(\pi - x)$?

22. Suplementtikulmien kosinien yhteys $\cos(\pi - x) = -\cos x$

22. Olkoon $\cos x = a$. Mitä on $\cos(\pi - x)$?
23. Minkä kulman kosini on $-\cos x$?

23. Kulman kosinin ja komplementtikulman sinin välinen yhteys $\cos x = \sin(½\pi - x)$. ko sini = *ko*mplementtikulman *sini*

24. Eri neljänneksien ne kulmat, joilla saman trigonometrisen funktion arvon itseisarvo on sama		
$\alpha_2 = 180° - \alpha_1$	$\alpha_3 = 180° + \alpha_1$	$\alpha_4 = 360° - \alpha_1$ ($= -\alpha_1$)
$x_2 = \pi - x_1$	$x_3 = \pi + x_1$	$x_4 = 2\pi - x_1$ ($= - x_1$)
Mikä on trigonometrisen funktion arvon etumerkki saadaan siitä missä neljänneksessä kulma on.		

24. Olkoon $\sin x = a$ ja $0 < x < ½\pi$. Mitä on a) $\sin(½\pi - x)$ b) $\sin(\pi + x)$ c) $\sin(-x)$ d) $\sin(2\pi - x)$?
25. Olkoon $\cos 50° = a$. Määritä kulmat, joilla $\cos x = |a|$.

25. Trigonometrisen funktion tarkan arvon laskeminen, kun saman kulman toisen trigonometrisen funktion arvo tunnetaan 1° Piirrä suorakulmainen kolmio 2° Merkitse kahden sivun pituudet annetusta trigonometrisesta tiedosta 3° Laske Pythagoraan teoreemalla kolmannen sivun pituus. 4° Kysytyn funktion itseisarvon saat suorakulmaisesta kolmiosta perustrigonometrialla 5° Kysytyn funktion etumerkki saadaan kyseessä olevan funktion etumerkistä kyseisessä neljänneksessä.

26. Olkoon $\sin x = -\frac{3}{5}$ ja $½\pi < x < 1½\pi$. Määritä $\cos x$ ja $\tan x$.

27. Olkoon $\tan x = 3$ ja $\pi < x < 2\pi$. Mitä on $\sin x$ ja $\cos x$

26. Yhteenlaskukaavat	
$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$	$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$
$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$	$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

28. Sievennä $\sin(x + \pi/3) + \cos(x - \pi/6)$.
29. Olkoon $\sin x = 0,6$ ja $0 < x < ½\pi$. Määritä a) $\sin(x + \pi)$ b) $\cos(x + \pi/3)$

27. Kaksinkertaisen kulman sievennyskaavat
$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ tai $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ tai $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

30. Sievennä lauseke $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x$.
31. Olkoon $\sin x = -0{,}8$ ja $\pi < x < 1\frac{1}{2}\pi$. Määritä a) $\sin 2x$ b) $\cos 2x$ c) $\sin(\pi + 2x)$.

28. Kulman tangentin määritelmä suorakulmaisessa kolmiossa
$$\tan \alpha = \frac{\text{kulman vastainen kateetti}}{\text{kulman viereinen kateetti}}$$

29. Kulman tangentin määritelmä yksikköympyrässä.
$$\tan \alpha = \frac{\text{kulman kehäpisteen y-koordinaatti}}{\text{kulman kehäpisteen x-koordinaatti}}$$

30. Tangenttipiste
on se piste, missä kulman kääntynyt kylki (tai sen jatke) leikkaa yksikköympyrän pisteeseen (1,0) piirretyn pystysuoran tangentin

31. Tangentin määritelmä tangenttipisteen avulla
$\tan \alpha$ = kulman tangenttipisteen y-koordinaatti

32. Saman kulman tangentin, sinin ja kosinin välinen yhteys.
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

32. Olkoon $\sin x = a$ ja $\cos x = b$. Mitä on $\tan x$?
33. Olkoon $\tan x = 3$ ja $\sin x = -0{,}6a$. Mitä on $\cos x$?

33. Tangentin määrittelyjoukko
kaikki muut kulmat, paitsi ne, joilla kulma = $\frac{1}{2}\pi + n \cdot \pi$

34. Mikä on funktion a) $f(x) = \tan 2x$ b) $\tan(x - \pi/3)$ määrittelyjoukko?

34. Tangenttifunktion perusjakso
on $\pi = 180°$

35. Mikä on funktion $f(x) = \tan 3x$ perusjakso?

35. Tangenttifunktion parittomuus
Tangenttifunktio on pariton ts. $\tan(-x) = -\tan x$

36. Tangenttifunktion kuvaaja
kulkee välillä $]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$ kasvaen, tulee vasemmalta $-\infty$:stä ja menee origon kautta $+\infty$:een.

37. Tangenttifunktion pystysuorat asymptootit
ovat pystysuorat suorat määrittelemättömyyskohdissa $x = \frac{1}{2}\pi + n\pi$

3.2. Trigonometriset yhtälöt

1. $\sin x = \sin y$
$x = y + n \cdot 360°$ TAI $x = 180° - y + n \cdot 360°$ $\qquad$ $x = y + n2\pi$ TAI $x = \pi - y + n2\pi$
eli kulmat yhtä suuret tai komplementtikulmia

3.2.1. Ratkaise yhtälö a) $\sin x = \sin 37°$ b) $\sin 2x = \sin 48°$ c) $\sin 2x = \sin x$ d) $\sin 2x = \sin(30° - x)$
2. Ratkaise yhtälö a) $\sin 2x + \sin 40° = 0$ b) $\sin 3x + \sin 2x = 0$

2. $\cos x = \cos y$
$x = y + n \cdot 360°$ TAI $x = -y + n \cdot 360°$ $\qquad$ $x = y + n2\pi$ TAI $x = -y + n2\pi$
eli kulmat yhtä suuret tai vastalukuja

3. Ratkaise yhtälö a) $\cos x = \cos 15°$ b) $\cos 3x = \cos 54°$ c) $\cos 3x = \cos x$ d) $\cos 3x = \cos(x - 30°)$.
4. Ratkaise yhtälö a) $\cos x + \cos 20° = 0$ b) $\cos 2x + \cos x = 0$

3. tan x = tan y
x = y + n·180° x = y + n·π

5. Ratkaise yhtälö a) tan x = tan 50° b) tan 2x = tan 40°
6. Ratkaise yhtälö a) tan 3x = tan x b) tan 3x + tan x = 0

4. sin x = a , cos x = a , tan x = a
1° etsi ensin kulma α, jolle sin α = a tai cos α = a tai tan α = a
2° korvaa a tällä trigonometrisella yhteydellä
3° saat yhtälön sin x = sin α , joka ratkaistaan kuten edellä

7. Ratkaise yhtälö a) sin x = 1 b) sin 2x = 0 c) sin 3x = -1 d) cos 4x = 1 e) cos 5x = 0 f) cos 6x = -1
8. Ratkaise yhtälö a) sin x = 0,739 b) cos x = - ½ c) tan x = 2,4
9. Ratkaise yhtälö a) sin (2x - 60°) = 0,5 b) 3 cos 2x + 1 = 0 c) 5tan 3x + 4 = 0

5. Homogeeninen yhtälö sinin ja kosinin suhteen
Jaa $\cos^n$ x:llä, missä n on homogeenisen yhtälön asteluku
Saat yhtälön, jossa on vain tuntemattomana tan x, joka ratkaistaan.

10. Ratkaise yhtälö a) sin x + cos x = 0 b) 2 sin x + 3 cos x = 0
11. Ratkaise yhtälö $3\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0$

6. Tulo = 0 yhtälö
Merkitse jokainen tulon tekijä = 0 ja ratkaise näin saadut yhtälöt

12. Ratkaise yhtälö (sin x + 1)(2cos x - 1) = 0

7. Yhteinen tekijä yhtälön molemmilla puolilla
Jaa yhteisellä tekijällä yhtälön molemmat puolet.
Tee kaksi yhtälöä 1° jakamalla saatu yhtälö ja 2° yhteinen tekijä = 0
Ratkaise nämä yhtälöt

13. Ratkaise yhtälö $2\sin^2 x = \sin x \cdot \cos x$

8. Sievennyskaavojen käyttöä yhtälöissä
Käytä sievennyskaavoja ja pyri johonkin edellä olevaan perustilanteeseen.

14. Ratkaise yhtälö a) 3sin 2x = 2cos x b) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x$

3.3. Trigonometristen funktioiden derivaatat

1. D(sin x)
= cos x

3.3.1. Derivoi a) sin 2x b) $\sin^2 x$ c) $\sin^2 2x$

2. Derivoi a) $f(x) = (x + \sin 2x)^2$ b) $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{2x}$

2. D(cos x)
= - sin x

3. Derivoi a) 3cos x b) cos 3x c) $\cos^3 x$ d) $\cos^3 3x$
4. Derivoi a) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos 2x}$

3. D(tan x)
$= 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

5. Derivoi a) tan 4x b) $\tan^4 x$ c) $\tan^4 4x$
6. Derivoi a) f(x) = tan 2x + cos 3x b) $f(x) = \tan x \cdot \cos x$ c) $f(x) = \dfrac{\tan x}{\sin 2x}$

4. Derivaattoihin liittyviä yhtälöitä
Sijoita yhtälöön derivaatan lauseke ja ratkaise yhtälö

7. Ratkaise yhtälö f ´(x) = 0 kun a) f(x) = 2x + cos 3x b) f(x) = 3x + 4sin x c) f(x) = tan 2x - 4x
8. Laske funktion derivaatan nollakohdat a) f(x) = 3sin x + 4cos x b) f(x) = cos x + x·sin x

5. Derivaattoihin liittyvä kirjainparametrin arvon selvittäminen
Derivoi ja tee annetuista tiedoista yhtälö tai yhtälöpari kirjainparametrien arvon laskemiseksi.

9. Mikä on a, kun $f'(\frac{1}{2}\pi) = 1$ ja $f(x) = a\cdot\sin 2x + 3x$.
10. Määritä a ja b, kun $f(x) = a\cdot\cos 2x + bx$, $f'(\pi/4) = 1$ ja $f'(\pi/2) = 3$.

6. Monotonisuuden tutkiminen
Funktio on kasvava, jos $f'(x) \geq 0$ ja $= 0$ vain yksittäisissä kohdissa.
Syntyvät epäyhtälöt hyvin yksinkertaisia, koska trigonometrisia epäyhtälöitä ei käsitelty erikseen.

11. Osoita, että funktio $f(x) = 2x + \sin 2x$ on kaikkialla kasvava.

7. Tangenttien laskeminen
Käytetään samoja menetelmiä, kuin polynomifunktioiden yhteydessä.
Muistettava $k_T = f'(x_0)$, missä x_0 on sivuamispisteen x-koordinaatti.

12. Mikä on käyrän $y = 2\sin 3x + \cos 4x$ kohtaan $x = \pi/3$ piirretyn tangentin kulmakerroin?

8. Raja-arvon laskeminen
Voidaan huomata, että lauseke, josta raja-arvo on laskettava, onkin eräs erotusosamäärästä.
Raja-arvo on silloin derivaatan arvo lähestymiskohdassa.

13. Laske $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$

9. Trigonometrisen funktion suurin ja pienin arvo
Voidaan tutkia jakson mittaista aluetta, esim. suljettua väliä $[0,2\pi]$
Tehtävä on tämän jälkeen tyyppiä: laske jatkuvan funktion suurin arvo suljetulla välillä.

14. Laske funktion a) $f(x) = \sin x - \cos x$ b) $f(x) = \sin^2 x + 2\cos x$ suurin ja pienin arvo.
15. Laske funktion a) $f(x) = 3\sin x - 4\cos x$ b) $f(x) = 5\sin x + 12\cos x$ suurin ja pienin arvo (tarkka arvo).

10. Epäyhtälön oikeaksi osoittaminen
Muutetaan epäyhtälö muotoon VP > 0 ja tutkitaan vasemman puolen määrittelemää funktioa.
Osoitetaan periaatteella: funktion pienin arvo on positiivinen $\Rightarrow$ kaikki funktion arvot ovat positiivisia.

16. Osoita, että $2\sin x \leq 3x$, kun $x \geq 0$.
17. Osoita, että $\tan x > 2x$, kun $0 < x < \pi/4$.
18. Osoita, että a) $4\sin^2 x + 1 \geq 4\sin x$ b) $5 \geq 4(\cos^2 x + \sin x)$

11. Yhtälön ratkaisun olemassaolon osoittaminen
Muutetaan yhtälö muotoon VP = 0 ja tutkitaan VP:n määrittelemää funktioa
Jos funktio on jatkuva ja saa erimerkkiset arvot, niin sillä on ainakin yksi nollakohta
Jos funktio on vielä monotoninen, niin se saa jokaisen arvonsa kerran ja siis arvon nolla kerran.

19. Osoita, että yhtälöllä $\tan x = 1 - x$ on täsmälleen yksi ratkaisu välillä $0 < x < \frac{1}{2}\pi$.
20. Osoita, että yhtälöllä $\cos 2x = 2x$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

12. Trigonometriaan liittyvä ääriarvoprobleema
Lasketaan kuten aiemmin: 1° lue tehtävä 2° piirrä kuvio 3° mieti mikä on maksimoitava suure, sille funktio 4° valitse x 5° lausu muut osat x:n ja annettujen tietojen avulla 6° tee funktio maksimoitavalle suureelle 7° selvitä määrittelyjoukko 8° laske funktion suurin arvo tällä välillä 9° pohdi järkevyys 10° anna vastaus

21. Puolisuunnikkaan lyhemmän kantasivun pituus on 3. Toinen erisuuntaisista sivuista on kohtisuorassa kantasivuja vastaan ja toisen pituus on 2. Miten suuri on jälkimmäisen sivun ja pitemmän kantasivun välinen kulma silloin, kun puolisuunnikkaan pinta-ala on suurin?
22. Vesikouru tehdään 50 cm leveästä peltilevystä taivuttamalla kummaltakin reunalta 15 cm leveä osa yhtä monta astetta ylöspäin. Miten monta astetta tuleen reunoja taivuttaa, jotta kouruun mahtuisi mahdollisimman paljon vettä eli kourun poikkipinta-ala olisi mahdollisimman suuri?
23. Peltilevy taitetaan keskeltä pituussuunnassa vesikouruksi. Kuinka suuri kulman on oltava, jotta poikkileikkauksen pinta-ala (ja myös kourun tilavuus) olisi mahdollisimman suuri?
24. Kerrostalon seinän vieressä on terassi, jonka katos on 4 m korkealla ja katos on 3 m seinästä ulospäin. Miten pitkät tikkaat vähintään tarvitaan, jotta ne ylettyisivät terassin yli maasta seinään?

4. Eksponentti- ja logaritmifunktio

4.1. Eksponenttifunktion kertausta

1. Eksponenttifunktion kantaluku
on oltava positiivinen. Ts. $f(x) = a^x \Rightarrow a > 0$

2. Minkä pisteen kautta eksponenttifunktioiden kuvaajat kulkevat
Pisteen (0,1) eli kuvaajat leikkaavat y-akselin korkeudella 1.

3. Eksponenttifunktioiden monotonisuus
Eksponenttifunktio on kasvava, jos kantaluku > 1 eli a > 1, vähenevä, jos 0 < a < 1 ja vakio, jos a = 1

4.1.1. Millä a:n arvoilla funktio a) $f(x) = (a-1)^x$ b) $f(x) = (2 - a)^x$ c) $f(x) = (a - 3)^{-x}$ on kasvava?

4. Eksponenttifunktion arvojoukko
on R_+ eli eksponenttifunktio saa vain positiivisia arvoja.

2. Mikä on funktion a) $f(x) = 2^{x+2}$ b) $f(x) = 2^x + 2$ c) $2^{|x|} + 2$ d) $f(x) = 2^{|x|} + x^2 + 2$ arvojoukko?
3. Mikä on yhtälön $2^x + 1 = 0$ ratkaisujoukko?

5. Eksponenttifunktion määrittelyjoukko
on koko reaalilukujen joukko eli R

6. Eksponenttifunktion raja-arvo, kun $x \to \pm\infty$
Kun a > 1 , on $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$ ja $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$
Kun 0 < a < 1 on $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$ ja $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \infty$

7. Raja-arvon laskeminen, kun $x \to \infty$ ja lausekkeena eksponenttifunktioiden osamäärä
Supista sillä eksponenttifunktiolla, joka nimittäjässä voimakkaimmin menee äärettömään.
Jos $x \to -\infty$, niin supista sillä eksponenttifunktiolla, joka nimittäjässä hitaammin lähestyy nollaa (a pienin)

4. Laske a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x+1}{2^x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5^x+4^x}{5^x+3^x}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5^x+4^x}{5^x+3^x}$

8. Eksponenttifunktion asymptootti
on x-akseli eli y = 0

9. Eksponenttifunktion kuvaaja
on x-akselin yläpuolella, kulkee pisteen (0,1) kautta, monotoninen kohdan 4.1.3 mukaisesti ja raja-arvot reunoilla kohdan 4.1.6 mukaisesti

4.2. Logaritmifunktio

1. Logaritmin määritelmä
Logaritmin arvo tarkoittaa sitä eksponenttia, mihin kantaluku pitää korottaa, jotta saataisiin logaritmoitava.

2. Logaritmiyhtälö ja vastaava eksponenttiyhtälö
$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

4.2.1. Mikä on vastaava eksponenttiyhtälö a) $\log_2 8 = 3$ b) $\lg 100 = 2$ c) $\ln 5 = x$

3. Logaritmin arvon laskeminen tekemällä vastaava eksponettiyhtälö
Merkitse arvoa x:llä ja tee eksponenttiyhtälö edellisen kohdan mukaisesti.
Ratkaise sitten tästä yhtälöstä x eli logaritmin arvo.

2. Laske a) $\log_2 64$ b) $\log_3 \sqrt{27}$ c) $\log_4 \dfrac{1}{8}$

4. $a^{\log_a x}$
= x (kun logaritmijärjestelmän kantaluku korotetaan logaritmin potenssiin, saadaan logaritmoitava luku)

5. Logaritmifunktion määrittelyjoukko
Mj = R_+ eli muodostuu niistä x:stä, joilla logaritmoitava > 0.

3. Mikä on funktion a) f(x) = lg (2x - 3) b) f(x) = ln (5 - x) c) f(x) = $\log_2 (x - x^2)$ määrittelyjoukko?

6. Logaritmifunktion arvojoukko
Aj = R

7. Logaritmifunktion monotonisuus
Logaritmifunktio $\log_a x$ on kasvava, kun a > 1 eli kantaluku > 1 ja vähenevä, kun 0 < a < 1

8. Logaritmifunktion asymptootti
on y-akseli, jota kuvaaja lähestyy, kun x lähestyy nollaa positiiviselta puolelta

9. $y = \log_a x$ ja $y = a^x$ kuvaajat
ovat symmetrisiä suoran y = x suhteen

10. Logaritmifunktio ja eksponenttifunktio
ovat toistensa käänteisfunktioita, kun niillä on sama kantaluku

11. $\log_a a$
= 1 (logaritmijärjestelmän kantaluvun logaritmi on aina = 1)

12. $\log_a 1$
= 0 (luvun 1 logaritmi on kaikissa logaritmijärjestelmissä = 0)

13. Minkä pisteen kautta logaritmifunktioiden kuvaajat kulkevat
pisteen (1,0) eli ne leikkaavat x-akselin kohdassa x = 1.

14. Logaritmifunktion kuvaaja
on y-akselin oikealla puolella, kulkee pisteen (1,0) kautta ja monotoninen kohdan 4.2.7. mukaisesti

15. $\log_a a^x$
= x (logaritmi kantaluvun potenssista on = eksponentti)

16. Logaritmin arvon laskeminen kohdan 15 avulla
Esitä logaritmoitava logaritmijärjestelmän kantaluvun potenssina.
Logaritmin arvo on tällöin logaritmoitavan eksponentti

4. Laske a) $\log_a a^5$ b) $\log_3 81$ c) lg 0,001 d) $\ln \sqrt{e}$ e) $\log_8 4$

17. Reaaliluvun esittäminen logaritmina
$r = \log_a a^r$

5. Mitä on a) 3 kaksikantaisena b) 4 e-kantaisena c) -1 kymmenkantaisena logaritmina?

18. Funktio ln x
on logaritmifunktio, jonka kantaluku on e

4.3. Logaritmien laskusäännöt

1. $\log_k a \cdot b$
= $\log_k a + \log_k b$

4.3.1. Sievennä a) $\log_2 2x$ b) $\log_3 9a$
2. Olkoon lg 5 = a. Mitä on lg 50?

2. $\log_k a/b$
= $\log_k a - \log_k b$

3. Sievennä a) $\log_4 a/4$ b) $\lg x/100$ c) $\ln e/a$
4. Olkoon $\log_2 3 = a$. Mitä on a) $\log_2 1½$

3. $\log_k a^n$ $= n \cdot \log_k a$

5. Sievennä a) $\lg x^2$ b) $\ln a^{-3}$ c) $\log_k k^3$

4. $\log_k a + \log_k b$ $= \log_k ab$

6. Esitä yhtenä logaritmina a) $\lg 3 + \lg x$ b) $\ln 4 + \ln x + \ln y$

5. $\log_k a - \log_k b$ $= \log_k a / b$

7. Minkä luvun logaritmi on a) $\lg x - \lg 2$ b) $\ln 2 + \ln t - \ln u$

6. $n \cdot \log_k a$ $= \log_k a^n$

8. Sievennä a) $2\lg x + 3\lg y$ b) $3 + 3\lg 2 + 2\lg a$

7. Logaritmijärjestelmästä toiseen siirtyminen $\log_a x = \dfrac{\log_k x}{\log_k a}$

9. Olkoon $\log_2 5 = a$. Mitä on a) $\log_4 5$ b) $\log_4 20$?

8. 10- ja e-kantaisten logaritmien (liki)arvot laskimella $\boxed{\text{log}}$ $\boxed{\text{logaritmoitava}}$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{arvo}}$ Joissakin laskimissa alku eri järjestyksessä HUOM! Laskimissa lg = log Luonnollisten logaritmien arvot samoin mutta $\boxed{\text{log}}$ korvataan $\boxed{\text{ln}}$:llä

10. Anna kolmidesimaalinen likiarvo a) lg 4 b) lg 7 c) lg 4500 d) ln 5 e) ln 12,34

9. Muunkantaisten logaritmien (liki)arvot laskimella Käytä kaavaa 4.3.7 eli $\log_a x = \dfrac{\lg x}{\lg a}$

11. Anna kolmidesimaalinen likiarvo a) $\log_2 3$ b) $\log_4 5$ c) $\log_{67} 89$

4.4. Eksponentti- ja logaritmiyhtälöt ja epäyhtälöt

1. $a^x = a^y$ eli kaksi termiä, sama kantaluku x = y eli kun termit eri puolilla yhtälöä ja niillä sama kantaluku, niin eksponentit ovat samat

4.4.1. Ratkaise a) $2^{3x} = 4$ b) $4^{1-x} = 8^{2x-5}$
2. Ratkaise a) $e^{2x-1} = e^5$ b) $e^{x-3} = 1$ c) $e^{4x+5} = 0$
3. Ratkaise a) $e^{2x-1} = 5$ b) $15e^{2x} = 6$ c) $e^{x-1} = 3^x$

2. $a^x = b^y$ eli kaksi termiä eri kantaluku Ota logaritmi molemmista puolista. Eksponentin voit siirtää eteen tekijäksi. Ratkaistaan näin saatu 1. asteen yhtälö

4. Ratkaise a) $2^x = 3$ b) $4^{2x} = 5$ c) $3^{x-1} = 4^{2-x}$

3. Yhtälö, jossa kolme termiä , x:iä vain samanlaisissa potensseissa Merkitse tätä potenssia y:llä ja korvaa ko. potenssit y:llä Ratkaise saadusta yhtälöstä y. Laita y:n paikalle takaisin ko. potenssi ja ratkaise siitä x.

5.Ratkaise a) $(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ b) $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$.

4. $a^x < a^y$ eli kaksi termiä, sama kantaluku, kantaluku a > 1 $\Leftrightarrow$ x < y eli eksponenteilla on sama järjestys

6. Ratkaise a) $2^{x-1} < 4$ b) $3^{2-x} > \sqrt[4]{27}$

5. $a^x < a^y$ eli kaksi termiä, sama kantaluku, kantaluku $0 < a < 1$
⇔ $x > y$ eli eksponenteilla on päinvastainen järjestys

7. Ratkaise a) $(½)^{3x-4} > (½)^{6-2x}$ b) $(½)^{2x} < (¼)^{6+x}$

6. Epäyhtälö, jossa kolme termiä, x:iä vain samanlaisissa potensseissa
Merkitse tätä potenssia y:llä ja korvaa ko. potenssit y:llä.
Ratkaise saadusta epäyhtälöstä y.
Laita y:n paikalle takaisin ko. potenssi ja ratkaise saadusta epäyhtälöstä x.

8. Ratkaise a) $4^x - 2^{1+x} > 8$ b) $9^x - 4\cdot3^x + 3 < 0$

7. $\log_k x = \log_k y$
⇔ $x = y$. Logaritmoitavat oltava positiivisia, joten tarkista tämä esim. sijoittamalla tai katsomalla kuuluuko saatu ratkaisu yhtälön määrittelyjoukkoon..

9. Ratkaise a) $\lg (2x - 3) = \lg (4x - 5)$ b) $\ln(x^2 - 2x) = \ln(x + 4)$ c) $1 + 2\log_2 x = \log_2(3x + 5)$

8. $\lg x = a$
JOKO käytä logaritmin määritelmää $x = 10^a$
TAI muuta a logaritmiksi säännöllä $a = \log 10^a$. Käytä tämän jälkeen edellistä kohtaa 7

10. Ratkaise a) $\lg (3x - 2) = 1$ b) $\ln(2x - 4) + 1 = 0$ c) $2\log_2 x = 3$ d) $\ln (x - 1) = 2$ e) $\ln (x - 2)^2 = 6$
11. Ratkaise a) $\ln (x - 1) = \ln (5 - x)$ b) $\ln (x + 1) = \ln x + 1$

9. $\log_k x < \log_k y$ ($k > 1$)
⇔ $x < y$, joka ratkaistaan kuten myös määrittelyehdoista saatavat epäyhtälöt $x > 0$ ja $y > 0$
Tehdään lukusuorataulukko, johon merkitään edellisten kohtien toteutumisALUEET
Päätellään millä alueella kaikki ehdot toteutuvat.

12. Ratkaise a) $\lg (2x - 1) < \lg (x + 3)$ b) $\ln (3x - 2) - \ln (x - 1) > \ln 2$

10. $\lg x < a$
Muuta $a = \lg 10^a$ ja ratkaise kuten edellä 4.4.9

13. Ratkaise a) $\ln(x - 1) > 2$ b) $\lg(x - 1) - \lg(x - 2) > 1$

4.5. Eksponenttifunktio $y = e^x$ ja sen derivaatta

1. e:n määritelmä
$f(x) = e^x$ on se eksponenttifunktio, jonka derivaatta nollassa on 1 eli $f\,'(0) = 1$

2. $f\,'(0)$, kun $f(x) = a^x$
$= \ln a$

3. $D(e^x)$
$= e^x$

4.5.1. Derivoi a) $f(x) = 2e^x + 3x$ b) $f(x) = e^x \cdot \sin x$ c) $f(x) = (e^x + 1)^2$

4. $D(e^{f(x)})$
$= e^{f(x)} \cdot f\,'(x)$

2. Derivoi a) $f(x) = e^{2x}$ b) $f(x) = e^{-x}$ c) $f(x) = e^{2x+3}$ d) $f(x) = e^{2x} \cdot x^3$ e) $f(x) = \dfrac{e^{3x} + 4}{e^{5x} + 6}$ f) $f(x) = \sqrt{e^{3x} + 2}$

5. Derivaatan arvon laskeminen
Derivoi ja sijoita sen lausekkeeseen haluttu kohta

3. Laske $f\,'(1)$, kun a) $f(x) = e^{2x} - x^3$ b) $f(x) = e^x \cdot \sin \pi x$

6. Tangentin kulmakertoimen laskeminen
$k_T = f\,'(x_0)$

4. Mikä on käyrän a) $y = e^{1-x}$ b) $y = x \cdot e^{-x}$ kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin?

7. Derivaatasta saatavan yhtälön ratkaiseminen
Derivoi ja sijoita se haluttuun yhtälöön. Tämän jälkeen ratkaise saatu yhtälö

5. Laske derivaatan nollakohdat, kun $f(x) = e^{2x} - 4x$ b) $f(x) = e^{2x} - 4e^x$ c) $f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$

6. Laske funktion $f(x) = ½e^{2x} - e^x - 2x$ derivaatan nollakohdat. (Vihje: merkitse $e^x = y$)

8. Derivaatasta saatavan epäyhtälön ratkaiseminen
Derivoi ja sijoita se haluttuun epäyhtälöön. Tämän jälkeen ratkaise saatu epäyhtälö.

7. Ratkaise epäyhtälö $f\,'(x) > 1$, kun $f(x) = x(e^x + 1)$

9. Kirjaimen arvon selvittäminen annetusta derivaattatiedosta
Derivoi ja tee annetuista tiedoista yhtälö tai yhtälöpari kirjainparametrien arvon laskemiseksi.

8. Määritä a, kun $f\,'(1) = 2$ ja $f(x) = a \cdot e^{2x} - 3x$
9. Määritä a ja b, kun $f(x) = e^{ax} + b$ sekä $f(0) = 2$ ja $f\,'(0) = 3$

10. Monotonisuus
Funktio on kasvava, kun $f\,'(x) \geq 0$ ja $= 0$ vain yksittäisissä kohdissa.
Funktio on vähenevä, kun $f\,'(x) \leq 0$ ja $= 0$ vain yksittäisissä kohdissa.
Ratkaise tai tutki näin saatua epäyhtälöä.

10. Millä välillä funktio $f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$ on kasvava?
11. Osoita, että funktio $f(x) = -e^{-2x} + 3x + 4$ on kaikkialla kasvava.

11. Ääriarvo
1° Lasketaan kaikki mahdolliset ääriarvokohdat eli derivaatan nk, alueen reuna, funktion ja derivaatan epäjatkuvuuskohdat
2° Selvitetään derivaatan merkki.
3° Hahmotellaan funktion kuvaaja derivaatan merkkien perusteella.
4° Päätellään kuvaajan hahmotelmasta ääriarvojen laatu
5° Lasketaan kyseiset ääriarvot.

12. Laske funktion $f(x) = (x + 3)e^{4x}$ ääriarvo.

12. Suurin/pienin arvo
Lasketaan kuten muillakin funktioilla suurin ja pienin arvo.
JOKO 1° funktio on jatkuva suljetulla välillä, jolloin lasketaan kaikki arvot mahdollisissa ääriarvokohdissa
TAI 2° hahmotellaan funktion kulku ja päätellään siitä mikä on funktion suurin/pienin arvo.

13. Laske funktion $f(x) = e^x - 2x - 3$ suurin ja pienin arvo välillä [0,1].
14. Laske funktion $f(x) = e^{2x} - 2x + 3$ pienin arvo.

13. Ääriarvoprobleema
Lasketaan kuten aiemmin: 1° lue tehtävä 2° piirrä kuvio 3° mieti mikä on maksimoitava suure, sille funktio 4° valitse x 5° lausu muut osat x:n ja annettujen tietojen avulla 6° tee funktio maksimoitavalle suureelle 7° selvitä määrittelyjoukko 8° laske funktion suurin arvo tällä välillä 9° pohdi järkevyys 10° anna vastaus

15. Suorakulmion kaksi kärkeä on x-akselilla ja kaksi käyrällä $y = e^{-|x|}$. Mikä on alan suurin arvo?

14. Yhtälön ratkaisujen lukumäärän selvittäminen
Jos funktio on jatkuva ja saa erimerkkiset arvot, niin näiden kohtien välillä on ainakin yksi nollakohta
Jos lisäksi funktio on monotoninen, niin nollakohtia on täsmälleen yksi

16. Osoita, että yhtälöllä $e^x + x = 0$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

15. Epäyhtälön oikeaksi osoittaminen
Muutetaan epäyhtälö muotoon VP > 0 ja tutkitaan vasemman puolen määrittelemää funktioa.
Osoitetaan periaatteella: funktion pienin arvo on positiivinen $\Rightarrow$ kaikki funktion arvot ovat positiivisia.

17. Osoita, että epäyhtälö $xe^{2x} + 1 > 0$ on kaikkialla tosi.

16. Raja-arvon laskeminen
Voidaan huomata, että raja-arvo on laskettava erotusosamäärästä.
Raja-arvo on silloin derivaatan arvo lähestymiskohdassa.

17. e:n toinen määritelmä

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

18. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ - tyyppisten raja-arvojen laskeminen
Yritä saada kantalukuun 1 + 1 / ”jokin luku” ja tämä ”jokin luku” eksponentiksi.
Jos tämä ”jokin luku” lähestyy ääretöntä, niin tämä osa lähestyy e:tä

18. Laske a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$ c) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}$

19. D(a^x)
= $a^x \cdot \ln a$

19. Derivoi a) f(x) = 5^x b) f(x) = 6^{3x} c) f(x) = $x^4 \cdot 4^x$

4.6. Luonnollisen logaritmifunktion derivaatta

1. D(ln x)
= $\frac{1}{x}$

4.6.1. Derivoi a) f(x) = 6ln x b) f(x) = ln $\frac{x}{5}$ c) f(x) = $\frac{\ln x}{5}$ d) f(x) = ln x^5

2. Derivoi a) f(x) = $x^3 \cdot \ln 3x$ b) f(x) = $\frac{\ln x}{x^3}$ c) f(x) = ln (e^{-x} + 2)

2. Derivaattaan liittyviä yhtälöitä ja epäyhtälöitä
Derivoi ja sijoita derivaatta yhtälöön tai epäyhtälöön, ja ratkaise.

3. Laske funktion a) f(x) = $x^3 \cdot \ln x$ b) f(x) = $\frac{\ln x}{x^3}$ derivaatan nollakohdat.

4. Milloin funktion f(x) = $\frac{\ln x}{x}$ derivaatta on positiivinen, milloin negatiivinen?

3. Funktion monotonisuus
tutkitaan derivaatan merkeillä

5. Milloin funktio f(x) = ln (x^2 + 3) - ½ln x on vähenevä?

6. Milloin funktio f(x) = $\frac{\ln x}{3}$ - ln(x - 2) on vähenevä?

4. Yhtälön ratkaisujen lukumäärä
Siirry tutkimaan vastaavaa funktioa ja käytä nollakohtien olemassaolosta kertovaa lausetta.

7. Kuinka monta ratkaisua on yhtälöllä 5x + ln (x - 2) = 0?

5. Ääriarvojen laskemista
Laske mahdolliset ääriarvokohdat (f´:n nk jne.), f´:n merkit, hahmottele kulku ja päättele ääriarvo.

8. Laske funktion f(x) = ln (x - 3) - 2x ääriarvo.
9. Määritä funktion f(x) = $x^2 \cdot \ln x$ ääriarvo.

5. Funktion suurin ja pienin arvo
Jos funktio on jatkuva suljetulla välillä, niin sillä on varmasti suurin ja pienin arvo.
Lasketaan mahdolliset ääriarvokohdat, funktion arvot näissä ja valitaan niistä suurin.
Muussa tapauksessa tutki funktion kulkua ja päättele siitä mikä voi olla suurin arvo.

10. Määritä funktion f(x) = x - ln x suurin ja pienin arvo välillä [½,e]
11. Laske funktion f(x) = ln x + ln (2 - x) suurin arvo.

6. Funktion arvojoukon laskeminen
Lasketaan suurin ja pienin arvo. Arvojoukko on tällöin väli [pienin, suurin]
Jos suurinta arvoa ei ole lasketaan raja-arvo, kun x lähestyy alueen reunaa.

12. Mikä on funktion f(x) = $\frac{\ln x}{x}$ arvojoukko?

7. Epäyhtälön oikeaksi osoittaminen
Käytetään periaatetta: Jos pienin arvo on positiivinen, niin kaikki arvot ovat positiivisia.

13. Osoita, että $\ln x < x$ kaikilla positiivisilla x:n arvoilla.

14. Osoita, että $\ln x \geq \frac{x - 1}{x}$ kaikilla $x > 0$. Milloin yhtäsuuruus on voimassa?

8. $D(x^a)$
$= ax^{a-1}$

15. Derivoi a) $f(x) = x^\pi$ b) $f(x) = (2x + 1)^e$ c) $f(x) = (x^2 - 2x)^{e\pi}$

Vastaukset esimerkkitehtäviin.

1.1.1. a) $6x - 2$ b) $8x^2 + 2x - 15$
2. $1 \leq x < 6$
3. a) $1 \leq x < 2$ b) $1 < x < 2$
4. a) $s(x) = 2x + 3$, $u(x) = x^2$
b) $s(x) = 2x$, $u(x) = \sin x$
c) $s(x) = -x$, $u(x) = e^x$
d) $s(x) = 4x - 5$, $u(x) = f(x)$
5. a) 1 b) 2 c) 3 d) 1 e) 1 f) 1
6. a) 1 b) 23
7. $x = -½$
8. a) $8x - 7$ b) $8x + 7$
c) $16x - 25$ d) $4x + 9$
9. a) $4x^2 - 1$ b) $2x^2 + 4x - 1$
c) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x$
10. a) $\sqrt{x^2 + 6x + 8}$
b) $2\sqrt{x + 2} + x + 2$
11. $u(s) = 4s^3 - 5s^2$, $s(x)=2x+3$

1.2.1. a) $8(2x - 2)^3$ b) $\frac{1}{\sqrt{2x + 3}}$
c) $\frac{44(2x - 3)}{(4x + 5)^3}$
2. a) -15 b) -24 c) ei tarpeeksi tietoja d) 30
3. $\frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$, $\frac{9\sqrt{5}}{20}$
4. a) $\frac{36x + 43}{\sqrt{6x + 7}}$
b) $\frac{-(4x + 1)}{\sqrt{2x + 1} \cdot (4x + 3)^2}$
5. $\frac{2(\sqrt{2x + 1} + 3)}{\sqrt{2x + 1}}$
6. 210
7. $150x - 130$

2.1.1. a) 5 b) 7 c) 9
2. a) 3 b) 4
3. 5
4. a) 3 b) 1 c) 2
5. a) [3,4] b) [1,2]
6. a) 5 b) 1
7. a) 9 b) 4
8. a) 0 b) 1
9. a) $½x - 1½$ b) $\sqrt{x + 3}$
c) $-\sqrt{x + 3}$ d) $\sqrt[3]{x + 4}$
10. a) 10^x b) $x^2 + 1$, $x \geq 0$

c) $\frac{1}{3} \cdot \log_2 x$

2.2.2. $f^{-1}(2) = 1$
3. a) ei b) on c) ei d) on
4. a) ei b) on

2.3.3. (2,2)

2.4.1. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{5}$
2. $-¼$
3. $\frac{1}{6}$

2.5.1. a) $\frac{2}{3}x^{-1/3}$ b) $\frac{5}{2}(2x - 1)^{1/4}$
2. a) $-½x^{-1½}$ b) $-2½(3x - 4)^{-11/6}$
3. a) $\frac{1}{\sqrt{2x - 1}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{(3x + 4)^2}}$
4. a) $\frac{3}{4\sqrt[4]{(3x + 1)^3}}$ b) $\frac{3}{32}$

3.1.1. a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{4}$ d) $\frac{50\pi}{9}$
2. a) 57,3° b) 25,8° c) 30° d) 72°
3. a) (0,1) b) (0,-1)
c) $(-½, ½\sqrt{3})$ d) $(½\sqrt{2}, -½\sqrt{2})$
4. a) $90° + n\cdot360°$
b) $180° + n\cdot360°$
c) $30° + n\cdot360°$
d) $225° + n\cdot360°$
5. $\sin \alpha = 0{,}6$, $\cos \alpha = 0{,}8$
$\alpha = 36{,}9°$
6. 8
7. $\sin \alpha = -0{,}8$, $\cos \alpha = -0{,}6$
8. $\sin 150° = ½$,
$\cos 150° = -½\sqrt{3}$
10. a) $2\pi/3$ b) 4π c) $\pi/2$
11. a) S = 7, p = 1
b) S = 5, p = -1
12. a) [-7,3] b) [-3½, - 2½]
13. $\pm\sqrt{1 - a^2}$
14. 1
17. - a
18. $-x + n\cdot360°$,
$180° + x + n\cdot360°$
19. a
20. a) pariton b) parillinen c) ei kumpikaan
21. a
22. -a
23. $180° - x + n\cdot360°$,
$180° + x + n\cdot360°$
24. a) $\sqrt{1 - a^2}$ b) -a c) -a d) -a
25. $\pm50° + n\cdot360°$,
$\pm130° + n\cdot360°$
26. $\cos x = -0{,}8$, $\tan x = 0{,}75$
27. $\sin x = \frac{-3}{\sqrt{10}}$, $\cos x = \frac{-1}{\sqrt{10}}$
28. $\sin x + \sqrt{3}\cdot\cos x = 2\sin(x + \pi/3)$
29. a) -0,6 b) $0{,}1(4 - 3\sqrt{3})$
30. 1
31. a) 0,96 b) -0,28 c) -0,96
32. a / b
33. -0,2a
34. a) $x \neq \pi/4 + n\cdot\pi/2$
b) $x \neq 5\pi/6 + n\cdot\pi$
35. $\pi/3$

3.2.1. a) $x = 37° + n\cdot360°$,
$x = 143° + n\cdot360°$
b) $x = 24° + n\cdot180°$,
$x = 66° + n\cdot180°$
c) $x = n\cdot360°$, $x = 60° + n\cdot120°$
d) $x = 10° + n\cdot120°$,
$x = 150° + n\cdot360°$
2. a) $x = -20° + n\cdot180°$,
$x = 110° + n\cdot180°$
b) $x = n\cdot72°$, $x = 180° + n\cdot360°$
3. a) $x = \pm15° + n\cdot360°$
b) $x = \pm18° + n\cdot120°$
c) $x = n\cdot90°$
d) $x = -15° + n\cdot180°$,
$x = 7{,}5° + n\cdot90°$
4. a) $x = \pm160° + n\cdot360°$
b) $x = 60° + n\cdot120°$
5. a) $x = 50° + n\cdot180°$
b) $x = 20° + n\cdot90°$
6. a) $x = n\cdot180°$
b) $x = n\cdot180°$, $x = 45° + n\cdot90°$
7. a) $x = 90 + n\cdot360°$
b) $x = n\cdot90°$
c) $x = -30° + n\cdot120°$

d) $x = n\cdot 90°$ e) $x = 18° + n\cdot 36°$
f) $x = 30° + n\cdot 60°$
8. a) $x = 47{,}6° + n\cdot 360°$,
$x = 132{,}4° + n\cdot 360°$
b) $x = \pm 120° + n\cdot 360°$
c) $x = 67{,}4° + n\cdot 180°$
9. a) $45° + n\cdot 180°$,
$x = 105° + n\cdot 180°$
b) $x = \pm 54{,}7° + n\cdot 180°$
c) $x = -12{,}9° + n\cdot 60°$
10. a) $x = -45° + n\cdot 180°$
b) $x = -56{,}3° + n\cdot 180°$
11. $x = 45° + n\cdot 180°$,
$x = -18{,}4° + n\cdot 180°$
12. $x = -90° + n\cdot 180°$,
$x = \pm 60° + n\cdot 360°$
13. $x = n\cdot 180°$,
$x = 26{,}6° + n\cdot 180°$
14. a) $x = 90° + n\cdot 180°$,
$x = 19{,}5° + n\cdot 360°$,
$x = 160{,}5° + n\cdot 360°$
b) $x = n\cdot 120°$

3.3.1. a) $2\cos 2x$ b) $2\sin x \cdot \cos x$ c) $4\sin 2x \cos 2x$
2.a) $2(x+\sin 2x)(1 + 2\cos 2x)$
b) $\dfrac{2x\cos 2x - \sin 2x}{2x^2}$
3. a) $-3\sin x$ b) $-3\sin 3x$
c) $-3\cos^2 x \cdot \sin x$
d) $-9\cos^2 3x \cdot \sin 3x$
4. a) $\cos^2 x - \sin^2 x$ b) $\dfrac{\cos x \cdot \cos 2x + 2\sin 2x \cdot \sin x}{\cos^2 2x}$
5. a) $4(1 + \tan^2 4x)$
b) $4\tan^3 x(1 + \tan^2 x)$
c) $16\tan^3 4x(1 + \tan^2 4x)$
6. a) $2(1 + \tan^2 2x) - 3\sin 3x$
b) $\cos x$ c) $\dfrac{\sin 2x(1+\tan^2 x)-2\cos 2x\tan x}{\sin^2 2x}$
7. a) $x = 0{,}24 + n\cdot\pi/3$,
$x = 0{,}30 + n\cdot\pi/3$
b) $x = \pm 2{,}42 + n\cdot 2\pi$
c) $x = \pm \pi/8 + n\cdot\pi/2$
8. a) $x = 0{,}64 + n\cdot\pi$
b) $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\pi + n\cdot\pi$
9. $a = 1$
10. $a = 1$, $b = 3$
12. $2\sqrt{3} - 6$
13. 2
14. a) $S = \sqrt{2}$, $p = -\sqrt{2}$
b) $S = 2$, $p = -2$
15. a) $S = 5$, $p = -5$
b) $S = 13$, $p = -13$

21. 73,7°
22. 63,4°
23. 90°
24. 9,9 m

4.1.1. a) $a > 2$ b) $a < 1$
c) $3 < a < 4$
2. a) $]0,\infty[$ b) $]2,\infty[$ c) $[3,\infty[$ d) $[3,\infty[$
3. $\varnothing$
4. a) 1 b) 1 c) 0

4.2.1. a) $2^3 = 8$ b) $10^2 = 100$
c) $e^x = 5$
2. a) 6 b) $1\frac{1}{2}$ c) $-1\frac{1}{2}$
3. a) $x > 1\frac{1}{2}$ b) $x < 5$
c) $0 < x < 1$
4. a) 5 b) 4 c) -3 d) ½ e) 2/3
5.a) $\log_2 8$ b) $\ln e^4$ c) $\lg 0{,}1$

4.3.1. a) $1 + \log_2 x$ b) $2 + \log_3 a$
2. $a + 1$
3. a) $\log_4 a - 1$ b) $\lg x - 2$
c) $1 - \ln a$
4. $a - 1$
5. a) $2\lg x$ b) $-3\ln a$ c) 3
6. a) $\lg 3x$ b) $\lg 4xy$
7. a) $\frac{1}{2}x$ b) $2t/u$
8. a) $\lg x^2y^3$ b) $\lg 8000a^2$
9. a) $\frac{1}{2}a$ b) $\frac{1}{2}a + 1$
10. a) 0,602 b) 0,845
c) 3,653 d) 1,609 e) 2,513
11. a) 1,585 b) 1,161
c) 1,067

4.4.1. a) $\dfrac{2}{3}$ b) $2\dfrac{1}{8}$
2. a) 3 b) 3 c) ei ratk.
3. a) $x = \frac{1}{2}(1 + \ln 5)$
b) $x = \frac{1}{2}\ln 0{,}4$ c) $x = \dfrac{1}{1 - \ln 3}$
4. a) $\log_2 3$ b) $\frac{1}{2}\log_4 5$
c) $\log_{12} 48$
5. a) $x = 1$, $x = 2$
b) $x = 0$, $x = 2$
6. a) $x < 3$ b) $x < 1\frac{1}{4}$
7. a) $x < 2$ b) ei ratk.
8. a) $x > 2$ b) $0 < x < 1$
9. a) ei ratk. b) $x = 4$, $x = -1$ c) $x = 2\frac{1}{2}$
10. a) $x = 4$ b) $x = 2+ \frac{1}{2}e^{-1}$
c) $x = 2\sqrt{2}$ d) $x = 1 + e^2$
e) $x = 2 \pm e^3$
11. a) $x = 3$ b) $x = \dfrac{1}{e - 1}$

12. a) $\frac{1}{2} < x < 4$ b) $x > 1$
13. a) $x > e^2 + 1$
b) $2 < x < 2\dfrac{1}{9}$

4.5.1. a) $2e^x + 3$
b) $e^x(\sin x + \cos x)$
c) $2e^x(e^x + 1)$
2. a) $2e^{2x}$ b) $-e^{-x}$ c) $2e^{2x+3}$
d) $x^2e^{2x}(2x + 3)$
e) $\dfrac{-2e^{8x} - 20e^{5x} + 18e^{3x}}{(e^{5x} + 6)^2}$
f) $\dfrac{3e^{3x}}{2\sqrt{e^{3x} + 2}}$
3. a) $2e^2 - 3$ b) $-\pi e$
4. a) -1 b) 0
5. a) $x = \frac{1}{2}\ln 2$ b) $x = \ln 2$
c) $x = 0$, $x = -1$
6. $x = \ln 2$
7. $x > -1$
8. $\dfrac{5}{2e^2}$
9. $a = 3$, $b = 1$
10. $x > 0$, $x < -2/3$
12. $\min = -\frac{1}{4}e^{-13}$
13. $S = -2$, $p = -2\ln 2 - 1$
14. 4
15. $2 / e$
18. a) e^2 b) $\sqrt{e}$ c) e^2
19. a) $5^x\cdot\ln 5$ b) $6^{3x}\cdot 3\ln 6$
c) $4^x x^3(4 + x\ln 4)$

4.6.1. a) $\dfrac{6}{x}$ b) $\dfrac{1}{x}$ c) $\dfrac{1}{5x}$ d) $\dfrac{5}{x}$
2. a) $x^2(3\ln 3x + 1)$
b) $\dfrac{1 - 3\ln x}{x^4}$ c) $\dfrac{-1}{1 + 2e^x}$
3. a) $x = e^{-1/3}$ b) $x = e^{1/3}$
4. pos. kun $0 < x < e$,
neg. kun $x > e$
5. $0 < x < 1$
6. $x > 2$
7. 1
8. $\max = \ln \frac{1}{2} - 7$
9. $\min = -\dfrac{1}{2e}$
10. $S = e - 1$, $p = 1$
11. $S = 0$
12. $]-\infty ,1/e]$
14. $x = 1$
15. a) $\pi x^{\pi-1}$ b) $2e(2x + 1)^{e-1}$ c) $e\pi(x^2 - 2x)^{e\pi-1}(2x - 2)$

Koetehtäviä aiemmilta vuosilta

91.1.4. Osoita, että epäyhtälö $3x^4 - 4x^3 + 1 \geq 0$ on aina tosi.

91.2.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = \sin^2 x$ b) $f(x) = e^{-x}\cdot\cos x$ c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

[a) $\sin 2x$ b) $-e^{-x}(\cos x + \sin x)$ c) $\dfrac{1 - \ln x}{x^2}$]

91.2.2. Laske funktion $f(x) = e^{2 - x} + 3x$ derivaatan nollakohta. Tarkka arvo ja 3-desimaalinen likiarvo.
[$2 - \ln 3 = 0{,}901$]

91.2.3. Määritä a ja b, kun $y = e^{ax/5} + b$ toteuttaa jokaisella x:n arvolla yhtälön $y' = 2y + 8$. [a = 10, b = - 4]

91.2.4. Määritä funktion $f(x) = x + \sqrt{x}$ käänteisfunktion derivaatta kohdassa x = 6. [0,8]

91.2.5. Laske funktion $f(x) = x^3 \cdot \ln x$ ääriarvot. [min = $-\dfrac{1}{3e}$]

91.2.6. Määritä funktion $f(x) = 3 \cdot \sin x + 4 \cdot \cos x + 5$ suurin ja pienin arvo (tarkka arvo). [S = 10 , p = 0]

91.2.7. Millä vakion t arvoilla funktiolla $f(x) = t + x \cdot \ln x$ ei ole reaalista nollakohtaa? [$t > e^{-1}$]

92.2.1. Laske funktion $f(x) = 2 \cdot x + \cos 2x$ derivaatan nollakohdat.

92.2.2. Millä välillä funktio $f(x) = x^3 e^{-x}$ on kasvava?

92.2.3. Osoita, että funktiolla $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \to e^x + x$ on käänteisfunktio. Laske $(f^{-1})'(1)$.

92.2.4. Osoita, että kaikilla $x \geq 0$ on voimassa epäyhtälö $2\sqrt{x} + 1 \geq 3\sqrt[3]{x}$

92.2.5. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $3 \cdot \ln x + a = x^3$ on täsmälleen kaksi reaalista ratkaisua?

92.2.6. Mikä käyrän $y = e^{ax}$, missä $a > 0$, piste on lähinnä pistettä (a,0)?

92.2.7. Laske $\displaystyle \lim_{x \to \pi/6} \frac{\sin(2x - \pi/6) - ½}{x - \pi/6}$.

1. $f'(x) = 2 - 2\sin 2x$; $f'(x) = 0$; $2\sin 2x = 2$; $\sin 2x = 1$; $2x = \pi/2 + n \cdot 2\pi$; $\mathbf{x = \pi/4 + n \cdot \pi}$

2. $f'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = x^2 e^{-x}(3 - x)$; f kasvava, kun $f'(x) \geq 0$; Koska $x^2 \geq 0$ ja $e^{-x} > 0$
on f kasvava , kun $3 - x \geq 0$ eli $\mathbf{x \leq 3}$

3. $f'(x) = e^x + 1 > 0 \Rightarrow$ f on aidosti kasvava $\Rightarrow$ f:llä on käänteisfunktio
$f(x) = 1$; $e^x + x = 1$; Huomataan, että yhtälö toteutuu, kun x = 0, sillä $e^0 + 0 = 1$
$(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{e^0 + 1} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

4. EY $\Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 1 - 3\sqrt[3]{x} \geq 0$ Tutkitaan funktioa $f(x) = 2\sqrt{x} + 1 - 3\sqrt[3]{x} = 2x^{½} + 1 - 3x^{1/3}$
$f'(x) = x^{-½} - x^{-2/3}$; $f'(x) \geq 0$; $x^{-½}$ 3 $x^{-2/3}$ $\|\,(\,)^6$; $x^{-3} \geq x^{-4}$ $\|\cdot x^4 \geq 0$; $x \geq 1$
f ' : --- 1 +++
f : ↘ _ ↗ $\Rightarrow$ pienin arvo = f(1) = 2 + 1 - 3 = 0 Koska pienin arvo = 0 , on kaikki arvot ≥ 0

5. $3 \cdot \ln x + a = x^3 \Leftrightarrow 3 \cdot \ln x + a - x^3 = 0$; Tutkitaan funktioa $f(x) = 3 \cdot \ln x + a - x^3$; Mj $x > 0$
f on JVA ja DVA Mj:ssä. $f'(x) = 3/x - 3x^2 = 3(1 - x^3)/x$; $f'(x) \geq 0$; $1 - x^3 \geq 0$; $x \leq 1$
f ' : +++ 1 ---
f : ↗ ¯ ↘ $\Rightarrow$ suurin arvo = f(1) = a - 1
$\displaystyle \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ ja $\displaystyle \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$, joten funktiolla on 2 ratkaisua, jos suurin arvo > 0 ts **a > 1**

6. Olkoon käyrän lähimmän pisteen x-koordinaatti = x. $\Rightarrow y = e^{ax}$
$d(x) = \sqrt{(x - a)^2 + (e^{ax} - 0)^2}$, joka on pienin, kun sen juurrettava on pienin
tutkitaan funktioa $f(x) = (x - a)^2 + e^{2ax}$; $f'(x) = 2(x - a) + 2a \cdot e^{2ax} = 2x + 2a(e^{2ax} - 1)$
Huomataan, että $f'(x) = 0$, kun x = 0 , $f'(x) > 0$, kun x > 0 ja $f'(x) < 0$, kun x < 0 , koska
kumpikin yhteenlaskettava 2x ja $2a(e^{2ax} - 1)$ on vastaavasti = , > ja < 0 .
Siis funktion ja etäisyyden pienin arvo saadaan kun x = 0 ja y = 1 . Piste = **(0,1)**

7. $\displaystyle \lim_{x \to \pi/6} \frac{\sin(2x - \pi/6) - ½}{x - \pi/6} = \lim_{x \to \pi/6} \frac{\sin(2x - \pi/6) - \sin(2 \cdot \pi/6 - \pi/6)}{x - \pi/6} = \lim_{x \to \pi/6} \frac{f(x) - f(\pi/6)}{x - \pi/6}$
$= f'(\pi/6)$, kun $f(x) = \sin(2x - \pi/6)$; $f'(x) = 2\cos(2x - \pi/6)$; $f'(\pi/6) = 2\cos(2 \cdot \pi/6 - \pi/6) = \mathbf{\sqrt{3}}$

94.1.1. Derivoi a) $f(x) = \ln(3x - 4)$ b) $f(x) = e^{4x-5}$ c) $f(x) = \sin^2 3x$

94.1.2. Määritä vakio a, kun funktio $f(x) = a\cdot\ln(2x + 3) + \sin 4x$ toteuttaa ehdon $f'(0) = 1$.

94.1.3. Millä välillä funktio $f(x) = x^2 e^{x^2}$ on kasvava?

94.1.5. Osoita, että funktiolla $f(x) = (x + 1)^2 + \ln x$, $x > 0$, on käänteisfunktio f^{-1}. Laske $(f^{-1})'(4)$.

94.1.8. Funktiolla $f(x) = \sin x + a\cos x$ on ääriarvo kohdassa $\frac{\pi}{6}$. Määritä vakio a ja funktion arvojoukko.

94.1.9. Osoita, että epäyhtälö $2x^2 - 27\sqrt{x} + 31 > 0$ on tosi koko määrittelyjoukossaan.

94.1.10. Suihkukaivon altaan pohja on neliön muotoinen, seinät pystysuorat ja tilavuus 4000 l. Seinät ja pohja kaakeloidaan. Mitkä arvot täytyy altaan leveydellä ja syvyydellä olla, jotta kaakelia kuluisi mahdollisimman vähän?

---

1. a) $f(x) = \ln(3x - 4)$; $\mathbf{f'(x) = \frac{3}{3x - 4}}$ b) $f(x) = e^{4x-5}$; $\mathbf{f'(x) = 4\cdot e^{4x-5}}$

c) $f(x) = \sin^2 3x = (\sin 3x)^2$; $f'(x) = 2\cdot(\sin 3x)^1 \cdot\cos 3x \cdot 3 = 6\cdot\sin 3x \cdot \cos 3x = \mathbf{3\cdot\sin 6x}$

---

2. $f(x) = a\cdot\ln(2x + 3) + \sin 4x$; $f'(x) = a\cdot\frac{1}{2x + 3}\cdot 2 + 4\cos 4x = \frac{2a}{2x + 3} + 4\cos 4x$

$f'(0) = 1$; $\frac{2a}{3} + 4\cos 0 = 1$; $\frac{2a}{3} + 4\cdot 1 = 1$; $\frac{2a}{3} = -3$; **a = - 4½**

---

3. $f(x) = x^2\cdot e^{x^2}$; $f'(x) = 2x\cdot e^{x^2} + x^2\cdot e^{x^2}\cdot 2x = e^{x^2}\cdot 2x(1 + x^2)$; f on kasvava, kun $f'(x) \geq 0$

koska $(1 + x^2)$ ja e^{x^2} ovat positiivisia, on oltava $2x \geq 0$; $\mathbf{x \geq 0}$

---

5. $f(x) = (x + 1)^2 + \ln x$; $f'(x) = 2(x + 1) + \frac{1}{x} > 0$, koska kaikki termit > 0 alueella $x > 0$

Tällöin f on aidosti kasvava ja sillä on käänteisfunktio.
$f(x) = 4$; $(x + 1)^2 + \ln x = 4$, josta huomataan, että se toteutuu, kun $x = 1$ $(1 + 1)^2 + \ln 1 = 2^2 + 0 = 4$
Koska f on aidosti kasvava, on $x = 1$ ainoa yhtälön ratkaisu.

$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4 + 1} = \mathbf{\frac{1}{5}}$

---

8. $f(x) = \sin x + a\cdot\cos x$ on jva , dva eikä reunoja $\Rightarrow$ ääriarvo on derivaatan nollakohdassa.

$f'(x) = \cos x - a\cdot\sin x$; $f'(\frac{\pi}{6}) = 0$; $\cos\frac{\pi}{6} - a\cdot\sin\frac{\pi}{6} = 0$; $\frac{\sqrt{3}}{2} - a\cdot\frac{1}{2} = 0$; $a = \sqrt{3}$

Funktion jaksollisuudesta seuraa, että se saa kaikki arvonsa jakson aikana. Siis tutkitaan väliä $[0,2\pi]$
Funktio on tällä suljetulla välillä jva. Dva. Reunat 0 ja 2π.

'$f' = 0$; $\cos x - \sqrt{3}\cdot\sin x = 0$; $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $x = \frac{\pi}{6} + n\cdot\pi$, joista tarkasteluvälillä $x = \frac{\pi}{6}$ ja $\frac{7\pi}{6}$

$f(0) = \sqrt{3}$; $f(2\pi) = \sqrt{3}$; $f(\frac{\pi}{6}) = ½ + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2$; $f(\frac{7\pi}{6}) = -½ + \sqrt{3}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -2$

Koska f on jva suljetulla välillä, se saa suurimman ja pienimmän arvonsa sekä kaikki niiden välillä olevat arvot. Siis **Aj = [-2,2]**

---

9. $2x^2 - 27\sqrt{x} + 31 > 0$; Tutkitaan funktioa $f(x) = 2x^2 - 27\sqrt{x} + 31$. Mj : $x \geq 0$

$f'(x) = 4x - \frac{27}{2\sqrt{x}} = \frac{8x\sqrt{x} - 27}{2\sqrt{x}}$; $f' \geq 0$; $8x\sqrt{x} \geq 27$ || $()^2$; $64x^3 \geq 27^2$; $||\sqrt[3]{\ }$; $4x \geq 3^2$; $x \geq 2¼$

f ' : --- 2¼ +++

f : $\searrow$ _ $\nearrow$ $\Rightarrow$ funktion pienin arvo on $f(2¼) = 2\cdot\frac{81}{16} - 27\cdot 1½ + 31 = \frac{5}{8} > 0$.

Koska funktion pienin arvo on positiivinen , niin sen kaikki arvot ovat positiivisia.

---

10. Olkoon pohjaneliön sivu = x ; korkeus on $= \frac{V}{A} = \frac{4000}{x^2}$

$A(x) = x^2 + 4\cdot x\cdot\frac{4000}{x^2} = x^2 + 16000x^{-1}$; $x > 0$; $A'(x) = 2x - 16000x^{-2} = \frac{2x^3 - 16000}{x^2}$

$A' \geq 0$; $2x^3 - 16000 \geq 0$; $x^3 \geq 8000$; $x \geq 20$
A' : 0 --- 20 +++
A : $\searrow$ _ $\nearrow$ $\Rightarrow$ ala on pienin , kun x = 20 **Leveys** = 20 dm = **2 m** , **korkeus** = 10 dm = **1 m**

94.2.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = \tan 3x$ b) $f(x) = e^x \cdot \sin x$ c) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

94.2.2. Määritä a , kun funktio $f(x) = a\cdot\sin 2x + \cos x$ toteuttaa yhtälön $f\,'(\frac{\pi}{6}) = 3$.

94.2.3. Millä välillä funktio $f(x) = x\cdot\ln x$ on vähenevä?

94.2.5. Osoita, että funktiolla $f(x) = x^5 + 2x^3 + 3x + 4$ on käänteisfunktio. Laske $(f^{-1})'(10)$.

94.2.8. Laske funktion $f(x) = 3 \sin x + 4 \cos x$ suurin ja pienin arvo.

94.2.9. Osoita, että epäyhtälö $e^x \cdot x + 1 > 0$ toteutuu kaikilla reaaliluvuilla x.

94.2.10. Tasakylkisessä puolisuunnikkaassa erisuuntaisten sivujen pituus on 3a ja toinen yhdensuuntaisista sivuista on 7a. Laske tällaisen puolisuunnikkaan suurin mahdollinen ala.

---

1. a) $f(x) = \tan 3x$; $f\,'(x) = \mathbf{3\cdot(1 + \tan^2 3x)}$ b) $f(x) = e^x\cdot\sin x$; $f\,'(x) = e^x\cdot\sin x + e^x\cdot\cos x = \mathbf{e^x(\sin x + \cos x)}$

c) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; $f\,'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot\ln x}{x^2} = \mathbf{\frac{1 - \ln x}{x^2}}$

---

2. $f(x) = a\cdot\sin 2x + \cos x$; $f\,'(x) = 2a\cdot\cos 2x - \sin x$

$f\,'(\frac{\pi}{6}) = 3$; $2a\cdot\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} = 3$; $2a\cdot½ - ½ = 3$; **a = 3½**

---

3. $f(x) = x\cdot\ln x$; MJ: $x > 0$; $f\,'(x) = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$

f on vähenevä, jos $f\,'(x) \le 0$; $\ln x + 1 \le 0$; $\ln x \le -1$; $\ln x \le \ln e^{-1}$; $x \le e^{-1}$ V: $\mathbf{0 < x \le e^{-1}}$

---

5. $f(x) = x^5 + 2x^3 + 3x + 4$; $f\,'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 3 > 0$ (koska kaikki yhteenlaskettavat > 0) ; f on aidosti kasvava , joten käänteisfunktio on olemassa.
10 on käänteisfunktion x , eli alkuperäisen funktion y ; $x^5 + 2x^3 + 3x + 4 = 10$; x = 1 (huomaamalla , ja yksikäsitteisyydestä seuraa, että x = 1 on ainoa ratkaisu.

$(f^{-1})'(10) = \frac{1}{f\,'(1)} = \frac{1}{5 + 6 + 3} = \mathbf{\frac{1}{14}}$

---

8. Jaksollisuuden perusteella voidaan tarkastella jotain jakson mittaista aluetta esim. $[0,2\pi]$
$f(x) = 3\sin x + 4 \cos x$ on jatkuva suljetulla välillä. Dva .

$f\,'(x) = 3 \cos x - 4 \sin x$; $f\,' = 0$: $3 \cos x = 4 \sin x$ || : 4cos x ; $\tan x = \frac{3}{4}$, jolla on kaksi ratkaisua tarkasteluvälillä , I neljänneksessä x_1 ja III neljänneksessä x_3
sinin ja kosinin arvot näissä kohdissa saadaan kolmiosta

$\sin x_1 = \frac{3}{5}$ ja $\cos x_1 = \frac{4}{5}$; $\sin x_3 = -\frac{3}{5}$ ja $\cos x_3 = -\frac{4}{5}$

$f(x_1) = 3\cdot\frac{3}{5} + 4\cdot\frac{4}{5} = 5$; $f(x_3) = 3\cdot(-\frac{3}{5}) + 4\cdot(-\frac{4}{5}) = -5$; $f(0) = 4$; $f(2\pi) = 4$

suurin arvo = 5 ja **pienin arvo = - 5**

---

9. Tutkitaan funktioa $f(x) = e^x\cdot x + 1$, $f\,'(x) = e^x\cdot x + e^x\cdot x = e^x(x + 1)$; $f\,' = 0$; $x + 1 = 0$; $x = -1$
f ' :n merkit määrää x + 1 , koska $e^x > 0$ x + 1 : n kuvaaja on nouseva suora, josta merkit
f ' : --- -1 +++
f : ↘ _ ↗ $\Rightarrow$ pienin arvo $= f(-1) = e^{-1}\cdot(-1) + 1 = 1 - \frac{1}{e} > 0$ $\Rightarrow$ kaikki arvot ovat positiivisia.

---

10. Olkoon kylkien projektiot pitemmällä kantasivulla = x , jolloin korkeus $= \sqrt{9a^2 - x^2}$ ja pitempi kantasivu = 7a + 2x

$A(x) = \frac{7a + 7a + 2x}{2}\sqrt{9a^2 - x^2} = (7a + x)\sqrt{9a^2 - x^2}$ $0 \le x \le 3a$

$A'(x) = 1\cdot\sqrt{9a^2 - x^2} + (7a + x)\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{9a^2 - x^2}} = \sqrt{9a^2 - x^2} - \frac{(7a + x)x}{\sqrt{9a^2 - x^2}}$

$A' = 0$; $\sqrt{9a^2 - x^2} - \frac{(7a + x)x}{\sqrt{9a^2 - x^2}} = 0$; $\sqrt{9a^2 - x^2} = \frac{(7a + x)x}{\sqrt{9a^2 - x^2}}$; $9a^2 - x^2 = 7ax + x^2$; $2x^2 + 7ax - 9a^2 = 0$

$x = \frac{-7a \pm \sqrt{49a^2 + 72a^2}}{4} = \frac{-7a \pm 11a}{4}$; x = a (tai x = - 4½a)

$A(0) = 21a^2$; $A(a) = 16\sqrt{2}a^2 \approx 22{,}6a^2$; $A(3a) = 0$ V: Suurin ala = $\mathbf{16\sqrt{2}a^2}$

94.4.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = \sin^2 x$ b) $f(x) = \ln x^2$ c) $f(x) = e^{1-x}$

94.4.2. Määritä vakiot a ja b, kun funktio $f(x) = a\cdot\sin 2x + b\cdot\cos 3x$ toteuttaa ehdot $f'(\frac{\pi}{6}) = -5$ ja $f'(\frac{\pi}{2}) = 1$

94.4.3. Määritä funktion $f(x) = \ln(x + 2) + \ln(x^2 + 1)$ derivaatan nollakohdat.

94.4.4. Osoita, että funktiolla $f(x) = e^x + \ln(x + 1)$, $x > -1$, on käänteisfunktio. Laske $(f^{-1})'(1)$.

94.4.5. Mikä on funktion $f(x) = \sin^2 x - \sin x$ pienin arvo välillä $[0,2\pi]$?

94.4.6. Millä vakion c arvoilla yhtälöllä $(x^2 - 6)e^{2x} = c$ on reaalinen ratkaisu?

94.4.7. Mihin käyrän $y = e^{-x}$ pisteeseen piirretty tangentti rajoittaa positiivisten koordinaattiakselien kanssa alaltaan suurimman kolmion?

---

1. a) $f(x) = (\sin x)^2$; $f'(x) = 2(\sin x)^1\cdot\cos x = 2\sin x\cdot\cos x = \mathbf{\sin 2x}$ b) $f(x) = \ln(x^2)$; $f'(x) = \frac{1}{x^2}\cdot 2x = \mathbf{\frac{2}{x}}$
c) $f(x) = e^{1-x}$; $f'(x) = e^{1-x}\cdot(-1) = \mathbf{-e^{1-x}}$

---

2. $f(x) = a\sin 2x + b\cos 3x$; $f'(x) = 2a\cdot\cos 2x - 3b\cdot\sin 3x$

$$\begin{cases} f'(\frac{\pi}{6}) = -5 \\ f'(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases} ; \begin{cases} 2a\cos\frac{\pi}{3} - 3b\sin\frac{\pi}{2} = -5 \\ 2a\cos\pi - 3b\sin\frac{3\pi}{2} = 1 \end{cases} ; \begin{cases} 2a\cdot½ - 3b\cdot 1 = -5 \\ 2a\cdot(-1) - 3b\cdot(-1) = 1 \end{cases} ; \begin{cases} a - 3b = -5 \\ @\ -2a + 3b = 1 \end{cases}$$

$-a = -4$; $\mathbf{a = 4}$; @ $-8 + 3b = 1$; $3b = 9$; $\mathbf{b = 3}$

---

3. $f(x) = \ln(x + 2) + \ln(x^2 + 1)$; Mj : $x + 2 > 0$ ja $x^2 + 1 > 0$ ts. $\boxed{x > -2}$

$f'(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{2x}{x^2+1}$; $f'(x) = 0$; $\frac{1}{x+2} + \frac{2x}{x^2+1} = 0$; $\frac{1}{x+2} = -\frac{2x}{x^2+1}$; $x^2 + 1 = -2x^2 - 4x$

$3x^2 + 4x + 1 = 0$; $x = \frac{-4 \pm\sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6}$; $\mathbf{x = -1}$ tai $\mathbf{x = -\frac{1}{3}}$

---

4. $f(x) = e^x + \ln(x + 1)$, $x > -1$; $f'(x) = e^x + \frac{1}{x+1} > 0$

Koska $e^x > 0$ ja $x + 1 > 0$ koko Mj:ssa $\Rightarrow$ f on aidosti kasvava $\Rightarrow \exists f^{-1}$.
1 on f^{-1} :n x eli f:n y. Ratkaistaan x yhtälöstä $f(x) = 1$; $e^x + \ln(x + 1) = 1$, josta huomataan, että $x = 0$ toteuttaa yhtälön, sillä $e^0 + \ln(0 + 1) = 1 + 0 = 1$. Koska f on aidosti kasvava, on $x = 0$ ainoa ratkaisu.

$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{e^0 + \frac{1}{0+1}} = \frac{1}{1+1} = \mathbf{\frac{1}{2}}$

---

5. $f(x) = \sin^2 x - \sin x$ $x \in [0,2\pi]$; $f'(x) = 2\sin x\cdot\cos x - \cos x = \cos x(2\sin x - 1)$

$f'(x) = 0$; $\cos x = 0$ tai $\sin x = ½$; $x = \frac{\pi}{2}$ tai $x = \frac{3\pi}{2}$ tai $x = \frac{\pi}{6}$ tai $x = \frac{5\pi}{6}$ (kaikki taulukosta)

$f(0) = 0$; $f(2\pi) = 0$; $f(\frac{\pi}{2}) = 1 - 1 = 0$; $f(\frac{3\pi}{2}) = 1 + 1 = 2$; $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$; $f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ **Pienin =** $\mathbf{-\frac{1}{4}}$

---

6. $(x^2 - 6)e^{2x} = c$; $(x^2 - 6)e^{2x} - c = 0$ Tutkitaan funktioa $f(x) = (x^2 - 6)e^{2x} - c$, joka on JVA ja DVA
$f'(x) = 2xe^{2x} + (x^2 - 6)e^{2x}\cdot 2 = 2e^{2x}(x^2 + x - 6)$, missä $2e^{2x} > 0$, joten sulkulauseke määrää merkin
$f'(x) = 0$; $x^2 + x - 6 = 0$; $x = 2$ tai $x = -3$ Kuvaaja on YAP, josta merkit
f ' : +++ -3 --- 2 +++
f : ↗ ‾ ↘ _ ↗

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, joten funktio saa positiivisia arvoja

$f(2) = -2e^4 - c$, joka on pienin arvo, ellei raja-arvo kun $x \to -\infty$ ole pienempi
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -c$ ($x^2 - 6 > 0$ ja $e^{2x} > 0$ ja tulo $\to 0$)

Yhtälöllä on ratkaisuja, jos pienin arvo ≤ 0 ; $-2e^4 - c \le 0$; $\mathbf{c \ge -2e^4}$

7. Olkoon sivuamispisteen x-koordinaatti = a , jolloin y-koordinaatti = e^{-a}
$y' = -e^{-x}$; $k_T = y'(a) = -e^{-a}$; Tang. yhtälö $y - e^{-a} = -e^{-a}(x - a)$
x-akselin lp : $y = 0 \Rightarrow x = a + 1$; y-akselin lp : $x = 0 \Rightarrow y = e^{-a}(a + 1)$
Kolmion ala = $A(a) = ½\cdot(a + 1)\cdot e^{-a}(a + 1) = ½e^{-a}(a + 1)^2$, JVA, kun a > 0
$A'(a) = ½\cdot(-1)e^{-a}(a + 1)^2 + ½\cdot e^{-a}\cdot 2(a + 1) = ½e^{-a}(-a^2 - 2a - 1 + 2a + 2) = ½e^{-a}(1 - a^2)$
sulut määrää nk:n ja merkin. A' = 0 ; $1 - a^2 = 0$; $a^2 = 1$; a = ± 1. Kuvaaja AAP, josta merkit
A' : --- -1 +++ 0 +++ 1 ---
A : || ↗ ¯ ↘ Suurin arvo saadaan , kun a = 1. Piste on **$(1,e^{-1})$**

95.1.1. Derivoi a) $f(x) = 2e^2 - e^{-x}$ b) $f(x) = x\cdot\ln 2x$ c) $f(x) = \tan 2x - \cos 3x$

95.1.5. Osoita, että funktiolla f: $f(x) = \frac{1}{x} + e^{-x+1}$, x > 0 , on käänteisfunktio. Määritä $(f^{-1})'(2)$.

95.1.6. Määritä vakio a siten, että funktion $f(x) = \ln x - 4x + a$ maksimiarvo on 5.

95.1.7. Etsi funktion $f(x) = \sqrt{3 - 4x} + \sqrt{2x - 1}$ suurin ja pienin arvo.

95.1.8. Osoita, että epäyhtälö $2\cdot\sqrt{x} \geq 3 - \frac{1}{x}$ on tosi koko määrittelyjoukossaan.

95.1.10. Käyrän $y = e^{1-|x|}$ ja x-akselin väliin piirretään kolmio, jonka eräs kärki on origossa ja kaksi muuta kärkeä käyrällä siten, että kantasivu on x-akselin suuntainen. Määritä kolmion alan suurin mahdollinen arvo.

1. a) $f(x) = 2e^2 - e^{-x}$; $f'(x) = 0 - e^{-x}\cdot(-1) = \mathbf{e^{-x}}$; b) $f(x) = x\cdot\ln 2x$; $f'(x) = 1\cdot\ln 2x + x\cdot\frac{2}{2x} = \mathbf{\ln 2x + 1}$
c) $f(x) = \tan 2x - \cos 3x$; $f'(x) = \mathbf{2(1 + \tan^2 2x) + 3\sin 3x}$

5. $f(x) = \frac{1}{x} + e^{-x+1}$; $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - e^{-x+1} < 0 \Rightarrow$ f aid. Vähenevä $\Rightarrow \exists f^{-1}$
$f(x) = 2$; $\frac{1}{x} + e^{-x+1} = 2$, josta huomataan, että yhtälö toteutuu, kun x = 1 ($\frac{1}{1} + e^0 = 1 + 1 = 2$)
$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{-\frac{1}{1} - e^{-1+1}} = \frac{1}{-1 - 1} = \mathbf{-\frac{1}{2}}$

6. $f(x) = \ln x - 4x + a$ MJ: x > 0 ; $f'(x) = \frac{1}{x} - 4 = \frac{1 - 4x}{x}$
Nim > 0, jolloin os. määrää merkin. $1 - 4x \geq 0$; $x \leq \frac{1}{4}$.
Kun f ´:n merkki muuttuu + → - , on siinä maksimi. $f(¼) = \ln ¼ - 4\cdot¼ + a = 5$; **a = 6 + ln 4**

7. $f(x) = \sqrt{3 - 4x} + \sqrt{2x - 1}$ MJ: $3 - 4x \geq 0$ JA $2x - 1 \geq 0$; $x \leq ¾$ JA $x \geq ½$; $½ \leq x \leq ¾$.
f on JVA sulj. välillä, DVA (paitsi reunoilla).
$f'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{3 - 4x}} + \frac{2}{2\sqrt{2x - 1}}$; $f' = 0$; $\frac{-2}{\sqrt{3 - 4x}} + \frac{1}{\sqrt{2x - 1}} = 0$
$2\cdot\sqrt{2x - 1} = \sqrt{3 - 4x}$ || $(\ )^2$; $4(2x - 1) = 3 - 4x$; $8x - 4 = 3 - 4x$; $12x = 7$; $x = \frac{7}{12}$
$f(½) = 1$; $f(¾) = \sqrt{½}$; $f(\frac{7}{12}) = \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$; **Suurin = $½\sqrt{6}$, pienin = $\frac{\sqrt{2}}{2}$**

8. $2\cdot\sqrt{x} \geq 3 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow 2\cdot\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 3 \geq 0$. Tutkitaan $f(x) = 2\cdot\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 3$; x > 0. $f'(x) = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}}$
$f'(x) \geq 0$; $x^2 - \sqrt{x} \geq 0$; $x^2 \geq \sqrt{x}$ || $(\ )^2$; $x^4 \geq x$ || : x > 0 ; $x^3 \geq 1$; $x \geq 1$.
f ' : --- 1 +++
f : ↘ _ ↗ ⇒ f:n pienin arvo on f(1) = 2 + 1 - 3 = 0 , joten kaikki arvot ≥ 0

10. Olkoon A:n x-koordinaatti = x (>0) ⇒ kanta = 2x & korkeus = $y = e^{1-|x|} = e^{1-x}$
$A(x) = ½\cdot 2x\cdot e^{1-x} = xe^{1-x}$, x > 0 , $A'(x) = 1\cdot e^{1-x} + x\cdot e^{1-x}\cdot(-1) = e^{1-x}(1 - x)$
$A' \geq 0$; $1 - x \geq 0$ (koska $e^{1-x} < 0$) ; $x \leq 1$
A on suurin , kun x = 1 ; $A(1) = 1\cdot e^{1-1} = \mathbf{1}$

95.2.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = \sin 2x$ b) $f(x) = e^{3x}$ c) $f(x) = (\ln x)^2$

95.2.5. Laske funktion $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ suurin ja pienin arvo.

95.2.7. Osoita, että epäyhtälö $e^{2x} \geq 2x + 1$ on tosi kaikilla x:n arvoilla.

95.2.9. Johda funktion $f(x) = \ln x$ derivaatta käyttäen hyväksi e^x:n ja käänteisfunktion derivoimissääntöjä.

1. a) $f(x) = \sin 2x$; $f'(x) =$ **$2\cdot\cos 2x$** ; b) $f(x) = e^{3x}$; $f'(x) =$ **$3\cdot e^{3x}$**
c) $f(x) = (\ln x)^2$; $f'(x) = 2 \cdot (\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \mathbf{\frac{2\ln x}{x}}$

5. $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ on jaksollinen. Riittää tutkia jakson mittaista aluetta eism. $x \in [0,2\pi]$
f on JVA sulj. välillä. $f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x$; $f' = 0$; $\cos x = \sin 2x$; $\cos x = \cos(½\pi - 2x)$
$x = ½\pi - 2x + n2\pi$ tai $x = -½\pi + 2x + n2\pi$; $3x = ½\pi + n2\pi$ tai $-x = -½\pi + n2\pi$; $x = \frac{\pi}{6} + n\frac{2\pi}{3}$ tai $x = ½\pi + n2\pi$,
joista välillä $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$; $f(0) = 1$; $f(2\pi) = 1$; $f(\frac{\pi}{6}) = 1½$; $f(\frac{5\pi}{6}) = ½$; $f(\frac{3\pi}{2}) = -3$
V: **Suurin = 1½ , pienin = -3**

7. $e^{2x} \geq 2x + 1$; $e^{2x} - 2x - 1 \geq 0$; Tutkitaan funktioa $f(x) = e^{2x} - 2x - 1$; $f'(x) = 2e^{2x} - 2$
$f' \geq 0$; $2e^{2x} - 2 \geq 0$; $e^{2x} \geq 1$; $e^{2x} \geq e^0$; $2x \geq 0$; $x \geq 0$
f ' : --- 0 +++
f : ↘ _ ↗ ⇒ funktio on pienin, kun x = 0. $f(0) = e^0 - 2\cdot 0 - 1 = 0$. Kun pienin arvo on 0, ovat kaikki arvot > 0

9. $f(x) = \ln x$; f: $y = \ln x$; f^{-1} : $x = \ln y$; $y = e^x$; $(f^{-1})'(x) = e^x$
$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$

96.1.1. Derivoi a) $\sin 2x$ b) $(\cos x)^2$ c) x^π d) e^{4x} e) $\ln(x^2 + 1)$ f) $\sqrt[4]{x}$

96.1.2. Laske yhdistetyn funktion a) f o g b) g o f lauseke, kun $f(x) = 2x - 1$ ja $g(x) = 3x - 2$.

96.1.3. Laske funktion $f(x) = x - \cos x$ derivaatan nollakohdat.

96.1.4. Olkoon funktiot f ja g: $\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ siten, että f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 1, g(1) = 3, g(2) = 4, g(3) = 1 ja g(4) = 2 . Mitä on a) (gof)(1) b) (fog)(2) c) x, kun (gof)(x) = 3 d) x, kun (fog)(x) = 4?

96.1.5. Laske funktion $f(x) = \ln(½x - 1)$ käänteisfunktion lauseke.

96.1.6. Laske funktion $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ suurin arvo.

96.1.7. Osoita, että funktiolla $f(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 3$ on käänteisfunktio. Laske $(f^{-1})'(2)$.

96.1.8. Millä x:n arvoilla funktio $f(x) = x + \frac{4}{x} - 3\ln x$ on kasvava?

96.1.9. Määritä reaalinen vakio a siten, että funktion $f(x) = e^{a+x} + e^{-x}$ minimiarvo on $2e\sqrt{e}$.

96.1.10. Osoita, että epäyhtälö $\cos x \geq 1 - ½x^2$ on voimassa kaikilla x:n arvoilla.

1. a) $D \sin 2x = 2\cos 2x$ b) $D(\cos x)^2 = 2\cdot\cos x\cdot(-\sin x) = -2\cdot\sin x\cdot\cos x = -\sin 2x$
c) $D x^\pi = \pi x^{\pi-1}$ d) $D e^{4x} = 4e^{4x}$ e) $D \ln(x^2 + 1) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ f) $D \sqrt[4]{x} = D x^{1/4} = ¼x^{-3/4}$

2. a) $(fog)(x) = f(g(x)) = f(3x - 2) = 2(3x - 2) - 1 = 6x - 5$ b) $(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x - 1) = 3(2x - 1) - 2 = 6x - 5$

3. $f(x) = x - \cos x$; $f'(x) = 1 + \sin x$; $f'(x) = 0$; $1 + \sin x = 0$; $\sin x = -1$; $x = -½\pi + n\cdot 2\pi$

4. a) (gof)(1) = g(f(1)) = g(2) = 4 b) (fog)(2) = f(g(2)) = f(4) = 1 c) (gof)(x) = 3 ; g(f(x)) = 3 g(f(x)) = g(1)
f(x) = 1 ; x = 4 d) (fog)(x) = 4 ; f(g(x)) = 4 ; f(g(x)) = f(3) ; g(x) = 3 ; x = 1

5. f:$y = \ln(½x - 1)$; $e^y = ½x - 1$; $e^y + 1 = ½x$; $x = 2e^y + 2$; f^{-1} : $y = 2e^x + 2$; $f^{-1}(x) = 2e^x + 2$

6. $f(x) = xe^{1-x}$; $f'(x) = 1\cdot e^{1-x} + x\cdot e^{1-x}\cdot(-1) = (1 - x)e^{1-x}$; $f'(x) \geq 0$; $1 - x \geq 0$; $x \leq 1$
f ' : +++ 1 ---
f : ↗ ¯ ↘ ⇒ Suurin arvo on $f(1) = 1\cdot e^0 = 1$

7. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 3$; $f'(x) = 3x^2 - 10x + 9$, jonka kuvaaja on ylösp. auk. paraabeli & $D = 100 - 108 < 0 \Rightarrow$
Kuvaaja x-akselin yläp. $\Rightarrow f' > 0 \Rightarrow$ f kasvava $\Rightarrow \exists f^{-1}$
$f(x) = 2$; $x^3 - 5x^2 + 9x - 3 = 2$; $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0$, josta huomataan, että x = 1 on NK
$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3 - 10 + 9} = \frac{1}{2}$

8. $f(x) = x + \frac{4}{x} - 3\ln x$, $x > 0$; $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x} = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2}$ f kasvava, kun $f'(x) \geq 0$ eli OS ≥ 0, koska NIM > 0
$x^2 - 3x - 4 \geq 0$; NK: $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$; x = 4 tai x = -1 KUV: YAP
f ' ; (+++ -1 ---) || 0 --- 4 +++ $\Rightarrow$ V: $x \geq 4$

9. $f(x) = e^{a+x} + e^{-x}$; $f'(x) = e^{a+x} - e^{-x}$; $f' \geq 0$; $e^{a+x} - e^{-x} \geq 0$; $e^{a+x} \geq e^{-x}$; $a + x \geq -x$; $2x \geq -a$; $x \geq -½a$
f ' : --- -½a +++
f : ↘ _ ↗ $\Rightarrow$ min = $f(-½a) = e^{a/2} + e^{a/2} = 2e^{a/2}$; min = $2e\sqrt{e}$; $2e^{a/2} = 2e^{3/2}$; $e^{a/2} = e^{3/2}$; a/2 = 3/2 ;a = 3

10. $\cos x \geq 1 - ½x^2$; $\cos x - 1 + ½x^2 \geq 0$; Tutkitaan funktioa $f(x) = \cos x - 1 + ½x^2$
$f'(x) = -\sin x + x$, joka saa arvon 0, kun x = 0
$f''(x) = -\cos x + 1 \geq 0 \Rightarrow f'$ on kasvava
$\Rightarrow f' > 0$, kun x > 0 ja $f' < 0$, kun x < 0
TS. f on pienin, kun x = 0 . f(0) = 1 - 1 + 0 = 0
Kun pienin arvo = 0 $\Rightarrow f(x) \geq 0 \ \forall x$.

96.2.1. Ratkaise yhtälö a) $\cos 2x = 1$ b) $4^x = 2^{3-x}$ c) $\lg x + \lg(x - 1) = \lg 2$

96.2.2. a) Derivoi funktio $f(x) = x \cdot e^x$ b) Mikä on derivaatan nollakohta? c) Milloin funktio on kasvava?

96.2.3. Olkoon $f(x) = 3x + 4$. Laske a) x, kun $f^{-1}(x) = -1$ b) $f^{-1}(10)$

96.2.4. Ratkaise yhtälö $f'(x) = 1$, kun $f(x) = x + \sin x + \cos x$

96.2.5. Olkoon $f(x) = \sin x$ ja $g(x) = \pi \cdot \ln x$. Laske a) (g o f)(½π) b) (f o g)($\sqrt{e}$)

96.2.6. Laske funktion $f(x) = x^3 \cdot \ln x$ ääriarvot

96.2.7. Osoita, että funktiolla f on käänteisfunktio ja laske $(f^{-1})'(1)$, kun $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 7$.

96.2.8. Laske funktion $f(x) = 4 \cdot \sin x + \cos 2x$ suurin ja pienin arvo.

96.2.9. Osoita, että $\ln(x + 1) \leq x$ kaikilla $x > -1$.

96.2.10. Suunnistaja on menossa rastille, jolle hän pääsee juoksemalla suoraa polkua 600 m ja sen jälkeen metsässä kohtisuoraan polkua vastaan 300 m. Hänen vauhtinsa polulla on 150 m/min ja metsässä 120 m/min. Millaista reittiä hän pääsee nopeimmin rastille?

1. a) $\cos 2x = 1$; $\cos 2x = \cos 0$; $2x = 0 + n \cdot 2\pi$; $x = n \cdot \pi$
b) $4^x = 2^{3-x}$; $(2^2)^x = 2^{3-x}$; $2^{2x} = 2^{3-x}$; 2x = 3 - x ; 3x = 3 ; x = 1
c) $\lg x + \lg(x - 1) = \lg 2$; MJ: x > 0 JA x > 1 ; $\lg x(x - 1) = \lg 2$; x(x - 1) = 2 ; $x^2 - x - 2 = 0$
$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$; x = 2 (tai x = -1)

2. a) $f(x) = xe^x$; $f'(x) = 1e^x + xe^x = e^x(1 + x)$; $e^x > 0 \Rightarrow$ (1 + x) määrää nk:n ja merkin
b) $f' = 0$; 1 + x = 0 ; x = - 1 c) f kasvava, kun $f' \geq 0$; $1 + x \geq 0$; $x \geq -1$

3. a) $f^{-1}(x) = -1$; $f(-1) = x = 3 \cdot (-1) + 4 = 1$ b) $f^{-1}(10) = x$; f(x) = 10 ; 3x + 4 = 10 ; 3x = 6 ; x = 2

4. $f(x) = x + \sin x + \cos x$; $f'(x) = 1 + \cos x - \sin x$; $f' = 1$; $1 + \cos x - \sin x = 1$
$\sin x = \cos x$ ||:cos x ; tan x = 1 ; tan x = tan ¼π ; $x = ¼\pi + n \cdot \pi$

5. a) $g[f(½\pi)] = g[\sin ½\pi] = g[1] = \pi \cdot \ln 1 = 0$ b) $f[g(\sqrt{e})] = f[g(e^{½})] = f[\pi \cdot \ln e^{½}] = f[\pi \cdot ½] = \sin ½\pi = 1$

6. $f(x) = x^3 \cdot \ln x$ MJ: x > 0 ; $f'(x) = 3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2(3\ln x + 1)$; $x^2 > 0 \Rightarrow$ ( ) määrää merkin
$3\ln x + 1 \geq 0$; $\ln x \geq -1/3$; $\ln x \geq \ln e^{-1/3}$; $x \geq e^{-1/3}$
f ' : 0 --- $e^{-1/3}$ +++
f : ↘ _ ↗ $\Rightarrow$ Min = $f(e^{-1/3}) = (e^{-1/3})^3 \cdot \ln e^{-1/3} = e^{-1} \cdot (-1/3) = \frac{-1}{3e}$

7. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 7$; $f\,'(x) = 3x^2 + 4x + 3$; $D = 16 - 36 < 0$ & YAP $\Rightarrow f\,' > 0$ kaikilla x $\Rightarrow$ f kasvava $\Rightarrow$ f:llä on käänteisfunktio
$f(x) = 1$; $x^3 + 2x^2 + 3x + 7 = 1$; $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0$; $x^2(x + 2) + 3(x + 2) = 0$; $(x^2 + 3)(x + 2) = 0$; $x = -2$
$(f^{-1})\,'(1) = \frac{1}{f\,'(-2)} = \frac{1}{12 - 8 + 3} = \frac{1}{7}$

8. Jaksollisuus $\Rightarrow$ voidaan tarkastella väliä $[0,2\pi]$, jolloin funktio jatkuva suljetulla välillä
$f(x) = 4\sin x + \cos 2x$; $f\,'(x) = 4\cos x - 2\sin 2x = 4\cos x - 4\sin x\cdot\cos x = 4\cos x(1 - \sin x)$
$f\,' = 0$; $\cos x = 0$ tai $\sin x = 1$; $x = ½\pi + n\cdot\pi$ tai $x = ½\pi + n\cdot 2\pi$
$f(0) = f(2\pi) = 1$; $f(½\pi) = 4\sin ½\pi + \cos \pi = 4 - 1 = 3$, joka on suurin arvo
$f(1½\pi) = 4\sin 1½\pi + \cos 3\pi = -4 - 1 = -5$, joka on pienin arvo

9. $\ln(x + 1) \le x$; $\ln(x + 1) - x \le 0$; tutkitaan funktioa $f(x) = \ln(x + 1) - x$; MJ: $x > -1$
$f\,'(x) = \frac{1}{x + 1} - 1 = \frac{1}{x + 1} - \frac{x + 1}{x + 1} = \frac{1 - x - 1}{x + 1} = \frac{-x}{x + 1}$, OS määrää merkin ja NK:n
$f\,' = 0$: $-x = 0$; $x = 0$; KUV: laskeva suora, josta merkit
$f\,'$: +++ 0 ---
f : ↗ ¯ ↘ $\Rightarrow$ suurin arvo $= f(0) = \ln 1 - 0 = 0 \Rightarrow$ Kaikki arvot ≤ 0

10. Olkoon lähtöpaikka L, rastipaikka R, rastia lähinnä oleva polun piste A ja polulta metsään kääntymispaikka K. Olkoon KP = x (satoja metrejä) $\Rightarrow$ LK = 6 - x ja KR = $\sqrt{9 + x^2}$
$T(x) = \frac{6 - x}{1,5} + \frac{\sqrt{9+x^2}}{1,2}$, joka jatkuva suljetulla välillä [0,6] $T\,'(x) = \frac{-1}{1,5} + \frac{2x}{2,4\sqrt{9 + x^2}}$
$T\,' = 0$; $\frac{x}{1,2\sqrt{9+x^2}} = \frac{1}{1,5}$; $1,2\sqrt{9 + x^2} = 1,5x$ || :1,2 ; $\sqrt{9 + x^2} = 1,25x$ || $(\ )^2$; $9 + x^2 = 1,5625x^2$
$0,5625x^2 = 9$ || ; 0,5625 ; $x^2 = 16$; $x = 4$
T(0) = 6,5 ; T(6) = 5,6 ; T(4) = 5½, joka pienin. V: Polkua 200 m, josta suoraan rastille

96.3.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = 3\cos 2x$ b) $f(x) = x\cdot\ln x$ c) $f(x) = (e^x + x)^3$

96.3.2. Laske yhdistetyn funktion a) g o f b) g o g lauseke, kun $f(x) = x^2 + 2x + 3$ ja $g(x) = 3x + 4$.

96.3.3. Ratkaise yhtälö $f\,'(x) = 0$, kun $f(x) = 2x + \cos 2x$.

96.3.4. Olkoon funktiot f ja g: $\{0,1,2,3,4\} \to \{0,1,2,3,4\}$ siten, että f(0) = 3, f(1) = 0, f(2) = 4, f(3) = 1 ja f(4) = 2 sekä g(0) = 2, g(1) = 4, g(2) = 1, g(3) = 3 ja g(4) = 0.
Mitä on a) (f o g)(1) b) $(f^{-1} \text{ o } g^{-1})(2)$ c) x, kun (g o f)(x) = 4?

96.3.5. Mikä on funktion $f(x) = e^{2x + 3}$ käänteisfunktion lauseke?

96.3.6. Laske funktion $f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$ ääriarvot.

96.3.7. Millä x:n arvoilla funktio $f(x) = e^{3x} - 3ex$ on kasvava?

96.3.8. Osoita, että $e^x > 2x$ kaikilla reaaliluvuilla x.

96.3.9. Osoita, että funktiolla $f(x) = \ln(2x - 1) + x - 1$, $x > ½$, on olemassa käänteisfunktio. Laske $(f^{-1})'(0)$.
Määritä funktioiden f ja f^{-1} kuvaajien leikkauspisteet.

96.3.10. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan päätepiste on origossa, suoran kulman kärki positiivisella x-akselilla ja kolmas kärkipiste käyrällä $y = 2 - \ln x$. Mikä on kolmion alan suurin mahdollinen arvo?

1. a) $f(x) = 3\cos 2x$; $f\,'(x) = 3\cdot(-\sin 2x)\cdot 2 = -6\sin 2x$
b) $f(x) = x\cdot\ln x$; $f\,'(x) = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$ c) $f(x) = (e^x + x)^3$; $f\,'(x) = 3(e^x + x)^2\cdot(e^x + 1)$

2. a) $(g \text{ o } f)(x) = g[f(x)] = g[x^2 + 2x + 3] = 3(x^2 + 2x + 3) + 4 = 3x^2 + 6x + 13$
b) $(g \text{ o } g)(x) = g[g(x)] = g[3x + 4] = 3(3x + 4) + 4 = 9x + 16$

3. $f(x) = 2x + \cos 2x$; $f\,'(x) = 2 - \sin 2x\cdot 2 = 2 - 2\sin 2x$
$f\,'=0$; $2 - 2\sin 2x = 0$; $2 = 2\sin 2x$; $\sin 2x = 1$; $2x = ½\pi + n\cdot 2\pi$; $x = ¼\pi + n\cdot\pi$

4. a) (f o g)(1) = f[g(1)] = f[4] = 2 b) $(f^{-1} \text{ o } g^{-1})(2) = f^{-1}[g^{-1}(2)] = f^{-1}[0] = 1$
c) (g o f)(x) = 4 ; g[f(x)] = 4 ; g[f(x)] = g[1] ; f(x) = 1 ; x = 3

5. f: $y = e^{2x+3}$; $2x + 3 = \ln y$; $2x = \ln y - 3$; $x = ½\ln y - 1½$
f^{-1}: $y = ½\ln x - 1½$; $f^{-1}(x) = ½\ln x - 1½$

6. $f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$; $f\,'(x) = 2x \cdot e^{3x} + x^2 \cdot e^{3x} \cdot 3 = e^{3x}(2x + 3x^2)$; $e^{3x} > 0 \Rightarrow$ ( ) määrää merkin
$2x + 3x^2 = 0$; $x(2 + 3x) = 0$; $x = 0$ tai $x = -\frac{2}{3}$, Kuvaaja ylöspäin aukeava paraabeli
f ' : +++ -2/3 --- 0 +++
f : ↗ ¯ ↘ _ ↗ $\Rightarrow$ MAX = $f(-\frac{2}{3}) = \frac{4}{9} \cdot e^{-2}$ MIN = f(0) = 0

7. $f(x) = e^{3x} - 3ex$; $f\,'(x) = 3e^{3x} - 3e$
f on kasvava, kun $f\,' \geq 0$; $3e^{3x} - 3e \geq 0$; $3e^{3x} \geq 3e$; $e^{3x} \geq e$; $3x \geq 1$; $x \geq \frac{1}{3}$

8. $e^x > 2x \Leftrightarrow e^x - 2x > 0$; Tutkitaan funktioa $f(x) = e^x - 2x$; $f\,'(x) = e^x - 2$
$f\,' \geq 0$; $e^x - 2 \geq 0$; $e^x \geq 2$; $e^x \geq e^{\ln 2}$; $x \geq \ln 2$
f ' : --- ln 2 +++
f : ↘ _ ↗ $\Rightarrow$ f on pienin, kun x = ln 2 ; $f(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 = 2 - 2\ln 2 > 0$
Kun pienin arvo on > 0, niin kaikki arvot ovat > 0

9. $f(x) = \ln(2x - 1) + x - 1$, $x > ½$; $f\,'(x) = \frac{2}{2x - 1} + 1$. Koska NIM = 2x - 1 > 0, on $f\,' > 0 \Rightarrow$ f kasvava $\Rightarrow \exists\, f^{-1}$
f(x) = 0 ; ln(2x - 1) + x - 1 = 0. Huomataan, että x = 1 toteuttaa (ln 1 + 1 - 1 = 0)
$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f\,'(1)} = \frac{1}{2/1 + 1} = \frac{1}{3}$
f:n ja f^{-1}:n kuvaajat ovat symmetrisiä suoran y = x suhteen, joten niiden leikkauspiste on myös kummankin suoran y = x kanssa syntyvä leikkauspiste
$\begin{cases} y = \ln(2x - 1) + x - 1 \\ y = x \end{cases}$; ln(2x - 1) + x - 1 = x ; ln(2x - 1) = 1 ; ln(2x - 1) = ln e
2x - 1 = e ; x = ½(e + 1) = y . V : P = (½(e + 1) , ½(e + 1))

10. Olk. O = (0,0), B = kolmion käyrällä y=2 - ln x oleva kärki ja A = B:n projektio x-akselilla.
Olkoon x = B:n ja A:n x-koordinaatti = kanta. Korkeus = y = 2 - ln x
$A(x) = ½x(2 - \ln x)$ MJ: $0 < x < e^2$. $A'(x) = ½(2 - \ln x) + ½x(-1/x) = ½(1 - \ln x)$
$A' \geq 0$; $1 - \ln x \geq 0$; $1 \geq \ln x$; $\ln e \geq \ln x$; $e \geq x$
A' : 0 +++ e ---
A : ↗ ¯ ↘ $\Rightarrow$ A suurin, kun x = e . A(e) = ½e(2 - ln e) = ½e

97.1.1. Derivoi a) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ b) $f(x) = \frac{1}{e^{2x}}$ c) f(x) = 2 tan 3x

97.1.2. Ratkaise yhtälöt a) $2 \cdot \sin x = \cos x$ b) $2 \cdot 3^x = 5^x$

97.1.3. a) Laske funktion $f(x) = x^3 + 9$ käänteisfunktion arvo kohdassa x = 1 b) Muodosta käänteisfunktion lauseke funktiolle $f(x) = x^3 + 9$.

97.1.4. Laske f o g ja g o f, kun f(x) = 2x + 1 ja $g(x) = x^2$. Millä x:n arvoilla (f o g)(x) = (g o f)(x) ?

97.1.5. Laske funktion $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ suurin ja pienin arvo välillä [½,2].

97.1.6. Osoita, että yhtälöllä x - 3 + ln (x - 3) = 0 on tarkalleen yksi ratkaisu. Minkä peräkkäisten kokonaislukujen välissä tämä ratkaisu on?

97.1.7. Laske funktion $f(x) = e^{2x} - 5e^x + 4$ ääriarvot.

97.1.8. Osoita, että funktiolla $f(x) = x - \frac{2}{3}\sin x - \pi$ on käänteisfunktio ja määritä tämän käänteisfunktion derivaatta kohdassa 0.

97.1.9. Osoita, että käyrä $y = \sqrt{x}$ on käyrän y = ln x + 0,6 yläpuolella.

97.1.10. Maantie AD on kohtisuorassa maantietä BC vastaan. D on tiellä BC siten, että BD = CD = 12 km ja AD = 10 km. Mihin kohtaan M tiellä AD on laitettava sähkölinjan muuntaja, jotta suorien sähkölinjojen yhteispituus AM + MB + MC olisi mahdollisimman pieni?

1. a) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$; $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ b) $f(x) = \frac{1}{e^{2x}} = e^{-2x}$; $f'(x) = -2 \cdot e^{-2x}$
c) f(x) = 2tan 3x ; $f'(x) = 2 \cdot (1 + \tan^2 3x) \cdot 3 = 6(1 + \tan^2 3x)$

2. a) $2\sin x = \cos x \ || : 2\cos x$; $\tan x = ½$; $\tan x = \tan 26{,}6°$; $x = 26{,}6° + n\cdot 360°$
b) $2\cdot 3^x = 5^x \ || \lg(\ )$; $\lg 2\cdot 3^x = \lg 5^x$; $\lg 2 + x\cdot\lg 3 = x\cdot\lg 5$; $\lg 2 = x\cdot\lg 5 - x\cdot\lg 3$
$x(\lg 5 - \lg 3) = \lg 2$; $x = \dfrac{\lg 2}{\lg 5/3}$

3. a) $f^{-1}(1) = x$; $f(x) = 1$; $x^3 + 9 = 1$; $x^3 = -8$; $x = -2$
b) f: $y = x^3 + 9$; $x^3 = y - 9$; $x = \sqrt[3]{y - 9}$ f^{-1}: $y = \sqrt[3]{x - 9}$; $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 9}$

4. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$; $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2$
$2x^2 + 1 = 4x^2 + 4x + 1$; $2x^2 + 4x = 0$; $2x(x + 2) = 0$; $x = 0$ tai $x = -2$

5. $f(x) = x^2\cdot\ln x$ on jatkuva suljetulla välillä [½,2], koska silloin $x > 0$. f DVA.
$f'(x) = 2x\cdot\ln x + x^2\cdot(1/x) = 2x\cdot\ln x + x = x(2\ln x + 1)$
$f' = 0$; $x(2\ln x + 1) = 0$; ($x = 0$ tai) $2\ln x + 1 = 0$; $\ln x = -½$; $\ln x = \ln e^{-½}$; $x = e^{-½}$
$f(½) = ¼ \ln ½$; $f(2) = 4\ln 2$ SUURIN ; $f(e^{-½}) = (e^{-½})^2\cdot\ln e^{-½} = e^{-1}\cdot(-½) = -½e^{-1}$ PIENIN

6. $x - 3 + \ln(x - 3) = 0$; Tutkitaan funktioa $f(x) = x - 3 + \ln(x - 3)$ MJ: $x > 3$
1° $f'(x) = 1 + 1/(x - 3) > 0 \Rightarrow$ f on kasvava 2° f on jatkuva 3° $f(3½) = ½ + \ln½ = -0{,}19 < 0$ 4° $f(4) = 1 + \ln 1 = 1 > 0$. Joten 1° - 4° $\Rightarrow$ nollakohtia on täsmälleen 1 ja se on välillä [3,4]

7. $f(x) = e^{2x} - 5e^x + 4$ on JVA, DVA, ei reunoja ; $f'(x) = 2\cdot e^{2x} - 5\cdot e^x = e^x\cdot(2e^x - 5)$
$f' \le 0 \Leftrightarrow e^x(2e^x - 5) \le 0 \Leftrightarrow 2e^x - 5 \le 0$ (koska $e^x > 0$) $\Leftrightarrow e^x \le 2½ \Leftrightarrow x \le \ln 2½$
f ' ; --- ln 2½ +++
f : ↘ _ ↗ $\Rightarrow$ Minimiarvo $= f(\ln 2½) = e^{2\ln 2½} - 5e^{\ln 2½} + 4 = 6¼ - 5\cdot 2½ + 4 = -2\,¼$

8. $f(x) = x - \frac{2}{3}\sin x - \pi$; $f'(x) = 1 - \frac{2}{3}\cos x \ge 0$, (koska $\cos x \le 0$) $\Rightarrow$ f on kasvava $\Rightarrow \exists\, f^{-1}$
$f(x) = 0$; $x - \frac{2}{3}\sin x - \pi = 0$, josta huomataan, että $x = \pi$ on nollakohta. ($\pi - \frac{2}{3}\sin \pi - \pi = 0$)
$(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(\pi)} = \dfrac{1}{1 - \frac{2}{3}\cos \pi} = \dfrac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \dfrac{3}{5}$

9. Käyrä $y = \sqrt{x}$ on käyrän $y = \ln x + 0{,}6$ yläpuolella, jos ensinmainitun käyrän jokainen y on suurempi kuin samalla kohtaa laskettu jälkimmäisen käyrän y. Ts. $\sqrt{x} > \ln x + 0{,}6$
Tarkastellaan funktiota $f(x) = \sqrt{x} - \ln x - 0{,}6$; MJ: $x > 0$
$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$, jonka osoittaja määrää merkin. $x - \sqrt{x} \le 0$; $x \le \sqrt{x} \ || (\ )^2$; $x^2 \le x \ || : x > 0$; $x \le 1$.
f ' : 0 --- 1 +++
f : ↘ _ ↗ $\Rightarrow$ f(1) on pienin $f(1) = 1 - 0 - 0{,}6 > 0 \Rightarrow$ kaikki arvot > 0

10. Olkoon MD = x. Matka $m(x) = (10 - x) + 2\cdot\sqrt{x^2 + 144}$, missä $0 \le x \le 10$
m(x) on jatkuva suljetulla välillä. $m'(x) = -1 + 2\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 144}} = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 144}} - 1$.
$m'(x) = 0$; $2x = \sqrt{x^2 + 144} \ || (\ )^2$; $4x^2 = x^2 + 144$; $3x^2 = 144$; $x^2 = 48$; $x = 4\sqrt{3}$
$m(0) = 10 + 2\cdot 12 = 34$; $m(10) = 2\sqrt{244} \approx 31{,}2$; $m(4\sqrt{3}) = 10 - 4\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{192} \approx 30{,}8$, joka pienin.
V: M on 6,9 km risteyskohdasta D

97.2.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = \tan ½x$ b) $f(x) = xe^{1-x}$ c) $f(x) = \ln(3 - x)$

97.2.2. Osoita, että funktio $f(x) = \sin x + 2x$ on kasvava. Saako kyseinen funktio välillä [0,1] arvoa e?

97.2.3. Mikä on käyrälle $y = x\cdot\sin \pi x$ pisteeseen (1,0) piirretyn tangentin yhtälö?

97.2.4. Ratkaise yhtälöt a) $2\cdot 4^x = 1$ b) $2\cdot\sin 4x = 1$ c) $2\cdot\ln 4x = 1$

97.2.5. Laske funktion $f(x) = 5e^x - 5ex + e$ ääriarvo.

97.2.6. Mikä on funktion $f(x) = 5\cdot\sin x + 12\cdot\cos x$ suurin ja pienin arvo?

97.2.7. On funktiot $f(x) = 3x - 2$ ja $g(x) = x^2 - 3$. Muodosta yhdistetyt funktiot a) $f \circ f$ b) $f \circ g$ c) $g \circ f$ d) $g \circ g$.

97.2.8. Osoita, että funktiolla $f(x) = e^x + 2x + 3$ on käänteisfunktio. Laske käänteisfunktion derivaatta kohdassa 4.

97.2.9. Osoita, että epäyhtälö $\dfrac{\sqrt{x}}{9} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \ge \dfrac{2}{3}$ toteutuu kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla.

97.2.10. Mikä käyrän $y = e^{1-x}$, $x \geq 0$, tangenteista rajoittaa koordinaattiakselien kanssa pinta-alaltaan mahdollisimman suuren kolmion? Laske tämän kolmion ala.

1. a) $f(x) = \tan \frac{1}{2}x$; $f'(x) = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 \frac{1}{2}x)$
b) $f(x) = x \cdot e^{1-x}$; $f'(x) = 1 \cdot e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \cdot (1 - x) = e^{1-x}(1 - x)$ c) $f(x) = \ln (3 - x)$; $f'(x) = \frac{-1}{3 - x} = \frac{1}{x - 3}$

2. $f(x) = \sin x + 2x$; $f'(x) = \cos x + 2 > 0$ (koska $\cos x \geq -1$) $\Rightarrow$ f on kasvava
f kasvava ja jatkuva $\Rightarrow$ f:n arvot ovat välillä $[f(0),f(1)] = [0,\sin 1 + 2] = [0;2,84]$
Koska $e \approx 2,718$ on kyseisellä välillä, niin f saa arvon e.

3. $y = x \cdot \sin \pi x$; $y' = 1 \cdot \sin \pi x + x \cdot \pi \cdot \cos \pi x$; $k_T = y'(1) = \sin \pi + \pi \cdot \cos \pi = 0 + \pi \cdot (-1) = - \pi$
Tang. yht.: $y - 0 = -\pi(x - 1)$; $y = \pi - \pi x$

4. a) $2 \cdot 4^x = 1$; $4^x = \frac{1}{2}$; $(2^2)^x = 2^{-1}$, $2^{2x} = 2^{-1}$; $2x = -1$; $x = -\frac{1}{2}$
b) $2 \cdot \sin 4x = 1$; $\sin 4x = \frac{1}{2}$; $\sin 4x = \sin 30°$; $4x = 30° + n \cdot 360°$ tai $4x = 150° + n \cdot 360°$
$x = 7,5° + n \cdot 90°$ tai $x = 37,5° + n \cdot 90°$
c) $2 \cdot \ln 4x = 1$; $\ln 4x = \frac{1}{2}$; $\ln 4x = \ln e^{\frac{1}{2}}$; $4x = e^{\frac{1}{2}}$; $x = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}}$

5. $f(x) = 5e^x - 5ex + e$ on JVA, DVA, ei reunoja. $f'(x) = 5e^x - 5e$; $f' \geq 0$; $5(e^x - e) \geq 0$; $e^x \geq e$; $x \geq 1$
f ' : --- 1 +++
f : $\searrow$ _ $\nearrow$ $\Rightarrow$ Minimiarvo = $f(1) = 5e - 5e + e = e$

6. f on jaksollinen $\Rightarrow$ voidaan tutkia yhtä jaksoa, esim. $[0,2\pi]$, jolloin f on jva sulj. välillä
$f'(x) = 5\cos x - 12\sin x$; $f' = 0$; $5 \cos x - 12\sin x = 0$; $5 \cos x = 12 \sin x$ ||: $12\cos x$
$5/12 = \tan x$. Kulma x voi olla I tai III neljänneksessä.
Piirretään suorakulmainen kolmio, johon merkitään kateeteiksi 5 ja 12. Pythagoraan teoreeman perusteella saadaan hypotenuusaksi $c^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$; $c = 13$
$f(0) = f(2\pi) = 5 \cdot 0 + 12 \cdot 1 = 12$; $f(x_1) = 5 \cdot \frac{5}{13} + 12 \cdot \frac{12}{13} = 13$ suurin . $f(x_3) = 5 \cdot (-\frac{5}{13}) + 12 \cdot (-\frac{12}{13}) = - 13$ pienin.

7. $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(3x - 2) = 3(3x - 2) - 2 = 9x - 6 - 2 = 9x - 8$
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 3) = 3(x^2 - 3) - 2 = 3x^2 - 9 - 2 = 3x^2 - 11$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 2) = (3x - 2)^2 - 3 = 9x^2 - 12x + 4 - 3 = 9x^2 - 12x + 1$
$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x^2 - 3) = (x^2 - 3)^2 - 3 = x^4 - 6x^2 + 9 - 3 = x^4 - 6x^2 + 6$

8. $f(x) = e^x + 2x + 3$; $f'(x) = e^x + 2 > 0 \Rightarrow$ f on kasvava $\Rightarrow \exists f^{-1}$
$f(x) = 4$; $e^x + 2x + 3 = 4$; $e^x + 2x = 1$, josta huomataan, että $x = 0$ toteuttaa sen.
$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{e^0 + 2} = \frac{1}{3}$

9. $\frac{\sqrt{x}}{9} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{9}x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} \geq 0$. Tutkitaan funktioa $f(x) = \frac{1}{9}x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}$
$f'(x) = \frac{1}{18}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-3/2} = \frac{1}{18\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{x - 9}{18x\sqrt{x}}$; $f'(x) \geq 0$; $x - 9 \geq 0$; $x \geq 9$
f ' : 0 --- 9 +++
f : $\searrow$ _ $\nearrow$ $\Rightarrow$ Pienin arvo on $f(9) = \frac{1}{9} \cdot 3 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow$ Kaikki arvot ≥ 0

10. Olkoon käyrän pisteen x-koordinaatti = a. Tällöin $y = e^{1-a}$ Ts. sivuamispiste on (a,e^{1-a})
$y' = -e^{1-x}$; $k_T = y'(a) = -e^{1-a}$. Tangentin yhtälö $y - e^{1-a} = -e^{1-a}(x - a)$
x-aks. lp : $-e^{1-a} = -e^{1-a}(x - a)$; $1 = x - a$; $x = a + 1$. y-aks. lp : $y = e^{1-a} + ae^{1-a} = (a+1)e^{1-a}$
$A(a) = \frac{1}{2}(a + 1)(a + 1)e^{1-a} = \frac{1}{2}(a^2 + 2a + 1)e^{1-a}$
$A'(a) = \frac{1}{2}(2a + 2)e^{1-a} + \frac{1}{2}(a^2 + 2a + 1)e^{1-a}(-1) = e^{1-a}(1 - a^2)$. Sulkutekijä määrää merkin, koska eksp.fkt:t > 0
$A' = 0$; $1 - a^2 = 0$; $a = \pm 1$. Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli
A' : (--- -1 +++ 0) +++ 1 ---
A : $\nearrow$ ‾ $\searrow$ $\Rightarrow$ Suurin arvo on $A(1) = \frac{1}{2}(2)(2)e^0 = 2$
Tangentin yhtälö on tällöin $y = -1(x - 1) + 1$; $y = 2 - x$

97.3.1. Olkoon $f(x) = 2x + 3$ ja $g(x) = x^2 + 3$. Muodosta yhdistetyt funktiot f o g ja g o f.

97.3.2. Ratkaise a) $2 \cdot \cos 3x - 1 = 0$ b) $2 \cdot \ln 3x - 1 = 0$

97.3.3. Mikä on käyrän $y = e^x$ pisteeseen, missä $y = 6$, piirretyn tangentin kulmakerroin?

97.3.4. Ratkaise a ja b, kun $f'(1) = 2e$ ja $f(0) = e^2$ sekä $f(x) = ax + e^{b-x}$

97.3.5. Laske funktion $f(x) = x(1 - \ln x)$ ääriarvo.

97.3.6. Olkoon f(x) = tan 3x + ln(2x + 1). Laske raja-arvo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

97.3.7. Laske funktion f(x) = 2sin x + cos 2x suurin ja pienin arvo.

97.3.8. Montako ratkaisua on yhtälöllä $e^x + 2x - 3 = 0$?

97.3.9. Osoita, että funktiolla f(x) = sin x + 2x on käänteisfunktio. Laske $(f^{-1})'(2\pi)$.

97.3.10. Puoliympyrän (r = 2) halkaisija on puolisuunnikkaan toisena kantasivuna ja toinen kantasivu on ympyrän jänne. Mikä on puolisuunnikkaan alan suurin mahdollinen arvo? (Ohje: Lausu pinta-ala kylkisivua vastaavan keskuskulman avulla)

1. $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 3) = 2(x^2 + 3) + 3 = 2x^2 + 9$
$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = (2x + 3)^2 + 3 = 4x^2 + 12x + 9 + 3 = 4x^2 + 12x + 12$

2. a) $2\cdot\cos 3x - 1 = 0$; $2\cdot\cos 3x = 1$ || : 2 ; $\cos 3x = ½$; $\cos 3x = \cos 60°$; $3x = \pm 60° + n\cdot 360°$
$x = \pm 20° + n\cdot 120°$; b) $2\cdot\ln 3x - 1 = 0$; $2\cdot\ln 3x = 1$ || : 2 ; $\ln 3x = ½$; $\ln 3x = \ln e^{½}$; $3x = e^{½}$; $x = e^{½}/3$

3. y = 6 ; $e^a = 6$; $y = e^x$; $y' = e^x$; $k_T = y'(a) = e^a = 6$

4. $f(x) = ax + e^{b-x}$; $f'(x) = a - e^{b-x}$; $\begin{cases} f'(1) = 2e \\ f(0) = e^2 \end{cases}$; $\begin{cases} a - e^{b-1} = 2e \\ e^b = e^2 \end{cases}$ b = 2 ; $a - e^1 = 2e$; a = 3e

5. f(x) = x(1 - ln x) MJ: x > 0 ; f on JVA, DVA , ei reunoja ; $f'(x) = 1(1 - \ln x) + x\cdot(-\frac{1}{x}) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$
$f'(x) \ge 0$; $-\ln x \ge 0$ || ·(-1) ; $\ln x \le 0$; $\ln x \le \ln 1$; $x \le 1$
f ' : 0 +++ 1 ---
f : ↗ ‾ ↘ ⇒ Maksimi = f(1) = 1(1 - ln 1) = 1

6. f(x) = tan 3x + ln(2x + 1) ; $f'(x) = 3(1 + \tan^2 3x) + \dfrac{2}{2x+1}$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 3(1+\tan^2 0) + \dfrac{2}{0+1} = 3 + 2 = 5$

7. f(x) = 2sin x + cos 2x. Jaksollisuus ⇒ voidaan tarkastella väliä [0,2π]
f on JVA sulj. välillä. F DVA. f´(x) = 2 cos x - 2sin 2x
f´= 0 ; 2cos x = 2 sin 2x ; cos x = sin 2x ; cos x = 2 sin x cos x || : cos x
cos x = 0 tai 1 = 2sin x ; cos x = 0 tai sin x = ½ ; cos x = 0 tai sin x = sin π/6
x = ½π + nπ tai x = π/6 + n2π tai x = 5π/6 + n2π , joista välillä ½π, 1½π, π/6 ja 5π/6
f(0) = f(2π) = 2·0 + 1 = 1 ; f(½π) = 2·1 + (-1) = 1 ; f(1½π) = 2·(-1) + (-1) = -3
f(π/6) = 2·½ + ½ = 1½ ; f(5π/6) = 2·½ + ½ = 1½ V: Suurin = 1½ , pienin = -3

8. $e^x + 2x - 3 = 0$; tutkitaan funktioa $f(x) = e^x + 2x - 3$
$f'(x) = e^x + 2 > 0$ ⇒ f on kasvava ⇒ f saa jokaisen arvonsa täsmälleen kerran.
f JVA & f(0) = 1 + 0 - 3 = -2 < 0 & $f(2) = e^2 + 4 - 3 = e^2 + 1 > 0$ ⇒ f:llä on ainakin yksi nk.
Siis: f saa arvon nolla täsmälleen kerran ts. yhtälöllä on täsmälleen yksi reaalinen ratkaisu

9. f(x) = sin x + 2x ; f´(x) = cos x + 2 > 0 (koska cos x ≥ -1) ⇒ f on kasvava ⇒ $\exists f^{-1}$
$f^{-1}(2\pi) = x$; f(x) = 2π ; sin x + 2x = 2π , josta huomataan, että x = π on sen ratkaisu ja koska f on kasvava niin x = π on ainoa ratkaisu.
$(f^{-1})'(2\pi) = \dfrac{1}{f'(\pi)} = \dfrac{1}{\cos\pi + 2} = \dfrac{1}{-1+2} = 1$

10. Piirretään lyhemmän kantasivun päätepisteestä säde ja korkeusjana.
Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan h = 2sin x ja kanta = 2·2cos x
A(x) = ½(4 + 4cos x)2sin x = 4sin x + 4 sin x cos x = 4 sin x + 2 sin 2x , 0 ≤ x ≤ ½π
A(x) on jva sulj. välillä. A´(x) = 4 cos x + 4 cos 2x
A´= 0; cos 2x = -cos x ; cos 2x = cos (π - x) ; 2x = π - x + n2π tai 2x = -π + x + n2π
x = π/3 + n2π/3 tai x = - π + n2π, joista tarkasteluvälillä on x = π/3
A(0) = 0, A(½π) = 4 ; A(π/3) = 4sin π/3 + 2sin 2π/3 = $4\cdot½\sqrt{3} + 2\cdot½\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$, joka suurin

98.1.1. Derivoi funktiot a) f(x) = sin 3x b) $f(x) = (e^x)^2$ c) f(x) = x · ln (2x + 1)

98.1.2. Olkoon $f(x) = x^2 + x$ ja g(x) = ln x. a) muodosta (f o g)(x) b) derivoi funktio (f o g)(x)

98.1.3. Milloin funktio $f(x) = e^{3x} - 3e^{x+1}$ on kasvava?

98.1.4. Funktiolla $f(x) = x^2 - 4$, missä x < 0, on käänteisfunktio. Muodosta $f^{-1}(x)$. Laske $f^{-1}(5)$.

98.1.5. Osoita, että yhtälöllä $xe^{2x} - 1 = 0$ on täsmälleen yksi reaalinen ratkaisu, kun $x > 0$. Etsi perustellen sen yksidesimaalinen likiarvo.

98.1.6. Laske funktion $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ ääriarvot.

98.1.7. Osoita, että funktiolla $f(x) = \ln(1 – x) – \ln x$ on käänteisfunktio. Laske käänteisfunktion derivaatta kohdassa $x = 0$.

98.1.8. Osoita, että $\sqrt{3}\sin x – \cos x \le 2$ kaikilla x:n arvoilla.

98.1.9. Käyrälle $y = e^x$ piirretään kohtaan $x = a$ tangentti ja normaali. Määritä luku a siten, että nämä suorat rajoittavat x-akselin kanssa kolmion, jonka ala on 15.

98.1.10. Vaakasuoralla alustalla olevan pyöreän tornin sisähalkaisija on 3 m. Kuinka korkea tulee tornin oven vähintään olla, jotta ovesta voitaisiin tuoda 7 m pitkä tanko? Tornin ovi ulottuu maahan asti.

1. a) $f(x) = \sin 3x$, $f´(x) = 3\cdot\cos 3x$ b) $f(x) = (e^x)^2 = e^{2x}$, $f´(x) = 2e^{2x}$

c) $f(x) = x\cdot\ln(2x + 1)$, $f´(x) = 1\cdot\ln(2x + 1) + x\cdot\dfrac{2}{2x+1} = \ln(2x + 1) + \dfrac{2x}{2x+1}$

2. a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln x) = (\ln x)^2 + \ln x$ b) $(f \circ g)´(x) = 2\cdot\ln x\cdot\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}(2\cdot\ln x + 1)$

3. $f(x) = e^{3x} – 3e^{x+1}$; $f´(x) = 3e^{3x} – 3e^{x+1} = 3(e^{3x} – e^{x+1})$
f on kasvava, kun $f´ \ge 0$; $e^{3x} – e^{x+1} \ge 0$; $e^{3x} \ge e^{x+1}$; $3x \ge x + 1$; $2x \ge 1$; $x \ge ½$

4. $f : y = x^2 – 4$, $x < 0$ $(y > -4)$; $x^2 = y + 4$; $x = \pm\sqrt{y+4}$, $x < 0$; $x = -\sqrt{y+4}$
$f^{-1} : y = -\sqrt{x+4}$, $x > -4$, $y < 0$; $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+4}$, $x > -4$; $f^{-1}(5) = -\sqrt{5+4} = -3$

5. $xe^{2x} – 1 = 0$; tutkitaan funktiota $f(x) = xe^{2x} – 1$, joka on jatkuva, $f(0) = -1$, $f(1) = e^2 – 1 > 0$
joten f:llä on ainakin yksi nollakohta, joka on välillä $0 < x < 1$
$f´(x) = 1\cdot e^{2x} + x\cdot e^{2x}\cdot 2 = e^{2x}(1 + 2x) > 0$, koska $e^{2x} > 0$ ja $1 + 2x > 0$ sillä $x > 0$
f on aidosti kasvava ja saa jokaisen arvonsa kerran. Täten myös nk saadaan kerran.
Haarukoidaan väli pienemmäksi $f(0{,}5) = +0{,}36$, $f(0{,}4) = -0{,}10$, $f(0{,}45) = +0{,}1$ V: $x \approx 0{,}4$

6. $f(x) = x^2\cdot\ln x$, $x > 0$, on jva, dva, ei reunoja. $f´(x) = 2x\cdot\ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = x(2\ln x + 1)$
$f´ \ge 0$; $x(2\ln x + 1) \ge 0$; ($x = 0$ tai) $2\ln x + 1 \ge 0$; $\ln x \ge -½$; $\ln x \ge \ln e^{-½}$; $x \ge e^{-½}$
f' : 0 --- $e^{-½}$ +++
f : ↘ _ ↗ $\Rightarrow$ minimi $f(e^{-½}) = (e^{-½})^2\cdot\ln e^{-½} = e^{-1}\cdot(-½) = -\dfrac{1}{2e}$

7. $f(x) = \ln(1 – x) – \ln x$; MJ: $1 – x > 0$ JA $x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
$f´(x) = \dfrac{-1}{1-x} - \dfrac{1}{x} < 0$, (nimittäjät logaritmoitavina positiivisia) → f aidosti vähenevä → $\exists f^{-1}$
$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(1 – x) – \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln(1 – x) = \ln x \Leftrightarrow 1 – x = x \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = ½$
$(f^{-1})´(0) = \dfrac{1}{f´(½)} = \dfrac{1}{\frac{-1}{½} - \frac{1}{½}} = \dfrac{1}{-2-2} = -\dfrac{1}{4}$

8. $\sqrt{3}\sin x – \cos x \le 2 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x – \cos x – 2 \le 0$; Tutk. $f(x) = \sqrt{3}\sin x – \cos x – 2$
Koska jakso on 2π, voidaan tutkia funktiota välillä $[0,2\pi]$ f on JVA sulj. välillä
$f´(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$; $f´ = 0$; $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 0$ ||: cos x
$\sqrt{3} + \tan x = 0$; $\tan x = \tan 2\pi/3$; $x = 2\pi/3$ tai $x = 5\pi/3$
$f(0) = f(2\pi) = -1 - 2 = -3$; $f(2\pi/3) = \sqrt{3}\cdot½\sqrt{3} - (-½) - 2 = 0$; $f(5\pi/3) = \sqrt{3}\cdot(-½\sqrt{3}) - ½ - 2 = -4$
Täten suurin arvo on = 0 ja siis kaikki arvot ≤ 0

9. Piste (a,e^a) ; $y´ = e^x$; $k_T = y´(a) = e^a$ TANG: $y – e^a = e^a(x – a)$; $y = 0$ → $x = a – 1$
NORM: $y – e^a = -e^{-a}(x – a)$; $y = 0$ → $-e^a = -e^{-a}(x – a)$ || $\cdot(-e^a)$; $e^{2a} = x – a$; $x = a + e^{2a}$
Kolmion kanta = $a + e^{2a} – (a – 1) = e^{2a} + 1$. Korkeus = $y = e^a$.
Ala = 15 ; $½\cdot(e^{2a} + 1)\cdot e^a = 15$; $e^{3a} + e^a = 30$; $(e^a)^3 + e^a = 30$. Merk. $e^a = z$
$z^3 + z = 30$, josta huomataan, että $z = 3$; $e^a = 3$; $a = \ln 3$

10. Olkoon tangon ja maan välinen kulma x ja tangon pää peräseinässä.
Tornin sisällä on osa a ja ulkona 7 – a. Sisäpuolen kolmiosta trigonometrialla $a = 3/\cos x$
h = tangon korkeus oven kohdalla = $(7 – a) \sin x = 7\sin x – 3/\cos x \cdot \sin x$. Etsitään mikä on suurin korkeus.
$h(x) = 7 \sin x – 3 \tan x$; $h'(x) = 7 \cos x – 3/\cos^2 x = (7\cos^3 x – 3)/\cos^2 x$

$h' \geq 0$; $7\cos^3 x – 3 \geq 0$; $\cos x \geq \sqrt[3]{3/7}$; $x \leq 41°$,koska kosini on vähenevä välillä [0°,90°].
h ' : +++ 41° ---
h : $\nearrow$ $\overline{}$ $\searrow$ $\Rightarrow$ suurin korkeus on $h(41°) = 7\cdot\sin 41° - 3\cdot\tan 41° = 1{,}98$ (m) V: 2 m korkea oviaukko

98.2.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = \cos 4x$ b) $f(x) = (e^2)^x$ c) $f(x) = (2x + 1) \cdot \ln x$

98.2.2. Milloin funktio $f(x) = e^x – x$ on vähenevä?

98.2.3. Laske funktion $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ ääriarvot

98.2.4. Käyrälle $y = e^x$ piirretään kohtaan x = 1 tangentti ja normaali. Missä pisteissä ne leikkaavat y-akselin?. Mikä on näiden suorien ja y-akselin rajoittaman kolmin pinta-ala?

98.2.5. Olkoon $f(x) = ax + b$. Määritä a ja b, kun $f(1) = 2$ ja $f^{-1}(3) = 4$. Muodosta $f^{-1}(x)$.

98.2.6. Laske funktion $f(x) = \sin 2x – 2 \sin x$ suurin ja pienin arvo.

98.2.7. Olkoon $f(x)= e^{3x}$ ja $g(x) = \ln x$. Muodosta a) (f o g) (x) b) (g o f) (x)
c) Ratkaise yhtälö (f o g) (x) = (g o f) (x)

98.2.8. Osoita, että funktiolla $f(x) = \sin 2x + 2x$ on käänteisfunktio. Laske käänteisfunktion derivaatta kohdassa $x = 2\pi$.

98.2.9. Osoita, että yhtälöllä $xe^{2x} – 1 = 0$ on täsmälleen yksi reaalinen ratkaisu.

98.2.10. Osoita, että epäyhtälö $\sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$ on tosi kaikilla x:n arvoilla.

1. a) $f(x) = \cos 4x$; $f'(x) = -4\cdot\sin 4x$ b) $f(x) = (e^x)^2 = e^{2x}$; $f'(x) = 2\cdot e^{2x}$
c) $f(x) = (2x + 1)\cdot\ln x$; $f'(x) = 2\cdot\ln x + (2x + 1) \cdot 1/x$

2. $f(x) = e^x - x$; $f'(x) = e^x - 1$. Funktio on vähenevä, kun $f'(x) \leq 0$; $e^x - 1 \leq 0$; $e^x \leq 1$; $e^x \leq e^0$; $x \leq 0$

3. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ MJ: $x \neq 1$, jolloin f on JVA ja DVA. $f'(x) = \dfrac{2x(x - 1) - 1\cdot x^2}{(x - 1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$
nim > 0 $\Rightarrow$ osoittaja määrää merkin : NK : $x^2 - 2x = 0$; $x(x - 2) = 0$; x = 0 tai x = 2. KUV: YAP
f ' : +++ 0 --- 1 --- 2 +++
f : $\nearrow$ $\overline{}$ $\searrow$ | $\searrow$ _ $\nearrow$ $\Rightarrow$ MAX = f(0) = 0 , MIN = f(2) = 4

4. $y = e^x$;Piste x = 1 ; $y = e^1 = 1$; P(1,e) $y' = e^x$; $k_T = y'(1) = e^1 = e$; $k_N = 1/e$
T: $y - e = e(x - 1)$; $y - e = ex - e$; $y = ex$; N: $y - e = 1/e \cdot(x - 1)$; $y = 1/e \cdot x + e - 1/e$
y-akselin leikkauspisteet : $y_T = 0$; $y_N = e - 1/e$; kanta = $y_N - y_T = e - 1/e$; korkeus = 1
$A = ½(e - 1/e) \cdot 1 = ½(e - 1/e)$

5. $\begin{cases} f(1) = 2 \\ f^{-1}(3) = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(4) = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} a + b = 2 \;\|\cdot(-1) \\ 4a + b = 3 \;\|\cdot 1 \end{cases}$; 3a = 1 ; a = 1/3 ; 1/3 + b = 2 ; b = 5/3
f: $y = 1/3 \cdot x + 5/3 \;\| \cdot 3$; $3y = x + 5$; $x = 3y - 5$; f^{-1}: $y = 3x - 5$; $f^{-1}(x) = 3x - 5$

6. $f(x) = \sin 2x - 2\sin x$. Jaksollisuuden perusteella voidaan tutkia vain yhtä jaksoa $[0,2\pi]$, jolloin funktio on jatkuva suljetulla välillä ja saa siis suurimman ja pienimmän arvonsa. DVA
$f'(x) = 2\cos 2x - 2\cos x$; $f'(x) = 0$; $2\cos 2x - 2\cos x = 0$; $\cos 2x = \cos x$
$2x = x + n\cdot 2\pi$ tai $2x = -x + n\cdot 2\pi$; $x = n\cdot 2\pi$ tai $x = n\cdot 2\pi/3$
$f(0) = f(2\pi) = 0$; $f(2\pi/3) = \sin 4\pi/3 - 2\sin 2\pi/3 = -½\sqrt{3} - 2\cdot½\sqrt{3} = -1½\sqrt{3}$ pienin
$f(4\pi/3) = \sin 8\pi/3 - 2\sin 4\pi/3 = ½\sqrt{3} - 2\cdot(-½\sqrt{3}) = 1½\sqrt{3}$ = suurin

7. a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln x) = e^{3\cdot\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$ MJ: x > 0
b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(e^{3x}) = \ln e^{3x} = 3x$
c) $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$; $x^3 = 3x \;\|: x$; $x^2 = 3$ tai (x = 0) ; $x = \sqrt{3}$

8. $f(x) = \sin 2x + 2x$, $f'(x) = 2\cos 2x + 2 \geq 0$, koska kosinin arvot ≥ -1 Tällöin f on aidosti kasvava ja silloin sillä on käänteisfunktio $f(x) = 2\pi$; $\sin 2x + 2x = 2\pi$. Yhtälöstä huomataan, että sen ratkaisu on $x = \pi$. Koska f on aidosta kasvava se saa jokaisen arvonsa kerran, ja siis tämä on ainoa ratkaisu. $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f'(\pi)} = \dfrac{1}{2\cos 2\pi + 2} = \frac{1}{4}$
9. Tutkitaan funktioa $f(x) = xe^{2x} - 1$. Kun $x < 0$ ja $e^{2x} > 0$, on $f(x) < 0$. Ei ratkaisua, kun $x < 0$ Tutkitaan vain aluetta $x \geq 0$. $f'(x) = e^{2x} + x\cdot 2e^{2x} = e^{2x}(1 + 2x) > 0$ tällä alueella f on aidosti kasvava ja saa siis jokaisen arvonsa vain kerran $f(0) = -1$ ja $f(1) = e^2 - 1 > 0$ ja f on JVA $\Rightarrow$ f:llä on ainakin yksi nollakohta Täten f:llä on täsmälleen yksi nollakohta ja siis yhtälöllä täsmälleen yksi ratkaisu.
10. $\sin x + \cos x - \sqrt{2} \leq 0$. Tutkitaan funktioa $f(x) = \sin x - \cos x - \sqrt{2}$ Koska f on jaksollinen, voidaan tutkia jakson mittaista aluetta $[0,2\pi]$. f on jatkuva suljetulla välillä, jolloin se saa suurimman ja pienimmän arvonsa $f'(x) = \cos x - \sin x$: $f' = 0$; $\cos x - \sin x = 0$; $\sin x = \cos x$; $\tan x = 1$; $x = \frac{1}{4}\pi + n\pi$ $f(0) = 0 + 1 - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2} < 0$; $f(2\pi) = 0 + 1 - \sqrt{2} < 0$ $f(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$; $f(\frac{3}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2} < 0$ Siis suurin arvo on 0, joten kaikki arvot ≤ 0 ja siis epäyhtälö on aina tosi

99.1.1. Derivoi funktio a) $f(x) = \sin 2x + 3\cos 4x$ b) $f(x) = \dfrac{e^x}{2 - e^x}$

99.1.2. Olkoon $f(x) = \sin 2x$ ja $g(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$. Muodosta funktiot f o g ja g o f.

99.1.3. Millä x:n arvoilla funktio $f(x) = x + e^{-x}$ on kasvava?

99.1.4. Osoita, että funktiolla $f(x) = x^3 + 4x + 6$ on käänteisfunktio ja määritä $(f^{-1})'(1)$.

99.1.5. Laske funktion $f(x) = \sin x + \cos x$ derivaatan nollakohdat

99.1.6. Funktioiden arvoa voidaan arvioida Maclaurinin polynomien arvojen avulla, kun x on lähellä kohtaa $x = 0$. Maclaurinin polynomeilla on seuraavat ominaisuudet :$T(0) = f(0)$, $T'(0) = f'(0)$, $T''(0) = f''(0)$, $T'''(0) = f'''(0)$, jne. Määritä funktion $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ kolmannen asteen Maclaurinin polynomi $T_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. (Ne, joilla on graafinen laskin piirtäkööt molempien funktioiden kuvaajat välillä [-3,3])

99.1.7. Määritä positiivinen vakio a siten, että käyrä $y = \ln ax$ sivuaa suoraa $y = 2x$.

99.1.8. Määritä funktion $f(x) = e^x(x^2 - 3)$ ääriarvot.

99.1.9. Osoita, että epäyhtälö $\ln x < x^{\frac{1}{2}}$ on tosi kaikilla $x > 0$

99.1.10. Vaakasuora katto on 3 m korkeudella ja sitä vasten laitetaan 5 m pitkät tikkaat niin, että tikkaiden yläosa menee mahdollisimman kauas katon reunan yli vaakasuorassa suunnassa. (Arvellaan, että näin tikkaat ovat tukevimmin paikoillaan) Mihin kulmaan maan pintaan nähden tikkaat on asetettava? Seinä on tietysti pystysuorassa ja maan pinta vaakasuorassa.

1. a) $f(x) = \sin 2x + 3\cos 4x$; $f'(x) = 2\cos 2x - 3\cdot 4\sin 4x = 2\cos 2x - 12\sin 4x$ b) $f(x) = \dfrac{e^x}{2 - e^x}$; $f'(x) = \dfrac{e^x(2 - e^x) - (-e^x)\cdot e^x}{(2 - e^x)^2} = \dfrac{2e^x - e^{2x} + e^{2x}}{(2 - e^x)^2}\ \dfrac{2e^x}{(2 - e^x)^2}$
2. $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{1}{2}e^{-x}) = \sin(2\cdot\frac{1}{2}e^{-x}) = \sin e^{-x}$ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin 2x) = \frac{1}{2}e^{-\sin 2x}$
3. $f(x) = x + e^{-x}$. f on kasvava, kun $f'(x) \geq 0$; $1 + e^{-x}(-1) \geq 0$; $1 \geq e^{-x}$; $e^0 \geq e^{-x}$; $0 \geq -x$; $x \geq 0$
4. $f(x) = x^3 + 4x + 6$; $f'(x) = 3x^2 + 4 > 0 \Rightarrow$ f kasvava $\Rightarrow \exists f^{-1}$ $f(x) = 1$; $x^3 + 4x + 6 = 1$; $x^3 + 4x + 5 = 0$, josta huomataan, että $x = -1$ on sen ratkaisu $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(-1)} = \dfrac{1}{3\cdot(-1)^2 + 4} = \dfrac{1}{7}$
5. $f(x) = \sin x + \cos x$; $f'(x) = \cos x - \sin x$; $f'(x) = 0$; $\cos x - \sin x = 0$ $\cos x = \sin x$ || : $\cos x$; $1 = \tan x$; $\tan \frac{1}{4}\pi = \tan x$; $x = \frac{1}{4}\pi + n\cdot\pi$
6. $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$, $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$, $f''(x) = (\frac{1}{2})^2e^{\frac{1}{2}x}$, $f'''(x) = (\frac{1}{2})^3e^{\frac{1}{2}x}$ $T(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $T'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $T''(x) = 6ax + 2b$, $T'''(x) = 6a$ $T(0) = f(0)$; $d = e^0 = 1$; $T'(0) = f'(0)$; $c = \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}$; $T''(0) = f''(0)$; $2b = \frac{1}{4}$; $b = 1/8$ $T'''(0) = f'''(0)$; $6a = (\frac{1}{2})^3e^0 = 1/8$; $a = 1/48$ V: $T_3(x) = 1/48 \cdot x^3 + 1/8 \cdot x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

7. $y = 2x$ on tangentti $k_T = 2$; $y = \ln ax$; $y' = k_T$; $\frac{a}{ax} = 2$; $x = ½ \Rightarrow y = 2·½ = 1$(koska sivuamispiste on suoralla $y = 2x$) $\Rightarrow$ sivuamispiste on (½,1)
Koska sivuamispiste on myös käyrän piste. $\ln a·½ = 1$; $\ln ½a = \ln e$; $½a = e$; $a = 2e$

8. $f(x) = e^x(x^2 - 3)$; f on JVA, DVA, ei reunoja. $f'(x) = e^x(x^2 - 3) + e^x \cdot 2x = e^x(x^2 + 2x - 3)$
$e^x > 0$, joten $x^2 + 2x - 3$ määrää nollakohdan ja derivaatan merkin
$x^2 + 2x - 3 = 0$; $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$; x = 1 tai x = -3 KUV: ylöspäin aukeava paraabeli
f ' : +++ -3 --- 1 +++
f : ↗ ¯ ↘ _ ↗ $\Rightarrow$ Max = f(-3) = $6e^{-3}$ ja min = f(1) = -2e

9. $\ln x < x^{½} \Leftrightarrow \ln x - x^{½} < 0$. Tutkitaan funktiota $f(x) = \ln x - x^{½}$. $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^{½}} = \frac{2}{2x} - \frac{x^{½}}{2x} = \frac{2 - x^{½}}{2x}$. Nim > 0, joten osoittaja määrää merkin $2 - \sqrt{x} \ge 0$; $2 \ge \sqrt{x}$; $4 \ge x$
f ' : 0 +++ 4 ---
f : 0 ↗ ¯ ↘ $\Rightarrow$ suurin arvo on f(4) = ln 4 - 2 < 0. Koska suurin arvo < 0, ovat kaikki arvot < 0

10. Olkoon tikkaiden maassa oleva piste A katon reunaa sivuava piste B ja ylin piste C sekä seinän ja maan leikkauspiste D. Valitaan x = tikkaiden ja maan välinen kulma
Tikkaiden projektio maan pinnalla = p. $\frac{p}{5} = \cos x$. p = 5 cos x , 0° < x < 90°$\frac{3}{AD} = \tan x$; $AD = \frac{3}{\tan x}$.
Katon reunan yli vaakasuorassa oleva osa on $d(x) = 5 \cos x - \frac{3}{\tan x}$
$d'(x) = - 5 \sin x - \frac{0 - 3·1/ \cos^2 x}{\tan^2 x} = - 5 \sin x + \frac{3}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x / \cos^2 x} = \frac{3 - 5 \sin^3 x}{\sin^2 x}$
$f' \ge 0$; $3 - 5 \sin^3 x \ge 0$; $0,6 \ge \sin^3 x$; $\sqrt[3]{0,6} \ge \sin x$; $\sin 57,5° \ge \sin x$; $57,5° \ge x$, koska sin on kasvava välillä 0 < x < 90°
f '(x) : 0 +++ 57,5° --- 90°
f(x) : ↗ ¯ ↘ $\Rightarrow$ suurin arvo saadaan kun kulma on 57,5°.

99.2.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = \sin^3 2x$ b) $f(x) = \ln (x + e^x)$

99.2.2. Määritä derivaatan nollakohdat funktiolle $f(x) = 3 \ln x - \frac{x}{3}$.

99.2.3. Laske käyrälle $y = x^2 \sin x$ kohtaan $x = ½·\pi$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

99.2.4. Olkoon $f(x) = (1 + 2x)^2$ ja $g(x) = 1 + 2x^2$. Muodosta yhdistetyt funktiot f o g ja g o f.

99.2.5. Osoita, että yhtälöllä $e^x + \ln x + x^3 = 0$ on täsmälleen yksi reaalinen ratkaisu.

99.2.6. Määritä funktion $f(x) = x – e^x$ suurin arvo.

99.2.7. Millä x:n arvoilla funktio f(x) = 2 ln x – 3 ln (x – 2) on kasvava?

99.2.8. Osoita, että funktiolla f(x) = sin x on käänteisfunktio, kun $0 \le x \le ½·\pi$. Määritä käänteisfunktion derivaatta kohdassa x = ½.

99.2.9. Millä vakion k > 0 arvoilla epäyhtälö $\ln x < x^k$ on tosi kaikilla x > 0?

99.2.10. Vesikouruun on käytettävissä 1 m levystä peltiä. Keskeltä jätetään 40 cm leveä alue vaakasuoraan ja molemmilta reunoilta käännetään 30 cm levyinen alue yhtä monta astetta ylöspäin. Mikä on tämä asteluku, kun poikkileikkauksen pinta-ala (ja siis kourun tilavuus) on mahdollisimman suuri?

1. a) $f(x) = \sin^3 2x$; $f'(x) = 3 \cdot \sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = 6 \cdot \sin^2 2x \cdot \cos 2x$
b) $f(x) = \ln (x + e^x)$; $f'(x) = \frac{1 + e^x}{x + e^x}$

2. $f(x) = 3 \cdot \ln x - \frac{x}{3}$ (MJ : x > 0) ; $f'(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{3}$; f '(x) = 0 ; $\frac{3}{x} - \frac{1}{3} = 0$ || · 3x ; 9 - x = 0 ; x = 9

3. $y = x^2 \cdot \sin x$; $y' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$
$k_T = y'(½·\pi) = 2·½\pi \cdot \sin ½\pi + (½\pi)^2 \cdot \cos ½\pi = \pi \cdot 1 + (½\pi)^2 \cdot 0 = \pi$

4. $f(x) = (1 + 2x)^2$, $g(x) = 1 + 2x^2$
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 + 2x^2) = (1 + 2(1 + 2x^2))^2 = (3 + 4x^2)^2 = 9 + 24x^2 + 16x^4$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g((1 + 2x)^2) = 1 + 2((1 + 2x)^2)^2 = 1 + 2(1 + 2x)^4$

5. $e^x + \ln x + x^3 = 0$. Tutkitaan funktioa $f(x) = e^x + \ln x + x^3$, jva kun mj on $x > 0$
$f(1) = e + 1 > 0$, $f(0,1) = -1,1 < 0$. Täten f:llä on ainakin yksi nollakohta (A)
$f'(x) = e^x + 1/x + 3x^2 > 0 \Rightarrow$ f kasvava $\Rightarrow$ f saa jokaisen arvonsa kerran (B)
(A) ja (B) $\Rightarrow$ f:llä on täsmälleen yksi nollakohta ja siis yhtälöllä täsmälleen yksi ratkaisu

6. $f(x) = x - e^x$ on jva. $f'(x) = 1 - e^x$. $f' \geq 0$; $1 - e^x \geq 0$; $e^x \leq 1$; $e^x \leq e^0$; $x \leq 0$
f ' : +++ 0 ---
f : ↗ ¯ ↘ $\Rightarrow f(0) = -1$ on suurin arvo

7. $f(x) = 2 \ln x - 3 \ln (x - 2)$ MJ: $x > 0$ JA $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$
$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{x-2}$; $f' \geq 0$; $\frac{2}{x} - \frac{3}{x-2} \geq 0 \ \|\cdot x(x - 2) > 0$; $2x - 4 - 3x \geq 0$; $x \leq -4 \notin$ MJ
V: f ei kasva millään x:llä

8. $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x \geq 0$, kun $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$, joten f on kasvava ja sillä on f^{-1}
$f(x) = \frac{1}{2}$; $\sin x = \frac{1}{2}$; $\sin x = \sin \pi/6$; $x = \pi/6$
$(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{f'(\pi/6)} = \frac{1}{\cos \pi/6} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

9. $\ln x < x^k \Leftrightarrow \ln x - x^k = 0$. Tutkitaan funktioa $f(x) = \ln x - x^k$ jva kun $x > 0$
Epäyhtälö on tosi, jos funktion suurin arvo < 0
$f'(x) = 1/x - kx^{k-1}$; $f' \geq 0$; $1/x - kx^{k-1} \geq 0 \ \|\cdot x > 0$; $1 - kx^k \geq 0$; $x^k \leq 1/k$; $x \leq \sqrt[k]{1/k}$
f ' : 0 +++ $\sqrt[k]{1/k}$ ---
f : 0 ↗ ¯ ↘ $\Rightarrow$ suurin arvo on $f(\sqrt[k]{1/k}) = \ln (1/k)^{1/k} - ((1/k)^{1/k})^k = 1/k \cdot \ln (1/k) - 1/k = 1/k (\ln (1/k) - 1)$
$1/k (\ln (1/k) - 1) < 0 \ \|\cdot k > 0$; $\ln (1/k) - 1 < 0$; $\ln (1/k) < \ln e$; $1/k < e$; $k > 1/e$

10. Olkoon reunan ja vaakatason välinen kulma x. Korkeus = 30 sin x ja toinen kantasivu = $40 + 2\cdot 30\cos x$.
$A(x) = \frac{1}{2}(40 + 40 + 60 \cos x)\cdot 30\sin x = 1200\sin x + 900\sin x\cdot\cos x = 1200\sin x + 450\sin 2x$ on jva $[0,\frac{1}{2}\pi]$
$A'(x) = 1200 \cos x + 900 \cos 2x$
$A' = 0$; $1200 \cos x + 900(2\cos^2 x - 1) = 0$; $18\cos^2 x + 12\cos x - 9 = 0$
$\cos x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 648}}{36} = \frac{-12 \pm 6\sqrt{22}}{36} = \frac{-2 + \sqrt{22}}{6}$; $x \approx 63,4°$.
$A(0) = 0$; $A(\frac{1}{2}\pi) = 1200$; $A(63,4°) \approx 1433$ suurin. V: kulma 63,4°

00.1.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = \sqrt{3x + 4}$ b) $f(x) = \sin (3x + 4)$ c) $f(x) = \ln (3x + 4)$

00.1.2. Laske f ' (2), kun $f(x) = ax^3e^{-x}$. Mikä on a, kun f ' (1) = 2?

00.1.3. Millä x:n arvoilla funktio $f(x) = (-2x+3)e^x$ on kasvava?

00.1.4. Funktioista f ja g tiedetään, että niillä on käänteisfunktiot sekä arvot ja derivaatat seuraavasti

x	f(x)	f '(x)	g(x)	g ' (x)
0	2	1	3	-2
1	3	2	1	-1
2	0	3	0	½
3	1	-2	2	1

Mitä on a) f[g(1)] b) (g o f)(1) c) $f^{-1}(3)$ d) $(f^{-1})'(3)$ e) Dg[f(2)] f) (f o g)'(2)?

00.1.5. Osoita, että funktiolla $f(x) = 3x + \sin 3x$ on käänteisfunktio. Laske $(f^{-1})'(0)$.

00.1.6. Laske funktion $f(x) = \sin 2x + 2\cos x$ derivaatan nollakohdat.

00.1.7. Muodosta funktion $f(x) = \ln (\frac{1}{2}x - 1)$ käänteisfunktio.

00.1.8. Käyrällä $y = e^{2x}$ olevan mielivaltaisen pisteen kautta piirretään tangentti ja y-akselin suuntainen suora. Osoita, että näiden x-akselista erottaman janan pituus on riippumaton pisteestä P.

00.1.9. Osoita, että käyrä $y = x(1 + \ln x)$,x > 0, ei ole missään kohdassa suoran $y = x - e^{-1}$ alapuolella.

00.1.10. Öljynporauslautan etäisyys suorasta rannikkoviivasta on 5 km. Lauttaa lähimpänä olevasta rannikon kohdasta on 8 km:n päässä rannikolla jakelupiste, johon porauslautalta vedetään öljyputki. Putken vetäminen veden alla maksaa kaksi kertaa niin paljon kuin maalla. Laske kuinka pitkästi putkea kannattaa vetää vedenalaisesti ja kuinka pitkästi maata pitkin, jotta kustannukset olisivat mahdollisimman alhaiset.

1. a) $f(x) = \sqrt{3x + 4}$ $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}}$ c) $f(x) = \ln(3x + 4)$, $f'(x) = \dfrac{3}{3x + 4}$

b) $f(x) = \sin(3x + 4)$ $f'(x) = 3\cdot\cos(3x + 4)$

2. $f(x) = ax^3e^{-x}$, $f'(x) = 3ax^2e^{-x} + ax^3e^{-x}(-1) = ax^2e^{-x}(3 - x)$, $f'(2) = a\cdot 4\cdot e^{-2}\cdot 1 = 4ae^{-2}$

$f'(1) = 2 \Leftrightarrow a\cdot 1\cdot e^{-1}\cdot 2 = 2 \Leftrightarrow a\cdot e^{-1} = 1 \;||\; \cdot e \Leftrightarrow a = e$

3. $f(x) = (-2x+3)e^x$, $f'(x) = -2\cdot e^x + (-2x + 3)e^x = (-2 - 2x + 3)e^x = (-2x + 1)e^x$

f on kasvava, kun $f'(x) \geq 0$; $(-2x + 1)e^x \geq 0 \;||\; : e^x > 0$; $-2x + 1 \geq 0$; $-2x \geq -1 \;||$ ☹-2) ; $x \leq ½$

4. a) $f[g(1)] = f[1] = 3$ b) $(g \circ f)(1) = g[f(1)] = g[3] = 2$

c) $f^{-1}(3) = x \Leftrightarrow f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 1$ d) $(f^{-1})'(3) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{2}$

e) $Dg[f(2)] = g'[f(2)]\cdot f'(2) = g'[0]\cdot f'(2) = -2\cdot 3 = -6$

f) $(f \circ g)'(2) = Df[g(2)] = f'[g(2)]\cdot g'(2) = f'[0]\cdot g'(2) = 1\cdot ½ = ½$

5. $f(x) = 3x + \sin 3x$. $f'(x) = 3 + 3\cos 3x \geq 0$, koska $\cos 3x \geq -1$ ja $3\cos 3x \geq -3$

Täten f on aidosti kasvava ja sillä on siis käänteisfunktio.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + \sin 3x = 0$, josta huomataan, että ratkaisu on $x = 0$

$(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{3 + 3\cos 0} = \dfrac{1}{3 + 3\cdot 1} = \dfrac{1}{6}$

6. $f(x) = \sin 2x + 2\cos x$; $f'(x) = 2\cos 2x + 2(-\sin x) = 2\cos 2x - 2\sin x$

$f'(x) = 0$; $2\cos 2x - 2\sin x = 0$; $\cos 2x = \sin x$; $\cos 2x = \cos(½\pi - x)$

$2x = ½\pi - x + n\cdot 2\pi$ tai $2x = -½\pi + x + n\cdot 2\pi$

$3x = ½\pi + n\cdot 2\pi$ tai $x = -½\pi + n\cdot 2\pi$ $x = \pi/6 + n\cdot 2\pi/3$ tai $x = -½\pi + n\cdot 2\pi$

7. $f(x) = \ln(½x - 1)$

f: $y = \ln(½x - 1) \Leftrightarrow \ln e^y = \ln(½x - 1) \Leftrightarrow e^y = ½x - 1 \Leftrightarrow e^y + 1 = ½x \Leftrightarrow 2e^y + 2 = x$

f^{-1} : $y = 2e^x + 2 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = 2(e^x + 1)$

8. $y = e^{2x}$. Olkoon mielivaltaisen pisteen x-koordinaatti = a , jolloin $y = e^{2a}$ ja $P = (a, e^{2a})$

$y' = 2e^{2x}$; $k_T = y'(a) = 2e^{2a}$ Tangentin yhtälö $y - e^{2a} = 2e^{2a}(x - a)$.

x-akselin leikkauspiste : $0 - e^{2a} = 2e^{2a}(x - a) \;||\; : e^{2a}$; $-1 = 2(x - a)$; $-½ = x - a$; $x = a - ½$

y-akselin suuntaisen suoran yhtälö $x = a$, joka leikkaa x-akselin pisteessä $(a,0)$

Janan pituus = $|a - ½ - a| = ½$, jonka arvo ei riipu a:sta

9. Olkoon $y = x(1 + \ln x) = f(x)$ ja $y = x - e^{-1} = g(x)$

f ei ole missään kohdassa g:n alapuolella, jos f:N y ≥ g:n y $\Leftrightarrow x(1 + \ln x) \geq x - e^{-1}$

$\Leftrightarrow x + x\ln x - x + e^{-1} \geq 0$ Tutkitaan funktiota $F(x) = x\ln x + e^{-1}$ MJ: $x > 0$

$F'(x) = 1\cdot\ln x + x \cdot 1/x = \ln x + 1$ F' 0 --- e^{-1} +++

$F'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow \ln x \geq \ln e^{-1} \Leftrightarrow x \geq e^{-1}$ F ↘ _ ↗

$\Rightarrow F(e^{-1}) = e^{-1} \cdot \ln e^{-1} + e^{-1} = e^{-1} \cdot (-1) + e^{-1} = 0$, joten kaikki arvot ≥ 0

10. Olkoon L = lautta , J = jalostamo ja R = rantautumispaikka sekä K = lähin rannan kohta

Olkoon KR = x, jolloin suorakulmaisesta kolmiosta KRL saadaan $LR = \sqrt{25 + x^2}$ ja $RJ = 8 - x$

Kustannukset $K(x) = 2\sqrt{25 + x^2} + (8 - x)$ MJ: $0 < x < 8$

$K'(x) = 2\dfrac{2x}{2\sqrt{25+x^2}} - 1$; $K'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{\sqrt{25 + x^2}} \geq 1 \Leftrightarrow 2x \geq \sqrt{25 + x^2} \;||\; (\;)^2 \Leftrightarrow 4x^2 \geq 25 + x^2$

$\Leftrightarrow 3x^2 \geq 25 \Leftrightarrow x^2 \geq \dfrac{25}{3} \Leftrightarrow x \geq \dfrac{5}{\sqrt{3}}$ (MP ≥ 0)

K ' 0 --- $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ +++ 8

K ↘ _ ↗ $\Rightarrow K(\dfrac{5}{\sqrt{3}})$ on pienin. Tällöin $RL = \dfrac{10}{\sqrt{3}} \approx 5{,}77$ km ja $RP = 8 - \dfrac{5}{\sqrt{3}} \approx 5{,}11$ km

00.2.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = \sin e^x$ b) $f(x) = \sqrt{2x + x^2}$

00.2.2. Olkoon $f(x) = 3x – 4$ ja $g(x) = x^2 + 1$. Muodosta yhdistetyt funktiot a) f o f ja b) g o f.

00.2.3. Käyrän $y = \cos 2x$ kohtaan $x = \pi/6$ on piirretty tangentti. Mikä on tangentin kulmakerroin?

00.2.4. Muodosta funktion $f(x) = e^{½x – 1}$ käänteisfunktio.

00.2.5. Osoita, että funktio $y = ae^{2x} – be^{-2x}$ toteuttaa yhtälön $y'' – 4y = 0$.

00.2.6. Laske $(f^{-1})'(14)$, kun $f(x) = x^3 + x^2 + x$.

00.2.7. Laske funktion $f(x) = (x - 1)e^{2x}$ ääriarvo.

00.2.8. Milloin funktio $f(x) = \ln(x^2 + 1) – 2 \ln (x + 1)$ on vähenevä?

00.2.9. Osoita, että yhtälöllä $x^2 – \cos x = 0$ on täsmälleen yksi positiivinen ratkaisu.

00.2.10. Määritä funktion $f(x) = 3 \cos x – \sin x + 2$ suurin ja pienin arvo välillä $[\pi,2\pi]$

1. a) $f(x) = \sin e^x$, $f'(x) = e^x \cdot \cos e^x$ b) $f(x) = \sqrt{2x + x^2}$; $f'(x) = \dfrac{2 + 2x}{2\sqrt{2x + x^2}} = \dfrac{1 + x}{\sqrt{2x + x^2}}$

2. $f(x) = 3x - 4$ ja $g(x) = x^2 + 1$ a) $(f \circ f)(x) = f[f(x)] = f[3x - 4] = 3(3x - 4) - 4 = 9x - 12 - 4 = 9x - 16$
b) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[3x - 4] = (3x - 4)^2 + 1 = 9x^2 - 24x + 16 + 1 = 9x^2 - 24x + 17$

3. $y = \cos 2x$; $y' = -2 \cdot \sin 2x$; $k_T = y'(\pi/6) = -2 \cdot \sin \pi/3 = -2 \cdot ½\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

4. $f(x) = e^{½x - 1}$; $y = e^{½x - 1}$ || ln ( ) ; $\ln y = \ln e^{½x - 1}$; $\ln y = ½x - 1$; $½x = 1 + \ln y$
$x = 2 + 2\ln y$; $f^{-1}(x) = 2 + 2\ln x$

5. $y = ae^{2x} - be^{-2x}$; $y' = 2ae^{2x} + 2be^{-2x}$; $y'' = 4ae^{2x} - 4be^{-2x}$
$y'' - 4y = 4ae^{2x} - 4be^{-2x} - 4(ae^{2x} - be^{-2x}) = 4ae^{2x} - 4be^{-2x} - 4ae^{2x} + 4be^{-2x} = 0$ TOSI

6. $f(x) = x^3 + x^2 + x$; $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$; $D = 4 - 12 = -8 < 0$ ja YAP $\Rightarrow f' > 0 \Rightarrow$ f kasvava $\Rightarrow f^{-1}$ on olemassa.
Huomataan, että $f(2) = 8 + 4 + 2 = 14$ joten
$(f^{-1})' = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1} = \dfrac{1}{17}$

7. $f(x) = (x - 1)e^{2x}$ on JVA ja DVA, ei reunoja, joten ääriarvo voi olla f ':n nollakohdassa.
$f'(x) = 1 \cdot e^{2x} + (x - 1) \cdot 2e^{2x} = (2x - 1)e^{2x}$
Kun $e^{2x} > 0$ on $f' \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq ½$
f ' --- ½ +++
f ↘ _ ↗ f:llä on minimiarvo $f(½) = (½ - 1)e^{2 \cdot ½} = -½e$

8. $f(x) = \ln(x^2 + 1) - 2\ln(x + 1)$, jonka MJ : $x^2 + 1 > 0$ JA $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$
f on vähenevä, kun $f' \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2 + 1} - 2\dfrac{1}{x + 1} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2 + 1} - \dfrac{1}{x + 1} \leq 0$ || $\cdot(x^2 + 1)(x + 1) > 0 \Leftrightarrow x^2 + x - x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. MJ huomioon, jolloin V: $-1 < x \leq 1$

9. $x^2 - \cos x = 0$; Tutkitaan funktiota $f(x) = x^2 - \cos x$, joka JVA ja DVA
$f'(x) = 2x + \sin x$, joka positiivinen, kun $0 < x < \pi$ molempien yhteenlaskettavien ollessa positiivisia, Kun $x \geq \pi$ on edellinen yhteenlaskettava $\geq 2\pi$ ja kun $\sin x \geq -1$ on $f' > 0$
Tällöin on f kasvava kun $x > 0$ ja saa siis jokaisen arvonsa kerran
f JVA & $f(0) = -1$ & $f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0 \Rightarrow$ f:llä on nollakohta. Kun jokainen arvo saadaan kerran, saa f myös arvon 0 vain kerran. Siis yhtälöllä on vain yksi positiivinen ratkaisu.

10. $f(x) = 3 \cos x - \sin x + 2$ on JVA suljetulla välillä $[\pi,2\pi]$
$f'(x) = -3 \sin x - \cos x$; $f' = 0 \Leftrightarrow -3 \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow -3 \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1/3$, jolla on vain yksi ratkaisu x_0, jolla siis $\tan x_0 = -1/3$.
Piirtämällä suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat 1 ja 3 sekä hypotenuusa $\sqrt{10}$,
saadaan $\sin x_0 = +\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ ja $\cos x_0 = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$
$f(\pi) = 3 \cos \pi - \sin \pi + 2 = -3 - 0 + 2 = -1$; $f(2\pi) = 3 \cos 2\pi - \sin 2\pi + 2 = 3 - 0 + 2 = 5$, joka suurin
$f(x_0) = 3 \cdot (-\dfrac{3}{\sqrt{10}}) - \dfrac{1}{\sqrt{10}} + 2 = -\dfrac{10}{\sqrt{10}} + 2 = 2 - \sqrt{10}$, joka pienin

01.1.1. Laske $f'(1)$, kun $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

01.1.2. Määritä käyrälle $y = e^{x^2 - x}$ kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin yhtälö.

01.1.3. Määritä $h'(1)$, kun $h = g \circ f$ sekä $f(1) = 2$, $g(2) = 3$, $f'(1) = 4$, $g'(1) = 5$ ja $g'(2) = 6$.

01.1.4. Olkoon $f(x) = 2x + 3$ ja $g(x) = x^2 + 2x + 3$. Laske funktioiden a) $g \circ f$ ja b) f^{-1} lausekkeet.

01.1.5. Olkoon $f(x) = A\sin 3x + \cos^2 x$. Määritä vakio A siten, että $f'(\frac{\pi}{3}) = 0$

01.1.6. Määritä funktion $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 7)$, $x \geq 0$, pienin arvo.

01.1.7. Osoita, että funktiolla $f(x) = x - \frac{1}{2}\cos 2x$ on käänteisfunktio. Laske $(f^{-1})'(-\frac{1}{2})$.

01.1.8. Millä *x*:n arvoilla funktio $f(x) = x + \sqrt{2 - x}$ on vähenevä?

01.1.9. Osoita, että $\ln(2x - 3) \le 2x - 4$, kun $x > 1\frac{1}{2}$.

01.1.10. Suorakulmion yksi sivu on positiivisella *x*-akselilla, toinen sivu negatiivisella y-akselilla ja origoa vastapäätä oleva kärki käyrällä $y = \ln x$. Suorakulmion pyörähtäessä y-akselin ympäri syntyy suora ympyrälieriö. Mikä on tämän lieriön suurin mahdollinen tilavuus?

---

1. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$; $f'(1) = \dfrac{2\cdot 1}{1^2 + 1} = \dfrac{2}{2} = 1$

---

2. $y = e^{x^2 - x}$. Piste: $x = 1$ $y = e^{1 - 1} = e^0 = 1$.
Kulmakerroin: $y' = e^{x^2 - x}(2x - 1)$, $k_T = y'(1) = e^{1-1}(2 - 1) = e^0 \cdot 1 = 1$
Yhtälö : $y - 1 = 1 \cdot (x - 1)$; $y - 1 = x - 1$; $y = x$

---

3. $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$; $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$; $h'(1) = g'(f(1)) \cdot f'(1) = g'(2) \cdot f'(1) = 6 \cdot 4 = 24$

---

4. $f(x) = 2x + 3$ ja $g(x) = x^2 + 2x + 3$. a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3)$
$= (2x + 3)^2 + 2(2x + 3) + 3 = 4x^2 + 12x + 9 + 4x + 6 + 3 = 4x^2 + 16x + 18$
b) f: $y = 2x + 3$; $2x = y - 3$; $x = \frac{1}{2}y - 1\frac{1}{2}$; f^{-1} : $y = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$; $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$

---

5. $f(x) = A\sin 3x + \cos^2 x$; $f'(x) = 3A\cos 3x + 2\cos x \cdot (-\sin x) = 3A\cos 3x - \sin 2x$
$f'(\pi/3) = 3A\cos \pi - \sin(2\pi/3) = 3A\cdot(-1) - \frac{1}{2}\sqrt{3} = -3A - \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $f'(\pi/3) = 0$; $-3A - \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$; $A = -\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

---

6. $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 7)$, $x \ge 0$; $f'(x) = e^x(x^2 - 5x + 7) + e^x(2x - 5) = e^x(x^2 - 3x + 2)$
$f' = 0$: ($e^x = 0$) tai $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$; $x = 2$ tai $x = 1$
f ':n merkit ovat samat kuin polynomin, koska $e^x > 0$; YAP $\Rightarrow$ f ' 0+++ 1 --- 2 +++
$\Rightarrow$ pienin on joko $f(0) = 7$ f ↗ ‾ ↘ _ ↗
tai $f(2) = e^2 \approx 7{,}3$. V : pienin arvo on $f(0) = 7$

---

7. $f(x) = x - \frac{1}{2}\cos 2x$. $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\cdot 2\sin 2x = 1 + \sin 2x \ge 0$, koska pienin arvo $1 - 1 = 0$
$\Rightarrow$ f on aidosti kasvava $\Rightarrow f^{-1}$ on olemassa.
$f(x) = -\frac{1}{2}$; $x - \frac{1}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2}$, josta huomataan ratkaisu $x = 0$, sillä $0 - \frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}$
$(f^{-1})'(-\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{1 + 0} = 1$

---

8. $f(x) = x + \sqrt{2 - x}$; MJ: $2 - x \ge 0$; $x \le 2$; $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{2 - x}} \cdot (-1) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{2 - x}}$
f on vähenevä, kun $f'(x) \le 0$; $1 - \dfrac{1}{2\sqrt{2 - x}} \le 0 \,\|\, \cdot 2\sqrt{2 - x} \ge 0$; $2\sqrt{2 - x} - 1 \le 0$
$2\sqrt{2 - x} \le 1 \,\|\, (\,)^2$ MP ≥ 0 ; $4(2 - x) \le 1$; $2 - x \le \frac{1}{4}$; $x \ge 1\frac{3}{4}$. MJ huomioiden V : $1\frac{3}{4} \le x \le 2$

---

9. $\ln(2x - 3) \le 2x - 4 \Leftrightarrow \ln(2x - 3) - 2x + 4 \le 0$; tutkitaan funktiota $f(x) = \ln(2x - 3) - 2x + 4$
$f'(x) = \dfrac{2}{2x - 3} - 2 = \dfrac{2}{2x - 3} - \dfrac{4x - 6}{2x - 3} = \dfrac{2 - 4x + 6}{2x - 3} = \dfrac{8 - 4x}{2x - 3}$
$f' \ge 0 \Leftrightarrow 8 - 4x \ge 0$ (koska NIM > 0) ; $-4x \ge -8$; $x \le 2$ f ' $1\frac{1}{2}$ +++ 2 ---
$\Rightarrow f(2) = 0$ on suurin arvo f ↗ ‾ ↘
Koska suurin arvo ≤ 0, ovat kaikki arvot ≤ 0

---

10. Olkoon käyrällä olevan nurkkapisteen x-koordinaatti = $x \Rightarrow y = \ln x$, $x > 0$
Syntyvän lieriön pohjaympyrän säde = x ja korkeus = $-\ln x$
$V(x) = \pi x^2\cdot(-\ln x)$, $x > 0$; $V'(x) = -\pi(2x\cdot\ln x + x^2 \cdot 1/x) = -\pi(2x\cdot\ln x + x) = -2\pi x(\ln x + \frac{1}{2})$
$V'(x) \ge 0$; $\ln x + \frac{1}{2} \le 0$; $\ln x \le \ln e^{-1/2}$; $x \le e^{-1/2}$ V ' 0 +++ $e^{-1/2}$ - - -
$\Rightarrow$ V suurin, kun $x = e^{-1/2}$ V ↗ ‾ ↘
$V(e^{-1/2}) = -\pi(e^{-1/2})^2\cdot(\ln e^{-1/2}) = -\pi e^{-1}\cdot(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\pi e^{-1}$

01.2.1. Laske $f'(\pi/4)$, kun $f(x) = \sin 2x$.

01.2.2. Millä *x*:n arvolla $f'(x) = 0$, kun $f(x) = x \cdot e^x$.

01.2.3. Määritä funktion f(x) ääriarvot, kun $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

01.2.4. Laske (f o f)(10), kun f(x) = lg x.

01.2.5. Millä *x*:n arvoilla funktio $f(x) = \ln(3 - 2x - x^2)$ a) on määritelty ja b) kasvaa?

01.2.6. Olkoon $f(x) = \ln(1 + e^x)$. Laske $(f^{-1})'(\ln 2)$.

01.2.7. Osoita, että $\sqrt{4x + 5} \le x + 2\tfrac{1}{4}$ on tosi kaikilla $x \ge -1\tfrac{1}{4}$.

01.2.8. Laske $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \cos x - 1}{x}$.

01.2.9. Määritä funktion $f(x) = \dfrac{\sin x}{3 + 2\cos x}$ suurin arvo välillä $[\tfrac{1}{2}\pi, \pi]$.

01.2.10. Suorakulmion yksi kärkipiste on origossa ja siitä lähtevät sivut positiivisilla koordinaattiakseleilla. Origosta lähtevän suorakulmion lävistäjän päätepiste liikkuu ympyrällä $x^2 - 4x + y^2 = 0$. Määritä suorakulmion suurin ala.

---

1. $f(x) = \sin 2x$; $f'(x) = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$. $f'(\pi/4) = 2\cos 2\pi/4 = 2\cos \pi/2 = 2\cdot 0 = 0$

---

2. $f(x) = xe^x$; $f'(x) = 1\cdot e^x + xe^x = (1 + x)e^x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + x = 0$ (tai $e^x = 0$) $\Leftrightarrow x = -1$

---

3. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, MJ: $x > 0$; $f'(x) = \dfrac{1/x \cdot x - 1\cdot \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$

Maksimi = $f(e) = \dfrac{\ln e}{e} = \dfrac{1}{e}$

f '	|	+ + +	| - - -
f	|	↗	‾ ↘
	0		e

---

4. $f(x) = \lg x$; $(f \circ f)(10) = f[f(10)] = f[\lg 10] = f[1] = \lg 1 = 0$

---

5. $f(x) = \ln(3 - 2x - x^2)$; MJ: $3 - 2x - x^2 > 0$; $x^2 + 2x - 3 < 0$; $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4}{2}$

$x = 1$ tai $x = -3$; Kuvaaja alaspäin aukeava paraabeli. --- -3 +++ 1 --- MJ : $-3 < x < 1$

b) f on kasvava, kun $f'(x) \ge 0$; $\dfrac{-2 - 2x}{3 - 2x - x^2} \ge 0 \Leftrightarrow -2 - 2x \ge 0$ (koska nim > 0)

$-2x \ge 2 \Leftrightarrow x \le -1$. Huomioimalla MJ $-3 < x \le -1$

---

6. $f(x) = \ln 2 \Leftrightarrow \ln(1 + e^x) = \ln 2 \Leftrightarrow 1 + e^x = 2 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$f'(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$ $(f^{-1})'(\ln 2) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{\frac{e^0}{1 + e^0}} = \dfrac{1}{\frac{1}{1 + 1}} = 2$

---

7. $\sqrt{4x + 5} \le x + 2\tfrac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{4x + 5} - x - 2\tfrac{1}{4} \le 0$. Tutkitaan $f(x) = \sqrt{4x + 5} - x - 2\tfrac{1}{4}$ ($x \ge -1\tfrac{1}{4}$)

$f'(x) = \dfrac{4}{2\sqrt{4x + 5}} - 1$; $f' \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{4x + 5}} \ge 1$

$\Leftrightarrow 2 \ge \sqrt{4x + 5} \Leftrightarrow 4 \ge 4x + 5$; $x \le -\tfrac{1}{4}$

$\Rightarrow f(-\tfrac{1}{4}) = \sqrt{-1 + 5} + \tfrac{1}{4} - 2\tfrac{1}{4} = 0$ suurin

$\Rightarrow f(x) \le 0$ kaikilla $x \in$ MJ

f '	| + + +	| - - -	
f	| ↗	‾	↘
	-1¼	-¼	

---

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \cos x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \cos x - e^0 \cos 0}{x - 0} = f'(0)$, kun $f(x) = e^x \cos x$

$f'(x) = e^x \cos x + e^x(-\sin x)$; $f'(0) = e^0 \cos 0 - e^0 \sin 0 = 1\cdot 1 - 1\cdot 0 = 1$

---

9. $f(x) = \dfrac{\sin x}{3 + 2\cos x}$, $x \in [\tfrac{1}{2}\pi, \pi]$. (f on JVA suljetulla välillä, nim > 0)

$f'(x) = \dfrac{\cos x(3 + 2\cos x) - (-2\sin x)\cdot \sin x}{(3 + 2\cos x)^2} = \dfrac{3\cos x + 2\cos^2 x + 2\sin^2 x}{(3 + 2\cos x)^2} = \dfrac{3\cos x + 2}{(3 + 2\cos x)^2}$

$f'(x) = 0$; $3\cos x + 2 = 0$; $\cos x = -2/3$. Piirretään suorakulmainen kolmio, jossa kateetti 2 ja hypotenuusa 3, toinen kateetti $a^2 + 2^2 = 3^2$; $a^2 = 5$; $a = \sqrt{5}$, joten $\sin x = \sqrt{5}/3$

$f(\tfrac{1}{2}\pi) = \dfrac{\sin \tfrac{1}{2}\pi}{3 + 2\cos \tfrac{1}{2}\pi} = \dfrac{1}{3 + 0} = \dfrac{1}{3}$; $f(\pi) = \dfrac{\sin \pi}{3 + 2\cos \pi} = 0$

$f(nk) = \dfrac{\sin x}{3 + 2\cos x} = \dfrac{\sqrt{5}/3}{3 + 2(-2/3)} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, joka on suurin arvo

10. Olkoon kehän piste (x,y), jolloin $x^2 - 4x + y^2 = 0$; $y^2 = 4x - x^2$; $y = \sqrt{4x - x^2}$ $(0 \le x \le 4)$

$A(x) = xy = x\sqrt{4x - x^2}$, joka on JVA suljetulla välillä $A'(x) = 1\cdot\sqrt{4x - x^2} + \dfrac{x(4 - 2x)}{2\sqrt{4x - x^2}}$

$A'(x) = 0$; $\sqrt{4x - x^2} + \dfrac{2x - x^2}{\sqrt{4x - x^2}} = 0$; $4x - x^2 + 2x - x^2 = 0$; $6x - 2x^2 = 0$; $x = 0$ tai $x = 3$

$A(0) = A(4) = 0$; $A(3) = 3\sqrt{4\cdot 3 - 3^2} = 3\sqrt{3}$, joka on suurin.

02.1.1. Laske $f'(0)$ ja $f'(1)$, kun $f(x) = x^2 + e^x$.

02.1.2. Millä x:n arvoilla funktio $f(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{2x} - x$ on kasvava?

02.1.3. Määritä käyrälle $y = \sqrt{\dfrac{x}{2x + 1}}$ kohtaan $x = -1$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

02.1.4. Määritä vakiot a ja b, kun $f(x) = a\cdot\sin 2x + b\cdot\cos x$ sekä $f'(0) = 2$ ja $f'(\pi/6) = 3$.

02.1.5. Laske $f^{-1}(-1)$ ja $(f^{-1})'(-1)$, kun $f(x) = x^3 + 2x - 1$.

02.1.6. Mikä on funktion $f(x) = 2\sin x + \cos x$ suurin ja pienin arvo välillä $[0,\frac{1}{2}\pi]$?

02.1.7. Muodosta yhdistetyt funktiot g o f ja f o g, kun $f(x) = e^{2x+1}$ ja $g(x) = \ln x$

02.1.8. Osoita, että epäyhtälö $e^x + e^{-x} \ge 2$ kaikilla x:n reaalilukuarvoilla.

02.1.9. Määritä funktion $f(x) = 2x - \tan x$ ääriarvot välillä $]-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi[$

02.1.10. Mihin käyrän $y = 2e^x$ pisteeseen piirretty tangentti muodostaa positiivisen y-akselin ja negatiivisen x-akselin kanssa mahdollisimman suuren kolmion?

1. $f(x) = x^2 + e^x$; $f'(x) = 2x + e^x$; $f'(0) = 2\cdot 0 + e^0 = 0 + 1 = 1$; $f'(1) = 2\cdot 1 + e^1 = 2 + e$

2. $f(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{2x} - x$; $f'(x) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot e^{2x} - 1 = e^{2x} - 1$

f kasvava, kun $f' \ge 0$; $e^{2x} - 1 \ge 0$; $e^{2x} \ge 1$; $e^{2x} \ge e^0$; $2x \ge 0$; $x \ge 0$

3. $y = \sqrt{\dfrac{x}{2x + 1}}$; $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{2x+1}}}\cdot\dfrac{1\cdot(2x + 1) - 2\cdot x}{(2x + 1)^2} = \sqrt{\dfrac{2x + 1}{x}}\cdot\dfrac{1}{2(2x + 1)^2}$

$k_T = y'(-1) = \sqrt{\dfrac{-2 + 1}{-1}}\cdot\dfrac{1}{2(-2 + 1)^2} = \frac{1}{2}$

4. $f(x) = a\cdot\sin 2x + b\cdot\cos x$; $f'(x) = 2a\cdot\cos 2x - b\cdot\sin x$

$\begin{cases} f'(0) = 2 \\ f'(\pi/6) = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} 2a\cdot\cos 0 - b\cdot\sin 0 = 2 \\ 2a\cdot\cos(2\pi/6) - b\cdot\sin(\pi/6) = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} 2a = 2 \\ 2a\cdot\frac{1}{2} - b\cdot\frac{1}{2} = 3 \end{cases}$; $a = 1$; $1 - \frac{1}{2}b = 3$; $b = -4$

5. $f(x) = x^3 + 2x - 1$; $f'(x) = 3x^2 + 2$

$f^{-1}(-1) = x$; $f(x) = -1$; $x^3 + 2x - 1 = -1$; $x^3 + 2x = 0$; $x(x^2 + 2) = 0$; $x = 0$ (tai $x^2 + 2 = 0$)

$(f^{-1})'(-1) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{3\cdot 0^2 + 2} = \frac{1}{2}$

6. $f(x) = 2\sin x + \cos x$ on f jva ja dva suljetulla välillä

$f'(x) = 2\cos x - \sin x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow 2 - \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan x_0 = 2$

suorakulmaisesta kolmiosta saadaan kun kateetit 1 ja 2 hypotenuusaksi $\sqrt{5}$

$f(0) = 2\sin 0 + \cos 0 = 1\cdot 0 + 1 = 1$ Pienin

$f(x_0) = 2\sin x_0 + \cos x_0 = 2\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ Suurin

$f(\frac{1}{2}\pi) = 2\sin\frac{1}{2}\pi + \cos\frac{1}{2}\pi = 2\cdot 1 + 0 = 2$

7. $f(x) = e^{2x+1}$; $g(x) = \ln x$; $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[e^{2x+1}] = \ln(e^{2x+1}) = 2x + 1$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[\ln x] = e^{2\ln x + 1} = e^{\ln x^2 + \ln e} = e^{\ln(x^2\cdot e)} = x^2\cdot e$

8. $e^x + e^{-x} \ge 2 \Leftrightarrow e^x + e^{-x} - 2 \ge 0$. Tutkitaan funktiota $f(x) = e^x + e^{-x} - 2$; $f'(x) = e^x - e^{-x}$

$f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} \ge 0 \Leftrightarrow e^x \ge e^{-x} \Leftrightarrow x \ge -x \Leftrightarrow 2x \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0$

f ' : - - - 0 + + + $\Rightarrow$ f pienin, kun x = 0 : pienin arvo = $f(0) = 1 + 1 - 2 = 0$

f : ↘ _ ↗ $\Rightarrow$ kaikki arvot ≥ 0

9. $f(x) = 2x - \tan x$, $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$. f on jva, dva, reunat ei mukana
$f'(x) = 2 - 1 - \tan^2 x = 1 - \tan^2 x$
$f' > 0$; $1 - \tan^2 x > 0 \Leftrightarrow 1 > \tan^2 x \Leftrightarrow 1 > |\tan x| \Leftrightarrow -1 < \tan x < 1$
$\Leftrightarrow \tan(-\frac{1}{4}\pi) < \tan x < \tan \frac{1}{4}\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\pi < x < \frac{1}{4}\pi$
f' : $-\frac{1}{2}\pi$ - - - $-\frac{1}{4}\pi$ + + + $\frac{1}{4}\pi$ - - - $\frac{1}{2}\pi$
f : ↘ _ ↗ ‾ ↘
minimi $= f(-\frac{1}{4}\pi) = 2\cdot(-\frac{1}{4}\pi) - \tan(-\frac{1}{4}\pi) = 1 - \frac{1}{2}\pi$ maksimi $= f(\frac{1}{4}\pi) = 2\cdot(\frac{1}{4}\pi) - \tan(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\pi - 1$

10. $y = 2e^x$. Valitaan sivuamispisteen x- koordinaatti muuttujaksi. $P = (t, 2e^t)$
$y' = 2e^x \Rightarrow k_T = 2e^t$. Tangentin yhtälö $y - 2e^t = 2e^t(x - t)$; $y = 2e^t(x - t + 1)$
y-akselin leikkauspiste $(0, 2e^t(1 - t))$. x-akselin leikkauspiste $= (t - 1, 0)$
Määrittelyjoukko : $y > 0$ JA $x < 0$; $1 - t > 0$ JA $t - 1 < 0$; $t < 1$ MJ: $t < 1$
$A(t) = \frac{1}{2}\cdot 2e^t(1 - t)(1 - t) = e^t(1 - t)^2$. $A'(t) = e^t(1 - t)^2 + e^t\cdot 2(1 - t)(-1) = e^t(1 - 2t + t^2 - 2 + 2t) = e^t(t^2 - 1)$; $A'(t) = 0$
$t^2 - 1 = 0$; $t = \pm 1$ KUVAAJA YAP + + + -1 - - - 1 + + +
A' : + + + -1 - - - 1 $\Rightarrow$ A suurin kun $t = -1$
A : ↗ ‾ ↘ Vastaus : Pisteeseen $(-1, 2/e)$