PITKÄ

MATEMATIIKKA

KURSSI MA6

DIFFERENTIAALILASKENTA 1

Markku Männikkö
2003

Sisällysluettelo:

MA6. Differentiaalilaskenta 1.

1. Funktion raja-arvo ja jatkuvuus

1.1. Raja-arvo

1. Funktion raja-arvon määritelmä karkeasti
Funktion f(x) raja-arvo kohdassa x = a, on se luku, jota funktion arvot lähestyvät kun x lähestyy arvoa a.

2. Raja-arvon selvittäminen laskimella
Lasketaan funktion arvoja niillä x:illä, jotka ovat rajakohdasta esim. 0,1:n , 0,01:n , 0,001:n jne päässä sen suuremmalla ja pienemmällä puolella. Näistä lasketuista arvoista päätellään raja-arvo.

1.1.1. Tutki laskimella raja-arvoa a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-2}{x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}x^x$ (x > 0) c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

2. Tutki laskimella raja-arvoa a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{10^x-1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}$

3. Raja-arvon määritelmä vähän tarkemmin
Funktion f(x) raja-arvo on luku A, kun x lähestyy lukua a, jos f(x):n arvot poikkeavat luvusta A vähemmän kuin mikä tahansa annettava määrä, heti kun x:n arvot poikkeavat a:sta vähemmän kuin tästä määrästä riippuvainen luku ja kaikilla tämän ehdon täyttävillä x:llä.

4. x-alueen etsimistä
Ratkaise funktion arvojen toteutettava epäyhtälö.

3. Miten lähellä luvun x on oltava kohtaa 2, jotta funktion f(x) = 3x - 2 arvot eivät poikkeaisi luvusta 4 enempää kuin 0,006?

4. Miten paljon voi luku x poiketa luvusta 3, jotta funktion f(x) = 2x + 1 arvot poikkeaisivat luvusta f(3) vähemmän kuin 0,001?

1.2. Raja-arvon laskeminen

1. Raja-arvon laskusääntöjä
1° lim c = c 2° lim x = x_0 3° lim c·f(x) = c · lim f(x) 4° lim [f(x) ± g(x)] = lim f(x) ± lim g(x)
5° lim [f(x) · g(x)] = lim f(x) · lim g(x) 6° lim [f(x) / g(x)] = lim f(x) / lim g(x), jos lim g(x) ≠ 0
7° lim | f(x) | = | lim f(x) | Kaikissa kohdissa $x \to x_0$

2. Raja-arvo, kun sijoittamalla ei tule epämääräistä
Raja-arvo on tällöin sama kuin funktion arvo, ts. sijoita rajakohta funktioon muuttujan paikalle.

1.2.1. Laske a) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2 - 3x + 4)$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x}{x+2}$

3. Raja-arvo, kun sijoittamalla $\frac{0}{0}$ ja murtofunktio
Jaetaan osoittaja ja nimittäjä tekijöihin. Tekijänä on (x - nk). Toinen tekijä vaikka jakamalla.
Supistetaan tämä nollatekijä (x - nk) pois.
Raja-arvo saadaan sitten sijoittamalla.

2. Laske a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{4x-12}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{3x^2-4x-4}$

4. Raja-arvo, kun sijoittamalla $\frac{0}{0}$ ja esiintyy neliöjuuria
Lavennetaan neliöjuurierotus pois kertomalla osoittaja ja nimittäjä vastaavalla neliöjuurisummalla.
Jaetaan saadut polynomit tekijöihin. (x - nk) on yksi tekijä.
Supistetaan nollatekijät pois. Raja-arvo saadaan sitten sijoittamalla.

3. Laske a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{x-9}$

5. Vakion määrittäminen, jotta murtofunktiolla olisi raja-arvo
Raja-arvoa ei ole, jos nimittäjä lähestyy nollaa ja osoittaja ei.
Siis: nimittäjän nollakohta on oltava myös osoittajan nollakohta.
Laita nollakohtana oleva x osoittajaan ja merkitse se = 0. Ja ratkaise.

4. Mikä arvo on a:lla, kun $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x+a}{x^3-4x}$ on olemassa, kun x_0 on a) 0 b) 2 c) - 2?

5. Määritä vakio c niin, että lausekkeella $\frac{3x^2 - 8x - 3}{x^2 - c^2}$ on äärellinen raja-arvo, kun $x\to c$. Laske tämä raja-arvo?

6. Millä vakion a arvoilla raja-arvo $\lim\limits_{x\to 1}\frac{6x^2-5ax+a^2}{x-1}$ on äärellinen? Määritä tällöin raja-arvo.

7. Määritä vakio a siten, että $\lim\limits_{x\to -a}\frac{2x^2+ax-a^2}{x+a}=a^2+2$

8. Määritä a ja b siten, että funktio $f(x) = \frac{ax + b}{x - 3}$ toteuttaa ehdot f(0) = a ja $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -½$.

9. Määritä vakiot a ja b siten että $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+ax+b}{x-3}=4$

1.3. Raja-arvon erikoistapauksia

1. Epäoleellinen raja-arvo
syntyy kun x lähestyy jotakin äärellistä lukua ja raja-arvoksi näyttää tulevan +∞ tai -∞

2. Epäoleellisen raja-arvon laskeminen, kun sijoitus antaa tulokseksi A / 0
Laske nimittäjän merkki raja-kohdan lähellä ja osoittajan arvo A (merkki)
Jakolaskun merkkisäännöstä saa osamäärän merkin lähellä rajakohtaa.
Raja-arvo on samanmerkkinen + tai - ∞.

1.3.1. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x^2-x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2}{x^2+6x+9}$ d) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-3}{(x-2)^2}$

3. Raja-arvo, kun x lähestyy ääretöntä
on se luku, jota vaikka kuinka lähellä lausekkeen arvot ovat, kaikilla x:illä, jotka ovat suurempia kuin läheisyyden määrästä riippuva luku

4. Raja-arvon laskeminen yksinkertaisissa tapauksissa kun x lähestyy ääretöntä.
Kuvittele x:n paikalle suuri luku, ja mieti mikä tulee lausekkeen arvoksi
suuri + suuri = suuri, - suuri - suuri = - suuri, 2 · suuri = suuri, -2 · suuri = - suuri, luku / suuri = 0

2. a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+2x)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}x(x-2)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-4x)$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}(-x^3+4x^2)$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{3x+4}$

5. Raja-arvon laskeminen kun arvio antaa tuloksen "suuri luku / suuri luku"
Supista sillä potenssilla, joka nimittäjässä voimakkaimmin lähestyy ääretöntä (korkein potenssi, eksponenttifunktio, jolla suurin kantaluku, …)

3. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-x}{3+x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+4}{5x}$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1-5x}{1+4x}$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x}{4x-3}$

4. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+2}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+x}{x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{4x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{4x^2+1}$

5. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^2}{x^2+x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+x^3+x+1}{1-2x^4}$

6. Raja-arvon laskeminen, kun ∞ - ∞ ja esiintyy neliöjuuria.
Lavenna (∞ + ∞)-termillä, jolloin päästään ”suuri luku / suuri luku” - tilanteeseen.
Supista sitten nimittäjän korkeimmalla potenssilla. HUOM! $\sqrt{x^2}$ = x^1:n asteluku on 1.

6. Laske a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1})$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+5x}-2x)$

7. Toispuoleinen raja-arvo
Oikeanpuoleinen raja-arvo on se luku, jota lausekkeen arvot lähestyvät, kun x:t lähestyvät rajakohtaa ja x:n arvot ovat rajakohdan oikealla (suuremmalla) puolella

8. Toispuoleisten raja-arvojen laskeminen
Teknisesti samoin kuin varsinaisten raja-arvojenkin laskeminen.
Lausekkeen on oltava se, mitä rajakohdan ko. puolella käytetään.

7. Olkoon f(x) = $\begin{cases} x^2 - 3x + 4, & x < 2 \\ x^3 - 2x + 1, & x > 2 \end{cases}$ Laske $\lim\limits_{x\to2+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2-} f(x)$ ja $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

9. Varsinaisen raja-arvon olemassaolo
Funktiolla on varsinainen raja-arvo kohdassa x = a , jos oikean ja vasemman puoleiset raja-arvot ovat yhtä suuret eli $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a+} f(x)=\lim\limits_{x\to a-} f(x)=A$

8. Mikä on a, kun $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ on olemassa ja f(x) = $\begin{cases} x^2 - 2x + a, & x < 2 \\ 3x^2 - 2ax + 3, & x > 2 \end{cases}$.

9. Olkoon f(x) = $\frac{x^2 + 2|x|}{3|x|}$. Onko $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ olemassa?

10. Olkoon f(x) = $\frac{3x + |x|}{x + 3|x|}$ Onko $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ olemassa?

1.4. Jatkuvuus

1. Funktion jatkuvuuden määritelmä jossakin kohdassa x = a.
Funktio f on jatkuva kohdassa x = a, jos
1° f(a) on olemassa
2° $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ on olemassa.
3° $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ = f(a)
HUOM.! YTL on sitä mieltä, että jos f(a) ei ole olemassa, ei jatkuvuutta ole järkevä tutkia. Ts. jatkuvuutta on mielekästä tutkia vain määrittelyjoukossa.

1.4.1. Miten pitäisi määritellä f(3), jotta funktio f(x) = $\frac{2x - 6}{x^2 - 2x - 3}$ olisi jatkuva kohdassa x = 3?

2. Funktion jatkuvuuden tutkiminen
Tutkitaan onko määritelmän kohdat 1° - 3° voimassa.

2. Tutki funktion jatkuvuutta, kun x = 1 a) f(x) = $\begin{cases} \frac{2x - 2}{x - 1}, & \text{kun } x \neq 1 \\ 2, & \text{kun } x = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 2}, & \text{kun } x \neq 1 \\ 1, & \text{kun } x = 1 \end{cases}$

3. Jatkuvuus avoimella välillä
Funktio on jatkuva avoimella välillä]a,b[, jos funktio on jatkuva kaikilla x ∈]a,b[

4. Toispuoleinen jatkuvuus.
f on oikealta jatkuva, kun x = a, jos 1° f(a) on olemassa, 2° $\lim_{x\to a+} f(x)$ on olemassa ja 3° $\lim_{x\to a+} f(x)$ = f(a)

5. Jatkuvuus suljetulla välillä
Funktio f(x) on jatkuva välillä [a,b], jos f on jatkuva avoimella välillä, oikealta jatkuva, kun x = a ja vasemmalta jatkuva, kun x = b.

6. Määrittelyjoukossaan jatkuvia funktioita
Olkoon funktiot f ja g jatkuvia
Tällöin myös funktiot f + g , f - g , f · g , f / g ja | f | ovat jatkuvia määrittelyjoukossaan

7. Vakion arvon määrittäminen, jotta funktio olisi jatkuva
Lasketaan funktion arvo ja raja-arvo tutkittavassa kohdassa.
Tehdään yhtälö merkitsemällä nämä yhtä suuriksi ja ratkaistaan näin saatu yhtälö.

3. Mikä on a, kun funktio a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}, & \text{kun } x \neq 2 \\ a, & \text{kun } x = 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 - 4a}{x - 2}, & \text{kun } x \neq 2 \\ 1, & \text{kun } x = 2 \end{cases}$ on jatkuva 2:ssa?

8. Funktio on tai voi olla epäjatkuva, jos se on määritelty kohdissa
Murtofunktio kohdassa, jossa nimittäjä = 0
Neliöjuurifunktio, kun juurrettava < 0
Parillinen juurifunktio, kun juurrettava < 0
Logaritmifunktio, kun logaritmoitava ≤ 0
Murtopotenssifunktio, kun potenssin kantaluku < tai ≤ 0
Tangenttifunktio, kun x = ½π + n·π
Paloittain määritelty funktio liitoskohdassaan.

4. Millä x:illä funktiota ei ole määritelty a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{3x - 6}$ b) $f(x) = \dfrac{2x - 6}{x^2 - 2x - 3}$ c) $f(x) = \dfrac{2x - 6}{x^2 - 2x + 3}$

5. Millä x:illä funktio on jatkuva a) $f(x) = \dfrac{2x + 7}{x^2 - 2x}$ b) $f(x) = \sqrt{3x - 6}$ c) $f(x) = \ln(1 - x^2)$ d) $f(x) = \tan(x - \pi)$?

9. Paloittain määritellyn funktion jatkuvuus
Paloittain määritelty funktio on jatkuva liitoskohdassaan x = a, jos
1° f(a) on olemassa 2° $\lim_{x\to a+} f(x)$ on olemassa 3° $\lim_{x\to a-} f(x)$ on olemassa
4° f(a) = $\lim_{x\to a+} f(x)$ = $\lim_{x\to a-} f(x)$ eli kaikki edellä olevat arvot 1° - 3° ovat yhtä suuret.

6. Onko funktio $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{kun } x \leq 1 \\ x^2 + 4x, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$ jatkuva kohdassa x = 1?

1.5. Suljetulla välillä jatkuvan funktion ominaisuuksia

1. Milloin funktiolla on varmasti suurin ja pienin arvo?
Kun funktio on jatkuva suljetulla välillä.

2. Suljetulla välillä jatkuvan funktion arvojoukko.
Kun funktio on jatkuva suljetulla välillä se saa suurimman ja pienimmän arvonsa ja kaikki arvot niiden väliltä.

1.5.1. Piirrä funktion f(x) = 3 - 2x, - 1 ≤ x ≤ 2, kuvaaja. Määritä funktion suurin ja pienin arvo sekä arvojoukko.

3. Funktion etumerkin vaihtuminen.
voi tapahtua vain nollakohdissa tai epäjatkuvuuskohdissa.

4. Epäyhtälön ratkaiseminen kokeellisella tarkistelulla.
Etsitään nollakohdat ja epäjatkuvuuskohdat.
Otetaan jokaiselta näin saadulta väliltä yksi x ja sijoitetaan epäyhtälöön.
Jos epäyhtälö toteutuu jollakin x:llä, se toteutuu koko sillä välillä jolla tämä x on.

2. Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ nollakohdat ovat - 2, 1 ja 3. Milloin f(x) > 0.

3. Ratkaise epäyhtälö $\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 9} > 0$.

5. Funktion nollakohdan olemassaolo Jos funktio on jatkuva suljetulla välillä 1° [a,b] ja 2° f(a) ja f(b) ovat erimerkkiset, niin funktiolla on välillä]a,b[ainakin yksi nollakohta

6. Osoitus, että funktiolla on ainakin yksi nollakohta. Todetaan, että funktio on jatkuva. Lasketaan funktion arvo kahdessa eri kohdassa Jos nämä arvot ovat erimerkkiset, on funktiolla näiden x:ien välissä ainakin yksi nollakohta.

4. Osoita, että funktiolla $f(x) = x^5 + 4x^3 - 2$ on ainakin yksi nollakohta välillä [0,1]
5. Osoita, että funktiolla $f(x) = x^6 + 4x^3 + 1$ on ainakin yksi nollakohta.

7. Osoitus, että yhtälöllä on ainakin yksi ratkaisu. Siirretään kaikki termit yhtälön vasemmalle puolelle. Tutkitaan vasemman puolen määrittelemää funktiota kuten ed. kohdassa 1.5.6

6. Osoita, että yhtälöllä a) $x^3 = x^2 + 1$ b) $2^x = x^2 + 3$ on ainakin yksi ratkaisu.

2. Derivaatta

2.1. Erotusosamäärä

1. Keskinopeus on matkan pituus jaettuna siihen käytetyllä ajalla = $s / t = \Delta s / \Delta t = (s_2 - s_1) / (t_2 - t_1)$

2. Hetkellisen nopeuden saamiskonsti Lasketaan keskinopeus hyvin lyhyellä aikavälillä

3. v_K, kun s(t) tunnetaan $v_K = (s(t_2) - s(t_1)) / (t_2 - t_1)$

2.1.1. Kappaleen sijainti s (metreinä) riippuu ajasta t (sekunteina) säännön $s = 2^t$ mukaisesti. Laske kappaleen keskivauhti aikavälillä 1 s - 3 s.

4. v_H, kun s(t) tunnetaan Lasketaan keskivauhti lyhyellä aikavälillä

2. Kappaleen sijainti s riippuu ajasta t säännön $s = 2^t$ mukaisesti. Mikä on hetkellinen vauhti kohdalla 1 s?

5. Keskivauhti liikkeestä ts-koordinaatistossa Piirretään suora alku- ja loppupisteen kautta. Keskivauhti on tämän suoran kulmakerroin.

6. Hetkellinen vauhti liikkeestä ts-koordinaatistossa Piirretään tutkittavan ajanhetken kohdalle kuvaajalle tangentti, jonka kulmakerroin on hetkellinen vauhti

7. EOM kohdasta a kohtaan x $EOM = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

3. Laske funktion $f(x) = x^2 + 2x$ erotusosamäärä a) kohdasta 1 kohtaan 2 b) kohdassa 3.

8. EOM:n geometrinen merkitys EOM on funktion kuvaajan ko. kohtia vastaavien pisteiden kautta kulkevan sekantin kulmakerroin.

9. EOM:n fysikaalinen merkitys EOM on funktion keskimääräinen kasvuvauhti (muuttumisvauhti)

10. EOM:n raja-arvon selvittäminen laskimella Lasketaan EOM:n arvoja niin että tarkastelukohdat ovat aina vaan lähempänä toisiaan. Katsotaan lähestyvätkö näin saadut arvot jotakin lukua. Jos, niin tämä luku on raja-arvo.

11. EOM:n raja-arvon selvittäminen algebrallisesti
Suoritetaan EOM:n jakolasku ja lasketaan mikä tulee osamäärän arvoksi lähestymiskohdassa.

12. EOM:n raja-arvo ja tangentin kulmakerroin
Raja-arvo on tangentin kulmakerroin

4. Mikä on funktion f(x) = x^2 + 2x + 3 kohtaan x = 1 piirretyn tangentin kulmakerroin?

2.2. Derivaatta

1. Derivaatan määritelmä
Funktion f derivaatta kohdassa x = a on $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ eli kohdassa a lasketun EOM:n raja-arvo

2. Derivaatan arvon laskeminen kohdassa x = a
Lasketaan määritelmän mukaan raja-arvo EOM:lle.

2.2.1. Olkoon f(x) = x^2 - 3x. Laske a) f ‘ (1) b) f ‘ (2).
2. Olkoon f(x) = $3x^2$. Laske a) f ‘ (1) b) f ‘ (-2).

3. Derivaatan arvo TI-85:llä
$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{\text{nDer}}$ (tai $\boxed{\text{der1}}$) $\boxed{\text{f(x)}}$ $\boxed{,}$ $\boxed{\text{x}}$ $\boxed{,}$ $\boxed{x_0}$ ($\boxed{\text{fkt , muuttuja, kohta}}$)

4. Derivaatan geometrinen merkitys
Derivaatan arvo on derivaatan laskemiskohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin

5. Derivaatan fysikaalinen merkitys
Derivaatan arvo on funktion hetkellinen muuttumisvauhti (nopeus) derivaatan laskemiskohdassa.

2.3. Derivaattafunktio

1. Määritelmä
Derivaattafunktio on funktio, jonka arvot ovat annetun funktion derivaatan arvoja kaikilla kohdilla x.

2. Derivaattafunktion lausekkeen laskeminen
Lasketaan derivaatta mielivaltaisella kohdalla a.
Korvataan sen jälkeen kirjain a kirjaimella x.

2.3.1. Laske funktion a) f(x) = $2x^2$ b) f(x) = x^2 + x derivaattafunktio

3. Derivaattafunktion kuvaaja TI-85:llä
$\boxed{\text{GRAPH}}$ $\boxed{\text{y(x)}}$ $\boxed{\text{y1 = f:n lauseke}}$ $\boxed{\text{y2 = nDer(y1,x,x)}}$ ja piirrä y2.

4. EOM:n toinen esitysmuoto
$\text{EOM}_{\text{II}} = \frac{\text{f(a + h) - f(a)}}{\text{h}}$

5. Vakiofunktion derivaatta , D(c)
on nolla , ts. f ´(x) = 0

6. Identtisen funktion derivaatta , D(x)
on yksi ts. f(x) = x $\Rightarrow$ f ´(x) = 1

7. Derivaatan arvo EOM:n toisen muodon avulla.
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

2. Funktio f on derivoituva. Mitä on a) $\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ b) $\lim_{h \to 0} \frac{f(3+2h) - f(3)}{h}$ c) $\lim_{h \to 0} \frac{f(3) - f(3-h)}{h}$

2.4. Derivoimissääntöjä

1. $D(x^n)$
$= n \cdot x^{n-1}$

2.4.1. Derivoi a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = x^5$ d) $f(x) = a^6$ e) $f(x) = x^7 \cdot x^8$

2. Kaavan johtaminen
ks. kirja tai vihko. EOM:n osoittaja voidaan jakaa nimittäjällä (x - a)

3. $D(f + g)$
$= D(f) + D(g)$

2. Derivoi a) $f(x) = x^{10} + x^9 + 8$ b) $f(x) = x^{100} - x^{99}$ c) $f(x) = x^2(x^3 + x^4)$

4. $D(k \cdot f)$
$= k \cdot D(f)$

3. Derivoi a) $f(x) = 3x^2$ b) $f(x) = 4x^3$ c) $f(x) = -6x^5$ d) $f(x) = -½x^6$ e) $f(x) = x^7 / 8$ f) $f(x) = 2x^5 \cdot 4x^3$

5. Derivoimistapa
Laitetaan funktio polynomimuotoon suorittamalla kerto - tai jakolasku tai potenssiinkorotus
Derivoidaan sitten jokaista polynomin termiä erikseen kuten kohdassa 2.4.4.

4. Derivoi a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ b) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{x^6}{3}$ c) $f(x) = (2x - 3)(x^2 - 3x + 4)$

6. Derivaatan arvojen laskeminen
Sijoitetaan derivaatan lausekkeeseen x:n paikalle se kohta, jossa derivaatan arvo on laskettava.

5. Laske $f'(-2)$, kun a) $f(x) = 2x + 3$ b) $f(x) = 3x^2 - 4x - 5$ c) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 5$

7. Tarkistus laskimella onko derivointi mennyt oikein
Laske derivoimalla saamasi derivaattafunktion arvo parissa kohdassa
Laske laskimella derivaatan arvot samoissa kohdissa.
Jos näin saadut arvot ovat yhtä suuret, on todennäköistä, että derivointi on oikein suoritettu

8. Derivaatasta saatavan yhtälön ratkaiseminen
Sijoita ratkaistavaan yhtälöön $f'(x)$:n paikalle derivaatan lauseke ja ratkaise näin saatu yhtälö

6. Ratkaise yhtälö $f'(x) = 5$, kun a) $f(x) = x^2 - 3x + 4$ b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$
7. Mitkä ovat funktion $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ derivaatan nollakohdat?

9. Derivaatasta saatavan epäyhtälön laskeminen
Sijoita ratkaistavaan epäyhtälöön $f'(x)$:n paikalle derivaatan lauseke ja ratkaise näin saatu epäyhtälö.

8. Millä x:n arvoilla funktion $f(x) = -3x^2 - 6x + 7$ derivaatta on positiivinen?
9. Ratkaise epäyhtälö $f'(x) < f(x)$, kun $f(x) = x^2 + 2x - 7$

10. Kirjainmuuttujien arvojen selvittämistä derivaattatiedoista
Tee annetusta tiedosta yhtälö kirjainmuuttujan arvon ratkaisemiseksi.

10. Määritä a, kun $f'(2) = 6$ ja $f(x) = x^3 - ax^2 + x - 3$
11. Määritä a ja b, kun funktiolle $f(x) = ax^2 + bx + 1$ pätee $f(1) = 0$ ja $f'(1) = 1$

11. Raja-arvojen laskemista derivaattojen avulla
Yritä saada lauseke jonkin funktion EOM:ksi.
Raja-arvo on tällöin kyseisen funktion derivaatan arvo siinä kohdassa jota x lähestyy.

12. Laske a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^{20}-1}{x-1}$ b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^{200}-1}{x-1}$ c) $\lim_{x\to -1}\frac{x^{200}-1}{x-1}$

2.5. Käyrän pisteeseen piirretty tangentti ja normaali

1. Tangentin kulmakerroin, kun tunnetaan sivuamispiste (x_0,y_0)
$k_T = f'(x_0)$ eli tangentin kulmakerroin on derivaatan arvo sivuamispisteen x-koordinaatin kohdalla

2.5.1. Mikä on käyrän $y = x^2 - 3x + 4$ kohtaan $x = 5$ piirretyn tangentin kulmakerroin?

2. Mikä on käyrän $y = x^3 - 2x^2 + 3x$ pisteeseen (-1,-6) piirretyn tangentin kulmakerroin?
3. Mihin käyrän $y = 2x^2 - 3x + 1$ kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin on 5?

2. Tangentin yhtälön laskeminen, kun tunnetaan sivuamispiste Lasketaan kulmakerroin tiedosta $k_T = f\,'(x_0)$ ja tangenttisuoran yhtälö kaavalla $y - y_0 = k_T(x - x_0)$

4. Mikä on käyrän $y = x^2 + 2x - 3$ pisteeseen (2,5) piirretyn tangentin yhtälö?
5. Mikä on käyrän $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ kohtaan $x = -1$ piirretyn tangentin yhtälö?

3. Normaalin yhtälön laskeminen, kun tunnetaan normaalin ja käyrän leikkauspiste Lasketaan ensin tangentin kulmakerroin $k_T = f\,'(x_0)$ Normaalin kulmakerroin on tämän käänteisluvun vastaluku $k_N = -1 / k_T$ Yhtälö muodostetaan sitten pisteestä ja saadusta kulmakertoimesta

6. Mikä on käyrän $y = 2x^2 - 3x - 4$ kohtaan $x = 2$ piirretyn normaalin yhtälö?
7. Mikä on käyrän $y = x^2 - 3x - 2$ sen normaalin yhtälö, joka leikkaa käyrän korkeudella 2?

4. Paraabelin huipun x-koordinaatin laskeminen derivaatalla Huipussa tangentti on vaakasuora eli $k_T = 0$ Ratkaistaan yhtälö $y\,' = 0$, josta saadaan huipun x-koordinaatti

8. Laske paraabelin a) $y = x^2 - 4x + 7$ b) $y = x^2 + 6x +4$ c) $y = 2x^2 - 3x + 4$ huipun x-koordinaatti.
9. Mikä on a, kun paraabelin $y = ax^2 - 4x + 5$ huippu on kohdalla $x = 4$?

5. Huipun y-koordinaatin laskeminen Huipun y-koordinaatti saadaan sijoittamalla huipun x-koordinaatti paraabelin yhtälöön.

10. Laske paraabelin a) $y = x^2 - 4x + 5$ b) $y = 2x^2 - 3x + 4$ c) $y = 3x^2 - 4x - 5$ huipun koordinaatit
11. Mikä on a, kun paraabelin $y = x^2 - 2x + a$ huippu on korkeudella 3?
12. Määritä a ja b, kun paraabelin $y = x^2 + ax + b$ huippu on pisteessä (-1,2)

6. Tangentin yhtälön laskeminen, kun tunnetaan tangentin suunta Tehdään yhtälö $f\,'(x) = k_T$, josta ratkaisemalla saadaan sivuamispisteen x-koordinaatti Sivuamispisteen y-koordinaatti saadaan sijoittamalla x-koordinaatti käyrän yhtälöön. Tangentin yhtälö saadaan laskemalla suoran yhtälö pisteestä ja kulmakertoimesta.

13. Mikä on paraabelin $y = x^2 - 3x + 4$ sen tangentin yhtälö, joka on suoran $y = x$ suuntainen?
14. Mikä on käyrän $y = x^3 - 3x^2 - 4x + 5$ sen tangentin yhtälö, joka on suoran $y = 5x$ suuntainen

7. Tangentti käyrän ulkopuolisen pisteen kautta Oletetaan, että sivuamispisteen x-koordinaatti on x_0 ja lasketaan y_0 käyrän yhtälöstä x_0:n avulla lausuttuna Lasketaan tangentin kulmakerroin yhdellä tapaa derivaatasta $f\,'(x_0)$ x_0:n lausekkeena Lasketaan tangentin kulmakerroin toisella tapaa annetun pisteen ja sivuamispisteen avulla $\Delta y / \Delta x$ Merkitään nämä kulmakertoimet yhtä suuriksi ja lasketaan saadusta yhtälöstä sivuamispisteen x ($= x_0$) Tämän jälkeen saadaan kulmakerroin ja tangentin yhtälö

15. Mikä on paraabelin $y = x^2 + 1$ sen tangentin yhtälö, joka kulkee origon kautta?
16. Mikä on paraabelin $y = x^2 - 2x + 2$ sen tangentin yhtälö, joka kulkee pisteen (0,1) kautta?

2.6. Korkeamman kertaluvun derivaatat

1. Toinen derivaatta on ensimmäisen derivaatan derivaatta

2. Toisen derivaatan laskeminen Derivoidaan ensin funktio ja derivoidaan sitten näin saatu derivaattafunktio

2.6.1. Laske funktion toinen derivaatta a) $f(x) = 2x^2 - 3x$ b) $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 6x^2$ c) $f(x) = 3x - 4$

3. Korkeampien derivaattojen laskeminen Tietyn kertaluvun derivaatta on aina edellisen kertaluvun derivaatan derivaatta.

2. Laske $f^{(3)}$, $f^{(4)}$ ja $f^{(5)}$, kun $f(x) = x^6 - 7x^5 - 8x^4 + 9x^3 + 10x^2 + 11x - 12$

4. Ensimmäisen derivaatan fysikaalinen merkitys Ensimmäinen derivaatta tarkoittaa hetkellisestä vauhtia (tai hetkellistä muutosvauhtia)

5. Toisen derivaatan fysikaalinen merkitys
Toinen derivaatta tarkoittaa hetkellistä kiihtyvyyttä.

6. Nopeus, kun tunnetaan liikkeestä s(t)
v(t) = s ´(t)

3. Kappaleen sijainnin ilmoittaa funktio $s(t) = 3t^2 - 4t$. Mikä on vauhti hetkellä a) 3 b) t?
4. Kappaleen vauhti on v(t) = 2t + 3 ja sijainti alkuhetkellä origossa. Mikä on sijainnin lauseke?

7. Kiihtyvyys, kun tunnetaan liikkeestä s(t)
a(t) = s ´´ (t)

5. Kappaleen sijainnin ilmoittaa funktio $s(t) = 6t - 5t^2$. Mikä on kappaleen kiihtyvyys?
6. Kappaleen kiihtyvyys on 10 (m/s^2), alkuvauhti nolla ja sijainti alussa origossa. Mikä on kappaleen vauhtia kuvaava funktio ja kappaleen sijaintia kuvaava funktio?

8. Toisen derivaatan eri esitystavat

7. Ilmoita neljä tapaa merkitä funktion f(x) toisen derivaatan lauseketta.

2.7. Toispuoliset derivaatat.

1. Oikean ja vasemman puoleinen derivaatta kohdassa x = a

oikean puoleinen derivaatta on $f_+'(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

vasemman puoleinen derivaatta on $f_-'(a) = \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

2. Derivoituvuus ja jatkuvuus
Jos funktio on derivoituva, niin se on myös jatkuva.
Jos funktio on oikealta derivoituva, niin se on myös oikealta jatkuva.

3. Derivoituvuus ja jatkuvuus toisin
Jos funktio ei ole jatkuva, niin se ei ole derivoituva
Jos funktio ei ole oikealta jatkuva, niin se ei ole oikealta derivoituva.

4. Toispuolisten derivaattojen laskeminen määritelmää käyttäen
Tutkitaan ensin, onko funktio ko. puolelta jatkuva.
Jos funktio ei ole jatkuva siltä puolelta, niin sillä ei ole myöskään sen puoleista derivaattaa ja lasku loppuu
Jos funktio on jatkuva, niin lasketaan derivaatta määritelmän (kohta 2.7.1.) mukaisesti EOM:n raja-arvona.

2.7.1. Laske $f_+'(1)$ ja $f_-'(1)$, kun a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 1 \\ 2x + 3, & x > 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x^2, & x \le 1 \\ 4 - 3x, & x > 1 \end{cases}$

5. Lause toispuolisten derivaattojen laskemiseen ko. puolen derivaattafunktiosta
Jos funktio f(x) on 1° oikealta jatkuva kun $x \ge a$ ja 2° derivoituva kun $x > a$, niin $f_+'(a) = \lim_{x \to a+} f'(x)$

6. Toispuolisten derivaattojen laskeminen eo. lausetta hyväksi käyttäen
Lasketaan funktion arvo ja ko. puolen raja-arvo. Jos ne ovat samat, voidaan laskua jatkaa.(koska on jatkuva)
Lasketaan derivaattafunktio kohdan halutulla puolella.
Lasketaan tämän derivaattafunktion raja-arvo, kun x lähestyy ko. rajaa.

2. Laske $f_+'(-1)$ ja $f_-'(-1)$, kun a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \le -1 \\ 4x + 5, & x > -1 \end{cases}$ b) $f(x) = | 3x^2 - 3 |$

7. Varsinainen derivaatta ja toispuoleiset derivaatat
Varsinainen derivaatta kohdassa x = a on olemassa jos ja vain jos oikean ja vasemman puoleinen derivaatta on olemassa tällä kohtaa ja ne ovat arvoltaan yhtä suuret. ts. $f_+'(a) = f_-'(a) = A \Leftrightarrow f'(a) = A$

3. Tutki funktion derivoituvuutta kohdassa x = 2, kun a) $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 - 3, & x \le 2 \\ 2x^2 - 7, & x > 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 4, & x \le 2 \\ x^3 - 4x + 6, & x > 2 \end{cases}$

8. Vakioiden määrittelyä, jotta paloittain määritelty funktio olisi derivoituva liitoskohdassa.
Yksi ehto vakioille saadaan siitä, että funktion on oltava jatkuva liitoskohdassa.
Toinen ehto saadaan siitä, että oikean ja vasemman puoleiset derivaatat on oltava yhtä suuret.

4. Määritä vakiot a ja b siten, että funktio $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & x \le -1 \\ ax + 3, & x > -1 \end{cases}$ on kaikkialla derivoituva.

3. Funktion monotonisuus

3.1. Funktion kasvu ja väheneminen

1. Kasvava ja vähenevä funktio
Funktio f on kasvava, jos kaikilla $x_1, x_2 \in$ Mj pätee $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$. Joskus tämä on ”ei-vähenevä”
Funktio f on aidosti kasvava, jos kaikilla $x_1, x_2 \in$ Mj pätee $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
Funktio f on vähenevä, jos kaikilla $x_1, x_2 \in$ Mj pätee $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$. Joskus tämä on ”ei-kasvava”
Funktio f on aidosti vähenevä, jos kaikilla $x_1, x_2 \in$ Mj pätee $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

2. (Aidosti) Kasvavan funktion arvojen ja vastaavien muuttujien yhteys
Aidosti kasvavalle funktiolle pätee $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

3.1.1. Funktio f on aidosti kasvava. Kumpi on suurempi f(-1) vai f(-2)?
2. Kumpi arvoista f(1,23456789012) vai f(1,23456789013) on suurempi, kun $f(x) = -2x^2 + 5x + 6$?
3. Funktio f on kasvava ja f(a) < f(b). Mikä on lukujen a ja b järjestys?

3. (Aidosti) Vähenevän funktion arvojen ja vastaavien muuttujien yhteys
(Aidosti) vähenevälle funktiolle pätee $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

4. Funktio f on aidosti vähenevä. Kumpi on suurempi f(2) vai f(3)?
5. Kumpi arvoista f(-0,754321098765) vai f(-0,754321098766) on suurempi, kun $f(x) = 6x^2 + 9x + 1$?
6. Funktio f on vähenevä ja f(a) < f(2). Millainen luku a on?

4. Monotoniseen funktioon liittyvän epäyhtälön ratkaiseminen
Tehdään muuttujien välinen epäyhtälö kohdan 3.1.2 tai 3.1.3 mukaisesti ja ratkaistaan tämä.

7. Ratkaise epäyhtälö $f(2x + 3) < f(x^2)$, kun f on aidosti kasvava funktio.
8. Millä x:n arvoilla toteutuu epäyhtälö f(x) > f(1 - x), kun f on aidosti vähenevä funktio?

5. Monotoniseen funktioon liittyvän epäyhtälön ratkaiseminen, kun funktiolla on tietty määrittelyjoukko.
Ratkaisujoukkoon kuuluvat vain ne x:t, jotka toteuttavat epäyhtälön JA kuuluvat määrittelyjoukkoon

9. Aidosti vähenevä funktio f on määritelty joukossa R_+. Ratkaise epäyhtälö f(2x - 3) > f(x).

6. Monotoniseen funktioon liittyvän yhtälön ratkaiseminen
Jos funktio on kasvava tai vähenevä, niin $x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

10. Funktio f on aidosti kasvava. Ratkaise yhtälö f(3x - 4) = f(5x + 6)

7. Monotoniseen funktioon liittyvän yhtälön ratkaiseminen, kun funktiolla on tietty määrittelyjoukko.
Ratkaisuksi kelpaavat vain ne x:t, jotka toteuttavat yhtälön JA jotka kuuluvat määrittelyjoukkoon.

11. Funktio f on määritelty R_+:ssa ja aidosti vähenevä. Ratkaise yhtälö $f(x^2 - 2) = f(x)$.

8. Funktion monotonisuuden laatu derivaatan avulla
Derivoituva funktio on aidosti kasvava, kun $f'(x) > 0$ ja aidosti vähenevä, kun $f'(x) < 0$

12. Mikä on funktion a) $f(x) = x^2 - 3x + 4$ b) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x$ monotonisuuden laatu kohdassa x = 1?
13. Mikä tulisi vakion a arvon olla, jotta funktio $f(x) = x^2 + ax + 3$ olisi kasvava kohdassa x = 2?

9. Monotonisuuden laatu tarkemmin
Derivoituva funktio on aidosti kasvava, kun $f'(x) \ge 0$ ja $f'(x) = 0$ vain yksittäisissä kohdissa
ja funktio on aidosti vähenevä, kun $f'(x) \le 0$ ja $f'(x) = 0$ vain yksittäisessä kohdissa.

14. Millä välillä funktio a) $f(x) = x^2 - 3x + 4$ b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ on aidostivähenevä?
15. Millä a:n arvoilla funktio $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + 4$ on kaikkialla aidosti kasvava?
16. Milloin funktio a) $f(x) = x^4 - 4x^3$ on vähenevä b) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ on kasvava?

10. Monotonisuuden tutkiminen tarkastelemalla erotusta $f(x_2) - f(x_1)$
Sievennetään erotusta ja jos ehdolla $(x_2 - x_1) > 0$ se on aina positiivinen on funktio kasvava

17. Osoita, että funktio a) $f(x) = 2x + 3$ b) $f(x) = x^2 + 3$, $x > 0$, on kasvava.

11. Monotonisuuden tutkiminen tekemällä yhtäpitäviä epäyhtälöitä
Lähdetään epäyhtälöstä $f(x_1) < f(x_2)$ ja tehdään sen kanssa yhtäpitäviä epäyhtälöitä.
Jos päästään epäyhtälöön $x_1 < x_2$, on funktio kasvava

18. Osoita, että funktio a) $f(x) = -3x + 2$ b) $f(x) = 4 - 5x^3$ on vähenevä.

4. Ääriarvot

4.1. Paikalliset ääriarvot

1. Milloin funktion arvo on minimiarvo?
$f(x_0)$ on funktion minimiarvo, jos kohdalla x_0 on sellainen ympäristö, että sen kaikilla x pätee $f(x) \geq f(x_0)$

2. Milloin funktion arvo on maksimiarvo?
$f(x_0)$ on funktion maksimiarvo, jos kohdalla x_0 on sellainen ympäristö, että sen kaikilla x pätee $f(x) \leq f(x_0)$

3. Ääriarvokohtien mahdolliset paikat
1° Derivaatan nollakohta 2° alueen reuna 3° funktion epäjatkuvuuskohta 4° derivaatan epäjatkuvuuskohta

4. Lause ääriarvojen laadusta.
Olkoon funktio f 1° JATKUVA kohdassa x_0 ja 2° DERIVOITUVA eräässä x_0:n ympäristössä tätä kohtaa mahdollisesti lukuunottamatta (funktion derivaatta voi olla nolla x_0:ssa tai funktio ei ole derivoituva x_0:ssa) ja
3° Jos derivaatan merkit muuttuu - → +, niin x_0 on minimikohta
3° Jos derivaatan merkit muuttuu + → -, niin x_0 on maksimikohta
3° Jos derivaatan merkki ei muutu, niin x_0:ssa ei ole ääriarvoa.

5. Ääriarvon tutkiminen derivaatan nollakohdassa
1° Mainitse että funktio on JVA ja DVA sekä ei ole reunoja
2° Derivoi
3° Laske derivaatan nollakohdat ratkaisemalla yhtälö $f'(x) = 0$
4° Laske derivaatan merkit (derivaattafunktion kuvaajan muodon perusteella)
5° Laita taulukkoon derivaatan merkit ja hahmota derivaatan merkkien avulla funktion kulku.
6° Päättele kuvaajan perusteella ääriarvon laatu
7° Anna vastaus

4.1.1. Laske funktion $f(x) = x^2 - 10x - 11$ ääriarvo.
2. Mitkä ovat funktion $f(x) = x^3 - 3x^2$ ääriarvot?
3. Määritä funktion $f(x) = x^4 - 4x^3$ ääriarvo.

6. Ääriarvon tutkiminen alueen reunalla
Katsotaan ensin kuuluuko reuna määrittelyjoukkoon (jos ei, niin ei ole ääriarvoakaan reunalla)
Derivaatan merkeistä päätellään kuinka funktio lähtee/saapuu reunalle ja tämän perusteella ääriarvon laatu

4. Laske funktion $f(x) = x^2 - 6x + 5$ ääriarvot välillä [0,4].
5. Määritä funktion $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ääriarvot välillä [0,3]

7. Ääriarvon tutkiminen funktion tai derivaatan epäjatkuvuuskohdassa
Funktion epäjatkuvuuskohdissa lasketaan funktion arvo ja raja-arvot molemmilta puolilta.
Derivaatan merkkien avulla tehdään funktion kulkukaavio, josta päätellään ääriarvo.

6. Mitkä ovat funktion $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 5 \text{ , kun } x < 0 \\ x^2 - 2x - 3 \text{ , kun } x \geq 0 \end{cases}$ ääriarvot?
7. Määritä funktion $f(x) = x^2 - |4x - 4|$ ääriarvot.

8. Kirjainvakioiden arvon määrittämistä ääriarvotiedoista
Tehdään yhtälö ääriarvotiedon perusteella, josta ratkaistaan kirjainvakion arvo.

8. Mikä on a, kun funktion $f(x) = x^2 - 8x + a$ minimiarvo on 8?
9. Millä a:n arvolla funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ minimiarvo on 4?
10. Määritä vakiot a ja b, kun funktion $f(x) = -x^2 + ax + b$ maksimipiste on (3,4).

4.2. Jatkuvan funktion nollakohdat

1. Lause, joka takaa funktion nollakohdan olemassaolon
Jos 1° jatkuva funktio saa 2° erimerkkiset arvot kohdilla $x = a$ ja $x = b$, niin funktiolla on nollakohta välillä $]a,b[$

2. Osoitus, että funktiolla on ainakin yksi nollakohta
Osoita, että funktio on jatkuva ja saa erimerkkiset arvot välin päätepisteissä. Jos päätepisteitä ei ole annettu, yritä löytää sopivat x:t päätepisteiksi.

4.2.1. Osoita, että funktiolla $f(x) = x^3 - x - 1$ on ainakin yksi nollakohta välillä [1,2]
2. Osoita, että funktiolla $f(x) = x^5 - 3x^4 + 1$ on ainakin yksi nollakohta.
3. Osoita, että funktiolla $f(x) = x^4 - x^3 - 1$ on ainakin kaksi reaalista nollakohtaa.

3. Nollakohdan likiarvon määrittäminen halutulla tarkkuudella
Haarukoi päätepisteiden x:ien väliä pienemmäksi niin kauan, että saat pyöristyksen haluttuun tarkkuuteen.

4. Osoita, että funktiolla $f(x) = x^3 - x - 1$ on positiivinen nollakohta. Määritä se 0,001 tarkkuudella.
5. Määritä funktion $f(x) = x^3 - x^2 - 10$ nollakohta 0,01 tarkkuudella.

4. Osoitus, että funktiolla on täsmälleen yksi nollakohta
A. On oltava ainakin yksi nollakohta, eli f on jatkuva ja saa erimerkkiset arvot. B. Nollakohtia on täsmälleen yksi, jos vielä funktio on aidosti monotoninen.

6. Osoita, että funktiolla $f(x) = x^3 + 2x - 6$ on täsmälleen yksi nollakohta.
7. Osoita, että funktiolla $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3$ on täsmälleen yksi nollakohta ja määritä se 0,01 tarkkuudella.

5. Osoitus, että yhtälöllä on ainakin/täsmälleen yksi ratkaisu
Siirrä termit yhtälön samalle puolelle ja tutki tämän puolen määrittelemän funktion nollakohtia.

8. Osoita, että yhtälöllä $x^5 = x + 3$ on ainakin yksi reaalinen ratkaisu.
9. Osoita, että yhtälöllä $x^3 = x^2 + 5$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

4.3. Funktion suurin ja pienin arvo

1. Määritelmä funktion suurimmalle/pienimmälle arvolle
$f(x_0)$ on funktion suurin arvo, jos kaikilla määrittelyjoukon x:illä on voimassa $f(x) \leq f(x_0)$

2. Milloin funktiolla on varmasti suurin ja pienin arvo
Jos funktio on jatkuva suljetulla välillä, niin sillä on suurin arvo tällä välillä.

3. Määritys, kun funktio on jatkuva suljetulla välillä
Totea, että funktio on jatkuva suljetulla välillä. Laske kaikki mahdolliset ääriarvokohdat, 1° f ´:n nollakohdat, 2° reunat 3° f ´: n epäjatkuvuuskohdat. Laske funktion arvo kaikissa näissä kohdissa. Näistä suurin on funktion suurin arvo.

4.3.1. Laske funktion $f(x) = x^3 - 3x - 5$ suurin ja pienin arvo välillä [0,3].
2. Laske funktion $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ suurin ja pienin arvo välillä [0,2]
3. Laske funktion $f(x) = x^2 - 2\cdot|x| - 1$ suurin ja pienin arvo välillä [-2,3]

4. Määritys muissa tilanteissa
Lasketaan derivaatan nollakohdat ja merkit (sekä mahdolliset funktion ja derivaatan epäjatkuvuuskohdat). Hahmotellaan taulukossa funktion kulku, josta päätellään missä suurin/pienin arvo voi olla. Lasketaan arvot mahdollisissa kohdissa ja kenties raja-arvo lähestyttäessä reunaa. Näistä tehdään lopullinen päätelmä, mikä on suurin/pienin arvo

4. Mikä on funktion $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ pienin arvo?
5. Määritä funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 3$ pienin arvo , kun $x > -3$.

5. Kahden muuttujan funktion suurin/pienin arvo jollakin viivalla
Sijoitetaan viivan y (x:n avulla laskettuna) kahden muuttujan funktioon y:n paikalle. Näin saadaan yhden muuttujan x funktio, jonka suurin/pienin arvo lasketaan tilanteeseen sopivalla tavalla.

6. Mikä on lausekkeen $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$ suurin ja pienin arvo janalla $y = x + 1$, $x \in [0,3]$?

6. Kahden muuttujan funktion suurin/pienin arvo koko tasossa
Yritetään saada lauseke muotoon $(\ )^2 + (\ )^2$ + vakio.
Tarkastetaan löytyykö sellaista paria (x,y), jolla molemmat neliön kantaluvut ovat yhtä aikaa nollia.
Tällöin lausekkeen pienin arvo on 0 + 0 + vakio = vakio

7. Mikä on lausekkeen $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3$ pienin arvo koko xy-tasossa, ja missä pisteessä tämä saadaan?

5. Tulon ja osamäärän derivaatta

5.1. Tulon derivaatta

1. Kahden funktion tulon derivaatta $D(f \cdot g)$
$= f' \cdot g + f \cdot g'$ (eli ensimmäisen derivaatta kertaa toinen plus ensimmäinen kertaa toisen derivaatta)

5.1.1. Derivoi funktio $f(x) = x^4 \cdot x^5$ a) tulon derivoimissäännöllä b) muuttamalla se ensin potenssiksi.
2. Olkoon f(1) = 2, g(1) = 3, f ´(1) = 4 ja g ´(1) = 5. Laske F ´(1), kun $F(x) = f(x) \cdot g(x)$.

2. Kolmen funktion tulon derivaatta $D(f \cdot g \cdot h)$
$= f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$ (eli derivoidaan vuorotellen yksi tekijä muiden pysyessä samana, kaikki tulot yhteen)

3. Derivoi funktio $f(x) = x^6 \cdot x^7 \cdot x^8$ a) tulon derivoimissäännöllä b) muuttamalla se ensin potenssiksi.

5.2. Funktion potenssin derivaatta

1. Derivoimissääntö $D[(f)^n]$
$= n \cdot (f)^{n-1} \cdot f'$

5.2.1. Derivoi a) $f(x) = (x + 1)^2$ b) $f(x) = (2x + 3)^4$ c) $(5 + 4x - x^2)^3$
2. Derivoi $f(x) = (2x + 3)^3 \cdot (3x + 2)^4$

2. Derivoimissääntö neliöjuurifunktiolle $f(x) = \sqrt{x}$
$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3. Derivoi a) $f(x) = \sqrt{x} + x$ b) $f(x) = \sqrt{x} \cdot x^3$ c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (2x + 3)^2$
4. Laske f ´(4), kun $f(x) = \sqrt{x}\,(\tfrac{1}{2}x - 1)^2$

5.3. Osamäärän derivaatta

1. Derivoimissääntö $D(\dfrac{f}{g})$
$= \dfrac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$
(eli osoittajan derivaatta kertaa nimittäjä - nimittäjän derivaatta kertaa osoittaja per nimittäjä toiseen)

5.3.1. Derivoi a) $f(x) = \dfrac{3x - 4}{5x + 6}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{2x + 3}$ c) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 3x + 4}$ d) $f(x) = (\dfrac{x}{x^2 + 1})^3$ e) $f(x) = (\dfrac{\sqrt{x}}{4x + 3})^2$

5.4. Potenssin derivaatta, kun eksponenttina on negatiivinen kokonaisluku

1. Derivoimissääntö $D(x^{-n})$
$= -n \cdot x^{-n-1}$

5.4.1. Derivoi a) $f(x) = x^{-2} + x^{-3}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{2}{x^5} - \dfrac{3}{x^6}$

2. Laske f ´(2) , kun $f(x) = \dfrac{3x - 4}{x^2}$

6. Murtofunktio

6.1. Murtofunktion nollakohdat ja asymptootit

1. Asymptootti
on suora (tai muu viiva esim. paraabeli), jota funktion kuvaajan pisteet tulevat sitä lähemmäksi, mitä kauemmaksi x- tai y-akselin suunnassa mennään.

2. Pystysuora asymptootti
on pystysuora suora, jota funktion kuvaajan pisteet lähestyvät, kun $y \to \pm \infty$

3. Pystysuoran asymptootin yhtälön laskeminen
Yhtälö on : y = nimittäjän nollakohta,
sillä edellytyksellä ettei nimittäjän nollakohta ole ainakin yhtämonikertainen osoittajan nollakohta

6.1.1. Laske funktion a) $f(x) = \frac{x}{x - 1}$ b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ c) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 1}$ pystysuorat asymptootit.

2. Laske käyrän a) $y = \frac{x - 1}{x}$ b) $y = \frac{2x}{2x^2 - 3x + 1}$ c) $y = \frac{2x - 1}{2x^2 - 3x + 1}$ pystysuorat asymptootit.

4. Vaakasuora asymptootti
on vaakasuora suora, jota funktion kuvaajan pisteet lähestyvät, kun $x \to \pm \infty$

5. Vino asymptootti
on vino suora, jota funktion kuvaajan pisteet lähestyvät, kun $x \to \pm \infty$

6. Vaakasuoran ja vinon asymptootin laskeminen
Jaetaan osoittaja nimittäjällä. Asymptootin yhtälö on: y = vaillinainen osamäärä

3. Laske funktion a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ b) $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$ c) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$ vaakasuorat tai vinot asymptootit.

4. Määritä käyrän a) $y = \frac{2x + 3}{x + 1}$ b) $y = \frac{2x^2 + 3x}{x + 1}$ c) $y = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ asymptootit.

7. Milloin murtofunktiolla on x-akseli, vaakasuora suora, vino suora tai käyräviivainen asymptootti
Asymptoottina on x-akseli, jos osoittaja on alempaa astetta kuin nimittäjä
Asymptoottina on vaakasuora suora (muu kuin x-akseli), kun osoittaja ja nimittäjä ovat samaa astetta
Asymptoottina on vino suora, kun osoittaja on yhtä astetta korkeampi kuin nimittäjä
Asymptoottina on paraabeli, kun osoittaja on kahta astetta korkeampi kuin nimittäjä

5. Millainen asymptootti on käyrällä a) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ b) $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ c) $y = \frac{x^4}{x^2 + 1}$

6.2. Murtofunktion kulun tutkiminen

1. Kuvaajan mielenkiintoisten ominaisuuksien selvittäminen
Mielenkiintoisia kohtia murtofunktion kuvaajalla on y-akselin leikkauspiste, nollakohdat, asymptootit ja ääriarvopisteet

6.2.1. Määritä käyrän $y = \frac{x^2}{x - 1}$ ja akselien leikkauspisteet, asymptootit ja ääriarvopisteet.

2. Laske käyrän $y = \frac{x^2 - 4}{2x - 5}$ ja akselien leikkauspisteet, asymptootit ja ääriarvopisteet.

2. Kuvaajan piirtäminen
Laske y-akselin leikkauspiste, nollakohdat, asymptootit ja ääriarvopisteet sekä muutama muu tarpeelliseksi katsomasi piste.
Ääriarvo laatua varten laskemastasi funktion kulun hahmotelmasta näet kuvaajan suurin piirtein.
Piirrä näiden perusteella murtofunktion kuvaaja.

3. Piirrä käyrä a) $y = \frac{x^2}{2x + 2}$ b) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$

7. Ääriarvoprobleemoja

1. Ääriarvoprobleeman ratkaisemistapa
Lue tehtävä ja piirrä mahdollinen kuvio
Mieti aluksi mikä on maksimoitava suure (tavoitteena on saada tälle suureelle funktio)
Valitse jokin tämän suureen arvoon vaikuttava suure x:ksi.
Lausu muut funktion muodostamiseen vaikuttavat suureet x:n ja annettujen lukujen avulla
Muodosta funktio maksimoitavalle suureelle
Mieti (tai laske) x:ien vaihteluväli
Laske maksimoitavan funktion suurin arvo tällä välillä
Pohdi vastauksen järkevyyttä ja anna vastaus.

7.1. Suorakulmion muotoiseen aitaukseen on käytössä aitaa 600 m. Mikä on suurimman tällaisen aitauksen pinta-ala?
2. Suorakulmion muotoiseen aitaukseen on käytössä aitaa 600 m. Mikä on suurimman tällaisen aitauksen pinta-ala, kun aitaa tarvitsee rakentaa vain kolmelle sivulle?
3. Suorakulmion muotoiseen aitaukseen on käytössä aitaa 600 m. Mikä on suurimman tällaisen aitauksen pinta-ala, kun kolmelle sivulle tulee rakentaa kaksinkertainen aitaus ja neljännelle yksinkertainen aitaus?
4. Kolmion kanta on 60 cm ja korkeus 30 cm. Sen sisään piirretään suorakulmio siten, että yksi sivu on kannalla ja kaksi muuta kärkeä muilla sivuilla. Mikä on suurimman suorakulmion pinta-ala?
5. Suorakulmion yksi sivu on x-akselilla ja kaksi kärkeä paraabelilla $y = 9 - x^2$ x-akselin yläpuolella. Mikä on suurimman tällaisen suorakulmion pinta-ala?
6. Luokkalehteä saadaan myydyksi 10 mk:n hinnalla 100 kappaletta. Jokainen markan hinnannousu vähentää myyntiä 5 kappaletta. Millä hinnalla lehdistä saadaan suurin summa rahaa?
7. Mikä on positiivisen luvun ja sen käänteisluvun summan pienin mahdollinen arvo?
8. Suorakulmion muotoisen laitumen ala on 100 m^2. Miten paljon aitaa vähintään tarvitaan?
9. Isolta laitumelta erotetaan sen aidan vierestä 100 m^2 suuruinen alue, jolloin aitaa tarvitaan vain kolmelle sivulle. Mikä on aidan pituuden pienin mahdollinen määrä?

Vastauksia E-tehtäviin.

1.1.1. a) 1 b) 1 c) 1
2. a) 2,302585093.. b) 1
3. korkeintaan 0,002:n päässä
4. vähemmän kuin 0,0005

1.2.1. a) 3 b) 2½
2. a) 1½ b) $\frac{5}{8}$
3. a) ½ b) - $\frac{1}{6}$
4. a) 0 b) - 2 c) 2
5. c = 3 ja lim = $1\frac{2}{3}$ tai c= - $\frac{1}{3}$ ja lim = 15
6. a = 3 , jolloin lim = - 3 tai a = 2 , jolloin lim = 2
7. - 1 tai - 2
8. a = - ½ b = 1½
9. a = - 2 b = - 3

1.3.1. a d) -∞ b c) ∞
2. a - c) ∞ d) -∞ e) 0
3. a) - 1 b) $\frac{1}{5}$ c) - 1¼ c) ¼
4. a) 0 b) -∞ c) ∞ d) 0
5. a) 4 b) -½
6. a) ½ b) 1¼
7. 5, 2, ei ole
8. a = 3
9. on
10. ei

1.4.1. ½
2. a) JVA b) EI JVA
3. a) 5 b) ¼
4. a) x = 2 b) x = 3 , x = - 1 c) ei ole
5. a) $x \neq 0$ ja $x \neq 2$ b) $x \geq 2$ c) $-1 < x < 1$ d) $x \neq \frac{1}{2}\pi + n\pi$
6. ON

1.5.1. S = 5, p = -1, Aj = [-1,5]
2. -2 < x < 1 , x > 3
3. -3 < x < -2 , 0 < x < 2 , x > 3

2.1.1. 3 m/s
2. 1,4 m/s
3. a) 5 b) $\frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$
4. 4

2.2.1. a) -1 b) 1
2. a) 6 b) -12

2.3.1. a) 4x b) 2x + 1
2. a) f ´(3) b) 2·f ´(3) c) f ´(3)

2.4. a) 2x b) $3x^2$ c) $5x^4$ d) 0 e) $15x^{14}$
2. a) $10x^9 + 9x^8$ b) $100x^{99} - 99x^{98}$ c) $5x^4 + 6x^5$
3. a) 6x b) $12x^2$ c) $- 30x^4$ d) $- 3x^5$ e) $\frac{7x^6}{8}$ f) $64x^7$
4. a) 4x - 3 b) $2x^2 - 2x^3 + 2x^5$ c) $6x^2 - 18x + 17$
5. a) 2 b) -16 c) -72
6. a) x = 4 b) x = - 1 , x = $2\frac{1}{3}$
7. ei ole
8. x < - 1
9. x > 3 tai x < - 3
10. a = 1¾
11. a = 2 , b = - 3
12. a) 20 b) 200 c) - 200

2.5.1. 7
2. 10
3. x = 2
4. y = 6x - 7
5. y = 10x
6. x + 5y + 8 = 0
7. x - 5y + 11 = 0 tai x + 5y - 14 = 0
8. a) x = 2 b) x = - 3 c) x = ¾
9. a = ½
10. a) (2,1) b) $(\frac{3}{4}, 2\frac{7}{8})$ c) $(\frac{2}{3}, -6\frac{1}{3})$
11. a = 4
12. a = 2 , b = 3
13. y = x
14. y = 5x + 10 tai y = 5x - 22
15. y = 2x tai y = -2x
16. y = 1 tai y = - 4x + 1

2.6.1. a) 4 b) $36x^2 - 30x + 12$
c) 0
2. $f^{(3)}(x) = 120x^3 - 420x^2 - 192x + 54$, $f^{(4)}(x) = 360x^2 - 840x - 192$, $f^{(5)} = 720x - 840$
3. a) 14 b) 6t - 4
4. $s = t^2 + 3t$
5. -10
6. v = 10t , $s = 5t^2$
7. $f^{(2)}$, D^2f , $\frac{d^2f}{dx^2}$, f ''

2.7.1. a) $f_+'(1)$ ei ole, $f_-'(1) = 2$
b) $f_+'(1) = -3$, $f_-'(1) = -1$
2. a) $f_+'(-1)$ ei ole, $f_-'(-1) = -2$
b) $f_+'(-1) = -6$, $f_-'(-1) = 6$
3. a) $f_+'(2) = f_-'(2) = f'(2) = 8$
b) $f_+'(2)=8$, $f_-'(2)=7$, $f'(2)$ ei ole
4. a = -3 , b = -9

3.1.1. f(-1)
2. f(1,23456789013)
3. $a \le b$
4. f(2)
5. f(-0,754321098766)
6. $a \ge 2$
7. x > 3 tai x < - 1
8. x < ½
9. 1½ < x < 3
10. x = - 5
11. x = 2
12. a) väh. b) kasv.
13. $a \ge -4$
14. a) $x \le 1½$ b) $0 \le x \le 2$
15. $a \ge \frac{4}{3}$
16. a) $x \le 3$ b) $x \ge 1$ tai $x \le -1$

4.1.1. min = f(5) = - 36
2. max=f(0)=0, min=f(2)= -4
3. min = f(3) = - 27
4. max=f(0)=5, max=f(4)=-3, min f(3) = -4
5. max=f(0)=1, max=f(3)=19, min = f(1) = - 1
6. max=f(0)=-3, min=f(-2)=-9 min = f(1) = - 4
7. max=f(1)=1, min=f(2)=0, min = f(-2) = - 8
8. a = 24
9. a = 8
10. a = 6 , b = - 5

4.2.4. $x \approx 1,325$
5. $x \approx 2,54$
7. $x \approx 1,91$

4.3.1. S = 13 , p = -7
2. S = 1 , p = - 2
3. S = 2 , p = - 2
4. p = - 26
5. p = - 1
6. S = 8 , p = 0
7. p = - 2, P(1,2)

5.1.1. $f'(x) = 9x^8$
2. 22
3. $f'(x) = 21x^{20}$

5.2.1. a) $f'(x) = 2(x + 1)$
b) $f'(x) = 8(2x + 3)^3$
c) $f'(x)=3(5 + 4x - x^2)^2(4 - 2x)$
2. $6(2x+3)^2(3x+2)^3(7x+8)$
3. a) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1$ b) $3½x^2\sqrt{x}$
c) $\frac{(2x + 3)(10x + 3)}{2\sqrt{x}}$
4. 2¼

5.3.1. $\frac{38}{(5x + 6)^2}$ b) $\frac{2x(x + 3)}{(2x + 3)^2}$
c) $\frac{-2x^2 + 6x - 1}{(x^2 - 3x + 4)^2}$
d) $\frac{3x^2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^4}$ e) $\frac{3 - 4x}{(4x + 3)^3}$

5.4.1.a) $- 2x^{-3} - 3x^{-4}$
b) $-\frac{4}{x^5} - \frac{10}{x^6} + \frac{18}{x^7}$
2. ¼

6.1.1. a) x = 1 b) x = 1 , x = - 1
c) x = 1
2. a) x = 0 b) x = 1, x = ½
c) x = 1
3. a) y = 0 b) y = x + 1
c) y = 2
4. x = - 1 y = 2
b) x = - 1 , y = 2x + 1 c) y = x
5. a) vaakasuora y = 1
b) vino suora y = x
c) paraabeli $y = x^2 - 1$

6.2.1. (0,0) ; x = 1 , y = x + 1 ; max = (0,0) min = (2,4)
2. (2,0) , (-2,0) , (0; 0,8) x = 2½ , y = ½x + 1¼ max = (1,1) , min = (4,4)
3. a) (0,0) ; x = -1, y = ½x - ½ ; max = (-2,-2) , min = (0,0)
b) (±1,0) , (0,-½) ; y = 1 ; min = (0,-½)

7.1. 2,25 ha
2. 4,5 ha
3. 75 a
4. 4,5 dm^2
5. $12\sqrt{3}$
6. 15 mk
7. p = 2
8. 40 m
9. 28,3 m

Aiempien vuosien koetehtäviä

91.1.1. Laske $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3}{2x^2 - 3x - 2}$ [$\frac{4}{5}$]

91.1.2. Millä x:illä funktio a) $\ln(x^5 + x^4)$ b) $\sqrt[4]{3 - 4x^2}$ on jatkuva? [a) x > - 1 ja $x \ne 0$ b) $-½\sqrt{3} \le x \le ½\sqrt{3}$]

91.1.3. Laske $\lim_{x \to 0} \frac{3 - \sqrt{9 + x^2}}{4x}$ [0]

91.1.4. Millä vakion a arvoilla funktio $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{, kun } x < a \\ 3x^2 - x & \text{, kun } x \ge a \end{cases}$ on jatkuva kohdassa x = a? [a = 1 tai a = $-\frac{1}{3}$]

91.1.5. Laske a) $\lim_{x \to \infty} \frac{4^x - 2 \cdot 3^x}{5 \cdot 4^x + 6 \cdot 3^x}$ b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{4^x - 2 \cdot 3^x}{5 \cdot 4^x + 6 \cdot 3^x}$ [a) $\frac{1}{5}$ b) $-\frac{1}{3}$]

91.1.6. Osoita, että yhtälöllä $\sin x = e^x - x$ on positiivinen ratkaisu. Laske sen likiarvo kahden desimaalin tarkkuudella. [0,35]

91.1.7. Määritä a ja f(2), kun funktio $f(x) = \dfrac{2x^2 - ax + 2}{4x - 8}$ on jatkuva kaikkialla. [a = 5 , f(2) = ¾]

91.2.1. Derivoi a) $x\sqrt{1 - x}$ b) $(x^5 + 7)^{10}$. [a) $\dfrac{2 - 3x}{2\sqrt{1 - x}}$ b) $50x^4(x^5 + 7)^9$]

91.2.2. Määritä funktion $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 + 2}$ derivaatan nollakohdat. [$\pm\sqrt{2}$]

91.2.3. Määritä paraabelin $y = 1 - 2x + 3x^2$ se piste, johon piirretty normaali on suoran $x + y = 9$ suuntainen. [(½,¾)]

91.2.4. Laske paraabelin $y = x^2 - 2x - 3$ ja x-akselin leikkauspisteisiin piirrettyjen tangenttien yhtälöt. [y = 4x - 12 , y = - 4x - 4]

91.2.5. Määritä a ja b, kun $f(x) = ax^2 + bx + 3$, f(1) = 2 ja f ' (2) = 5. [a = 2 , b = - 3]

91.2.6. Pisteestä (1,1) paraabelille $y = x^2 + 1$ piirretään tangentit. Määritä näiden tangenttien yhtälöt. [y = 1 , y = 4x - 3]

91.2.7. Derivoituvalle funktiolle f on voimassa f ' (1) = 10. Määritä raja-arvo $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1-h)}{2h}$ [15]

91.3.1. Millä x:n arvoilla funktio $f(x) = x^3 - 6x$ on kasvava? [$x \le -\sqrt{2}$, $x \ge \sqrt{2}$]

91.3.2. Laske funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$ suurin ja pienin arvo välillä [-2,1]. [S = 17 , p = - 3]

91.3.3. Määritä käyrän $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$ asymptootit ja ääriarvopisteet. [x = 1, y = x + 1; max = (0,0), min = (2,4)]

91.3.4. Osoita, että epäyhtälö $3x^4 - 4x^3 + 1 \ge 0$ on aina tosi.

91.3.5. Määritä funktion $f(x) = x|x - 3| - 5x + 6$ ääriarvot. [max = 7 , min = - 10]

91.3.6. Määritä III asteen polynomifunktio, jonka ääriarvopisteet ovat (-1,20) ja (3,-12). [$x^3 - 3x^2 - 9x + 15$]

91.3.7. Rautalanka, jonka pituus on 34 cm, jaetaan kahteen osaan, joista toisesta tehdään neliö ja toisesta suorakulmio, jonka kanta on kaksi kertaa niin pitkä kuin korkeus. Mikä on neliön ja suorakulmion alojen summan pienin arvo? [34 cm^2]

92.1.1. Määritä vakio a siten, että funktio $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 2 \text{, kun } x < 3 \\ ax^2 + 4x - 5 \text{, kun } x \ge 3 \end{cases}$ on jatkuva kun x = 3. [$a = \dfrac{2}{3}$]

92.1.2. Laske $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2 - 4x + 1}{x^3 - x}$

92.1.3. Millä x:n arvoilla funktio $f(x) = \ln(3 - x^2) + \tan \pi x/2$ on jatkuva?

92.1.4. Osoita, että yhtälöllä $e^x = \cos x + 1$ on positiivinen ja negatiivinen ratkaisu. Määritä positiivinen ratkaisu kolmen desimaalin tarkkuudella.

92.1.5. Mikä on f(-3), kun funktio $f(x) = \dfrac{4x^2 + 7x - 15}{\sqrt{1 - x} - 2}$ on jatkuva kohdassa x = - 3 ?

92.1.6. Määritä väliltä [0,2π] ne x:t, joilla toteutuu epäyhtälö cos 2x < sin x.

92.1.7. Olkoon a ja b positiivisia kokonaislukuja sekä $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}}{a^x-b^x}=2$. Määritä vakiot a ja b.

1. $\lim\limits_{x\to 3-}(x^2+ax+2)$ = 3a + 11 ; $\lim\limits_{x\to 3+}(ax^2+4x-5)$ = 9a + 7 ; f(3) = 9a + 7 ;
jotta jatkuva, on oltava 9a + 7 = 3a + 11 eli **a = 2/3**

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^3-x} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(3x-1)}{x(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-1}{x(x+1)} = \dfrac{3-1}{1(1+1)} = \mathbf{1}$

3. $3 - x^2 > 0$ ja $\frac{1}{2}\pi x \neq \frac{1}{2}\pi + n\cdot\pi \Leftrightarrow |x| < \sqrt{3}$ ja $x \neq 1 + 2n$
$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ ja $x \neq \pm 1$

4. $e^x = \cos x + 1 \Leftrightarrow e^x - \cos x - 1 = 0$ tutkitaan funktioa $f(x) = e^x - \cos x - 1$
f jatkuva ja f(0) = -1 < 0 ja $f(-\pi) = e^{-\pi} > 0 \Rightarrow$ f:llä on ainakin 1 nollakohta välillä $]-\pi,0[$
f jatkuva ja f(0) = -1 < 0 ja $f(\pi) = e^{\pi} > 0 \Rightarrow$ f:llä on ainakin 1 nollakohta välillä $]0,\pi[$
Haarukoimalla f(0,6010) = -0,0008< 0 ja f(0,6015) = 0,0003> 0 siis **x = 0,601**

5. f jatkuva $\Rightarrow$ f(- 3) = $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+7x-15}{\sqrt{1-x}-2} = \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(4x-5)(\sqrt{1-x}+2)}{1-x-4} = \dfrac{-17(2+2)}{-1} = \mathbf{68}$

6. cos 2x < sin x $\Leftrightarrow$ cos 2x - sin x < 0 . Tutkitaan funktioa f(x) = cos 2x - sin x
f on jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa
cos 2x = sin x ; cos 2x = cos (½π - x) ; 2x = ½π - x + n2π tai 2x = x - ½π + n2π
x = π/6 + n·2π/3 tai x = -½π + n2π , joista välillä [0,2π] on π/6 , 5π/6 ja 9π/6
Mikä on funktion merkki, saadaan laskemalla arvo jollakin välillä olevalla x:llä

x	0.2	1,0	3,0	6,0
f(x)	0,72	-1,26	+0,82	+1,12

Vastaus: **π/6 < x < 5π/6**

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}}{a^x-b^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a\cdot a^x+b\cdot b^x}{a^x-b^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a+b\cdot(b/a)^x}{1-(b/a)^x}$ = a , jos b < a
Jos b > a, on raja-arvo negatiivinen eli -b. Jos b = a , on nimittäjä = 0. Nämä mahdottomia
Siis a = 2 ja koska b < a ja positiivinen on sen oltava 1. Vastaus: **a = 2 , b = 1**

92.2.1. Laske paraabelin $y = x^2 - 6x + 8$ huippu. Onko huippu paraabelilla $y = - x^2 + 3x -19$?

92.2.2. Derivoi funktiot ja laske derivaattojen nollakohdat a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{2x + 4}$ b) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x}$

92.2.3. Laske funktion $f(x) = (2x - 3)^3 - 6x$ suurin ja pienin arvo välillä [0,3].

92.2.4. Laske sen kolmion ala, jota rajoittavat käyrälle $y = x^3 - 10x + 15$ kohtaan x = 2 piirretty tangentti ja normaali sekä y-akseli.

92.2.5. Olkoon $f(x) = (ax + 1)^3\cdot(bx - 1)^4$. Määritä vakiot a ja b, kun $f\left(\frac{2}{b}\right) = 27$ ja f ' (0) = 4.

92.2.6. Määritä vakion a arvo , kun suora y = 3a - x sivuaa käyrää $y = x^2 - 5x + a^2$.

92.2.7. Maanviljelijä aitaa köydellä pitkän navetan seinän viereen suorakulmaisen kolmion muotoisen alueen, missä yksi kateetti on osa navetan seinästä. Mikä alueen suurin mahdollinen pinta-ala, kun köyttä on 30 m eikä köyttä tarvita seinän viereen?

1. y ' = 2x - 6 ; y ' = 0 ; 2x - 6 = 0 ; 2x = 6 ; x = 3 ; y = 9 - 18 + 8 = -1 **H = (3,-1)**
Sij. II yhtälöön -1 = -9 + 9 - 19 ; -1 = -19 V: **Ei**

2.a) $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(2x+4) - 2(x^2-3x)}{(2x+4)^2} = \dfrac{4x^2 + 8x - 6x - 12 - 2x^2 + 6x}{(2x+4)^2} = \dfrac{2x^2 + 8x - 12}{(2x+4)^2}$
f ' = 0 $2x^2 + 8x - 12 = 0$; $x^2 + 4x - 6 = 0$; **$x = - 2 \pm \sqrt{10}$**
b) $f'(x) = \dfrac{6x+4}{2\sqrt{3x^2+4x}} = \dfrac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x}}$; f ' (x) = 0 ; 3x + 2 = 0 ; $x = -\dfrac{2}{3}$
Mj: $3x^2 + 4x \geq 0$ eli x > 0 tai $x < -\dfrac{4}{3}$. Vastaus: **Derivaatalla ei ole nollakohtaa**

3. Funktio on jatkuva suljetulla välillä. Se saa suurimman ja pienimmän arvonsa. Tämä tapahtuu jossakin paikallisessa ääriarvokohdassa . Funktio on derivoituva. $f'(x) = 6(2x - 3)^2 - 6$; $f'(x) = 0$; $(2x - 3)^2 = 1$; $2x - 3 = \pm 1$; $x = 2$ tai $x = 1$ $f(0) =$ **- 27 = pienin** ; $f(1) = -7$; $f(2) = -11$; $f(3) =$ **9 = suurin**
4. Piste: $x = 2$; $y = 8 - 20 + 15 = 3$; $P = (2,3)$; $y' = 3x^2 - 10$; $k_T = y'(2) = 2$; $k_N = -½$ Tangentti : $y - 3 = 2(x - 2)$; $y = 2x - 1 \Rightarrow$ y-akselin leikkauspiste on $A = (0,-1)$ Normaali : $y - 3 = -½(x - 2)$; $y = -½x + 4 \Rightarrow$ y-akselin leikkauspiste on $B = (0,4)$ Kanta = AB = $\|-1 - 4\| = 5$; Korkeus = $\|x_P\| = 2$; Ala = $½ \cdot 5 \cdot 2 =$ **5**
5. $f'(x) = 3a(ax + 1)^2(bx - 1)^4 + 4b(ax + 1)^3(bx - 1)^3$ $\begin{cases} f(2/b) = 27 \\ f'(0) = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} (2a/b + 1)^3 = 27 \\ 3a - 4b = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 2a/b + 1 = 3 \\ 3a - 4b = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} a = b \\ 3a - 4b = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} \mathbf{a = -4} \\ \mathbf{b = -4} \end{cases}$
6. $y' = 2x - 5$; $y' = k_S$; $2x - 5 = -1$; $2x = 4$; $x = 2$ Suoran piste : $x = 2$; $y = 3a - 2$; Paraabelin piste : $x = 2$; $y = a^2 - 6$ Pisteet samat : $a^2 - 6 = 3a - 2$; $a^2 - 3a - 4 = 0$; **a = 4** tai **a = -1**
7. Piirretään peilikuva aitauksesta seinän toiselle puolelle. Aitauksen ala on suurin koko ison kolmion ala on suurin. Kun kolmion piiri on vakio, on kolmio alaltaan suurin, kun se on tasasivuinen kolmio. $x + 2x = 30$ $x = 10$; $2x = 20$. Kanta = $\sqrt{400 - 100} = 10\sqrt{3}$ Ala = $½ \cdot 10\sqrt{3} \cdot 10 = 50\sqrt{3} =$ **86,6 (m²)**

92.3.1. Määritä funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 6$ ääriarvot

92.3.2. Olkoon $x_1 = 1{,}234567890$, $x_2 = 1{,}234567891$ ja $f(x) = 2x^5 - 5x^2 + 7$. Kumpi on suurempi $f(x_1)$ vai $f(x_2)$?

92.3.3. Mikä on funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ pienin arvo, kun $x > 0$?

92.3.4. Määritä kolmannen asteen polynomifunktio, jonka kuvaajan ääriarvopisteet ovat (-1,12) ja (2,-15).

92.3.5. Funktion $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 2}{x + c}$ kuvaajan asymptootteina ovat suorat $y = 2x + 3$ ja $x = 2$. Mikä on kuvaajan minimipiste?

92.3.6. Osoita, että $x^5 + y^5 \geq \dfrac{1}{16}$, kun $x + y = 1$.

92.3.7. Tulitikkulaatikon kuori on tehty suorakulmaisen särmiön muotoiseksi ja se on avoin kummastakin päästään. Laatikon tilavuus on 24 cm³ ja sen pituus on puolitoistakertainen leveyteen verrattuna. Mikä on kuoren pinta-ala, kun se on mahdollisimman pieni?

$\boxed{1.}$ $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 6$, $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ tai $x = 5$ Kuvaaja ylösp. auk. paraabeli, jonka merkit f ' : +++ -1 --- 5 +++ f : ↗ ¯ ↘ _ ↗ **Maksimi = f(-1) = 14** ja **Minimi = f(5) = - 94**
$\boxed{2.}$ $f'(x) = 10x^4 - 10x = 10x(x^3 - 1)$, joka on positiivinen alueella $x > 1$, joten silloin funktio on kasvava. Kun $x_2 > x_1$, on $\mathbf{f(x_2)} > f(x_1)$.
$\boxed{3.}$ f jva ja dva. $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$; $f'(x) = 0$; $3x^2 - 4x + 1 = 0$; $x = 1$ tai $x = 1/3$; KUV: ylösp. auk. par. f ' : 0 +++ 1/3 --- 1 +++ f : ↗ ¯ ↘ _ ↗ pienin arvo on f(1) = 3 ellei $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ ole pienempi $\lim\limits_{x\to 0+} x^3 - 2x^2 + x + 3 = 3$ Vast: **pienin arvo = 3**
$\boxed{4.}$ Polynomit jatkuvia, derivoituvia eikä reunoja. Siis ääriarvot ovat derivaatan nollakohdissa. Olkoon $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $\begin{cases} f(-1) = 12 \\ f(2) = -15 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -a + b - c + d = 12 \\ 8a + 4b + 2c + d = -15 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 9a + 3b + 3c = -27 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3b = -9 \\ 9a + 6b = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \\ c=-12 \\ d=5 \end{cases}$ $\mathbf{P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5}$

$\boxed{5.}$ Asymptootti on x = 2 ⇒ c = -2 ; Toinen asymptootti saadaan jakamalla

$y = \dfrac{ax^2 + bx + 2}{x + c} = \dfrac{ax^2 + bx + 2}{x - 2} = ax + 2a + b + \dfrac{4a + 2b + 2}{x - 2}$ $\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$

$y = \dfrac{2x^2 - x + 2}{x - 2}$; $y' = \dfrac{2x^2 - 8x}{(x - 2)^2}$; y' = 0 ; $2x^2 - 8x = 0$; 2x(x - 4) = 0 ; x = 0 , x = 4

KUV: YAP. +++ 0 --- 4 +++ , joten min , kun x = 4 , jolloin y = 30/2 = 15 ; **Minimipiste = (4,15)**

$\boxed{6.}$ $x^5 + y^5 \ge \dfrac{1}{16} \Leftrightarrow x^5 + (1 - x)^5 - \dfrac{1}{16} \ge 0$

Tutkitaan funktioa $f(x) = x^5 + (1 - x)^5 - \dfrac{1}{16}$

$f'(x) = 5x^4 - 5(1 - x)^4$; $f'(x) \ge 0$; $x^4 \ge (1 - x)^4$; $|x| \ge |1 - x|$; $x^2 \ge (1 - x)^2$; $2x \ge 1$; $x \ge ½$

f ' : --- ½ +++

f : ↘ _ ↗ Pienin arvo = f(½) = 1/32 + 1/32 - 1/16 = 0, siis kaikki arvot ≥ 0

$\boxed{7.}$ Olkoon leveys = 2x, jolloin pituus = 3x. Olkoon korkeus = h. Tilavuus = 24 ; h·2x·3x = 24 ⇒ $h = 4/x^2$

$A(x) = 2\cdot3x\cdot2x + 2\cdot3x\cdot h = 12x^2 + 24/x$, x > 0

$A'(x) = 24x - 24/x^2 = (24x^3 - 24)/x^2$ $A'(x) \ge 0$; $24x^3 \ge 24$; $x^3 \ge 1$; $x \ge 1$

A' : --- 1 +++

A : ↘ _ ↗ ⇒ A pienin, kun x = 1 ; A = **36 (cm²)**

94.1.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = 3x^4 - 5x^2 - x + 2$ b) $f(x) = \sqrt{4x - 3}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x + 1}$

94.1.2. Olkoon funktio $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$. Määritä f(x):n raja-arvo, kun a) x → 3 b) x → -3 .

94.1.3. Laske funktion $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ suurin ja pienin arvo välillä [0,2].

94.1.4. Määritä positiivinen vakio a siten, että funktio $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{kun } x < a \\ x - \frac{1}{4}x^2, & \text{kun } x \ge a \end{cases}$ on jatkuva kaikilla x ∈ **R**.

94.1.5. Millä a:n arvoilla funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 1$ derivaatta on kaikkialla positiivinen?

94.1.6. Osoita, että funktiolla f(x) = ln x - x + 2 on ainakin kaksi reaalista nollakohtaa. Määritä niistä suurempi kahden desimaalin tarkkuudella.

94.1.7. Käyrän $y = \dfrac{4x^2 + 2}{x^2 + 1}$ pisteeseen (1,3) on piirretty tangentti ja normaali. Laske näiden suorien sekä x-akselin rajoittaman kolmion ala.

94.1.8. Funktiolla $f(x) = x^2 + ax - a + 3$ ja sen derivaatalla on yhteinen nollakohta. Määritä vakio a ja ratkaise sitten yhtälö f(x) = f ' (x).

94.1.9. Miten pitäisi määrittää funktion $f(x) = \dfrac{2x}{x - 4} - \dfrac{32}{x^2 - 4x}$ arvo silloin, kun x = 4 , jotta funktio olisi jatkuva kohdassa x = 4.

94.1.10. Urheilukilpailujen järjestäjät arvioivat, että jos pääsymaksu on 40 mk, kilpailuihin tulee 800 katsojaa. Edelleen he arvioivat, että jokainen yhden markan alennus lipun hinnassa lisää yleisöä 40 katsojalla.
a) Kuinka suuret voivat pääsylipputulot korkeintaan olla? b) Mikä on tällöin lipun hinta ja yleisömäärä?

1. a) $f'(x) = \mathbf{12x^3 - 10x - 1}$ b) $f'(x) = \dfrac{1\cdot4}{2\sqrt{4x-3}} = \mathbf{\dfrac{2}{\sqrt{4x - 3}}}$ c) $f'(x) = \dfrac{2x(2x + 1) - 2(x^2 - 1)}{(2x + 1)^2} = \mathbf{\dfrac{2x^2 + 2x + 2}{(2x + 1)^2}}$

2. a) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3} = \dfrac{9 - 9}{9 + 6 - 3} = \dfrac{0}{12} = \mathbf{0}$

b) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3} = \lim\limits_{x\to-3} \dfrac{(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-1)} = \lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x-3}{x-1} = \dfrac{-6}{-4} = \mathbf{1½}$

3. f on polynomina jatkuva suljetulla välillä , f on derivoituva , f ' (x) = $3x^2 - 2x - 1$
f ' = 0 : $3x^2 - 2x - 1 = 0$; x = 1 ($x = -\frac{1}{3}$) ; f(0) = - 1 ; f(2) = 1 ; f(1) = - 2 V: **Suurin = 1 , pienin = - 2**

4. funktio on polynomina jatkuva , paitsi ehkä liitoskohdassaan, joka tutkitaan
$\lim\limits_{x\to a-}(x^2-3) = a^2 - 3$ ja $\lim\limits_{x\to a+}(x - ¼x^2) = a - ¼a^2 = f(a)$; $a^2 - 3 = a - ¼a^2$; $1¼a^2 - a - 3 = 0$ || ·4
$5a^2 - 4a - 12 = 0$, josta **a = 2** tai (a = -1,2)

5. f ' (x) = $3x^2 - 6x + a$, jonka kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.
Jos sen kuvaaja ei leikkaa x-akselia, niin kuvaaja on aina x-akselin yläpuolella ja saa siis positiivisia arvoja.
Ei leikkaa x-akselia, jos D < 0 ; 36 - 12a < 0 ; - 12a < - 36 ; **a > 3**

6. f(x) = ln x - x + 2 on jatkuva, kun x > 0 & f(0,1) = - 0,4 & f(1) = 1 ⇒ ain. 1 nk välillä]0,1[
f jatkuva & f(1) = 1 & f(4) = - 0,6 ⇒ ain. 1 nk välillä]1,4[.
Koska välit erillisiä, on funktiolla ainakin 2 nollakohtaa.

x	3	3,1	3,2	3,14	3,15	3,145
f(x)	0,099	0,03	-0,037	0,004	-0,003	0,0008

joten nk on välillä]3,145;3,15[**x ≈ 3,15**

7. $y' = \dfrac{8x(x^2+1) - 2x(4x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$; $k_t = y'(1) = 1$ Þ $k_n = -1$
Tang: y - 3 = 1(x - 1) ; y = x + 2 Norm: y - 3 = - 1(x - 1) ; y = - x + 4
Suorat leikkaavat x-akselin kohdissa x = - 2 ja x = 4 , joten kannan pituus on | 4 - (- 2) | = 6 , Korkeus = 3
A = ½ · 6 · 3 = **9**

8.f ' (x) = 2x + a ; f ' :n nollakohta 2x + a = 0 ; x = - ½a
Kun tämä on f:n nollakohta f(-½a) = 0 ; $¼a^2 - ½a^2 - a + 3 = 0$ || ·(-4) ; $a^2 + 4a - 12 = 0$; **a = 2 tai a = - 6**
Jos a = 2 , f(x) = f ' (x) ; $x^2 + 2x + 1 = 2x + 2$; $x^2 = 1$; **x = ± 1**
Jos a = - 6 , f(x) = f ' (x) ; $x^2 - 6x + 9 = 2x - 6$; $x^2 - 8x + 15 = 0$; **x = 5 tai x = 3**

9. Jotta f on jatkuva , kun x = 4 , on oltava f(4) = $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{2x}{x-4} - \dfrac{32}{x^2-4x}\right) = \lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{2x^2}{x^2-4x} - \dfrac{32}{x^2-4x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{2x^2-32}{x^2-4x}\right) = \lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{2(x+4)(x-4)}{x(x-4)}\right) = \lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{2(x+4)}{x}\right) = \dfrac{2\cdot 8}{4} = \mathbf{4}$

10. x = alennus ; lipun hinta = 40 - x ; yleisöä = 800 + 40x ; Tulot ovat T(x) = (800 + 40x)(40 - x)
T(x) = 32 000 + 800x - $40x^2$; - 20 ≤ x ≤ 40 , T(x) on jatkuva suljetulla välillä , DVA
T ' (x) = 800 - 80x ; T ' = 0 ; 800 - 80x = 0 ; x = 10 T(-20) = 0 ; T(40) = 0 ; T(10) = 36 000 , joka suurin
V : a) **tulot ≤ 36 000 mk** b) **lipun hinta on 30 mk** ja **yleisöä 1200**

94.2.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x$ b) $f(x) = (2x - 3)^4$ c) f(x) = x(x - 1)(x - 2)

94.2.2. Laske $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3x-5}{3x^2+2x-5}$

94.2.3. Laske funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - 20x$ suurin ja pienin arvo välillä [0,3]

94.2.4. Määritä a ja f(2), jotta funktio $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3x , & x > 2 \\ 4 - 3ax , & x < 2 \end{cases}$ olisi jatkuva kohdassa x = 2.

94.2.5. Laske $\lim\limits_{x\to -\infty}(x + \sqrt{x^2+3x+4})$

94.2.6. Määritä a ja b , kun $f(x) = ax^2 + \dfrac{b}{x}$ sekä f(1) = 5 ja f ' (1) = 4.

94.2.7. Osoita, että funktiolla f(x) = sin x - x + 1 a) on ainakin yksi reaalinen nollakohta b) ei ole nollakohtaa, joka olisi suurempi kuin 2.

94.2.8. Missä pisteessä käyrän $y = x^3 + x^2 - 3x$ pisteeseen (1,-1) piirretty tangentti leikkaa käyrän?

94.2.9. Funktiot f ja g ovat derivoituvia sekä $f(x) = x^2 \cdot g(x)$. Määritä f ' (2) , kun g(2) = - 3 ja f ' (2) = g ' (2).

94.2.10. Pihaan aidataan ponille 5 aarin suuruinen suorakulmion muotoinen alue. Tien viereen tuleva sivu aitaa joudutaan tekemään 50% kalliimmasta materiaalista kuin muu osa. Kuinka pitkäksi alueen tien viereinen sivu on tehtävä, kun se on oltava vähintään 10 m ja enintään 30 m pitkä sekä aidan kustannukset halutaan mahdollisimman pieniksi?

1. a) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x$; $f'(x) =$ $\mathbf{12x^2 - 4x + 1}$ b) $f(x) = (2x-3)^4$; $f'(x) = 4(2x-3)^3 \cdot 2 =$ $\mathbf{8(2x-3)^3}$
c) $f(x) = x(x-1)(x-2) = x(x^2 - 2x - x + 2) = x^3 - 3x^2 + 2x$; $f'(x) =$ $\mathbf{3x^2 - 6x + 2}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3x-5}{3x^2+2x-5} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x+5)}{(x-1)(3x+5)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+5}{3x+5} = \dfrac{2+5}{3+5} = \mathbf{\dfrac{7}{8}}$

3. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 20x$ on polynomina jatkuva suljetulla välillä [0,3] . f on polynomina derivoituva.
$f'(x) = 3x^2 + 4x - 20$; $f' = 0$; $3x^2 + 4x - 20 = 0$; $x = 2$ tai ($x = -3\frac{1}{3}$)
$f(0) = 0$; $f(3) = -15$; $f(2) = -24$. V: **Suurin = 0** , **pienin = - 24**

4. Funktio on jva kohdassa x = 2 , jos 1) on olemassa raja-arvo 2) on funktiolla arvo 3) ne ovat yhtä suuret
raja-arvo on olemassa, jos $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2+}(4-3ax) = \lim\limits_{x\to 2-}(ax^2 - 3x)$
$4 - 6a = 4a - 6$; $-10a = -10$; $\mathbf{a = 1}$; $f(2) = 4 - 6\cdot 1 =$ $\mathbf{-2}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+\sqrt{x^2+3x+4}) = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(x+\sqrt{x^2+3x+4})(x-\sqrt{x^2+3x+4})}{x-\sqrt{x^2+3x+4}} = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-x^2-3x-4}{x-\sqrt{x^2+3x+4}} =$
$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-3x-4^{(x}}{x-\sqrt{x^2+3x+4}} = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-3-4/x}{1+\sqrt{1+3/x+4/x^2}}$ (Huom. neg. luku juuren alle) $= \dfrac{-3-0}{1+1} =$ **- 1½**

6. $f(x) = ax^2 + \dfrac{b}{x}$; $f'(x) = 2ax - \dfrac{b}{x^2}$ $\begin{cases} f(1) = 5 \\ f'(1) = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} a + b = 5 & \|\cdot 1 \\ 2a - b = 4 & \|\cdot 1 \end{cases}$; $3a = 9$; $\mathbf{a = 3}$; $3 + b = 5$; $\mathbf{b = 2}$

7. a) $f(x) = \sin x - x + 1$ (HUOM.! reaalimuuttujan reaaliarvoinen funktio $\Rightarrow$ x on radiaaneja).
f on jatkuva. $f(0) = \sin 0 - 0 + 1 = 1 > 0$; $f(\pi) = \sin \pi - \pi + 1 = 0 - \pi + 1 = 1 - \pi < 0$.
Siis välillä]0, π[on ain. yksi nollakohta
b) jos $x > 2$ on $f(x) < \sin x - 2 + 1 = \sin x - 1 \le 0$, koska $\sin x \le 1$. Siis $f(x) < 0$, joten funktiolla ei nollakohtia

8. $y' = 3x^2 + 2x - 3$; $k_T = y'(1) = 3 + 2 - 3 = 2$; TANG.: $y + 1 = 2(x - 1)$; $y = 2x - 3$
LP: $\begin{cases} y = x^3 + x^2 - 3x \\ y = 2x - 3 \end{cases}$; $x^3 + x^2 - 3x = 2x - 3$; $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$; huomataan x = 1 on yksi ratkaisu
$(x-1)(x^2 + 2x - 3) = 0$; $x - 1 = 0$ tai $x^2 + 2x - 3 = 0$; x = 1 tai x = 1 tai x = - 3 ; y = - 27 + 9 + 9 = - 9
V: **Piste on (- 3, - 9)**

9. $f(x) = x^2 \cdot g(x)$, $f'(x) = 2x\cdot g(x) + x^2\cdot g'(x)$; $f'(2) = g'(2) \Leftrightarrow 2\cdot 2\cdot g(2) + 4\cdot g'(2) = g'(2) \Leftrightarrow 4\cdot(-3) +$ $4\cdot g'(2) = g'(2) \Leftrightarrow 4\cdot g'(2) - g'(2) = 12 \Leftrightarrow 3\cdot g'(2) = 12 \Leftrightarrow g'(2) =$ $\mathbf{4 = f'(2)}$

10. x = tien suuntaisen aidan pituus dekametreissä . A = 5 ; $x \cdot h = 5$; $h = \dfrac{5}{x}$
Tavallisen aidan yksikköhinta olkoon a ; tien viereisen aidan yksikköhinta on 1,5a
Kustannukset $K(x) = 1{,}5a \cdot x + a \cdot (x + \dfrac{5}{x} + \dfrac{5}{x}) = a \cdot (2{,}5x + \dfrac{10}{x})$; $1 \le x \le 3$; K(x) on jva sulj. välillä
$K'(x) = a(2{,}5 - \dfrac{10}{x^2})$; $K' = 0$; $2{,}5 - \dfrac{10}{x^2} = 0$; $2{,}5x^2 = 10$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$
K(1) = 12,5a ; K(3) = 10,83a ; K(2) = 10a , joka on pienin. V: **Sivu on 20 m**

94.3.1. Millä x:n arvoilla funktiot a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-4x-5}$ b) $f(x) = \lg(3x - x^2)$ ovat jatkuvia?

94.3.2. Laske raja-arvot a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2-3x-14}$ b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2-3x-14}$ c) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2-3x-14}$

94.3.3. Osoita, että funktiolla $f(x) = e^x + \cos x - 3$ on ainakin yksi positiivinen nollakohta. Määritä tällaisen likiarvo 0,1 tarkkuudella.

94.3.4. Määritä kokeellisesti raja-arvon $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{2x}$ likiarvo. Mikä voisi olla tarkka arvo?

94.3.5. Mikä arvo pitää olla reaaliluvulla a, kun yhtälöllä $x^3 + (a^2 - 1)x = 100$ on ainakin yksi ratkaisu välillä $0 < x < 1$?

94.3.6. Onko funktiolla $f(x) = \dfrac{x^2 - 4|x - 1| - 2x + 1}{|2x - 2|}$ raja-arvoa, kun $x \to 1$?

94.3.7. Mikä arvo on a:lla, kun $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+ax} - x\sqrt{2}) = \sqrt{2}$?

1. a) Nim $\neq 0$; $x^2 - 4x - 5 \neq 0$; $x \neq \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \dfrac{4 \pm 6}{2}$; $\mathbf{x \neq 5}$ ja $\mathbf{x \neq -1}$

b) Logaritmoitava > 0 ; $3x - x^2 > 0$; NK $x(3 - x) = 0$; x = 0 tai x = 3 Par: alasp. aukeava, josta V: $\mathbf{0 < x < 3}$

2.a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2-3x-14} = \dfrac{2^2 - 2 - 6}{2\cdot2^2 - 3\cdot2 - 14} = \dfrac{-4}{-12} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2-3x-14} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(2x-7)} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x-3}{2x-7} = \dfrac{-5}{-11} = \mathbf{\dfrac{5}{11}}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-x-6^{(x^2}}{2x^2-3x-14} = \lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1-1/x-6/x^2}{2-3/x-14/x^2} = \dfrac{1-0-0}{2-0-0} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

3. $f(x) = e^x + \cos x - 3$ on jatkuva JA $f(0) = 1 + 1 - 3 = -1 < 0$ JA $f(2) = e^2 + \cos 2 - 3 \approx 3{,}97 > 0$, jolloin funktiolla on ainakin yksi positiivinen nollakohta, joka on välillä $0 < x < 2$

x	0,80	0,90	0,85
f(x)	-0,08	0,08	- 0,004

, joten nk on välillä $0{,}85 < x < 0{,}90$ eli $\mathbf{x \approx 0{,}9}$

4. Lasketaan lausekkeen $\dfrac{2^x - 1}{2x}$ arvoja lähellä lähestymiskohtaa 0

x	0,01	0,001	0,0001	0,00001	-0,01	-0,001	-0,0001
f(x)	0,3477	0,34669	0,346586	0,34657	0,345	0,34645	0,34656

tästä päätellään, että raja-arvo voisi olla likimäärin **0,34657 ≈ ½·ln 2**

5. $x^3 + (a^2 - 1)x = 100$; $x^3 + (a^2 - 1)x - 100 = 0$ tutkitaan vasemman puolen määrittelemää funktioa $f(x) = x^3 + (a^2 - 1)x - 100$, joka on polynomina jatkuva ; $f(0) = -100 < 0$; $f(1) = 1 + (a^2 - 1) - 100 = a^2 - 100$, jonka pitää olla positiivinen, jotta funktiolla f olisi ainakin yksi nollakohta välillä $0 < x < 1$
Ts. $a^2 - 100 > 0$ NK $a^2 = 100$; $a = \pm 10$ PAR : ylösp. aukeava, josta **a > 10 tai a < - 10**

6. $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 \text{ , kun } x \geq 1 \\ -x + 1 \text{ , kun } x < 1 \end{cases}$; $|2x - 2| = \begin{cases} 2x - 2 \text{ , kun } x \geq 1 \\ -2x + 2 \text{ , kun } x < 1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to1+}\frac{x^2-4|x-1|-2x+1}{|2x-2|} = \lim_{x\to1+}\frac{x^2-4(x-1)-2x+1}{2x-2} = \lim_{x\to1+}\frac{x^2-6x+5}{2x-2} = \lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x-5)}{2(x-1)} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{x^2-4|x-1|-2x+1}{|2x-2|} = \lim_{x\to1-}\frac{x^2-4(-x+1)-2x+1}{-2x+2} = \lim_{x\to1-}\frac{x^2+2x-3}{-2x+2} = \lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x+3)}{-2(x-1)} = \frac{4}{-2} = -2$$

Koska oikean ja vasemmanpuoleiset raja-arvot ovat samat varsinainen raja-arvo **on olemassa** ja on = - 2

7. $$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+ax}-x\sqrt{2}) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{2x^2+ax}-x\sqrt{2})(\sqrt{2x^2+ax}+x\sqrt{2})}{(\sqrt{2x^2+ax}+x\sqrt{2})} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+ax-2x^2}{\sqrt{2x^2+ax}+x\sqrt{2}} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^{(x}}{\sqrt{2x^2+ax}+x\sqrt{2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{2+a/x}+\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$; joten $\dfrac{a}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$; $a = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \mathbf{4}$

94.4.1. Ratkaise yhtälö f ‘ (x) = 0 , kun $f(x) = x^3 - 6x - 7$

94.4.2. Derivoi a) $f(x) = (2x + 3)^4$ b) $f(x) = \dfrac{2x}{3x + 4}$ c) $f(x) = x\cdot\sqrt{2x + 1}$.

94.4.3. Funktion $f(x) = x^3 - ax^2 - 9x + 5$ derivaatan nollakohta on x = - 1. Määritä a sekä funktion f suurin ja pienin arvo välillä [0,4].

94.4.4. Laske käyrän $y = x^2 - 5x - 4$ sen normaalin yhtälö, joka on suoran $x + 3y + 4 = 0$ suuntainen.

94.4.5. Millä x:n arvoilla funktio $f(x) = \dfrac{7 - 6x - x^2}{x^2 + 5}$ saa positiivisia arvoja? Mikä on funktion suurin arvo?

94.4.6. Funktiosta f tiedetään, että f(1) = 2 ja f ' (1) = 3. Laske raja-arvo $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{[f(x)]^2 - [f(1)]^2}{x-1}$.

94.4.7. Joen rantaa vasten rakennetaan suorakulmion muotoinen aitaus. Rantaa vasten olevalle sivulle tarvitaan piikkilankaa vain yksinkertainen kerros, kun taas muille sivuille tarvitaan piikkilankaa kaksinkertainen kerros. Mikä on suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala, kun piikkilankaa on käytössä kaikkiaan 240 m?

1.$f(x) = x^3 - 6x - 7$; $f'(x) = 3x^2 - 6$; $f'(x) = 0$; $3x^2 - 6 = 0$; $x^2 = 2$; $\mathbf{x = \pm\sqrt{2}}$
2.a) $f(x) = (2x + 3)^4$; $f'(x) = 4\cdot(2x + 3)^4\cdot 2 = \mathbf{8\cdot(2x + 3)^3}$ b) $f(x) = \dfrac{2x}{3x + 4}$; $f'(x) = \dfrac{2(3x + 4) - 3\cdot 2x}{(3x + 4)^2} = \mathbf{\dfrac{8}{(3x + 4)^2}}$ c) $f(x) = x\cdot\sqrt{2x + 1}$; $f'(x) = 1\cdot\sqrt{2x + 1} + x\cdot\dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \dfrac{2x + 1}{\sqrt{2x + 1}} + \dfrac{x}{\sqrt{2x + 1}} = \mathbf{\dfrac{3x + 1}{\sqrt{2x + 1}}}$
3. $f(x) = x^3 - ax^2 - 9x + 5$; $f'(x) = 3x^2 - 2ax - 9$; $f'(-1) = 0$; $3 + 2a - 9 = 0$; $a = 3$; $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ f on ja sulj. välillä. Dva. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$; $f'(x) = 0$; $3x^2 - 6x - 9 = 0$; $(x = -1)$ tai $x = 3$ $f(0) = 5$; $f(3) = -22$; $f(4) = -15$ **Suurin arvo = 5** , **pienin arvo = - 22**
4. Kulmak.: N || $x + 3y + 4 = 0$; $3y = -x - 4$; $y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$; $k_N = -\frac{1}{3}$ Piste: $k_T = 3$; $y' = 3$; $2x - 5 = 3$; $2x = 8$; $x = 4$; $y = 16 - 20 - 4 = -8$ Yhtälö: $y + 8 = -\frac{1}{3}(x - 4)$; $3y + 24 = -x + 4$; $\mathbf{x + 3y + 20 = 0}$
5. $f(x) = \dfrac{7 - 6x - x^2}{x^2 + 5}$ on posit. , kun osoittaja on posit, koska nim. Aina posit. $7 - 6x - x^2 = 0$; $x = 1$ tai $x = -7$; KUV: alasp. auk. par. --- -7 +++ 1 --- ; $\mathbf{-7 < x < 1}$ Suurin arvo avoimella välillä on sama kuin suljetulla välillä, ellei sitä saavuteta alueen reunalla. F on jva sulj välillä [- 7,1] . Dva. $f'(x) = \dfrac{(-6 - 2x)(x^2 + 5) - 2x(7 - 6x - x^2)}{(x^2 + 5)^2} = \dfrac{-6x^2 - 30 - 2x^3 - 10x - 14x + 12x^2 + 2x^3}{(x^2 + 5)^2} = \dfrac{6x^2 - 24x - 30}{(x^2 + 5)^2}$ $f'(x) = 0$; $6x^2 - 24x - 30 = 0$; $x = -1$ tai $(x = 5)$ $f(-7) = 0$; $f(1) = 0$; $f(-1) = \frac{12}{6} = $ **2 = suurin**
6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{[f(x)]^2 - [f(1)]^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{[f(x) - f(1)]\cdot[f(x) + f(1)]}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{[f(x) - f(1)]}{x-1}\cdot[f(x) + f(1)] =$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{[f(x) - f(1)]}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to 1}[f(x) + f(1)]$ = f ' (1) · [f(1) + f(1)] = 3·[2 + 2] = **12**
7. Olkoon jokea vastaan kohtisuora sivu = x. Jokea kohtisuorasti on aitaa 4x, joen suuntaisesti 240 - 4x Joen suuntainen sivu = $\dfrac{240 - 4x}{3} = 80 - \frac{4}{3}x$ $A(x) = (80 - \frac{4}{3}x)\cdot x = 80x - \frac{4}{3}\cdot x^2$, $0 \le x \le 60$; A(x) on jva sulj. välillä , dva . $A'(x) = 80 - \frac{8}{3}\cdot x$; $A' = 0$; $80 - \frac{8}{3}\cdot x = 0$; $240 - 8x = 0$; $x = 30$ A(0) = 0 ; A(60) = 0 ; A(30) = 1200 , joka on suurin. V: **Ala on 12 a**

94.5.4. Etsi käyrän $y = \dfrac{x^2 + 2}{2x + 1}$ asymptootit ja ääriarvopisteet.

94.5.6. Millä vakion a arvolla funktion $f(x) = ax^2 + 12x + a$ suurin arvo on 9 ?

94.5.7. Osoita, että yhtälöllä $2x^4 + 2x^3 - x^2 - 1 = 0$ on täsmälleen kaksi reaalista ratkaisua.

94.5.10. Suihkukaivon altaan pohja on neliön muotoinen, seinät pystysuorat ja tilavuus 4000 l. Seinät ja pohja kaakeloidaan. Mitkä arvot täytyvät altaan leveydellä ja syvyydellä olla, jotta kaakelia kuluisi mahdollisimman vähän?

4.$y = \dfrac{x^2 + 2}{2x + 1}$, Pystysuora asymptootti, kun nim = 0 ; 2x + 1 = 0 ; **x = - ½** , jolloin os ≠ 0

vino asymptootti jakamalla $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \dfrac{2\frac{1}{4}}{2x + 1}$ eli asymptootti on suora **$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$**

$y' = \dfrac{2x(2x + 1) - 2(x^2 + 2)}{(2x + 1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{(2x + 1)^2}$

$y' = 0$; $2x^2 + 2x - 4 = 0$; $x^2 + x - 2 = 0$; $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$; x = 1 tai x = - 2. KUV: YAP

y ' : +++ -2 --- -½ --- 1 +++

y : ↗ ¯ ↘ | ↘ _ ↗

Maksimi : x = - 2 ; $y = \dfrac{4 + 2}{-4 + 1} = -2$; **Maksimipiste = (- 2, - 2)**

Minimi : x = 1 ; $y = \dfrac{1 + 2}{2 + 1} = 1$; **Minimipiste = (1 , 1)**

---

6. $f(x) = ax^2 + 12x + a$. Jotta funktiolla olisi suurin arvo, sen kuvaajan täytyy olla alaspäin aukeava paraabeli (siis a < 0), joka saa suurimman arvonsa paraabelin huipussa. Huipussa on f ’ = 0 ; 2ax + 12 = 0 ; $x = -\dfrac{6}{a}$

$f(-\frac{6}{a}) = 9$; $a\cdot\frac{36}{a^2} + 12\cdot(-\frac{6}{a}) + a = 9$; $\frac{36}{a} - \frac{72}{a} + a = 9$; $a - \frac{36}{a} = 9$; $a^2 - 9a - 36 = 0$; $a = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 + 144}}{2} = \dfrac{9 \pm 15}{2}$; (a = 12) tai **a = - 3**

---

7. $2x^4 + 2x^3 - x^2 - 1 = 0$; Tutkitaan funktion $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - x^2 - 1$ kulkua.

$f'(x) = 8x^3 + 6x^2 - 2x = 2x(4x^2 + 3x - 1)$. f ’ = 0 ; 2x = 0 tai $4x^2 + 3x - 1 = 0$; x = 0 tai x = - 1 tai x = ¼

KUV: III asteen polynomi

f ' : --- -1 +++ 0 --- ¼ +++

f : ↘ _ ↗ ¯ ↘ _ ↗

1°Kun f(0) = -1, ei välillä [-1,¼] ole nollakohtia.(Suurin < 0)

2° f(-1)<0 & f(-2)>0 & f jva & f aid. vähenevä ⇒ välillä x < - 1 on täsm. 1 nollakohta

3° f(¼)<0 & f(1)>0 & f jva & f aid. kasvava ⇒ välillä x > ¼ on täsm. 1 nollakohta

Siis täsm. 2 nollakohtaa.

---

10. Olkoon pohjaneliön sivu = x ; korkeus on $= \dfrac{V}{A} = \dfrac{4000}{x^2}$

$A(x) = x^2 + 4\cdot x\cdot\dfrac{4000}{x^2} = x^2 + 16000x^{-1}$; x > 0 $A'(x) = 2x - 16000x^{-2} = \dfrac{2x^3 - 16000}{x^2}$

A ’ ≥ 0 ; $2x^3 - 16000 \geq 0$; $x^3 \geq 8000$; x ≥ 20

A' : --- 20 +++

A : ↘ _ ↗ ⇒ ala on pienin , kun x = 20 **Leveys** = 20 dm = **2 m** , **korkeus** = 10 dm = **1 m**

94.6.4. Laske käyrän $y = \dfrac{2x^2 - 6x}{x - 4}$ asymptootit ja ääriarvot.

94.6.6. Laske funktion $f(x) = 3 + 2x^2 - x^4$ suurin arvo.

94.6.7. Millä a:n arvoilla yhtälöllä $x^3 + 3x^2 + a = 0$ on kolme reaalista ratkaisua?

---

4. $y = \dfrac{2x^2 - 6x}{x - 4}$; Pystysuora asymptootti : nim = 0 ; x - 4 = 0 ; **x = 4**

Jaetaan jakokulmassa $y = 2x + 2 + \dfrac{8}{x - 4}$, josta vino asymptootti **y = 2x + 2**

$y' = \dfrac{(4x - 6)(x - 4) - 1\cdot(2x^2 - 6x)}{(x - 4)^2} = \dfrac{4x^2 - 16x - 6x + 24 - 2x^2 + 6x}{(x - 4)^2} = \dfrac{2x^2 - 16x + 24}{(x - 4)^2}$

y ’ = 0 ; $2x^2 - 16x + 24 = 0$; x = 2 tai x = 6 ;

y':n nimittäjä neliönä positiivinen, joten osoittaja määrää merkin. Osoittaja YAP

y' ; +++ 2 --- 6 +++

y : ↗ ¯ ↘ _ ↗ **Max** = $y(2) = \dfrac{8 - 12}{2 - 4} =$ **2** ; **Min** = $y(6) = \dfrac{72 - 36}{6 - 4} =$ **18**

---

6. $f(x) = 3 + 2x^2 - x^4$; $f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2)$; f ’ = 0 ; 4x = 0 tai $1 - x^2 = 0$; x = 0 tai x = 1 tai x = - 1

f ’:n kuvaaja **III** asteen polynomi, jonka kuvaajasta (ylhäältä vasemmalta alas oikealle)

f ' : +++ -1 --- 0 +++ 1 ---

f : ↗ ¯ ↘ _ ↗ ⇒ f:n suurin arvo on joko f(1) tai f(-1)

f(1) = 3 + 2 - 1 = 4 ; f(-1) = 3 + 2 - 1 = 4 ; siis **suurin arvo on 4**

7. Tarkastellaan funktioa $f(x) = x^3 + 3x^2 + a$; $f'(x) = 3x^2 + 6x$; $f' = 0 : 3x(x + 2) = 0$; $x = 0$ tai $x = -2$ f ' :n merkit ylöspäin aukeavasta paraabelista f ' : +++ -2 --- 0 +++ f : ↗ ¯ ↘ _ ↗ ⇒ max = f(-2) ja min = f(0) ⇒ f:llä on 3 nollakohtaa, jos jokaisella monotonisuusvälillä on yksi nollakohta, eli f saa joka välillä erimerkkisiä arvoja. Ehto täyttyy, jos max > 0 ja min < 0 ; $f(-2) > 0$ ja $f(0) < 0$; $-8 + 12 + a > 0$ ja $a < 0$ $a > -4$ ja $a < 0$; **$-4 < a < 0$**

94.7.1. Milloin funktio $f(x) = (x^2 - 2x)^3$ on kasvava?

94.7.2. Laske funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 5$ suurin arvo, kun $x \le 3$

94.7.3. a) Mitkä ovat funktion $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x - 2}$ asymptootit?
b) Muodosta jokin funktio, jonka asymptootit ovat $y = 2x + 3$ ja $x = 4$.

94.7.4. Osoita, että yhtälöllä $2x^4 + x - 40 = 0$ on täsmälleen kaksi reaalista ratkaisua.

94.7.5. Kolmannen asteen polynomifunktiolla f(x) on ääriarvo f(1) = 3, ja f(0) = 0 ja f '(0) = 1. Määritä f(x).

94.7.6. Paikat A, B ja C sijaitsevat vaakasuoralla maan pinnalla tasakylkisen kolmion kärkipisteissä. Kolmion kanta AB on 8,0 km ja kantaa vastaan piirretty korkeusjana CD on 9,0 km. Tälle janalle suunnitellaan keskuspaikkaa K, josta aiotaan rakentaa suorat tiet paikkoihin A, B ja C. Mihin kohtaan janalla CD paikka K on sijoitettava, jotta tien rakennuskustannukset olisivat mahdollisimman pienet? Kustannukset ovat suoraan verrannolliset tien pituuteen.

94.7.7. Millä a:n arvoilla funktio $f(x) = x^5 - 5x^4 - 60x^3 + ax$ on kaikkialla kasvava?

1. $f(x) = (x^2 - 2x)^3$; $f'(x) = 3(x^2 - 2x)^2 \cdot (2x - 2)$; f on kasvava, jos $f' \ge 0$; Koska $3(x^2 - 2x)^2 \ge 0$, on toisen tekijän oltava vähintään nolla $2x - 2 \ge 0$; $2x \ge 2$; **$x \ge 1$**
2. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 5$; $f'(x) = 3x^2 - 4x - 7$ $f' = 0$; $3x^2 - 4x - 7 = 0$; $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 84}}{6} = \dfrac{4 \pm 10}{6}$; $x = \dfrac{7}{3}$ tai $x = -1$. KUV: ylöspäin aukeava paraabeli f ' : +++ -1 --- 7/3 +++ f : ↗ ¯ ↘ _ ↗ ⇒ funktion suurin arvo on joko f(-1) tai f(3) $f(-1) = -1 - 2 + 7 + 5 = 9$; $f(3) = 27 - 18 - 21 + 5 = -7$ Siis: **Suurin arvo on f (-1) = 9**
3. a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x - 2} = \dfrac{x^2 - 2x + 4x - 8 + 11}{x - 2} = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2} + \dfrac{4x - 8}{x - 2} + \dfrac{11}{x - 2} = x + 2 + \dfrac{11}{x - 2}$ V: **asymptootit x = 2 ja y = x + 4** b) $g(x) = \mathbf{2x + 3 + \dfrac{1}{x - 4}} = \dfrac{2x^2 - 8x + 3x - 12 + 1}{x - 4} = \mathbf{\dfrac{2x^2 - 5x - 11}{x - 4}}$
4. $2x^4 + x - 40 = 0$; tutkitaan funktion $f(x) = 2x^4 + x - 40$ kulkua $f'(x) = 8x^3 + 1$; $f' \ge 0$; $8x^3 + 1 \ge 0$; $x^3 \ge -\dfrac{1}{8}$ || $\sqrt[3]{\ }$; $x \ge -½$; ⇒ f:llä on kaksi monotonisuusväliä $\left.\begin{matrix} f(-½) < 0 \\ f(3) > 0 \\ f \text{ jva} \\ f \text{ aid. monot.} \end{matrix}\right\}$ ⇒ täsmälleen yksi nollakohta välillä x > ½ $\left.\begin{matrix} f(-½) < 0 \\ f(-3) > 0 \\ f \text{ jva} \\ f \text{ aid. monot.} \end{matrix}\right\}$ ⇒ täsmälleen yksi nk välillä x < ½ Siis kaikkiaan täsmälleen kaksi nollakohtaa eli yhtälöllä on täsmälleen kaksi ratkaisua.
5. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $\begin{cases} f(1) = 3 \\ f'(1) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} a + b + c + d = 3 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ d = 0 \\ c = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} a + b = 2 \ \|\| \cdot(-2) \\ 3a + 3b = -1 \ \|\| \cdot 1 \end{cases}$; a = - 5 ; b = 7 V: **$f(x) = -5x^3 + 7x^2 + x$**

6. Olkoon DK = x , CK = 9 - x ; KA = KB = $\sqrt{x^2 + 16}$; K(x) = $2\sqrt{x^2 + 16}$ + (9 - x) ; $0 \le x \le 9$
K on jva sulj. välillä. K ' (x) = $2 \cdot \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 16}} - 1$; K ' = 0 ; $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 16}} = 1$; $2x = \sqrt{x^2 + 16}$ || $(\ )^2$
$4x^2 = x^2 + 16$; $3x^2 = 16$; $x^2 = \dfrac{16}{3}$; $x = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$
K(0) = 17 ; K(9) = $2\sqrt{97}$ = 19,8 ; K($\dfrac{4}{\sqrt{3}}$) = $9 + 4\sqrt{3}$ = 15,9 , joka on pienin
V : **KD = $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ = 2,3 km kannalta AB**

7. f(x) = $x^5 - 5x^4 - 60x^3 + ax$ on kasvava, jos f ' (x) = $5x^4 - 20x^3 - 180x^2 + a \ge 0$ kaikilla x ja tämä on totta, jos derivaattafunktion pienin arvo on ≥ 0 ; f ' ' (x) = $20x^3 - 60x^2 - 360x = 20x(x^2 - 3x - 18)$
f '' = 0 ; 20x = 0 tai $x^2 - 3x - 18 = 0$; x = 0 tai x = - 3 tai x = 6
f '':n kuvaaja III asteen polynomi (alhaalta vasemmalta ylös oikealle)
f '' : --- -3 +++ 0 --- 6 +++
f ' : ↘ _ ↗ ‾ ↘ _ ↗ Pienin on joko f ' (- 3) tai f ' (6)
f ' (- 3) = 405 + 540 - 1620 + a = a - 675 ; f ' (6) = 6480 - 4320 - 6480 + a = a - 4320 , joka on pienin
a - 4320 $\ge$ 0 ; **a $\ge$ 4320**

95.1.1. Derivoi funktiot a) f(x) = $2x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ b) f(x) = $(2x^3 - 5)^3$

95.1.2. Muodosta jokin funktio f(x), joka toteuttaa ehdot f(1) = 2 ja f ´(2) = 3.

95.1.3. Laske a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{2x^2 - x - 15}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(8-7x)x}{x^2 - 2}$

95.1.4. Laske funktion f(x) = $x^3 - 3x^2 - 9x$ suurin ja pienin arvo välillä [0,4]

95.1.5. Ratkaise yhtälö f(x) + 2 = x · f ´ (x) , kun f(x) = $1 - x + 3x^2$.

95.1.6. Millä a:n arvolla funktio f(x) = $\dfrac{2x}{x^2 - 2ax + 3}$ on epäjatkuva vain yhdellä x:n arvolla? Millä a:n arvoilla funktio on kaikkialla jatkuva?

95.1.7. Osoita, että yhtälöllä $x^4 + x + 1 = 5x^3$ on ainakin yksi reaalinen ratkaisu. Määritä jokin niistä 2 desimaalin tarkkuudella.

95.1.8. Millä vakion k arvoilla paraabelin y = $4x - x^2$ pisteeseen (1,3) piirretty tangentti sivuaa myös paraabelia y = $x^2 - 6x + k$?

95.1.9. Erään tanhuseuran jäsenmaksu on 75 mk. Seura maksaa kattojärjestölleen 6% jäsenmaksutuloistaan mikäli jäseniä on alle 150. Jos jäseniä on vähintään 150, maksetaan 4% jäsenmaksutuloista ja lisäksi kiinteä maksu. Esitä kattojärjestölle menevä maksu funktiolausekkeena. Paljonko kiinteän maksun on oltava, jotta maksua kuvaava funktio ei muuttuisi ”hyppäysenomaisesti”?

95.1.10. Mehiläistarhurilla on 6 mehiläispesää, jotka tuottavat hunajaa 20 kg/pesä. Jokainen yhden pesän lisäys vähentää tuottoa pesää kohden 2 kg. Millä pesämäärällä tarhuri saa suurimman kokonaistuoton?

1. a) f(x) = $2x^3 + 4x^2 - 5x + 6$; f ´(x) = $\mathbf{6x^2 + 8x - 5}$
b) f(x) = $(2x^3 - 5)^3$; f ´(x) = $3(2x^3 - 5)^2 \cdot 6x^2$ = $\mathbf{18x^2(2x^3 - 5)^2}$

2. Esim. f ´(x) = 3 kaikilla x, jolloin f(x) voisi olla = 3x + a ; f(1) = 2 ; 3 + a = 2 ; a = - 1
V: **f(x) = 3x - 1**

3. a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{2x^2 - x - 15} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x+3)(x-3)}{(2x+5)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x+3)}{(2x+5)} = \mathbf{\dfrac{6}{11}}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(8-7x)x}{x^2 - 2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x - 7x^{2(x^2}}{x^2 - 2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8/x - 7}{1 - 2/x^2} = \dfrac{0-7}{1+0} = \mathbf{-7}$

4. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ on JVA sulj. välillä [0,4] . DVA. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$
$f' = 0$; $3x^2 - 6x + 9 = 0$; $x^2 - 2x - 3 = 0$; $x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$; $x = 3$ tai ($x = -1$)
$f(0) = 0 = S$; $f(4) = -20$; $f(3) = -27 = p$ V: **Suurin arvo = 0** , **pienin arvo = - 27**

5. $f(x) = 1 - x + 3x^2$; $f'(x) = -1 + 6x$
$f(x) + 2 = x \cdot f'(x)$; $1 - x + 3x^2 + 2 = x(-1 + 6x)$; $1 - x + 3x^2 + 2 = -x + 6x^2$
$3x^2 = 3$; $x^2 = 1$; $\mathbf{x = \pm 1}$

6. Murtofunktio on epäjatkuva, kun nim = 0. Funktio on epäjatkuva vain yhdellä x:llä, jos nimittäjällä on vain yksi nollakohta. II asteen polynomilla on vain yksi nollakohta, jos sen
$D = 0$; $4a^2 - 12 = 0$; $a^2 = 3$; $\mathbf{a = \pm\sqrt{3}}$. Funktio on kaikkialla jatkuva, jos nimittäjällä ei ole nollakohtaa, ts.
$D < 0$; $4a^2 - 12 < 0$; $\mathbf{-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}}$

7. $x^4 + x + 1 = 5x^3$; $x^4 - 5x^3 + x + 1 = 0$ Tutkitaan funktioa $f(x) = x^4 - 5x^3 + x + 1$, joka on jatkuva. Kun se saa erimerkkiset arvot $f(0) = 1$ ja $f(1) = -2$, on funktiolla ainakin yksi nollakohta välillä $0 < x < 1$

x	0	1	0,7	0,8	0,75	0,74	0,745
f(x)	1	-2	0,23	-0,35	- 0,04	0,01	- 0,01

siis nollakohta x on välillä $0{,}740 < x < 0{,}745$, joten $\mathbf{x \approx 0{,}74}$

8. $y = 4x - x^2$; $y' = 4 - 2x$; $k_T = y'(1) = 4 - 2 = 2$
YHT: $y - 3 = 2(x - 1)$; $y - 3 = 2x - 2$; $y = 2x + 1$
$y = x^2 - 6x + k$; $y' = 2x - 6$; $k_T = 2$; $y' = 2$; $2x - 6 = 2$; $2x = 8$; $x = 4$; $y = 2\cdot4 + 1 = 9$ Koska piste paraabelilla $9 = 16 - 24 + k$; $\mathbf{k = 17}$

9. Olkoon x = jäsenien määrä. Kun $x < 150$, on $M = x \cdot 75 \cdot 0{,}06 = 4{,}5x$.
Kun $x \geq 150$, on $M = x \cdot 75 \cdot 0{,}04 + a = 3x + a$. $M(x) = \begin{cases} 4{,}5x, & \text{kun } x < 150 \\ 3x + a, & \text{kun } x \geq 150 \end{cases}$.
Ei "hyppäystä", jos $\lim_{x \to 150-} M(x) = \lim_{x \to 150+} M(x) = M(150)$
$4{,}5 \cdot 150 = 3 \cdot 150 + a = 3 \cdot 150 + a$; $\mathbf{a = 225}$

10. Olkoon pesiä x. Tuotto/pesä = $20 - (x - 6) \cdot 2 = 32 - 2x$.
Tuotto $T(x) = x \cdot (32 - 2x) = 32x - 2x^2$. $0 \leq x \leq 16$ on JVA sulj välillä. DVA.
$T'(x) = 32 - 4x$; $T' = 0$; $32 - 4x = 0$; $x = 8$.
$T(0) = 0$; $T(16) = 0$; $T(8) = 128$, joka on suurin. V: **Pesiä on 8 kpl**.

95.2.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ b) $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ c) $f(x) = (2x + 3)^4$

95.2.2. Mikä on käyrän $y = x^3 - 4x^2 + 5$ kohtaan $x = -1$ piirretyn normaalin yhtälö?

95.2.3. Laske raja-arvot a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$ b) $\lim_{x \to 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{2x - 4}$.

95.2.4. Tutki, onko funktio $f(x) = \begin{cases} -3 - x, & \text{kun } x \leq -1 \\ x^2, & \text{kun } -1 < x < 2 \\ -\frac{1}{4}x^2 + 5, & \text{kun } x \geq 2 \end{cases}$ jatkuva kohdassa a) -1 b) 2.

95.2.5. Määritä vakio a siten, että funktiolle $f(x) = x^3 - ax^2 - 2a^2x - 1$ on voimassa $f'(a) = f(1)$.

95.2.6. Laske funktion $f(x) = x^3 - \frac{1}{4}x^2 - x$ suurin ja pienin arvo välillä [0,1].

95.2.7. Osoita, että käyrillä $y = e^x$ ja $y = -x^2 + 2$ on ainakin 2 leikkauspistettä.

95.2.8. Muodosta jokin sellainen funktio, joka toteuttaa ehdot: 1° $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2$ ja 2° jonka ainoa epäjatkuvuuskohta on $x = 1$.

95.2.9. Osoita, että käyrät $y = x^4 + 3x^2 + 2x$ ja $y = 2x - 1$ eivät kohtaa. Mikä on niiden lyhin etäisyys?

95.2.10. Jana on jaettu kahteen osaan, joista toinen on neliön lävistäjä ja toinen ympyrän halkaisija. Määritä janan suuremman ja pienemmän osan pituuksien suhde silloin, kun neliön ja ympyrän alojen summa on mahdollisimman pieni.

1. a) $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$; $\mathbf{f'(x) = 4x + 3}$ b) $f(x) = \sqrt{2x+3}$; $f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2x+3}}}$ c) $f(x) = (2x+3)^4$

$f'(x) = 4(2x+3)^3 \cdot 2 = \mathbf{8(2x+3)^3}$

2. Piste: $x = -1$; $y = -1 - 4 + 5 = 0$; $P = (-1,0)$; Kulmak: $y' = 3x^2 - 8x$; $k_T = y'(-1) = 3 + 8 = 11$; $k_N = -\dfrac{1}{11}$

Normaali: $y - 0 = -\dfrac{1}{11}(x+1)$ $\|\cdot 11$; $11y = -x - 1$; $\mathbf{x + 11y + 1 = 0}$

3. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{2x+1}$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{2x+1} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{2x-4} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-\sqrt{3x-2})(x+\sqrt{3x-2})}{(2x-4)(x+\sqrt{3x-2})} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{(2x-4)(x+\sqrt{3x-2})} =$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{2(x-2)(x+\sqrt{3x-2})} = \dfrac{2-1}{2(2+\sqrt{6-2})} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$

4. a) $\lim\limits_{x\to -1-}(-3-x) = -3 + 1 = -2$ JA $\lim\limits_{x\to -1+}(x^2) = 1$ JA $f(-1) = -3 + 1 = -2$ **EI JVA**

b) $\lim\limits_{x\to 2-}(x^2) = 4$ JA $\lim\limits_{x\to 2+}(-\tfrac14 x^2+5) = -1 + 5 = 4$ JA $f(2) = -1 + 5 = 4$ **ON JVA**

5. $f(x) = x^3 - ax^2 - 2a^2x - 1$; $f'(x) = 3x^2 - 2ax - 2a^2$; $f'(a) = f(1)$; $3a^2 - 2a^2 - 2a^2 = 1 - a - 2a^2 - 1$

$a^2 + a = 0$; $a(a+1) = 0$; $\mathbf{a = 0}$ tai $\mathbf{a = -1}$

6. $f(x) = x^3 - \tfrac14 x^2 - x$, $x \in [0,1]$; f on jva sulj. välillä. DVA . $f'(x) = 3x^2 - \tfrac12 x - 1$; $f' = 0$; $3x^2 - \tfrac12 x - 1 = 0$

$6x^2 - x - 2 = 0$; $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \dfrac{1 \pm 7}{12}$; $x = \dfrac{2}{3}$ (tai $x = -\tfrac12$)

$f(0) = \mathbf{0}$ **SUURIN** ; $f(1) = -\tfrac14$; $f(\tfrac23) = \dfrac{8}{27} - \tfrac14\cdot\dfrac49 - \dfrac23 = \mathbf{-\dfrac{13}{27}}$ **PIENIN**

7. LP: $y = e^x$ JA $y = -x^2 + 2$; $e^x = -x^2 + 2$; $e^x + x^2 - 2 = 0$; Tutkitaan fkt:a $f(x) = e^x + x^2 - 2$
JVA & $f(0) = -2 < 0$ & $f(1) = e - 1 > 0$ $\Rightarrow$ välillä]0,1[on ainakin yksi nk ts. ain. 1 x ts. ain. 1 lp
JVA & $f(0) = -2 < 0$ & $f(-2) = x^{-2} + 2 > 0$ $\Rightarrow$ välillä]-2,0[on ainakin 1 lp
Väleillä ei yhteisiä pisteitä $\Rightarrow$ käyrillä on ainakin 2 leikkauspistettä.

8. 1° $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2 \Leftrightarrow f'(0) = 2$; 2° EJK x = 1 $\Rightarrow$ fkt voisi olla $f(x) = \dfrac{a}{x-1}$

$f'(x) = \dfrac{0 - 1\cdot a}{(x-1)^2}$; $f'(0) = 2$; $\dfrac{-a}{1} = 2$; $a = -2$; $f(x) = \dfrac{-2}{x-1} = \dfrac{2}{1-x}$

9. LP : $y = x^4 + 3x^2 + 2x$ JA $y = 2x - 1$; $x^4 + 3x^2 + 2x = 2x - 1$; $x^4 + 3x^2 + 1 = 0$, jolla ei ole ratkaisua ,
koska $x^4 \geq 0$ ja $x^2 \geq 0$ ja $1 > 0$, joten käyrillä ei ole leikkauspistettä
Lähin piste on se, johon piirretty tangentti on suoran suuntainen.
$k_T = y' = 4x^3 + 6x + 2 = 2$; $2x(2x^2 + 3) = 0$; $x = 0$; Piste = (0,0) $d = \dfrac{|0 - 0 - 1|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$

10. Olkoon janan osat x ja a-x, josta x on neliön lävistäjä $x = s\sqrt2$; $s = \dfrac{x}{\sqrt2}$; $A_N = \dfrac{x^2}{2}$

$a - x = 2\pi r$; $r = \dfrac{a-x}{2\pi}$; $A_Y = \pi\cdot\dfrac{(a-x)^2}{4\pi^2}$; $A(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{(a-x)^2}{4\pi}$ ($0 \leq x \leq a$) JVA sulj. väl. DVA

$A'(x) = x + \dfrac{2(a-x)\cdot(-1)}{4\pi} = x + \dfrac{x-a}{2\pi}$; $A'(x) = 0$; $2\pi x + x - a = 0$; $x = \dfrac{a}{2\pi+1}$

$A(0) = \dfrac{a^2}{4\pi} = 0{,}0796a^2$; $A(a) = \tfrac12 a^2$; $A(\dfrac{a}{2\pi+1}) = \dfrac{a^2}{4(2\pi+1)^2} + \dfrac{1}{4\pi}(a - \dfrac{a}{2\pi+1})^2 = \dfrac{(4\pi+1)a^2}{4(2\pi+1)^2} = 0{,}0639a^2$

PIENIN. $\dfrac{x}{a-x} = \dfrac{a/(2\pi+1)}{a - a/(2\pi+1)} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi}}$

96.1.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 1$ b) $f(x) = (2x-3)(4x+5)$ c) $f(x) = (3x-2)^5$.

96.1.2. Laske raja-arvot a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-4x-4}{4x^2-5x-6}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x-4}{4x^2-5x-6}$

96.1.3. Kirjoita funktiolle $f(x) = x^2 + 3x$ erotusosamäärän lauseke kohdassa $x = 1$ ja määritä sen avulla tässä kohdassa olevan derivaatan arvo.

96.1.4. Mikä on funktion $f(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x - 8}$ epäjatkuvuuskohta? Määrittele funktiolle lisäehto niin, että näin saatu funktio on jatkuva kaikkialla.

96.1.5. Osoita, että yhtälöllä $2^x = 2x + 3$ on positiivinen ratkaisu. Laske sen 2 desimaalinen likiarvo.

96.1.6. Laske käyrän $y = x^3 - 2x$ pisteeseen (-1,1) piirretyn tangentin yhtälö. Missä pisteessä tämä tangentti vielä leikkaa käyrän?

96.1.7. Laske funktion $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 8x + 5$ suurin ja pienin arvo välillä [0,3].

96.1.8. Määritä a ja b, kun piste (1,2) on funktion $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$ kuvaajan minimipiste. Mikä on tällöin maksimipiste?

96.1.9. Määritä käyrän $y = \frac{4x^2 - 8x + 4}{2x - 3}$ asymptootit ja ääriarvopisteet. Piirrä käyrä pääpiirteittäin näiden tietojen perusteella.

96.1.10. Suorakulmio, jonka piiri on 12 cm, pyörähtää yhden sivunsa ympäri. Mikä on muodostuvan suoran ympyrälieriön suurin mahdollinen tilavuus?

---

1. a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 1$; $f'(x) = 5x^4 - 12x^2 + 2$
b) $f(x) = (2x - 3)(4x + 5) = 8x^2 + 10x - 12x - 15 = 8x^2 - 2x - 15$; $f'(x) = 16x - 2$
c) $f(x) = (3x - 2)^5$; $f'(x) = 5(3x - 2)^4 \cdot 3 = 15(3x - 2)^4$

---

2. a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-4x-4}{4x^2-5x-6} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(3x+2)}{(x-2)(4x+3)} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{3x+2}{4x+3} = \frac{8}{11}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^2-4x-4^{(x^2}}{4x^2-5x-6} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{3-4/x-4/x^2}{4-5/x-6/x^2} = \frac{3}{4}$

---

3. EOM $= \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 4)}{x - 1} = x + 4 \to 1 + 4 = 5 = f'(1)$

---

4. $f(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x - 8}$, Mj: $4x - 8 \neq 0$; $x \neq 2$. EJK: x = 2 .

Jotta f JVA, kun x = 2, on oltava $f(2) = \lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{4x-8} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+4)}{4(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{2x+4}{4} = 2$

---

5. $2^x = 2x + 3$; $2^x - 2x - 3 = 0$. Tutkitaan funktioa $f(x) = 2^x - 2x - 3$, jonka nollakohta on myös annetun yhtälön ratkaisu. f on jatkuva & f(3) = -1 & f(4) = 5 $\Rightarrow$ f:llä on ainakin yksi nk, joka on välillä]3,4[ja siis positiivinen

x	3,2	3,3	3,25	3,24	3,245	
f(x)	-0,2	0,2	0,01	-0,03	-0,009	täten nk on välillä $3{,}245 < x < 3{,}250$ $x \approx 3{,}25$

---

6. $y = x^3 - 2x$; $y' = 3x^2 - 2$; $k_T = y'(-1) = 3 - 2 = 1$. Tang. yht.: $y - 1 = 1(x + 1)$; $y = x + 2$

LP: $\begin{cases} y = x^3 - 2x \\ y = x + 2 \end{cases}$; $x^3 - 2x = x + 2$; $x^3 - 3x - 2 = 0$; $(x + 1)(x^2 - x - 2) = 0$

$x + 1 = 0$ tai $x^2 - x - 2 = 0$; (x = -1 tai x = -1 tai) x = 2 ; y = 4 ; P = (2,4)

---

7. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 8x + 5$, $x \in [0,3]$. f on jva sulj. välillä, joten sillä on suurin ja pienin arvo. $f'(x) = 6x^2 - 8x - 8$;

$f'(x) = 0$; $6x^2 - 8x - 8 = 0$; $3x^2 - 4x - 4 = 0$; $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6}$

x = 2 (tai $x = -\frac{2}{3}$). f(0) = 5, f(2) = -11, f(3) = -1. Pienin = -11, suurin = 5.

---

8. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$; $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Jva, dva, ei reunoja $\Rightarrow$ ääriarvo f´:n nk:ssa

$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 1 + a + b + 3 = 2 \\ 3 + 2a + b = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} a + b = -2 \ \|\cdot(-1) \\ 2a + b = -3 \ \|\cdot 1 \end{cases}$; a = -1 ; b = -1

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 3$; $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$; $f' = 0$; $3x^2 - 2x - 1 = 0$; x = 1 tai x = -1/3

Maksimi = f(-1/3) = $-\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 3 = \frac{86}{27}$ V: P = $(-\frac{1}{3}, 3\frac{5}{27})$

9. $y = \dfrac{4x^2 - 8x + 4}{2x - 3}$. Pystysuora asymptootti 2x - 3 = 0 ; x = 1½
Muu asymptootti jakamalla $(4x^2 - 8x + 4):(2x - 3) = 2x - 1$ jää 1 ; y = 2x - 1
$y' = \dfrac{(8x - 8)(2x - 3) - 2(4x^2 - 8x + 4)}{(2x - 3)^2} = \dfrac{8x^2 - 24x + 16}{(2x - 3)^2}$;
$y' = 0$; $8x^2 - 24x + 16 = 0$; $x^2 - 3x + 2 = 0$; x = 1 tai x = 2
y´:n merkit ovat samat kuin osoittajan: PAR:
Minimipiste on (2,4) , maksimipiste on (1,0)

10. Kanta = x , Korkeus = 6 - x. Suorakulmio pyörähtää korkeussivunsa ympäri
$V(x) = \pi x^2(6 - x) = \pi(6x^2 - x^3)$, $0 \le x \le 6$. Jva sulj. välillä. Dva . $V'(x) = \pi(12x - 3x^2)$
V ´ = 0 : 12x - 3x2 = 0 ; 3x(4 - x) = 0 ; x = 0 tai x = 4
$V(0) = 0$; $V(6) = 0$; $V(4) = \pi\cdot 16(6 - 4) = 32\pi \approx 100\ (cm^2)$ on suurin

96.2.1. Derivoi a) $f(x) = x^4 - x^3$ b) $f(x) = (3x + 4)(5x^2 + 6x)$ c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{3x + 1}$.

96.2.2. Laske a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-2x^2-3x}$ b) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-2x^2-3x}$

96.2.3. Millä x:n arvoilla funktio $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 5$ on vähenevä?

96.2.4. Osoita, että polynomilla $P(x) = x^3 - 11x + 9$ on nollakohta välillä [0,2]. Laske tämän likiarvo 2 desimaalin tarkkuudella.

96.2.5. Laske funktion $f(x) = x^2 + 4x$ erotusosamäärä kohdasta 1 kohtaan x ja tämän avulla derivaatta f ´(1).

96.2.6. Olkoon $f(x) = \dfrac{3x^2 - 12}{4x - 8}$, kun $x \ne 2$. Miten f(2) on määritettävä, jotta funktio f olisi jatkuva kaikkialla?

96.2.7. Missä pisteessä suoran x - 2y + 3 = 0 suuntainen paraabelin $y = x^2$ normaali leikkaa x-akselin?

96.2.8. Laske funktion $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 4}$ asymptootit ja ääriarvot.

96.2.9. Kahden positiivisen luvun summa on 36. Määritä nämä luvut, kun niiden neliöiden tulo on mahdollisimman suuri.

96.2.10. Olkoon x_1 ja x_2 funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ reaaliset nollakohdat.
Osoita, että $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$.

1. $f(x) = x^4 - x^3$; $f'(x) = 4x^3 - 3x^2$
b) $f(x) = (3x + 4)(5x^2 + 6x) = 15x^3 + 18x^2 + 20x^2 + 24x$; $f'(x) = 45x^2 + 76x + 24$
c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{3x + 1}$; $f'(x) = \dfrac{2x(3x + 1) - 3(x^2 + 1)}{(3x + 1)^2} = \dfrac{6x^2 + 2x - 3x^2 - 3}{(3x + 1)^2} = \dfrac{3x^2 + 2x - 3}{(3x + 1)^2}$

2.a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-2x^2-3x} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x-1)}{x(x^2-2x-3)} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x-1)}{x(x-3)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{x(x+1)} = \dfrac{2}{3\cdot 4} = \dfrac{1}{6}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-4x+3^{(x^3}}{x^3-2x^2-3x} = \lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1/x-4/x^2+3/x^3}{x-2/x-3/x^2} = \dfrac{0 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = \dfrac{0}{1} = 0$

3. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 5$; $f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$; $f' = 0$; $3x^2 + 4x - 4 = 0$; $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \dfrac{-4 \pm 8}{6}$; $x = \dfrac{2}{3}$ tai
x = - 2 . KUV: YAP ⇒ f ' ; +++ -2 --- $\dfrac{2}{3}$ +++ f on vähenevä, kun $f' \le 0$ V: $-2 \le x \le \dfrac{2}{3}$

4. $P(x) = x^3 - 11x + 9$ on polynomina JVA, P(0) = 9 ja P(2) = - 5 ⇒ ∃ ainakin 1 NK

x	0	1	0,5	0,8	0,85	0,9	0,87	0,88	0,89	0,885
P(x)	9	-1	3,6	0,7	-0,17	0,26	0,09	0,001	-0,09	-0,04

joten nollakohta on välillä 0,880 < x < 0,885 V x ≈ 0,88

5. EOM = $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 5)}{(x - 1)} = x + 5$

$f'(1) = \lim_{x\to 1} EOM = \lim_{x\to 1}(x+5) = 6$

6. Jotta funktio f olisi JVA kohdassa x = 2 on oltava

$f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{3x^2-12}{4x-8} = \lim_{x\to 2}\frac{3(x^2-4)}{4(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)(x+2)}{4(x-2)} = \frac{3\cdot(2+2)}{4} = 3$

7. $x - 2y + 3 = 0$; $y = ½x + 1½$; $k_N = ½$; $k_T = -2$; $y' = -2$; $2x = -2$; $x = -1$; $y = 1$ P = (-1,1)
NORM.: $x - 2y + c = 0$; $-1 - 2 + c = 0$; $c = 3$; $x - 2y + 3 = 0$
x-aks. LP: $y = 0$; $x + 3 = 0$; $x = -3$ V: (-3,0)

8. Pystys. as.: NIM = 0 ; $x - 4 = 0$; $x = 4$
Vino as.: $y = \frac{x^2}{x - 4} = x + 4 + \frac{16}{x - 4}$; $y = x + 4$
$y' = \frac{2x(x - 4) - 1x^2}{(x - 4)^2} = \frac{x^2 - 8x}{(x - 4)^2}$ $y' = 0$; $x^2 - 8x = 0$; $x(x - 8) = 0$; $x = 0$ tai $x = 8$
Os. määrää merkin. KUV: YAP. Merkit : +++ 0 --- 8 +++
Max = y(0) = 0. Min = y(8) = 16

9. Olk. 1. luku = x, 2. luku = 36 - x ; $T(x) = x^2(36 - x)^2 = 1296x^2 - 72x^3 + x^4$, $0 < x < 36$
Toivotaan, ettei suurin arvo tule reunalla ja tutkitaan sulj. väliä [0,36], jolla fkt on jva
$T'(x) = 2592x - 216x^2 + 4x^3 = 4x(x^2 - 54x + 648)$
$T' = 0$; $x = 0$ tai $x = \frac{54 \pm \sqrt{2916 - 2592}}{2} = \frac{54 \pm 18}{2}$; $x = 36$ tai $x = 18$
T(0) = 0 ; T(36) = 0 ; T(18) = 104 976, joka on suurin arvo

10. $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$; $f'(x) = a\cdot 1(x - x_2) + a(x - x_1)\cdot 1 = a(x - x_2) + a(x - x_1)$
$f'(x_1) + f'(x_2) = a(x_1 - x_2) + a\cdot 0 + a\cdot 0 + a(x_2 - x_1) = 0$

96.3.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$ b) $f(x) = 3(2x - 1)^4$ c) $f(x) = \frac{3x - 2}{4x + 5}$

96.3.2. Laske raja-arvot a) $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{3x^2-5x-2}$ b) $\lim_{x\to \infty}\frac{2x^2-5x+2}{3x^2-5x-2}$

96.3.3. Ratkaise yhtälö $f(x) = f'(x)$, kun $f(x) = x^2 + 3x + 1$.

96.3.4. Laske funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ suurin ja pienin arvo välillä [1,3].

96.3.5. Millä välillä funktio $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$ on vähenevä?

96.3.6. Mikä on funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ erotusosamäärä välillä [1,3]. Kuinka monta prosenttia se poikkeaa derivaatan arvosta kohdassa 2?

96.3.7. Laske käyrän $y = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ kohtaan x = 1 piirretyn normaalin yhtälö. Miten suuri on tämän normaalin ja koordinaattiakselien rajoittaman kolmion pinta-ala?

96.3.8. Laske käyrän $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$ asymptootit ja ääriarvot sekä piirrä näiden perusteella käyrä pääpiirteittäin.

96.3.9. Perunaviljelijä arvioi kesällä varhaisperunaa olevan pellossa 300 kg, kun niiden hinta markkinoilla oli 12 mk/kg. Hän arvioi perunamäärän kasvavan 25 kg päivässä ja hinnan laskevan 50 p päivässä. Jos hän myy kaikki perunat kerralla, niin milloin myynti on kannattavinta kahden seuraavan viikon aikana?

96.3.10. Millä a:n arvoilla funktiolla $f(x) = a^x + ax - 3$ on ainakin yksi nollakohta välillä [1,2]?

1. a) $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$; $f'(x) = 6x + 4$ b) $f(x) = 3(2x - 1)^4$; $f'(x) = 3\cdot 4(2x - 1)^3\cdot 2 = 24(2x - 1)^3$
c) $f(x) = \frac{3x - 2}{4x + 5}$; $f'(x) = \frac{3(4x + 5) - 4(3x - 2)}{(4x + 5)^2} = \frac{23}{(4x + 5)^2}$

2. a) $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{3x^2-5x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(3x+1)} = \lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{3x+1} = \frac{3}{7}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+2^{(x^2}}{3x^2-5x-2} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-5/x+2/x^2}{3-5/x-2/x^2} = \dfrac{2}{3}$

3. $f(x) = x^2 + 3x + 1$; $f(x) = f\,'(x)$; $x^2 + 3x + 1 = 2x + 3$; $x^2 + x - 2 = 0$; $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$; $x = 1$ tai $x = -2$

4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ on jatkuva suljetulla välillä [1,3] ja derivoituva. $f\,'(x) = 3x^2 - 6x$
$f\,'(x) = 0$; $3x^2 - 6x = 0$; $3x(x - 2) = 0$; ($x = 0$) tai $x = 2$
$f(1) = 2$; $f(2) = 0$; $f(3) = 4$ V: Suurin = $f(3) = 4$, pienin = $f(2) = 0$

5. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$; $f\,'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. f on vähenevä, kun $f\,'(x) \le 0$
NK: $3x^2 - 4x + 1 = 0$; $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \dfrac{4 \pm 2}{6}$; $x = 1$ tai $x = \dfrac{1}{3}$ KUV: YAP. Merkit +++ $\dfrac{1}{3}$ --- 1 +++ $\dfrac{1}{3} \le x \le 1$

6. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$; $f\,'(x) = 3x^2 - 4x + 3$; $f\,'(2) = 7$
EOM. $= \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{14 - (-2)}{2} = 8$; poikkeama = 1 ; $1 = \dfrac{x}{100}\cdot 7$; $x = 14{,}3$ V: 14,3%

7. $y = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ Piste: $x = 1$; $y = 2 - 3 + 4 - 1 = 2 \Rightarrow P = (1,2)$
K: $y' = 6x^2 - 6x + 4$; $k_T = y'(1) = 4$; $k_N = -\frac{1}{4}$
YHT: $y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 1)$; $4y - 8 = -x + 1$; $x + 4y - 9 = 0$
AKS.LP: $x = 0 \Rightarrow y = 2\frac{1}{4} = h$; $y = 0 \Rightarrow x = 9 = a$; ALA: $A = \frac{1}{2}\cdot 2\frac{1}{4}\cdot 9 = 10{,}125$

8. Pystysuora asymptootti: $x^2 = 3$; $x = \pm\sqrt{3}$ Vino asymptootti: jakamalla $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 3} = x + \dfrac{3x}{x^2 - 3}$; $y = x$
$y' = \dfrac{3x^2(x^2 - 3) - 2x\cdot x^3}{(x^2 - 3)^2} = \dfrac{x^4 - 9x^2}{(x^2 - 3)^2}$ $y' = 0$: $x^4 - 9x^2 = 0$; $x^2(x^2 - 9) = 0$; $x = 0$ tai $x = \pm 3$
y':n merkit: samat kuin $(x^2 - 9)$:n. KUV: YAP.
y ' : +++ -3 --- 3 +++
y : ↗ ¯ ↘ _ ↗ Min = $y(3) = 4\frac{1}{2}$;Max = $y(-3) = -4\frac{1}{2}$

9. Olkoon x = päiviä alkutilanteesta. Hinta = $12 - \frac{1}{2}x$. Määrä = $300 + 25x$
$T(x) = (12 - \frac{1}{2}x)(300 + 25x) = 3600 + 150x - 12\frac{1}{2}x^2$; $0 \le x \le 14$
T(x) on JVA sulj. väl. $T\,'(x) = 150 - 25x$; $T\,' = 0$; $x = 6$
$T(0) = 3600$; $T(6) = 4050$; $T(14) = 3250$ V: Kuudentena päivänä.

10. $f(x) = a^x + ax - 3$ on jatkuva suljetulla välillä [1,2], joten sillä on ainakin yksi nollakohta, jos f saa erimerkkiset arvot tai arvon nolla välin päätepisteissä.
Eksponenttifkt:n kantaluku $> 0 \Rightarrow a > 0$
JOKO 1° $f(1) \le 0$ JA $f(2) \ge 0 \Leftrightarrow a + a - 3 \le 0$ JA $a^2 + 2a - 3 \ge 0$
$\Leftrightarrow a \le 1\frac{1}{2}$ JA ($a \ge 1$ TAI $a \le -3$) $\Leftrightarrow a \le -3$ TAI $1 \le a \le 1\frac{1}{2}$; V: $1 \le a \le 1\frac{1}{2}$
TAI 2° $f(1) \ge 0$ JA $f(2) \le 0 \Leftrightarrow 2a - 3 \ge 0$ JA $a^2 + 2a - 3 \le 0$
$\Leftrightarrow a \ge 1\frac{1}{2}$ JA ($-3 \le a \le 1$) , mitä ehtoja ei yksikään a toteuta.

97.1.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = 5x^3 - 10x^2 + 12x - 13$ b) $f(x) = (3x^2 + 4)^5$ c) $f(x) = \dfrac{3x - 4}{x^2 + 5}$

97.1.2. Osoita, että funktiolla $f(x) = x^5 - x^3 + 2$ on ainakin yksi nollakohta.

97.1.3. Määritä raja-arvot a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3x-5}{3x^2-4x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{\sqrt{3x}-3}$

97.1.4. Laske funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$ ääriarvot

97.1.5. Mitkä ovat funktion $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - x - 2}$ asymptootit?

97.1.6. Mikä on käyrän $y = (2x^2 - x)^3 - 1$ suurempaan nollakohtaan piirretyn tangentin yhtälö?

97.1.7. Millä välillä funktio $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ kasvaa voimakkaammin tai vähenee hitaammin kuin funktio $g(x) = 5x^2 + 2x - 7$?

97.1.8. Määritä vakiolla c sellainen arvo, että funktion $f(x) = x^3 - x^2 - x + c$ pienin arvo välillä [0,2] on 12.

97.1.9. Tasakylkisen kolmion huippu on origossa ja kannan päätepisteet x-akselin yläpuolella paraabelilla $y = 3 - x^2$. Mikä on tällaisen kolmion alan suurin mahdollinen arvo?

97.1.10. Olkoon f(1) = 2 ja $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 3}{x - 1}$, kun $x \neq 1$. Määritä vakioiden a ja b arvot, kun funktio f on jatkuva kohdassa x = 1.

1. a) $f(x) = 5x^3 - 10x^2 + 12x - 13$; $f'(x) = 15x^2 - 20x + 12$
b) $f(x) = (3x^2 + 4)^5$; $f'(x) = 5(3x^2 + 4)^4 \cdot 6x = 30x(3x^2 + 4)^4$
c) $f(x) = \dfrac{3x - 4}{x^2 + 5}$; $f'(x) = \dfrac{3(x^2 + 5) - 2x(3x - 4)}{(x^2 + 5)^2} = \dfrac{3x^2 + 15 - 6x^2 + 8x}{(x^2 + 5)^2} = \dfrac{-3x^2 + 8x + 15}{(x^2 + 5)^2}$

2. $f(x) = x^5 - x^3 + 2$ on jatkuva, koska polynomit ovat jatkuvia.
$f(0) = 2 > 0$ ja $f(-2) = -32 + 8 + 2 = -22 < 0$. Tällöin välillä [-2,0] on ainakin yksi nollakohta

3. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3x-5}{3x^2-4x+1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x+5)}{(x-1)(3x-1)} = \dfrac{7}{2} = 3½$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{\sqrt{3x}-3} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(2x-6)(\sqrt{3x}+3)}{(\sqrt{3x}-3)(\sqrt{3x}+3)} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2(x-3)(\sqrt{3x}+3)}{3x-9} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2(x-3)(\sqrt{3x}+3)}{3(x-3)} = \dfrac{2(3+3)}{3} = 4$

4. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$ on JVA ja DVA eikä reunoja. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
$f'(x) = 0$: $3x^2 - 12x + 9 = 0$; $x = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{6} = \dfrac{12 \pm 6}{6}$; x = 3 tai x = 1
f´:n merkit:
Max = f(1) = 1 - 6 + 9 - 5 = -1 ; Min = f(3) = 27 -54 + 27 - 5 = -5

5. $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - x - 2} = \dfrac{x(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)(x - 2)} = \dfrac{x^2 - x}{x - 2} = x + 1 + \dfrac{2}{x - 2}$
Pystysuora asymptootti on x = 2 ja vino asymptootti on y = x + 1

6. $y = (2x^2 - x)^3 - 1$; NK: $(2x^2 - x)^3 - 1 = 0$; $(2x^2 - x)^3 = 1$; $2x^2 - x = 1$; $2x^2 - x - 1 = 0$
$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4}$; x = 1 (tai x = -½) $y' = 3(2x^2 - x)^2 \cdot (4x - 1)$
$k_T = y'(2) = 3(2 - 1)^2 \cdot (4 - 1) = 9$; YHT: y - 0 = 9(x - 1) ; y = 9x - 9

7. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 5$; $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2$; $g(x) = 5x^2 + 2x - 7$; $g'(x) = 10x + 2$
f kasvaa voimakkaammin kuin g, jos $f' \geq g'$; $3x^2 + 6x - 2 \geq 10x + 2$; $3x^2 - 4x - 4 \geq 0$
NK: $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \dfrac{4 \pm 8}{6}$; x = 2 tai $x = -\dfrac{2}{3}$ PAR: + + + -2/3 - - - 2 + + +
V : $x \leq -2/3$ tai $x \geq 2$

8. $f(x) = x^3 - x^2 - x + c$ on jatkuva suljetulla välillä [0,2]. DVA ; $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$
f´= 0: $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \dfrac{2 \pm 4}{6}$; x = 1 tai x = - 1/3
f(0) = c ; f(2) = c + 2 ; f(1) = c - 1, joka on pienin ; c - 1 = 12 ; c = 13

9. Maksimoitava suure on ala. Olkoon I neljänneksessä olevan kärkipisteen x-koord. = x
Kanta = 2x ja korkeus = $y = 3 - x^2$
$A(x) = ½ \cdot 2x \cdot (3 - x^2) = 3x - x^3$, $0 \leq x \leq \sqrt{3}$. A(x) on jva sulj. välillä
$A'(x) = 3 - 3x^2$; A´= 0 ; $3 - 3x^2 = 0$; $x^2 = 1$; x = ± 1
A(0) = 0 ; $A(\sqrt{3}) = 0$; A(1) = 2 , joka on suurin

10. f on jatkuva kohdassa x = 1, jos $f(1) = 2 = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+bx+3}{x-1}$
Ei raja-arvoa, ellei (x - 1) supistu. Jaetaan jakokulmassa $(ax^2 + bx + 3) : (x - 1) = ax + (a + b)$ jää a + b + 3
$\begin{cases} \lim = 2 \\ \text{jakoj} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a \cdot 1 + (a + b) = 2 \\ a + b + 3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2a + b = 2 \; \| \cdot 1 \\ a + b = -3 \; \| \cdot 1 \end{cases}$ a = 5 ; b = -8

97.2.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = x^2(x - 1)$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ c) $f(x) = (x^2 - x)^2$

97.2.2. Ratkaise yhtälö $f(x) = 2 \cdot f'(x)$, kun $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$.

97.2.3. Mikä on funktion $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$ suurin ja pienin arvo välillä [-1,2]?

97.2.4. Laske raja-arvot a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+4x-7}{5x^2+6x-11}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x^2-x}\right)$

97.2.5. Määritä funktion $f(x) = x^4 - 8x^3 + 2$ ääriarvot.

97.2.6. Mikä on käyrän $y = x^2 - 4x + 5$ se tangentti, joka on suoran $2x + y = 5$ suuntainen?

97.2.7. Olkoon $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{4x - 12}$, kun $x \neq 3$. Onko funktio kaikkialla jatkuva, jos määritellään, että $f(3) = 1½$?

97.2.8. Laske käyrän $y = \dfrac{2x - 2½}{x^2 - 1}$ asymptootit, nollakohdat ja ääriarvot sekä piirrä näiden perusteella käyrä.

97.2.9. Osoita, että yhtälöllä $x^3 - 3x^2 + 4x + 10 = 0$ on täsmälleen yksi reaalinen ratkaisu.

97.2.10. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 3 ja 9. Kolmion sisään on piirretty suorakulmio, jonka kaksi sivua ovat kateeteilla ja yksi kärki hypotenuusalla. Kolmio pyörähtää suuremman kateettinsa ympäri, jolloin kolmio muodostaa suoran ympyräkartion ja suorakulmio suoran ympyrälieriön. Mikä on ympyrälieriön suurin mahdollinen tilavuus?

---

1. a) $f(x) = x^2(x - 1) = x^3 - x^2$; $f'(x) = 3x^2 - 2x$ c) $f(x) = (x^2 - x)^2$; $f'(x) = 2(x^2 - x)(2x - 1)$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$; $f'(x) = \dfrac{2x(x - 1) - 1\cdot x^2}{(x - 1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$

---

2. $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$; $f(x) = 2\cdot f'(x)$; $2x^2 + 3x - 1 = 2(4x + 3)$; $2x^2 + 3x - 1 = 8x + 6$

$2x^2 - 5x - 7 = 0$; $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{4} = \dfrac{5 \pm 9}{4}$; $x = 3½$ tai $x = -1$

---

3. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$ on polynomina jatkuva suljetulla välillä [-1,2]. F on DVA.

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$, $f'(x) = 0$; $x = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{6} = \dfrac{10 \pm 4}{6}$; ($x = 7/3$) tai $x = 1$

$f(-1) = -1-5-7-9 = -22$; $f(1) = 1-5+7-9 = -6$; $f(2) = 8-20+14-9 = -7$. V : S = -6 , p = -22

---

4. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+4x-7}{5x^2+6x-11} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(3x+7)}{(x-1)(5x+11)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+7}{5x+11} = \dfrac{5}{8}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-x}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1\cdot x}{(x-1)\cdot x}-\dfrac{1}{x(x-1)}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x} = 1$

---

5. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 2$ JVA, DVA, ei reunoja. $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 = 4x^2(x - 6)$

$f'(x) = 0$; $x = 0$ tai $x = 6$. KUV: III asteen polynomi (alhaalta vasemmalta ylös oikealle, sivuaa 0:ssa)

f ’ : --- 0 --- 6 +++

f : ↘ - ↘ _ ↗ $\Rightarrow$ Minimiarvo = $f(6) = 1296 - 6\cdot 216 + 2 = -430$.

---

6. $2x + y = 5$; $y = -2x + 5$; $k_T = -2 = f'(x)$; $-2 = 2x - 4$; $2x = 2$; $x = 1$; $y = 1 - 4 + 5 = 2$

YHT: $y - 2 = -2(x - 1)$; $y - 2 = -2x + 2$; $y = -2x + 4$; $2x + y = 4$

---

7. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{4x - 12}$, on jatkuva kun $x \neq 3$, koska nimittäjä ei ole suuruudeltaan nolla.

f on jatkuva kun $x = 3$, jos raja-arvo, kun $x \to 3$ on yhtä suuri kuin f(3)

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{4x-12} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+3)(x-3)}{4(x-3)} = \dfrac{3+3}{4} = 1½ = f(3)$, joten f on jatkuva myös kun $x = 3$

---

8. $y = \dfrac{2x - 2½}{x^2 - 1}$; vaakasuora asymptootti $y = 0$ (koska os alempaa astetta kuin nim)

Pystysuora asymptootti kun $x^2 - 1 = 0$; $x = \pm 1$ NK: $2x - 2½ = 0$ $2x = 2½$; $x = 1¼$

$y' = \dfrac{2(x^2 - 1) - 2x(2x - 2½)}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{-2x^2 + 5x - 2}{(x^2 - 1)^2}$

OS = 0 ; $-2x^2 + 5x - 2 = 0$; $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{-4} = \dfrac{-5 \pm 3}{-4}$; $x = ½$ tai $x = 2$

y ’ :n merkit samat kuin osoittajan, jonka kuvaaja AAP

y ’ : --- ½ +++ 2 ---

y : ↘ _ ↗ ‾ ↘ $\Rightarrow$ V: minimi = y(½) = 2 , maksimi = y(2) = ½

---

9. $x^3 - 3x^2 + 4x + 10 = 0$, tutkitaan funktioa $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 10$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$; $f' = 0$; $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 48}}{6} \notin R$; KUV:

$\Rightarrow f' > 0$ ja siis f on kasvava ja saa siis jokaisen arvonsa kerran (=1°).

f JVA & $f(0) = 10 > 0$ & $f(-2) = -8 - 12 - 8 + 10 = -18 < 0$, joten f:llä on ainakin yksi nk. (=2°)

Täten kohtien 1° ja 2° perusteella nollakohtia on täsmälleen yksi

10. Olkoon kolmion kateetit AC = 3 ja BC = 9. Suorakulmio olkoon CDEF, missä D on AC:llä ja E AB:llä. Olkoon EF = x ja CF = h. $\Delta FEB \sim \Delta CAB$; $\frac{x}{3} = \frac{9 - h}{9}$; h = 9 - 3x. $V(x) = \pi x^2(9 - 3x) = 3\pi(3x^2 - x^3)$, $0 \le x \le 3$; V(x) on jva sulj. välillä ; $V'(x) = 3\pi(6x - 3x^2)$ $V'=0$; $6x - 3x^2 = 0$; $3x(2 - x) = 0$; x = 0 tai x = 2 V(0) = 0 ; V(3) = 0 ; V(2) = 12π on suurin. V: Suurin tilavuus on $12\pi \approx 37{,}7$

97.3.1. Derivoi a) $f(x) = 2x(3x + 4)$ b) $f(x) = \frac{2x}{3x + 4}$ c) $f(x) = (2x + 3)^4$

97.3.2. Määritä raja-arvot a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4}$

97.3.3. Osoita, että funktiolla $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ on ainakin yksi nollakohta. Määritä jokin niistä 0,01 tarkkuudella.

97.3.4. Ratkaise yhtälö $5\cdot f(x) = (3x - 1) \cdot f'(x)$, kun $f(x) = x^2 + 3x - 3$.

97.3.5. Mitä arvoja funktio $f(x) = 1 + 3x^2 - x^3$ saa välillä [-2,1]?

97.3.6. Määritä vakio a, kun funktion $f(x) = x^3 - 12x + a$ minimiarvo on 1. Mikä on tällöin maksimiarvo?

97.3.7. Miten määritellään funktion jatkuvuus kohdassa x = a? Anna esimerkki funktiosta, joka on määritelty koko reaalilukujoukossa, mutta ei ole jatkuva, kun x = 1 ja x = 2.

97.3.8. Laske sen kolmion ala, jota rajoittaa koordinaattiakselit ja käyrän $y = x^2 - 3x + 4$ se tangentti, joka on suoran y = 5x + 6 suuntainen.

97.3.9. Määritä vakiot a, b ja c siten, että suora y = 2x + 3 on käyrän $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 1}$ asymptootti ja käyrän minimikohtana on x = 2.

97.3.10. Suorakulmion piiri on 12. Suorakulmio pyörähtää yhden sivuista ollessa pyörähdysakselina. Mikä on syntyvän ympyrälieriön suurin mahdollinen tilavuus?

1. a) $f(x) = 2x(3x + 4) = 6x^2 + 8x$; $f'(x) = 12x + 8$ b) $f(x) = \frac{2x}{3x + 4}$; $f'(x) = \frac{2(3x + 4) - 3\cdot 2x}{(3x + 4)^2} = \frac{8}{(3x + 4)^2}$ c) $f(x) = (2x + 3)^4$; $f'(x) = 4(2x + 3)^3\cdot 2 = 8(2x + 3)^3$
2. a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4} = \frac{1 - 2 - 3}{1 - 3 - 4} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-4)} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{x-3}{x-4} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$
3. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ on jatkuva & $f(2) = -1 < 0$ & $f(3) = 7 \Rightarrow \exists$ ain. 1 nk välillä [2,3] Haarukoidaan, jolloin huomataan, että $f(2{,}210) < 0$ ja $f(2{,}215) > 0$. $x \approx 2{,}21$
4. $f(x) = x^2 + 3x - 3$; $f'(x) = 2x + 3$; $5f(x) = (3x - 1) \cdot f'(x)$; $5(x^2 + 3x - 3) = (3x - 1)(2x + 3)$ $5x^2 + 15x - 15 = 6x^2 + 9x - 2x - 3$; $x^2 - 8x + 12 = 0$; $\frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}$; x = 6 tai x = 2
5. $f(x) = 1 + 3x^2 - x^3$ on JVA suljetulla välillä [-2,1]. $f'(x) = 6x - 3x^2$; $f'= 0$; $6x - 3x^2 = 0$; $3x(2 - x) = 0$; x = 0 (tai x = 2) f(-2) = 21 ; f(0) = 1 ; f(1) = 3, joten suurin = 21 ja pienin = 1. Kun funktio on jatkuva se saa myös kaikki arvot tältä väliltä. Arvojoukko = [1,21]
6. $f(x) = x^3 - 12x + a$; $f'(x) = 3x^2 - 12$; $f' = 0$; $3x^2 - 12 = 0$; $3x^2 = 12$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$ KUV: YAP f ' : +++ -2 --- 2 +++ f : ↗ ‾ ↘ _ ↗ $\Rightarrow$ Min. = f(2) = 8 - 24 + a = a - 16 ; a - 16 = 1 ; a = 17 Max = f(-2) = -8 + 24 + 17 = 33
7. Määritellään funktio f siten, että f(1) = f(2) = 0 ja muualla $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$ Tällöin Mj = $\mathbb{R}$ ja raja-arvoa kun 1 ja 2 ei ole, joten f ei jatkuva.

8. Tang. ∥ y = 5x + 6 ; k_T = 5 ; y´= 5 ; 2x - 3 = 5 ; 2x = 8 ; x = 4 ; y = 16 - 12 + 4 = 8 ; P(4,8) YHT: y - 8 = 5(x- 4) ; y - 8 = 5x - 20 ; y = 5x - 12 x-akselin lp : y = 0 ; 5x - 12 = 0 ; x = 2,4 = kanta ; y-akselin lp: x = 0 ; y = -12 ; kork. = 12 Ala = ½ · 2,4 ·12 = 14,4
9. Jaetaan $(ax^2 + bx + c) : (x - 1) = ax + (a + b) \equiv 2x + 3$; a = 2 ja a + b = 3 ; b = 1 $y = \frac{2x^2 + x + c}{x - 1}$; $y' = \frac{(4x + 1)(x - 1) - 1\cdot(2x^2 + x + c)}{(x - 1)^2}$ x = 2 on minimikohta ⇒ y´(2) = 0 ; 9·1 -(10 + c) = 0 ; c = 1 ; V: a = 2, b = 1 , c = 1
10. Olkoon kanta = x ⇒ h = 6 - x. Olkoon korkeusjana pyörähdysakselina, jolloin lieriön korkeus = 6 - x ja pohjaympyrän säde = x ; $V(x) = \pi x^2(6 - x) = \pi(6x^2 - x^3)$; $0 \le x \le 6$ V(x) on jatkuva suljetulla välillä ; $V'(x) = \pi(12x - 3x^2) = \pi 3x(4 - x)$; V´= 0 ; x = 0 tai x = 4 V(0) = 0 ; V(6) = 0 ; V(4) = π·16·(6 - 4) = 32π, joka on suurin.

98.1.1. Määritä käyrän $y = 2x - x^2$ pisteeseen (2,0) piirretyn tangentin ja normaalin yhtälöt.

98.1.2. Laske raja-arvo $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-7x+10}$

98.1.3. Määritä funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ suurin ja pienin arvo välillä [-2,0].

98.1.4. Ratkaise yhtälö f´(x) = 0, kun $f(x) = (x + 1)(x - 1)^3$.

98.1.5. Millä x:n arvoilla funktio $f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 2}$ on vähenevä?

98.1.6. Olkoon $f(x) = \frac{-2x^2 + 4x}{x - 2}$, kun x ≠ 2. Määritä f(2) siten, että funktio f on jatkuva kaikkialla.

98.1.7. Määritä funktion $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^2 - x}$ asymptootit.

98.1.8. Mikä on funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + a$ minimiarvo, kun maksimiarvio on 58?

98.1.9. Osoita, että yhtälöllä $x^2(x - 5) = 6(x - 2)$ on välillä [1,3] täsmälleen yksi ratkaisu.

98.1.10. Kolmion kanta on 16 ja korkeus 10. Kolmion sisään on piirretty suurin mahdollinen suunnikas siten, että sen erisuuntaisista sivuista toinen on kannalla ja toinen kyljellä. Montako prosenttia tämän suunnikkaan ala on koko kolmion alasta?

1. (2,0) on käyrällä $y = 2x - x^2$,sillä $0 = 2\cdot2 - 2^2$. y´= 2 - 2x ; k_T = y´(2) = 2 - 4 = -2 ; k_N = ½ T: y - 0 = -2(x - 2) ⇔ y = -2x + 4 . N: y - 0 = ½(x - 2) ⇔ y = ½x - 1
2. Koska sijoitus antaa 0/0, on x = 2 OS:n ja NIM:n nk eli niiden tekijänä on (x - 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-7x+10} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-5)} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+3)}{(x-5)} = -\frac{5}{3}$
3. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ on JVA sulj. välillä [-2,0] . $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$ on DVA f´ = 0 ; $6x^2 - 6x - 12 = 0$; $x^2 - x - 2 = 0$; $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$; (x = 2), x = -1 f(-2) = -16 - 12 + 24 = -4 ; f(0) = 0 ; f(-1) = -2 - 3 + 12 = 7 V: Suurin = 7, pienin = -4
4. $f(x) = (x + 1)(x - 1)^3$; $f'(x) = 1\cdot(x - 1)^3 + (x + 1)\cdot3(x - 1)^2\cdot1 = (x - 1)^2[(x - 1) + 3(x + 1)]$ $f'(x) = (x - 1)^2 \cdot [\,4x + 2\,] = 0$; x - 1 = 0 tai 4x + 2 = 0 ; x = 1 tai x = -½
5. $f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 2}$ on kaikkialla jatkuva, koska nimittäjä > 0 $f'(x) = \frac{(2x + 4)(x^2 + 2) - 2x(x^2 + 4x)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{2x^3 + 2x + 4x^2 + 8 - 2x^3 - 8x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{8 + 4x - 4x^2}{(x^2 + 2)^2}$ Nim> 0 → OS määrää merkin NK: $8 + 4x - 4x^2 = 0$ ∥: (-4) ; $x^2 - x - 2 = 0$; x = 2 tai x = -1 KUV: AAP. f ’:n merkit --- -1 +++ 2 --- ⇒ f vähenee kun f´≤ 0   V : x ≤ -1 tai x ≥ 2

6. $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 4x}{x - 2}$, $x \neq 2$ on määrittelyjoukossaan jatkuva, koska nim $\neq 0$

f on jatkuva, kun x = 2 , jos f(2) = $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-2x^2+4x}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-2x(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(-2x) = -4$

7. $f(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^2 - x} = 2x + 5 + \dfrac{5x + 4}{x^2 - x}$
Pystysuorat asymptootit : $x^2 - x = 0$; $x(x - 1) = 0$; x = 1 tai x = 0
Vino asymptootti : y = 2x + 5

8. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + a$ on JVA, DVA, ei reunoja $\Rightarrow$ ääriarvoja voi olla vain f ´:n nk:ssa
$f´(x) = 6x^2 - 6x - 36$; f ´= 0 ; $6x^2 - 6x - 36 = 0$; $x^2 - x - 6 = 0$; x = 3 tai x = -2 KUV: YAP +++ -2 --- 3 +++
MAX = 58 ; f(-2) = 58 ; -16 - 12 + 72 + a = 58 ; a = 14 MIN = f(3) = 54 - 27 - 108 + 14 = - 67

9. 1° $x^2(x - 5) = 6(x - 2) \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 - 6x + 12 = 0$. Tutkitaan funktioa $f(x) = x^3 - 5x^2 - 6x + 12$
f on polynomina jatkuva JA f(1) = 2 JA f(3) = -24 $\rightarrow$ f:llä on ainakin 1 nollakohta.
2° $f´(x) = 3x^2 - 10x - 6$; f ´= 0 ; $x = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 + 72}}{6}\ \dfrac{10 \pm 13{,}1}{6}$; $x \approx 3{,}9$ tai $x \approx -0{,}5$, KUV: YAP
f ’ : +++ -0,5 --- 3,9 +++ $\Rightarrow$ f on vähenevä välillä [1,3] $\Rightarrow$ f saa jokaisen arvonsa kerran.
Kohtien 1° ja 2° perusteella funktiolla on nollakohtia ja yhtälöllä on ratkaisuja tällä välillä täsmälleen yksi.

10. Olkoon kolmion ABC kanta AB, kannalla piste D, sivulla BC piste E ja sivulla AC piste F, siten, että ADEF on suunnikas. Olkoon suunnikkaan kanta AD = x ja korkeus = h
ΔFEC ~ ΔABC (kk) $\dfrac{10 - h}{10} = \dfrac{x}{16}$; $10 - h = \dfrac{5x}{8}$; $h = 10 - \dfrac{5x}{8}$
$A(x) = x(10 - \dfrac{5x}{8}) = 10x - \dfrac{5}{8}x^2$, $0 \leq x \leq 16$ JVA sulj. välillä. $A´(x) = 10 - 1¼x$; A´ = 0 ; 10 - 1¼ x = 0 ; x = 8
A(0) = A(16) = 0, A(8) = 40, joka on suurin. Koko ala on ½·16·10 = 80, joten suunnikas on siitä 50%

98.2.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = 3x^4 - 5x + 6$ b) $f(x) = (x^2 - 4x)^3$ c) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 1}$

98.2.2. Määritä funktion $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 4}{x^2 - 1}$ kuvaajan asymptootit.

98.2.3. Mitkä ovat funktion $f(x) = (2x - 1)(x + 1)^2$ derivaatan nollakohdat?

98.2.4. Laske funktion $f(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x - 4$ ääriarvot.

98.2.5. Laske raja-arvo $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{1-x}(1+\dfrac{x}{x-2})$

98.2.6. Mikä on vakion a arvo, kun funktion $f(x) = x^3 - 3x + a$ suurin arvo välillä [-2,0] on 4?

98.2.7. Anna esimerkki jostakin funktiosta, joka on jatkuva kaikilla muilla reaaliluvuilla paitsi luvulla 3 ja sillä on raja-arvo samassa kohtaa 3 ja tämän raja-arvon suuruus on 4.

98.2.8. Osoita, että yhtälöllä $x^3 - 1 = 3x(x - 2)$ on täsmälleen yksi reaalinen ratkaisu. Määritä tämän likiarvo 0,001 tarkkuudella.

98.2.9. Paraabelin $y = x^2$ kohtaan x = a asetettu tangentti ja normaali rajoittavat y-akselin kanssa kolmion, jonka ala on 1,25. Mikä on vakion a arvo?

98.2.10. Käyrät $y = 4 - x^2$ ja $y = ½x^2 - 2$ rajoittavat äärellisen alueen. Sen sisään piirretään suorakulmio, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Mikä on suurimman tällaisen suorakulmion pinta-ala?

1. a) $f(x) = 3x^4 - 5x + 6$; $f´(x) = 12x^3 - 5$ b) $f(x) = (x^2 - 4x)^3$; $f´(x) = 3(x^2 - 4x)^2(2x - 4)$
c) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 1}$; $f´(x) = \dfrac{2(x^2 + 1) - 2x(2x - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{2 + 2x - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$

2. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 4}{x^2 - 1} = x + \dfrac{-x + 4}{(x + 1)(x - 1)}$. Asymptootit ovat x = 1 , x = -1 ja y = x

3. $f(x) = (2x - 1)(x + 1)^2 = (2x - 1)(x^2 + 2x + 1) = 2x^3 + 4x^2 + 2x - x^2 - 2x - 1 = 2x^3 + 3x^2 - 1$
$f´(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x + 1)$; f ´= 0 ; 6x = 0 tai x + 1 = 0 ; x = 0 tai x = -1

4. $f(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x - 4$ $f'(x) = 12x^2 - 30x + 12$ $f' = 0$; $12x^2 - 30x + 12 = 0$; $2x^2 - 5x + 2 = 0$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$; x = 2 tai x = ½. KUV. YAP

f ' : +++ ½ --- 2 +++

f : ↗ ‾ ↘ _ ↗   Max = f(½) = -1¼ Min = f(2) = -8

5. $\lim_{x\to 1} \frac{2}{1-x}\left(1+\frac{x}{x-2}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{2}{1-x}\left(\frac{x-2}{x-2}+\frac{x}{x-2}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{2}{1-x}\cdot\frac{2x-2}{x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{1-x}\cdot\frac{2(x-1)}{x-2} =$

$\lim_{x\to 1} \frac{2}{-1}\cdot\frac{2}{x-2} = \frac{4}{-1\cdot(-1)} = 4$

6. $f(x) = x^3 - 3x + a$ on jatkuva suljetulla välillä [-2,0] ; $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f' = 0$; $3x^2 - 3 = 0$; $x^2 = 1$; x = ±1, joista välillä [-2,0] on vain -1.

f(-2) = a - 2, f(0) = a , f(-1) = a + 2, joka on suurin a + 2 = 4 ; a = 2

7. f(x) = x + 1, kun $x \neq 3$. f ei ole jatkuva, kun x = 3, koska sillä ei ole arvoa f(3). lim f(x) = lim (x+1) = 3 + 1 = 4

8. $x^3 - 1 = 3x(x - 2) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$. Tutkitaan funktioa $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$

f on JVA & f(0) = -1 < 0 & f(1) = 3 > 0 $\Rightarrow$ f:llä on ainakin yksi nollakohta välillä]0,1[

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3x^2 - 6x + 3 + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) + 3 = 3(x - 1)^2 + 3 > 0$

Siis f on aidosti kasvava ja saa jokaisen arvonsa kerran, siis myös arvon nolla.

x	0,1	0,2	0,18	0,19	0,182	0,183	0,1825	
f(x)	-0,4	0,09	-0,11	0,04	-0,001	0,003	0,001	$x \approx 0,182$

9. $y = x^2$; piste (a,a^2) , $y' = 2x$; $k_T = y'(a) = 2a$

TANG: $y - a^2 = 2a(x - a)$; $y = 2ax - a^2$, joka leikkaa y-akselin pisteessä $(0,-a^2)$

NORM: $y - a^2 = -\frac{1}{2a}\cdot(x - a)$; $y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + ½$, joka leikkaa y-akselin $(0,a^2 + ½)$:ssa

Ala = 1,25 ; ½ · a · $(a^2 + ½ + a^2)$ = 1,25 ||·2 ; $2a^3 + ½a = 2,5$ ||·2 ; $4a^3 + a - 5 = 0$, josta huomataan että a = 1 toteuttaa yhtälön. vp:n deriv. = $12a^2 + 1 > 0$, joten vp kasvaa ja täten a = 1 jää ainoaksi yhtälön ratkaisuksi.

10. LP: $y = 4 - x^2 = ½x^2 - 2$; $1½x^2 = 6$; $x^2 = 4$; x = ±2. Kuvaaja symmetr. y-aks. suhteen.

Olkoon muuttuja x nelikulmion oikean reuna x-koordinaatti.

kanta = 2x, korkeus = $(4 - x^2) - (½x^2 - 2) = 6 - 1½x^2$; $A(x) = 2x(6 - 1½x^2) = 12x - 3x^3$, joka on jatkuva suljetulla välillä [0,2] $A'(x) = 12 - 9x^2$; $A' = 0$ $12 = 9x^2$; $x^2 = \frac{12}{9}$; $x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

A(0) = 0 ; A(2) = 0 ; $A\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 3\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(4 - \frac{12}{9}\right) = \frac{16\sqrt{3}}{3}$, joka on suurin.

99.1.1. Määritä derivaatan nollakohdat funktiolle $f(x) = (2x^2 - 4x)^2$.

99.1.2. Määritä funktion $f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 8$ suurin arvo välillä $-5 \leq x \leq -3$.

99.1.3. Millä välillä funktio $f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}$ on kasvava?

99.1.4. Laske raja-arvo $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 - 4x - 4}$.

99.1.5. Määritä paraabelin $y = -x^2 - 2x + 4$ sen tangentin yhtälö, joka on suoran y = 2x suuntainen.

99.1.6. Määritä funktion $f(x) = 2x^3 + 6x^2$ paikalliset ääriarvot.

99.1.7. Määritä funktion f(3) siten, että funktio $f(x) = \frac{2x^2 - 12x + 18}{9x^2 - 81}$ on jatkuva kohdassa x = 3.

99.1.8. Osoita, että yhtälöllä $x^3 + 4x = 3x^2 + 1$ on täsmälleen yksi reaalinen ratkaisu.

99.1.9. Määritä lausekkeen $5x^2 + y^2$ suurin ja pienin arvo sen ympyrän kehällä, jonka keskipiste on (-1,0) ja säde on 2.

99.1.10. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 3 ja 4. Hypotenuusalla olevasta pisteestä piirretään kateettien suuntaiset suorat, jolloin kolmion sisään muodostuu suorakulmio. Osoita, että suorakulmion ala on korkeintaan puolet kolmion alasta.

1. $f(x) = (2x^2 - 4x)^2$; $f'(x) = 2(2x^2 - 4x)(4x - 4)$; $f' = 0 : 2x^2 - 4x = 0$ tai $4x - 4 = 0$
$2x(x - 2) = 0$ tai $4x - 4 = 0$; $x = 0$ tai $x - 2 = 0$ tai $4x = 4$; $x = 0$ tai $x = 2$ tai $x = 1$.

2. $f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 8$ on jva suljetulla välillä [-5,-3]. f on dva. $f'(x) = 6x^2 + 30x + 24$
$f' = 0$; $6x^2 + 30x + 24 = 0$; $x^2 + 5x + 4 = 0$; $x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$; ($x = -1$ tai) $x = -4$
$f(-5) = -3$, $f(-4) = 8$, $f(-3) = 1$. V: Suurin arvo on $f(-4) = 8$.

3. $f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}$; $f'(x) = \frac{8(x^2 + 4) - 2x \cdot 8x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{32 - 8x^2}{(x^2 + 4)^2}$; f on kasvava, kun $f' \geq 0$.
Koska nimittäjä on > 0, on oltava $32 - 8x^2 \geq 0$. NK: $32 - 8x^2 = 0$. $32 = 8x^2$; $4 = x^2$; $\pm 2 = x$.
Kuvaaja on alasp. aukeava paraabeli, joten posit. nollakohtien välillä $-2 \leq x \leq 2$

4. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3x^2-4x-4} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(3x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{3x+2} = \frac{2+2}{6+2} = \frac{1}{2}$

5. $y = -x^2 - 2x + 4$; T || $y = 2x$; $k_T = 2$; eli sivuamispisteessä $y' = 2$
$-2x - 2 = 2$; $-2x = 4$; $x = -2$; $y = -4 + 4 + 4 = 4$ ts. $k_T = 2$ ja piste (-2,4) ; $y - 4 = 2(x+2)$; $y-4 = 2x+4$; $y = 2x + 8$.

6. $f(x) = 2x^3 + 6x^2$. f on jva, dva , ei reunoja. Ääriarvoja voi olla vain f ':n nollakohdissa.
$f'(x) = 6x^2 + 12x$
$f' = 0 : 6x(x + 2) = 0$; $x = 0$ tai $x = -2$
Kuvaaja ylösp. auk. par.
Max = $f(-2) = -16 + 24 = 8$. min = $f(0) = 0$

f '	+	|	-	|	+
f	↗	→	↘	→	↗
		-2		0	

7. f on jatkuva kohdassa x = 3, jos $f(3) = \lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{2x^2-12x+18}{9x^2-81} = \lim_{x\to 3}\frac{2(x^2-6x+9)}{9(x^2-9)} =$
$\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)^2}{9(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{9(x+3)} = \frac{2(3-3)}{9(3+3)} = 0$

8. $x^3 + 4x = 3x^2 + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$. Tutkitaan funktiota $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$.
f on polynomina jatkuva & $f(0) = -1$ & $f(1) = 1 \Rightarrow$ välillä]0,1[on ainakin yksi nollakohta (A).
$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4 = 3(x^2 - 2x) + 4 = 3(x^2 - 2x + 1) + 4 - 3 = 3(x - 1)^2 + 1 > 0 \Rightarrow$ f on kasvava, joten f saa jokaisen arvonsa vain kerran (B).
Kohtien (A) ja (B) perusteella f:llä on täsmälleen yksi nollakohta ja siis yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu.

9. Ympyrän yhtälö: $(x + 1)^2 + (y - 0)^2 = 4$; $(x + 1)^2 + y^2 = 4$ ts. $y^2 = 4 - (x + 1)^2$
x:n mahdolliset arvot voivat olla vain kp:n x ± säde, ts. $-1 - 2 \leq x \leq -1 + 2 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$
Tutkittava lauseke $5x^2 + y^2 = 5x^2 + 4 - (x + 1)^2 = f(x) = 5x^2 + 4 - x^2 - 2x - 1 = 4x^2 - 2x + 3$
f(x) on jatkuva suljetulla välillä. f on derivoituva. $f'(x) = 8x - 2$; $f' = 0$; $8x - 2 = 0$; $x = \frac{1}{4}$
$f(-3) = 45$, $f(1) = 5$, $f(\frac{1}{4}) = 2\frac{3}{4}$. V : Suurin arvo on $f(-3) = 45$, pienin arvo on $f(\frac{1}{4}) = 2\frac{3}{4}$

10. Olkoon kolmiossa ABC sivut AC = 4 ja BC = 3. Hypotenuusan AB pisteestä P on piirretty suorat PD || BC ja PE || AC. Olkoon nelikulmion CDPE sivu CD = EP = x ja PD = h
Tällöin DA = 4 - x ja yhdenmuotoisista kolmioista ADP ja ACB saadaan verranto
$\frac{h}{3} = \frac{4-x}{4}$; $h = \frac{3}{4}(4 - x)$. Nelikulmion CDPE alalla on lauseke
$A(x) = \frac{3}{4}(4 - x)\cdot x = \frac{3}{4}(4x - x^2)$, joka on jatkuva suljetulla välillä $0 \leq x \leq 4$.
$A'(x) = \frac{3}{4}(4 - 2x)$; $A' = 0 : 4 - 2x = 0$; $x = 2$.
$A(0) = A(4) = 0$ ja $A(2) = \frac{3}{4}\cdot 2\cdot 2 = 3$, joka on suurin mahdollinen ala suorakulmiolle.
Kolmion ABC ala on $\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 = 6$, siis suorakulmion ala on korkeintaan puolet kolmion alasta.

99.2.1. Laske funktion $f(x) = x^3 + x^2 – x – 1$ derivaatta ja derivaatan nollakohta.

99.2.2. Laske raja-arvo $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{2x^2-3x-2}$

99.2.3. Laske funktion $f(x) = 2x^3 + 6x^2$ paikalliset ääriarvot

99.2.4. Anna jokin esimerkki funktiosta, joka on jatkuva kaikilla x:n arvoilla, joka on kasvava ja joka saa arvon 1, kun x = 0.

99.2.5. Laske paraabelin $y = x^2 – 3x + 4$ ja suoran $y = x + 1$ leikkauspisteisiin piirrettyjen paraabelin tangenttien kulmakertoimet.

99.2.6. Määritä funktion $f(x) = 8x^3 – 3x^4$ suurin arvo välillä $–1 \leq x \leq 1$.

99.2.7. Millä välillä funktio $f(x) = \dfrac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 + 2}$ on vähenevä?

99.2.8. Millä vakion a arvolla yhtälöllä $6x^2 – x^3 + a = 0$ on kaksi reaalista ratkaisua?

99.2.9. Tutki onko epäyhtälö $x^4 + 10x^2 \geq 8x^3 – 125$ identtisesti tosi.

99.2.10. Suorakulmaisen kolmion kateettien summa on metri. Kun tämä kolmio pyörähtää kateettinsa ympäri kierroksen syntyy kappale. Mikä on kateettien pituuksien suhde, kun kappaleen tilavuus on suurin?

1. $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$; $f '(x) = 3x^2 + 2x - 1$
$f '(x) = 0$; $3x^2 + 2x - 1 = 0 : x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \dfrac{-2 \pm 4}{6}$; $x = \dfrac{1}{3}$ tai $x = -1$

2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 - 3x - 2}$, koska sijoitus antaa 0/0, on x = 2 osoittajan ja nimittäjän nollakohta ja siis tekijänä on kummassakin (x - 2). Toinen tekijä saadaan jakamalla.
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 - 3x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(2x+1)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+5}{2x+1} = \frac{7}{5}$$

3. $f(x) = 2x^3 + 6x^2$ on jva, dva, ei reunoja. $f '(x) = 6x^2 + 12x$;$f '(x) = 0$; $6x(x + 2) = 0$; x = 0 , x = -2. f ':n kuvaaja ylösp. aukeava paraabeli, jonka merkit +++ -2 --- 0 +++ , jolloin f:n kulku kasvaa -2 vähenee 0 kasvaa.
Max = f(-2) = 8 , min = f(0) = 0

4. Esim. f(x) = 2x + 1, joka on polynomina jatkuva kaikkialla, f ' = 2 > 0, joten f on kasvava sekä $f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$. joten f täyttää vaaditut ehdot.

5. Leikkauspisteessä on molemmilla sama y-koordinaatti ts. $y = x^2 - 3x + 4 = x + 1$
$x^2 - 4x + 3 = 0$; $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2}$; x = 3 tai x = 1
y ' = 2x - 3 ; $k_{T1} = y '(3) = 3$ ja $k_{T2} = y '(1) = -1$

6. $f(x) = 8x^3 - 3x^4$ on jva sulj. välillä [-1,1] , jolloin se saa suurimman ja pienimmän arvonsa
$f '(x) = 24x^2 - 12x^3 = 12x^2(2 - x)$; f ' = 0, kun x = 0 tai x = 2, joka ei kuulu tarkasteluvälille
f(-1) = -11 pienin , f(0) = 0 , f(1) = 5 suurin

7. $f(x) = \dfrac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 + 2}$ jva (nim > 0) $f '(x) = \dfrac{(-2x + 4)(x^2 + 2) - (-x^2 + 4x - 4)2x}{(x^2 + 2)^2} = \dfrac{-4x^2 + 4x + 8}{(x^2 + 2)^2}$
Vähenevä, kun $f ' (x) \leq 0$ eli kun $-4x^2 + 4x + 8 \leq 0$ (koska nim > 0).
NK: $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 128}}{-8} = \dfrac{-4 \pm 12}{-8}$; x = -1 tai x = 2 KUV. ; --- -1 +++ 2 --- V: $x \leq -1$ tai $x \geq 2$

8. $6x^2 - x^3 + a = 0$; Tutkitaan funktioa $f(x) = 6x^2 - x^3 + a$, jolla on kaksi nollakohtaa, jos toinen nollakohdista on maksimi- tai minimikohdassa. f on jva, dva, ei reunoja, joten ääriarvot voivat olla vain derivaatan nollakohdissa. $f '(x) = 12x - 3x^2$, f ' = 0 ; $12x - 3x^2 = 0$; $3x(4 - x) = 0$; x = 0 tai x = 4.
f ':n kuvaaja alaspäin aukeava paraabeli merkit --- 0 +++ 4 --- , joten ääriarvot nk:issa.
f (0) = 0 ; a = 0 tai f(4) = 0 ; $6 \cdot 4^2 - 4^3 + a = 0$; 96 - 64 + a = 0 ; a = -32

9. $x^4 + 10x^2 \geq 8x^3 - 125 \Leftrightarrow x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 125 \geq 0$. Olkoon $f(x) = x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 125$
Epäyhtälö on aina tosi, jos funktion f pienin arvo on nolla tai suurempi.
f on jva, dva. $f ' (x) = 4x^3 - 24x^2 + 20x = 4x(x^2 - 6x + 5)$
f ' = 0 , x = 0 tai $x^2 - 6x + 5 = 0$; x = 0 tai x = 1 tai x = 5. kuvaaja III asteen käyrä
f ' --- 0 +++ 1 --- 5 +++
f ↘ _ ↗ ‾ ↘ _ ↗ joten pienin arvo on joko f(0) = 125 tai f(5) = 0, joka pienin

10. Olkoon kanta = x, jolloin korkeus = 1 - x. Pyörähtäessä syntyy suora ympyräkartio
$V(x) = \pi/3 \cdot x^2(1 - x) = \pi/3 \cdot (x^2 - x^3)$, jva suljetulla välillä [0,1]
$V'(x) = \pi/3 \cdot (2x - 3x^2)$; V' = 0 ; $2x - 3x^2 = 0$; x(2 - 3x) = 0 ; x = 0 tai x = 2/3
V(0) = 0 , V(1) = 0 ; $V(2/3) = \pi/3 \cdot (4/9 - 8/27) = 4\pi/81$, joka on suurin
kanta : korkeus = 2/3 : (1 - 2/3) = 2 : 1.

00.1.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1$ b) $f(x) = (4x^5 - 2x^4) \cdot 5x^3$

00.1.2. Muodosta käyrän $y = x^2 - 3x + 4$ se tangentti, joka on suoran y = 2 - x suuntainen.

00.1.3. Millä vakion a arvoilla funktio $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 , \text{ kun } x \leq a \\ 2x + 1, \text{ kun } x > a \end{cases}$ on jatkuva kaikkialla?

00.1.4. Ratkaise yhtälö f(x) = f ' (x), kun f(x) = $x^3 - x^2 + x + 1$.

00.1.5. Laske sen kolmion ala, jonka käyrän y = $-x^2 + x + 4$ pisteeseen (2,2) piirretty normaali muodostaa koordinaattiakselien kanssa.

00.1.6. Määritä vakio a siten, että $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ax^3 - x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$ on olemassa ja laske sitten raja-arvo.

00.1.7. Muodosta jokin funktio, joka on määritelty koko reaalilukujen joukossa ja joka on epäjatkuva kohdassa 2 ja muualla jatkuva sekä jonka arvo kohdassa 2 on 1. Perustele, että funktiosi täyttää vaaditut ehdot. Piirrä kuvaaja.

1. a) f(x) = $2x^3 - x^2 + 5x - 1$; f ' (x) = $6x^2 - 2x + 5$
b) f(x) = $(4x^5 - 3x^4) \cdot 5x^3 = 20x^8 - 15x^7$; f ' (x) = $160x^7 - 105x^6$

2. y = $x^2 - 3x + 4$; y ' = 2x - 3 .
T || y = 2 - x $\Rightarrow$ k_T = -1 ts. y ' = -1 ; 2x - 3 = -1 ; 2x = 2 ; x = 1. Tällöin y = $1^2 - 3\cdot 1 + 4 = 2$
y - 2 = -1(x - 1) ; y - 2 = - x + 1 ; y = 3 - x

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{kun } x \le a \\ 2x + 1, & \text{kun } x > a \end{cases}$
Osaset ovat polynomina jatkuvia, joten f voi olla epäjatkuva vain liitoskohdassa.
f(a) = $a^2 - 2$, $\lim\limits_{x\to a-}(x^2 - 2) = a^2 - 2$, $\lim\limits_{x\to a+}(2x+1) = 2a + 1$
f on jatkuva, jos $a^2 - 2 = 2a + 1$; $a^2 - 2a - 3 = 0$; $a = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2}$; a = 3 tai a = - 1

4. f(x) = $x^3 - x^2 + x + 1$; f ' (x) = $3x^2 - 2x + 1$
f(x) = f ' (x) ; $x^3 - x^2 + x + 1 = 3x^2 - 2x + 1$; $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$; $x(x^2 - 4x + 3) = 0$
x = 0 tai $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2}$; x = 3 tai x = 1

5. y = $-x^2 + x + 4$, jolla on piste (2,2)
Kulmak. y ' = -2x + 1 ; k_T = y ' (2) = $-2\cdot 2 + 1 = -3$; k_N = +1/3
Normaalin yhtälö : y - 2 = 1/3 · (x - 2) || · 3 ; 3y - 6 = x - 2 ; x - 3y + 4 = 0
x-akselin leikkauspiste A : y = 0 ; x + 4 = 0 ; x = - 4
y-akselin leikkauspiste B : x = 0 ; - 3y + 4 = 0 ; y = 4/3
Kanta = OA = | - 4 | = 4 ; Korkeus = OB = 4/3 ; Ala = ½ · 4 · 4/3 = 8/3

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ax^3 - x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$ on olemassa, jos osoittaja $\to$ 0, koska nimittäjäkin $\to$ 0 kun x $\to$ 2
a · 2^3 - 4 - 4 = 0 ; 8a = 8 ; a = 1
$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3 - x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2 + x + 2)}{(x-2)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 + x + 2}{x - 3} = \dfrac{4 + 2 + 2}{2 - 3} = -8$

7. Esim. $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{kun } x \ne 2 \\ 1, & \text{kun } x = 2 \end{cases}$, joka saa arvon 1, kun x = 2
f on jatkuva , kun x ≠ 2, koska se on vakiofunktio, ja sellaiset ovat jatkuvia.
$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} 2 = 2 \ne 1 = f(2)$, joten f ei ole jatkuva kohdassa 2.
Kuvaaja on vaakasuora viiva korkeudella 2, jossa on aukkopaikka kohdalla x = 2 ja tällä kohdalla funktion arvoa kuvaava piste on (2,1).

00.2.1. Derivoi funktiot a) f(x) = $(3x^2 - 4x)^5$ b) f(x) = $\dfrac{3x^2}{4x + 5}$

00.2.2. Laske funktion f(x) = $3x^2 - x^3$ suurin ja pienin arvo välillä [-2,3]

00.2.3. Milloin funktio f(x) = $3x^2 - 60x - 120$ on kasvava?
Kumpi funktion arvoista $f(9 + 8{,}7\cdot 10^{-15})$ vai $f(9 + 8{,}6\cdot 10^{-15})$ on suurempi?

00.2.4. Osoita, että yhtälöllä $x^3 + x - 100 = 0$ on täsmälleen yksi reaalinen ratkaisu.

00.2.5. Määritä vakio a siten, että funktion f(x) = $x^3 + 4x^2 - 3x + a$ on maksimiarvo on 6.

00.2.6. Osoita, että epäyhtälö $\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 + 33 > 0$ on tosi kaikilla x:n reaaliarvoilla.

00.2.7. Keitaan omistaja kauppaa vettä Saharan karavaanitiellä. Lähtiessään keitaalta kamelilla hänellä on 100 litraa vettä. Hän tarvitsee itselleen ja kamelille joka kilometrillä (myös paluumatkalla) 0,1 litraa vettä. Vedestä saa keitaalla on 20 rahaa litralta ja jokainen kilometri keitaalta poispäin nostaa hintaa 1 rahalla. Kuinka kaukana hänen kannattaa myydä vesi, jotta hän saisi mahdollisimman suuret tulot ja pystyisi tulemaan vielä takaisin keitaalle?

1. a) $f(x) = (3x^2 - 4x)^5$; $f'(x) = 5(3x^2 - 4x)^4 \cdot (6x - 4)$

b) $f(x) = \dfrac{3x^2}{4x+5}$; $f'(x) = \dfrac{6x(4x+5) - 4 \cdot 3x^2}{(4x+5)^2} = \dfrac{24x^2 + 30x - 12x^2}{(4x+5)^2} = \dfrac{12x^2 + 30x}{(4x+5)^2}$

2. $f(x) = 3x^2 - x^3$, $x \in [-2,3]$ on jatkuva suljetulla välillä . f dva.
$f'(x) = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$. $f' = 0$; $x = 0$ tai $2 - x = 0$ eli $x = 2$
$f(-2) = 12 + 8 = 20$; $f(0) = 0$; $f(2) = 12 - 8 = 4$; $f(3) = 27 - 27 = 0$.
V: Suurin arvo = $f(-2) = 20$ ja pienin arvo = $f(0) = f(3) = 0$

3. $f(x) = 3x^2 - 60x - 120$; $f(x) = 6x - 60$
f on kasvava, kun $f' \geq 0$; $6x - 60 \geq 0$; $6x \geq 60$; $x \geq 10$
$9 + 8{,}7 \cdot 10^{-15}$ ja $9 + 8{,}6 \cdot 10^{-15}$ ovat alueella, missä f on aidosti vähenevä ($x \leq 10$)
Näin ollen f saa suuremman arvon pienemmällä x:llä V: $f(9 + 8{,}6 \cdot 10^{-15})$ suurempi

4. $x^3 + x - 100 = 0$. Tutkitaan funktiota $f(x) = x^3 + x - 100$ joka on jatkuva
$f(0) = -100 < 0$ ja $f(10) = 910 > 0 \Rightarrow$ f:llä on ainakin yksi nollakohta.
$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, joten f on aidosti kasvava. f saa tällöin jokaisen arvonsa kerran.
Koska edellisen osan perusteella f saa arvon nolla, saa f arvon nolla täsmälleen kerran.

5. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + a$, $f'(x) = 3x^2 + 8x - 3$
$f' = 0$; $3x^2 + 8x - 3 = 0$; $x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 + 36}}{6} = \dfrac{-8 \pm 10}{6}$; $x = \dfrac{1}{3}$ tai $x = -3$
f ' :n kuvaaja YAP +++ -3 --- 1/3 +++ , joten maksimiarvo = f(-3)
$f(-3) = 6$; $-27 + 36 + 9 + a = 6$; $a = -12$

6. $\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 + 33 > 0$. Tutkitaan funktiota $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 + 33$
$f'(x) = x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4)$
$f' = 0$; $x = 0$ tai $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2}$; $x = 4$ tai $x = -1$
f ' :n kuvaaja 3° käyrä , joka tulee alhaalta vasemmalta ja menee ylös oikealle tehden kaksi mutkaa. f ' :n kuvaaja leikkaa x-akseli kolmesti, koska on kolme nollakohtaa.
f ' - - - -1 + + + 0 - - - 4 + + +
f $\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
Pienin arvo on joko f(-1) tai f(4) . $f(-1) = 32\frac{1}{4}$ ja $f(4) = 1$. Siis pienin arvo on 1
Koska pienin arvo > 0 , niin kaikki arvot ovat > 0, joten epäyhtälö on tosi kaikilla x.

7. Olkoon myyntipaikka keitaalta x (km) etäisyydellä. Vettä tarvitaan kamelille ja itselle $2x \cdot 0{,}1 = 0{,}2x$
Myyntiin jää vettä $100 - 0{,}2x$; Vesilitran hinta = $20 + x$
Tulot $T(x) = (100 - 0{,}2x)(20 + x) = 2000 + 96x - 0{,}2x^2$, missä $0 \leq x \leq 500$
T(x) on jva suljetulla välillä. T(x) on dva.
$T'(x) = 96 - 0{,}4x$; $T' = 0$; $96 - 0{,}4x = 0$; $-0{,}4x = -96$; $x = 240$
$T(0) = 2000$; $T(500) = 0$; $T(240) = 13520$, joka suurin. V: 240 km päässä keitaalta.

00.3.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 3x - 2$ b) $f(x) = \dfrac{20x^5 - 25x^4}{5x^4}$

00.3.2. Laske raja-arvo $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{2x^2 + 3x - 2}$

00.3.3. Olkoon $f(x) = x^2 + ax + b$. Määritä vakiot a ja b siten, että $f(0) = 3$ ja $f'(3) = 2$.

00.3.4. Laske funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - x - 2$ kuvaajan kohtaan $x = -1$ piirretyn tangentin yhtälö.

00.3.5. Määritä funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$ ääriarvot.

00.3.6. Osoita, että funktio $f(x) = 7 - 12x + 6x^2 - x^3$ on kaikkialla vähenevä.

00.3.7. Määritä vakio a siten, että paraabelin $y = x^2 + ax + 5$ huippu on suoralla $x + 2 = 0$. Mikä on tällöin huipun y-koordinaatti?

00.3.8. Määritä vakiot a ja b siten, että funktio $f(x) = \begin{cases} -x + a, \text{ kun } x \le 0 \\ x^2 - 2x, \text{ kun } 0 < x < b \\ 3, \text{ kun } x \ge b \end{cases}$ on jatkuva kaikkialla.

00.3.9. Osoita, että epäyhtälö $x^4 - x^2 + 0{,}3 \ge 0$ on tosi kaikilla reaalisilla x.

00.3.10. Millä vakion a arvolla ympyrän $x^2 + y^2 - ax + 3ay + a = 1$ ala on mahdollisimman pieni? Laske ala.

---

1. a) $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 3x - 2$, $f'(x) = 15x^2 - 8x + 3$ b) $f(x) = \dfrac{20x^5 - 25x^4}{5x^4} = 4x - 5$, $f'(x) = 4$

---

2. $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{2x^2+3x-2} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(2x-1)} = \lim_{x\to -2}\frac{x-2}{2x-1} = \frac{-2-2}{2\cdot(-2)-1} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$

---

3. $f(x) = x^2 + ax + b$, $f'(x) = 2x + a$; $\begin{cases} f(0) = 3 \\ f'(3) = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} b = 3 \\ 6 + a = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \end{cases}$

---

4. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x - 2$; $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$.   Piste: x = -1 ; y = -1 – 2 + 1 – 2 = -4 ; P = (-1,-4)
Kulmakerroin: $k_T = f'(-1) = 3 + 4 - 1 = 6$ Yhtälö: y + 4 = 6(x + 1) ; y + 6 = 6x + 6 ; y = 6x + 2

---

5. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$ on jva, dva , ei reunoja. $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$
f ' = 0: $6x^2 - 6x - 36 = 0$; $x^2 - x - 6 = 0$; $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$; x = 3 tai x = -2
f ' :n kuvaaja on YAP, jonka merkit   f '   +++ -2 --- 3 +++
f:n kulku   f   ↗ ‾ ↘ _ ↗
Max = f(-2) = -16 – 12 + 72 + 5 = 49 ja Min = f(3) = 54 – 27 – 108 + 5 = -76

---

6. $f(x) = 7 - 12x + 6x^2 - x^3$. $f'(x) = -12 + 12x - 3x^2 = -3(4 - 4x + x^2) = -3(x - 2)^2 < 0 \Rightarrow$ f on vähenevä

---

7. $y = x^2 + ax + 5$. y ' = 2x + a . Huipussa tangentti on vaakasuora eli $k_T = 0$ eli y ' (x) = 0
Huippu on suoralla x + 2 = 0 eli x = -2. y '(-2) = 0 ; -4 + a = 0 ; a = 4
$y = x^2 + 4x + 5$, joten huipun y = y(-2) = 4 - 8 + 5 = 1

---

8. $f(x) = \begin{cases} -x + a, \text{ kun } x \le 0 \\ x^2 - 2x, \text{ kun } 0 < x < b \\ 3, \text{ kun } x \ge b \end{cases}$ on polynomina jatkuva, paitsi ehkä ei liitoskohdissaan

x = 0 : $\displaystyle\lim_{x\to 0-}(-x+a) = a$. $\displaystyle\lim_{x\to 0+}(x^2-2x) = 0$. f(0) = a. Siis a = 0

x = b : $\displaystyle\lim_{x\to b-}(x^2-2x) = b^2 - 2b$, $\displaystyle\lim_{x\to b+} 3 = 3$. f(b) = 3.

$b^2 - 2b = 3$; $b^2 - 2b - 3 = 0$; b = 3 tai b = -1

---

9. $x^4 - x^2 + 0{,}3 \ge 0$; Tutkitaan funktiota $f(x) = x^4 - x^2 + 0{,}3$, joka on JVA ja DVA
$f'(x) = 4x^3 - 2x = 4x(x^2 - ½)$. f ' = 0 ; x = 0 tai x = ± $\sqrt{½}$
f ':n kuvaaja alhaalta ylös menevä 3. asteen polynomifunktion kuvaaja
f ' --- -$\sqrt{½}$ +++ 0 --- $\sqrt{½}$ +++
f ↘ _ ↗ ‾ ↘ _ ↗
⇒ pienin on joko f(-$\sqrt{½}$) = 0,05 tai f($\sqrt{½}$ = 0,05
⇒ pienin arvo > 0 , joten kaikki arvot > 0 eli epäyhtälö on tosi kaikilla x

---

10. $x^2 + y^2 - ax + 3ay + a - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + ¼a^2 + y^2 + 3ay + ¼\cdot 9a^2 = ¼\cdot 10a^2 - a + 1 \Leftrightarrow$
$(x - ½a)^2 + (y + ¼\cdot 3a)^2 = ¼(10a^2 - 4a + 4)$. Ala pienin, kun r ja r^2 on pienin
Tutkitaan funktiota $f(a) = 10a^2 - 4a + 4$, joka ylöspäin aukeavana paraabelina on pienimmillään huipussa eli, kun f ' = 0 ; f ' (a) = 20a - 4 = 0 ; a = 1/5
Ala = $\pi r^2 = \pi\cdot ¼(10\cdot\frac{1}{25} - 4\cdot\frac{1}{5} + 4) = \frac{9\pi}{10}$

01.1.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 6$ b) $f(x) = (3x^2 - 4)^5$ c) $f(x) = \dfrac{x^2}{2x + 3}$

01.1.2. Määritä $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2-4}$

01.1.3. Määritä funktion $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ suurin ja pienin arvo välillä [0,2]

01.1.4. Määritä vakio a, siten, että funktio $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x + 2}, & \text{kun } x \neq -2 \\ a, & \text{kun } x = -2 \end{cases}$ on kaikkialla jatkuva.

01.1.5. Laske funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 4$ ääriarvot.

01.1.6. Määritä vakiot a ja b siten, että funktiolla $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ on ääriarvo $f(1) = 4$.

01.1.7. Olkoon $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$. Osoita, että $f(x_1) < f(x_2)$, kun $x_1 < x_2$.

01.1.8. Osoita, että yhtälöllä $x^3 + x + a = 0$ on täsmälleen yksi reaalinen ratkaisu. Millä a:n arvoilla tämä ratkaisu on välillä]1,2[?

01.1.9. Määritä origosta käyrälle $y = 3x - \frac{1}{2}x^2$ piirrettyjen normaalien yhtälöt.

01.1.10. Litranvetoinen kanneton astia on muodoltaan säännöllinen nelisivuinen särmiö, jonka pohja on neliö. Astia on valmistettu kahdesta eri materiaalista ja pohjaan käytetty materiaali on pinta-alakustannuksiltaan kuusitoista kertaa niin kallista kuin sivutahkoihin käytetty materiaali. Määritä astian mitat, kun sen materiaalikustannukset ovat mahdollisimman pienet.

---

1. $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 6$; $f'(x) = 8x^3 - 6x + 5$ b) $f(x) = (3x^2 - 4)^5$; $f'(x) = 5(3x^2 - 4)^4 \cdot 6x = 30x(3x^2 - 4)^4$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{2x + 3}$; $f'(x) = \dfrac{2x(2x + 3) - 2\cdot x^2}{(2x + 3)^2} = \dfrac{2x^2 + 6x}{(2x + 3)^2}$

---

2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(2x+1)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x+1}{x+2} = \dfrac{4 + 1}{2 + 2} = \dfrac{5}{4}$

---

3. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ on jatkuva suljetulla välillä [0,2]. f on DVA.

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$; $f' = 0$; $3x^2 - 2x - 1 = 0$; $x = \dfrac{2 \pm\sqrt{4 + 12}}{6} = \dfrac{2 \pm 4}{6}$; $x = 1$ (tai $x = -\dfrac{1}{3}$)

$f(0) = 1$; $f(2) = 3$; $f(1) = 0$ V: Suurin arvo on $f(2) = 3$ ja pienin arvo on $f(1) = 0$

---

4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x + 2}, & \text{kun } x \neq -2 \\ a, & \text{kun } x = -2 \end{cases}$

f on jatkuva, kun $x \neq -2$, koska murtofunktio on jatkuva kun nimittäjä $\neq 0$

f on jatkuva, kun $x = -2$, jos $f(-2) = a = \lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+2)(x-4)}{x+2} = -2 - 4 = -6$

---

5. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 4$ on JVA, DVA, ei reunoja. $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$f'(x) = 0$; $6x^2 - 6x - 12 = 0$; $x^2 - x - 2 = 0$; $x = \dfrac{1 \pm\sqrt{1 + 8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$; $x = 2$ tai $x = -1$

f ':n merkit: YAP +++ -1 --- 2 +++

f : ↗ ¯ ↘ _ ↗   MAX = f(-1) = 3 ja MIN = f(2) = -24

---

6. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ f on JVA, DVA, ei reunoja ⇒ Äa on f ':n NK:ssa $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$\begin{cases} f(1) = 4 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 1 + a + b = 4 \\ 3 + 2a + b = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} a + b = 3 \;\|\; \cdot(-1) \\ 2a + b = -3 \;\|\; \cdot 1 \end{cases}$; $a = -6$; $-6 + b = 3$; $b = 9$

---

7. $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$; $f'(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3(4x^2 - 4x + 1) = 3(2x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow$ f kasvava

Kasvavan funktion määritelmän mukaan $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

---

8. $x^3 + x + a = 0$. Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3 + x + a$.

1° $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow$ f saa negatiivisia arvoja ; 2° $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \infty \Rightarrow$ f saa positiivisia arvoja

3° f on jatkuva ; 4° $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow$ f on aidosti kasvava

1° - 4° ⇒ f saa jokaisen arvonsa täsmälleen kerran ja siis myös arvon 0 täsmälleen kerran

Ratkaisu on välillä]1,2[jos $f(1) < 0$ JA $f(2) > 0$ ts. $1 + 1 + a < 0$ JA $8 + 2 + a > 0$

$a < -2$ JA $a > -10$. V: $-10 < a < -2$

---

9. Olkoon normaalin ja käyrän leikkauspisteen P x-koordinaatti $x = a$. $y = 3a - \frac{1}{2}a^2$

$y' = 3 - x \Rightarrow k_T = y'(a) = 3 - a$ ja $k_N = -1/(3 - a)$ Toisaalta $k_N = k_{OP} = (3a - \frac{1}{2}a^2 - 0) / (a - 0)$

$\dfrac{3a - \frac{1}{2}a^2}{a} = \dfrac{1}{a - 3}$; $a = (3a - \frac{1}{2}a^2)(a - 3)$; $a = 3a^2 - 9a - \frac{1}{2}a^3 + 1\frac{1}{2}a^2$; $\frac{1}{2}a^3 - 4\frac{1}{2}a^2 + 10a = 0$

$\frac{1}{2}a(a^2 - 9a + 20) = 0$; $a = 0$ tai $a^2 - 9a + 20 = 0$; $a = \dfrac{9 \pm\sqrt{81 - 80}}{2} = \dfrac{9 \pm 1}{2}$; $a = 4$ tai $a = 5$

$a = 0$; $k_N = -1/3$; $y = -1/3 \cdot x$; $a = 4$; $k_N = 1$; $y = x$; $a = 5$: $k_N = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}x$

10. Olkoon pohjaneliön sivu = x. Pohjan ala = x^2 , korkeus = $1/x^2$.
Sivuseinämien ala = $4 \cdot x \cdot 1/x^2 = 4/x$. Olkoon sivujen neliöhinta H, pohjan neliöhinta = 16H
$K(x) = 4/x \cdot H + x^2 \cdot 16H = H(4/x + 16x^2)$, $x > 0$
$K'(x) = H(-4/x^2 + 32x)$; $K'(x) \le 0$; $-4/x^2 + 32x \le 0 \;||\cdot x^2$; $-4 + 32x^3 \le 0$; $x^3 \le 1/8$; $x \le ½$
K ' 0 --- ½ +++
K ↘ _ ↗ ⇒ K pienin, kun x = ½ . V: Mitat ovat 0,5 dm x 0,5 dm x 4 dm

01.2.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = 5x^{20} - 10x^{10} - 20x^5$ b) $f(x) = (x^2 + 3)^4$ c) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 + 1}$

01.2.2. Määritä $\lim\limits_{x \to ½} \dfrac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 - 1}$

01.2.3. Millä vakion a arvolla funktio $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x}{3x + 6}, & x \ne -2 \\ a, & x = -2 \end{cases}$ on jatkuva kohdassa x = -2?

01.2.4. Laske g'(-1), kun $g(x) = x \cdot f(x)$ ja f(-1) = f '(-1) = 1.

01.2.5. Millä *x*:n arvolla funktio $f(x) = 4x^3 - x^4$ on kasvava?

01.2.6. Määritä vakiot a ja b siten, että funktiolla $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ on ääriarvo f(1) = 4.

01.2.7. Käyrälle $y = ¼x^4$ piirretään suoran y = 8x - 1 suuntainen tangentti. Määritä sivuamispiste.

01.2.8. Määritä funktion $f(x) = - x^3 + 12x^2 - 45x$ suurin arvo, kun $x \ge 1$.

01.2.9. Määritä vakiot a ja b siten, että käyrät $y = x^3 + x^2$ ja $y = ax^3 - bx - 1$ sivuavat toisensa kohdassa x = 1.

01.2.10. Kun laiva kulkee vakionopeudella v km/h, niin kustannukset ovat $(9200 + 0{,}046v^3)$ mk/h. Mikä nopeus tietyllä matkalla on kustannuksien kannalta edullisin?

1. a) $f(x) = 5x^{20} - 10x^{10} - 20x^5$; $f'(x) = 100x^{19} - 100x^9 - 100x^4$
b) $f(x) = (x^2 + 3)^4$: $f'(x) = 4(x^2 + 3)^3 \cdot 2x = 8x(x^2 + 3)^3$
c) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 + 1}$, $f'(x) = \dfrac{2(x^2 + 1) - 2x(2x + 3)}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2 - 4x^2 - 6x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{2 - 6x - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$

2. $\lim\limits_{x\to ½} \dfrac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to ½} \dfrac{(2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)} = \lim\limits_{x\to ½} \dfrac{2x-1}{2x+1} = \dfrac{2\cdot ½ - 1}{2\cdot ½ + 1} = \dfrac{0}{2} = 0$

3. f on jva, jos $f(-2) = \lim\limits_{x\to -2} f(x)$; $a = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 + 2x}{3x + 6} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x(x+2)}{3(x+2)} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x}{3} = \dfrac{-2}{3}$

4. $g(x) = x \cdot f(x)$; $g'(x) = 1\cdot f(x) + x\cdot f'(x)$; $g'(-1) = 1\cdot f(-1) + (-1)\cdot f'(-1) = 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 = 0$

5. $f(x) = 4x^3 - x^4$; kasvava, kun $f'(x) \ge 0$ $f'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 4x^2(3 - x) \ge 0$, kun $3 - x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 3$

6. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$; f(1) = 4 on ääriarvo, jos myös f '(1) = 0. $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
$\begin{cases} 1 + a + b = 4 \\ 3 + 2a + b = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = -3 \end{cases}$; a = -6 , b = 9

7. $k_T = 8$; y ' = 8 ; $x^3 = 8$; x = 2 ; $y = ¼ \cdot 2^4 = 4$. V Sivuamispiste on (2,4)

8. $f(x) = - x^3 + 12x^2 - 45x$; $f'(x) = -3x^2 + 24x - 45 = -3(x^2 - 8x + 15)$
f ' = 0 ; $x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \dfrac{8 \pm 2}{2}$; x = 5 tai x = 3

f ' | - - - | + + + | - - -
f | ↘ _ ↗ ¯ ↘
1 3 5

f ':n kuvaaja alaspäin aukeava paraabeli
Suurin on joko f(1) = -1 + 12 - 45 = -34
tai f(5) = -125 + 300 - 225 = -50 V: Suurin on f(1) = -34

9. Käyrät sivuavat, jos niillä on sama y-koordinaatti ja k_T, kun x = 1
$y = x^3 + x^2$; $y' = 3x^2 + 2x$; $y = ax^3 - bx - 1$; $y' = 3ax^2 - b$
$\begin{cases} a\cdot 1^3 - b\cdot 1 - 1 = 1^3 + 1^2 \\ 3a\cdot 1^2 - b = 3\cdot 1^2 + 2\cdot 1 \end{cases}$; $\begin{cases} a - b = 3 \\ 3a - b = 5 \end{cases}$; 2a = 2 ; a = 1 ; b = -2

10. Olkoon matka = s. Aika = $\frac{s}{v}$. Kulut $K(v) = \frac{s}{v}(9200 + 0{,}046v^3) = s(\frac{9200}{v} + 0{,}046v^2)$

$K'(v) = s(-\frac{9200}{v^2} + 0{,}092v) = s\frac{0{,}092v^3 - 9200}{v^2}$

$K'(v) \geq 0 \Leftrightarrow 0{,}092v^3 - 9200 \geq 0 \Leftrightarrow v^3 \geq 100000 \Leftrightarrow v \geq 46{,}4$

K'	|	- - -	| + + +
K	|	↘	_ ↗
	0		46,4

Kustannukset pienimmät, kun vauhti on 46,4 km/h

02.1.1. Derivoi funktiot a) $f(x) = 2x^2 + 1$ b) $f(x) = (2x^2 + 1)^3$ c) $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{3x + 4}$

02.1.2. Määritä paraabelilla $y = x^2 + 4x - 2$ olevaan pisteeseen (0, -2) piirretyn paraabelin normaalin yhtälö

02.1.3. Määritä funktion $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 2}$ asymptootit.

02.1.4. Määritä funktion $f(x) = x(2 - 4x)^2$ derivaatan nollakohdat.

02.1.5. Määritä raja-arvot a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+3x-14}{4-x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

02.1.6. Määritä funktion $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ pienin arvo välillä $-1 \leq x \leq 2$.

02.1.7. Määritä vakio a siten, että funktio $f(x) = \begin{cases} x + 3, \text{ kun } x \leq 2 \\ ax^2, \text{ kun } x > 2 \end{cases}$ on jatkuva kaikkialla

02.1.8. Määritä funktion $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 7$ ääriarvot

02.1.9. Millä vakion a arvoilla funktio $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 1$ on kaikkialla aidosti kasvava? Määritä funktion nollakohta 0,01 tarkkuudella, kun a:lla on pienin kokonaislukuarvo saadulta alueelta.

02.1.10. Piste P(x,y) on ensimmäisessä neljänneksessä käyrällä $y = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{3}x^2$. Pisteen P kautta kulkeva *y* -akselin suuntainen suora leikkaa *x* -akselin pisteessä A ja *x* -akselin suuntainen suora leikkaa *y* -akselin pisteessä B. Laske suorakulmaisen kolmion PAB alan suurin arvo.

1. a) $f(x) = 2x^2 + 1$; $f'(x) = 4x$ b) $f(x) = (2x^2 + 1)^3$; $f'(x) = 3(2x^2 + 1)^2 \cdot 4x = 12x(2x^2 + 1)^2$

c) $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{3x + 4}$; $f'(x) = \frac{4x(3x + 4) - 3(2x^2 + 1)}{(3x + 4)^2} = \frac{12x^2 + 16x - 6x^2 - 3}{(3x + 4)^2} = \frac{6x^2 + 16x - 3}{(3x + 4)^2}$

2. $y = x^2 + 4x - 2$; $y' = 2x + 4$; $k_T = y'(0) = 4$; $k_N = -\frac{1}{4}$

Normaalin yhtälö : $y - (-2) = -\frac{1}{4}(x - 0)$; $y + 2 = -\frac{1}{4}x$; $y = -\frac{1}{4}x - 2$

3. $\frac{2x^2 - 1}{x + 2} = 2x - 4 + \frac{7}{x + 2}$ esim. jakokulmassa jakamalla

Pystysuora asymptootti on $x = -2$ vino asymptootti on $y = 2x - 4$

4. $f(x) = x(2 - 4x)^2 = x(4 - 16x + 16x^2) = 4x - 16x^2 + 16x^3$, $f'(x) = 4 - 32x + 48x^2$

$f' = 0$; $48x^2 - 32x + 4 = 0$; $12x^2 - 8x + 1 = 0$, $x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{24} = \frac{8 \pm 4}{24}$; $x = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ tai $x = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

5. a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+3x-14}{4-x^2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+7)}{(2+x)(2-x)} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{-(2x+7)}{2+x} = -\frac{11}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

6. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ on JVA suljetulla välillä [-1,2] ; $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$, f on DVA

$f' = 0$; $6x^2 + 6x - 12 = 0$; $x^2 + x - 2 = 0$; $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$; $x = 1$ (tai $x = -2$)

$f(-1) = -2 + 3 + 12 + 1 = 14$; $f(2) = 16 + 12 - 24 + 1 = 5$; $f(1) = 2 + 3 - 12 + 1 = -6$ on pienin

7. $f(x) = \begin{cases} x + 3, \text{ kun } x \le 2 \\ ax^2, \text{ kun } x > 2 \end{cases}$ on polynomina jatkuva kun $x \ne 2$. f on jatkuva, kun x = 2,

jos $\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2-} f(x) = f(2)$; $\lim_{x \to 2+} ax^2 = \lim_{x \to 2-} x + 3 = 2 + 3$; 4a = 5 = 5 ; a = $\frac{5}{4}$

8. $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 7$ on jva, dva , ei reunoja ; $f'(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1)$
f ' = 0 ; x = 0 tai x = 1
f ':n merkit: Ylösp. auk. par +++ 0 --- 1 +++
Maksimi on f(0) = 7 ja minimi on f(1) = 5

f ' + + + 0 - - - 1 + + +
f ↗ ‾ ↘ _ ↗

9. $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 1$; $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$, jonka kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. f on kaikkialla kasvava, jos $f'(x) \ge 0$ kaikilla x:n arvoilla eli paraabeli korkeintaan hipaisee x-akselia.
Näin käy, jos $D \le 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 \le 0 \Leftrightarrow a^2 \le 9 \Leftrightarrow |a| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le a \le 3$.
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

x	0	-1	-0,5	-0,2	-0,3	-0,25	-0,26	-0,255
f(x)	1	-6	-1,4	0,27	-0,2	0,05	-0,0004	0,02

Nollakohta x ≈ -0,26

10. $y = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{3}x^2 = x^2(-\frac{1}{18}x + \frac{1}{3})$, kuv. I neljänneksessä, kun 0 < x < 6
Olkoon P(x,y), jolloin A = (x,0) ja B = (0,y)
Ala A(x,y) = ½xy ; $A(x) = \frac{1}{2}x(-\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{3}x^2) = -\frac{1}{36}x^4 + \frac{1}{6}x^3 = \frac{1}{36}(6x^3 - x^4)$, $x \in [0,6]$
A(x) on jva sulj. välillä ja dva $A'(x) = 18x^2 - 4x^3 = 2x^2(9 - 2x)$; A' = 0 ; x = 0 tai x = 4½
A(0) = A(6) = 0 ; $A(4\frac{1}{2}) = \frac{1}{36} \cdot (6 \cdot \frac{729}{8} - \frac{6561}{16}) = \frac{243}{64} = 3\frac{51}{64}$ on suurin arvo.