PITKÄ

MATEMATIIKKA

KURSSI MA5

ANALYYTTINEN GEOMETRIA

Markku Männikkö
2003

Sisällysluettelo:

MA5. Analyyttinen geometria

1. Koordinaatisto

1.1. Tasokoordinaatisto

1. xy-koordinaatisto ja pisteen esittäminen.
x-akseli vaakasuoraan oikealle, y-akseli pystysuoraan ylös, akselit leikkaavat origossa
Koordinaatiston pisteet ilmoitetaan lukupareina. Ensin x- sitten y-koordinaatti.

2. Pisteet samoja
Lukupariesitys on yksikäsitteinen, ts. $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

1.1.1. Mikä on x, kun piste (1,2) on sama, kuin a) (a - 1,2) b) $(1,a^2 - 2)$ c) $(a - 1,a^2 - 2)$

3. Pisteen P(x,y) etäisyys x- tai y-akselista xy-koordinaatistossa
Etäisyys x-akselista = $| y |$. Etäisyys y-akselista = $| x |$

2. Mikä on pisteen (4,-5) etäisyys a) x-akselista b) y-akselista?
3. Mikä on pisteen (a,3) etäisyys a) x-akselista b) y-akselista?
4. Mikä on a, kun pisteen (2a-3,3a) etäisyys x-akselista on 9?

4. Pisteen P(x,y) projektio x- tai y-akselilla xy-koordinaatistossa
Projektio x-akselilla = (x,0). Projektio y-akselilla = (0,y).

5. Mikä on pisteen (4,-5) projektio a) x-akselilla b) y-akselilla?
6. Mikä on pisteen (a,3) projektio a) x-akselilla b) y-akselilla?
7. Mikä on a, kun pisteen (2a-4,5a) projektio x-akselilla on (6,0)?

5. x-akselin suuntaisen janan pituus
$= | x_2 - x_1 |$ eli janan päätepisteiden x-koordinaattien erotuksen itseisarvo.

8. Mikä on pisteiden (2,3) ja (5,3) välisen janan pituus?
9. Mikä on a, kun pisteiden (2,3) ja (a,3) välisen janan pituus on 4?

6. y-akselin suuntaisen janan pituus
$= | y_2 - y_1 |$ eli janan y-koordinaattien erotuksen itseisarvo.

10. Mikä on pisteiden (2,3) ja (2,5) välisen janan pituus?
11. Mikä on y, kun pisteiden (2,-3) ja (2,y) välisen janan pituus on 5?

7. Janan pituus yleisesti
$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

12. Mikä on pisteiden a) (2,3) ja (5,-1) b) (1,-2) ja (-4,5) välisen janan pituus?
13. Mikä on x, kun pisteiden (2,3) ja (x,-5) välisen janan pituus on 10?
14. Kolmion ABC kärkipisteet ovat A(0,1) , B(3,0) ja C(t,½t+2). Määritä vakio t siten, että kolmio ABC on tasakylkinen kolmio, jonka kantana on a) sivu AB b) sivu AC.

8. Janan keskipiste
$x_K = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y_K = \frac{y_1 + y_2}{2}$

15. Laske janan keskipisteet, kun päätepisteet ovat a) (3,2) ja (7,6) b) (4,0) ja (-2,-8) c) (-3,-5) ja (8,2).
16. Mikä on A, kun janan AB keskipiste on K(2,5) ja B = (6,-7)?
17. Kolmion kärkipisteet ovat (1,3), (4,2) ja (-2,1). Laske sivujen keskipisteet.
18. Janan päätepiste on (-1,3) ja keskipiste (½,1). Määritä janan toinen päätepiste ja janan pituus.
19. Janan päätepiste on (-3,-4), keskipiste x-akselilla ja toinen päätepiste y-akselilla. Laske janan pituus.
20. Janan keskipiste on (-3,4) sekä janan päätepisteet ovat koordinaattiakseleilla. Laske janan pituus.

1.2. Avaruuskoordinaatisto

1. xyz-koordinaatisto
x-akseli itseen päin, y-akseli vaakasuoraan oikealle ja z-akseli ylös, akselit leikkaavat origossa.
Koordinaatiston pisteet ilmoitetaan lukukolmikkoina. Ensin x- , sitten y- ja viimeksi z-koordinaatti.

2. Pisteen P(x,y,z) etäisyys xy-, xz- tai yz-tasosta xyz-koordinaatistossa.
Etäisyys xy-tasosta = | z | . Etäisyys xz-tasosta = | y | . Etäisyys yz-tasosta = |x |

1.2.1. Mikä on pisteen (3,5,-4) etäisyys a) xy- b) xz- c) yz-tasosta?
2. Mikä on a, kun pisteen (2a-3,3a,4-a) etäisyys yz-tasosta on 5?

3. Pisteen P(x,y,z) projektio xy- , xz- tai yz-tasoilla xyz-koordinaatistossa
Projektio xy-tasolla = (x,y,0) . Projektio xz-tasolla = (x,0,z) . Projektio yz-tasolla = (0,y,z)

3. Mikä on pisteen (2,-3,-4) projektio a) xy- b) xz- c) yz-tasolla?
4. Mikä on a, kun pisteen (2a, 3a-4, 4) projektio yz-tasolla on (0,2,4)?

4. Pisteen P(x,y,z) projektio x-, y- tai z-akselilla xyz-koordinaatistossa
Projektio x-akselilla = (x,0,0) . Projektio y-akselilla = (0,y,0) . Projektio z-akselilla = (0,0,z)

5. Mikä on pisteen (2,-3,-4) projektio a) x- b) y- c) z-akselilla?
6. Mikä on a, kun pisteen (2a,3a-4,4) projektio x-akselilla on (8,0,0)?

5. Janan pituus kolmiulotteisessa koordinaatistossa
$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

7. Janan päätepisteet ovat (1,2,3) ja (3,4,2). Laske janan pituus
8. Mikä x-akselin piste on pisteestä (1,-2,3) etäisyydellä 7?
9. Osoita, että kolmio (0,1,0), (3,2,4), (1,5,3) on tasakylkinen.
10. Määritä x, kun janat A(4,7,x)B(3,x,3) ja C(3,4,x)D(-1,4,4) ovat yhtä pitkät.

6. Janan keskipiste kolmiulotteisessa koordinaatistossa
$x_K = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y_K = \frac{y_1 + y_2}{2}$; $z_K = \frac{z_1 + z_2}{2}$

11. Laske janan A(1,2,3)B(9,-8,7) keskipiste.
12. Janan AB keskipiste on (3,2,-1) ja piste A(2,3,-4). Määritä piste B.
13. Kolmion kärjet ovat pisteissä (3,0,5), (1,4,3) ja (5,6,1). Laske keskijanojen pituudet.

1.3. Analyyttisen geometrian periaate

1. Periaate
Geometrinen tehtävä muutetaan algebralliseksi, joka ratkaistaan algebrallisesti.
Tälle ratkaisulle annetaan jälleen geometrinen tulkinta, joka antaa geometrisen tehtävän ratkaisun.

2. Tutkiminen, onko piste jollakin yhtälön avulla määritellyllä käyrällä
Sijoitetaan pisteen koordinaatit yhtälöön. Jos yhtälö toteutuu, on piste käyrällä, muuten ei.

1.3.1. Onko piste (3½,4) suoralla y = 2x - 3?
2. Onko piste (3,-4) käyrällä xy + 2x - 3y + 6 = 0?

3. Yhtälössä olevan kirjaimen arvon määrittämistä, kun piste ko. yhtälön kuvaamalla käyrällä
Sijoitetaan pisteen koordinaatit käyrän yhtälöön, josta ratkaistaan kysytyn kirjaimen arvo.

3. Mikä on a, kun piste (2,3) on käyrällä 3x - ay + 6 = 0?
4. Mikä on a, kun piste (2,3) on käyrällä $3x - a^2y + 6 = 0$?

4. Kirjainsuureiden välisen yhtälön muodostaminen, jostakin annetusta tiedosta
Käytetään annettua tietoa hyväksi ja muodostetaan yhtälö.

5. Taulukoitujen suureiden riippuvuuden graafinen esitys
Valitse toinen taulukon suure x-akseliksi ja toinen y-akseliksi.
Merkitse lukuparit pisteinä koordinaatistoon ja yhdistä pisteet kuvaajaksi.

6. Suureiden yhtälöllä annetun riippuvuuden graafinen esitys
Anna x:lle arvoja ja laske niitä vastaavia y:n arvoja sekä laita ne lukuparitaulukkoon.
Merkitse lukuparit pisteinä koordinaatistoon ja piirrä kuvaaja.

5. Piirrä yhtälön a) y = 4 - 2x b) 2x + 3y - 6 = 0 kuvaaja

7. Joidenkin yhtälöiden kuvaajia xyz-koordinaatistossa
Jos yksi tuntematon puuttuu, niin piirretään ensin kahden muuttujan kuvaaja niiden määräämään tasoon. Muita pisteitä ovat kaikki tästä kuvaajasta kolmannen muuttujan akselin suuntaan lähtevät pisteet.

6. Mikä on yhtälön $z = 3y - 6$ kuvaaja yz-tasolla?
7. Mikä on yhtälön $z = 3y - 6$ kuvaaja xyz-koordinaatistossa?
8. Mikä on yhtälön $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$ kuvaaja xyz-koordinaatistossa?

2. Tason suora

2.1. Kulmakerroin ja suuntakulma

1. Suuntakulma
on suoran ja x-akselin positiivisen suunnan välisistä kulmista itseisarvoltaan pienempi tai 90°, jos yhtä suuret

2. Nouseva, laskeva, vaaka- ja pystysuora suora suuntakulman perusteella
Suora on nouseva, kun suuntakulma > 0°, laskeva, kun suuntakulma < 0°,
vaakasuora, kun suuntakulma = 0° ja pystysuora, kun suuntakulma = 90°

2.1.1. Millainen on suora, jonka suuntakulma on a) 25° b) - 36° c) 90° d) 0° e) -90° ?

3. Kulmakertoimen laskeminen suuntakulmasta
$k = \tan \alpha$

2. Mikä on suoran kulmakerroin , kun suuntakulma on a) 45° b) -30° c) 0° d) 90° ?

4. Suuntakulman laskeminen kulmakertoimesta
Ratkaise α yhtälöstä $\tan \alpha = k$.

3. Mikä on suoran suuntakulma, kun kulmakerroin on a) 2 b) -3 c) ½ d) 0?
4. Mikä on suoran a) $y = 4x + 5$ b) $2x - 3y = 4$ suuntakulma?

2.2. Kahden pisteen kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

1. Kulmakertoimen laskeminen kahdesta suoran pisteestä
$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, kun suora kulkee pisteiden (x_1,y_1) ja (x_2,y_2) kautta.

2.2.1. Mikä on pisteiden a) (2,3) ja (4,-1) b) (-3,4) ja (½,-10) c) (2,1) ja (3,1) d) (2,1) ja (2,-3) kautta kulkevan suoran kulmakerroin?
2. Mikä on a, kun pisteiden (a,1) ja (3,5) kautta kulkevan suoran kulmakerroin on -2?

2.3. Suoran yhtälön muodostaminen

1. Yhtälön muodostaminen, kun tunnetaan piste ja kulmakerroin
$y - y_0 = k(x - x_0)$, missä piste on (x_0,y_0) ja kulmakerroin k.

2.3.1. Mikä on suoran yhtälö, kun a) P(1,2) ja k = 3 b) P(-2,4) ja k = -3 c) P(-4,5) ja k = 6?
2. Mikä on suoran yhtälö, kun a) P(2,3) ja k = ¾ b) P(-¼,½) ja k = - ¾?

2. Yhtälön muodostaminen, kun tunnetaan piste ja (toinen piste tai suuntavektori tai suuntakulma).
Laske kulmakerroin kahdesta pisteestä (2.2.1) tai suuntavektorista (2.5.6) tai suuntakulmasta (2.1.3)

3. Mikä on pisteiden a) (2,-3) ja (5,1) b) (2,3) ja (2,-4) kautta kulkevan suoran yhtälö?
4. Mikä on pisteen (1,-2) kautta kulkevan vektorin $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ suuntaisen suoran yhtälö?
5. Mikä on pisteen (3,2) kautta kulkevan suoran yhtälö, kun sen suuntakulma on 60°?

3. x-akselin suuntaisen suoran yhtälö
on muotoa y = vakio, missä vakio on suoran kaikkien pisteiden y-koordinaatti.

6. Piirrä suora a) $y = 3$ b) $y + 4 = 0$ c) $3y + 4 = 0$.

4. y-akselin suuntaisen suoran yhtälö
on muotoa x = vakio, missä vakio on suoran kaikkien pisteiden x-koordinaatti.

7. Piirrä suora a) $x = 2$ b) $x - 3 = 0$ c) $2x + 3 = 0$

5. Ratkaistussa muodossa olevan yhtälön $y = kx + b$ kuvaajan piirtäminen
Tee lukuparitaulukko. Anna x:lle 3 helppoa arvoa ja laske niitä vastaavat y:t.
Merkitse lukuparit pisteinä koordinaatistoon ja piirrä niiden kautta suora.

8. Piirrä suora a) $y = 3x - 4$ b) $y = -2x + 1$ c) $y = 2$

6. Yhtälön $ax + by + c = 0$ kuvaaja, kun a ja b molemmat eivät ole nollia on suora.

7. Suoran $ax + by + c = 0$ kulmakertoimen laskeminen
Ratkaise y siirtämällä vakio- ja x-termi oikealle ja jakamalla y:n kertoimella.
Kulmakerroin on x:n kerroin

9. Mikä on suoran a) $2x + 3y = 0$ b) $3x - 2y + 1 = 0$ c) $5x - 6y + 7 = 0$ d) $2x + 3 = 0$ e) $4y - 5 = 0$ kulmakerroin?

8. Suoran yhtälön esittäminen yleisessä muodossa
Siirretään kaikki termit vasemmalle puolelle, jolloin oikealle puolelle jää 0.

9. Ratkaisemattomassa muodossa olevan yhtälön $ax + by = c$ kuvaajan piirtäminen
Anna x:lle arvo 0 ja laske sitä vastaava y sekä päinvastoin.
Merkitse nämä akselien leikkauspisteet koordinaatistoon ja piirrä näiden kautta suora.

10. Piirrä suora a) $2x + 3y = 6$ b) $3x - 4y = 24$ c) $5x - 7y + 4 = 0$ d) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

10. Tutkiminen ovatko 3 tai useampia pisteitä samalla suoralla.
Lasketaan kahdesta pisteestä suoran yhtälö ja tarkistetaan sijoittamalla onko kolmas piste suoralla.
TAI jos suoran kulmakertoimet kahdella tavalla (1. ja 2. pisteestä sekä 1. ja 3. pisteestä) laskettuna samat
TAI jos suorien suuntavektorit kahdella tavalla laskettuna yhdensuuntaiset

11. Ovatko pisteet (1,3) , (5,6) ja (25,20) samalla suoralla?
12. Mikä on a, kun pisteet (2,-1) , (3,2) ja (5,a) ovat samalla suoralla?

11. Kuvaajan piirtäminen graafisella laskimella (TI-85)
Laita suoran yhtälö ratkaistuun muotoon $y = kx + b$.
GRAPH | F1 eli y(x) = | kirjoita kx + b | EXIT | F5 eli GRAPH

12. Kuvaajan pisteiden selvittäminen TRACE-toiminnolla graafisessa laskimessa
Kun painat F4 eli TRACE kursori siirtyy kuvaajalle.
Nuoli oikealle ja vasemmalle siirtää kursoria kuvaajalla oikealle ja vasemmalle.
Näin voidaan siirtyä haluttuun pisteeseen, jonka koordinaatit näkyvät ruudun alaosassa.

13. ZOOM-toiminto graafisessa laskimessa
GRAPH | F3 eli ZOOM antaa valikkoja, joilla voi tarkastella kuvaajan pienempää tai suurempaa osaa.

14. RANGE-toiminto graafisessa laskimessa
GRAPH | F2 eli RANGE voit asettaa koordinaatiston akselien ja yksikön pituudet halutuiksi

15. Kulmakertoimen k merkitys yhtälön $y = kx + b$ kuvaajassa
Kun siirrytään yksi ruutu oikealle, siirrytään $| k |$ ruutua ylös (jos $k > 0$) tai alas (jos $k < 0$).

13. Miten jyrkästi nousee suora a) $y = ½x + 1$ b) $2x + y = 1$ c) $2x + 3y + 4 = 0$, kun siirrytään 1 ruutu oikealle?

16. Nouseva, laskeva ja vaakasuora suora k:n avulla esitettynä
Suora on nouseva, jos $k > 0$, laskeva, jos $k < 0$ ja vaakasuora, jos $k = 0$ sekä pystysuora, jos ei k:ta

14. Minkä laatuinen on suora a) $y = 2x + 3$ b) $2x + y + 3 = 0$ c) $y = 3$?
15. Mikä on a, kun suora a) $y = (a - 1)x$ b) $ax + 2x + y = 0$ on kasvava?

17. Vakion b merkitys yhtälön $y = kx + b$ kuvaajassa
Suora leikkaa y-akselin korkeudella b eli pisteessä (0,b)

16.Millä korkeudella suora a) $y = 3x - 4$ b) $2x + 3y - 4 = 0$ leikkaa y-akselin?
17. Mikä on b, kun suora $y = bx + 3x - 4b + 5$ leikkaa y-akselin korkeudella -7?

18. Yhtälön kuvaajan piirtäminen käyttäen kertoimien k ja b ominaisuuksia
Laitetaan y-akselin leikkauspiste (0,b) koordinaatistoon
Toinen piste kulmakertoimesta k, yksi ruutu oikealle ja k ruutua ylös (k>0) tai alas (k<0).
Näiden pisteiden kautta piirretään suora.

18. Piirrä suora a) $y = 2x + ½$ b) $y = -½x + 2$

19. Janan yhtälö
On osa suoran yhtälöä.
Ilmoitetaan antamalla suoran yhtälö ja määrittelyjoukoksi päätepisteiden x-koordinaattien väli.

19. Piirrä jana a) $y = 3x - 2$, $-1 \le x \le 2$ b) $y = -½x + 1$, $x \in [-2,3]$.
20. Mikä on janan A(1,2) B(3,-4) yhtälö?

*20. Regressiosuoran määrittäminen laskimen (TI-85) avulla
Saadaan annettujen pisteiden kautta mahdollisimman läheltä menevä suora.
STAT | F2 EDIT | xlist | ylist
Syötä lukuparit (x_1,y_1) , (x_2,y_2) ,…
EXIT | F1 CALC | xlist | ylist | F2 LINR
Saat suoran yhtälön muodossa $y = a + bx$, korrelaatiokertoimen, ja havaintoparien lukumäärän.

21. Syntyneiden lasten painosta ja pituudesta on havaintoja (2 kg, 47 cm) , (3 kg, 52 cm) , (3½ kg, 53 cm) ja (4 kg, 55 cm). Mikä on pisteitä mahdollisimman läheltä kulkevan suoran yhtälö?

21. Suoran yhtälön laskeminen kahdesta suoralla olevasta pisteestä graafisen laskimen avulla
Määritä näiden kahden pisteen kautta kulkeva regressiosuora edellisen kohdan mukaisesti

*22. Suureiden arviointia regressiosuoran avulla
Voit laskea regressiosuoran yhtälöstä toisiaan vastaavia (x,y) pareja tai
2nd F4 FCST | x-arvo | Siirry y-riville | F5 SOLVE , jolloin saat vastaavan y-arvon

22. Arvioi ed. suoran perusteella, mikä on a) pituus, jos paino on 4½ kg b) paino, jos pituus on 50 cm?

2.4 Suoraparvet

1. Annetun suoran $y = kx$ suuntaisten suorien parvi
$y = kx + c$, $c \in R$. Suoraparven parametrina on vakiotermi.
Kun c on saanut kaikki reaalilukuarvot, on saatu kaikki ko. suuntaiset suorat.

2.4.1. Määritä suoran a) $y = 3x + 4$ b) $y = -5x + 3$ c) $y = 1$ suuntaisten suorien parvi.

2. Annetun suoran $ax + by = 0$ suuntaisten suorien parvi
$ax + by + c = 0$, $c \in R$.

2. Määritä suoran a) $2x + 3y + 4 = 0$ b) $3x - 5y + 1 = 0$ c) $2x + 3 = 0$ suuntaisten suorien parvi.

3. Annetun suoran $ax + by = 0$ normaalien parvi
$bx - ay + c = 0$

3. Määritä suoran a) $x - 4y = 0$ b) $5x + 3y = 6$ c) $y - 5 = 0$ normaalien parvi.

4. Annetun pisteen kautta kulkevien suorien parvi
$y - y_0 = k(x - x_0)$ tai $x = x_0$, $k \in R$. Suoraparven parametrinä on kulmakerroin k.

4. Muodosta pisteen a) (2,3) b) (0,3) c) (4,0) kautta kulkevien suorien parvi.

5. Suoran yhtälön muodostaminen suoraparvia käyttäen
Yleensä kaksi tietoa määrittää suoran.
Muodostetaan toisesta tiedosta sen ehdon täyttävien suorien parvi.
Ratkaistaan toisesta tiedosta suoraparven parametrin arvo.
Vastaus saadaan korvaamalla suoraparven parametri saadulla arvolla.

5. Määritä suoran yhtälö, kun se on suoran $2x + 3y + 4 = 0$ suuntainen, ja se kulkee pisteen (7,-8) kautta.
6. Mikä on sen suoran $3x - 4y = 0$ suuntaisen suoran yhtälö, joka muodostaa koordinaattiakselien kanssa kolmion, jonka pinta-ala on 6.

2.5. Suoran suuntavektori ja normaalivektori

1. Suuntavektori
on vektori, joka on suoran kanssa yhdensuuntainen.

2.5.1. Millainen on suora, jonka suuntavektori on a) **i** + 3**j** b) **i** - **j** c) 2**i** + 3**j** d) 2**i** e) -4**j**?

2. Normaalivektori
on vektori, joka on kohtisuorassa suoraa vastaan.

3. Suoran suunta- ja normaalivektorin yhteys xy-tasossa
Jos suuntavektori on **s** = a**i** + b**j**, niin yksi normaalivektori on **n** = b**i** - a**j**

4. Suuntavektorin muodostaminen kulmakertoimesta
s = **i** + k**j**

2. Muodosta jokin suuntavektori suoralle, jonka kulmakerroin on a) 2 b) -3 c) ½ d) 0?
3. Muodosta jokin suuntavektori suoralle a) y = -5x b) 3x + 2y = 0

5. y-akselin suuntaisen suoran suuntavektori
on **s** = **j**

6. Kulmakertoimen laskeminen suuntavektorista
Jos **s** = s_x**i** + s_y**j** , on $k = \frac{s_y}{s_x}$

4. Mikä on kulmakerroin, kun suoran suuntavektori on a) 2**i** + 5**j** b) 3**i** - 4**j** c) 5**i** d) -6**j**?

7. Suoran ax + by + c = o normaalivektori
n = a**i** + b**j**

5. Anna jokin suoran a) 2x + 3y = 4 b) 3x - 5y + 2 = 0 c) x - 3 = 0 d) 3y = 4 normaalivektori.

8. Suoran ax + by + c = 0 suuntavektori
s = b**i** - a**j**

6. Anna jokin suoran a) 5x - 6y = 0 b) 7x + 8y + 4 = 0 c) 3y = 5 d) x - 1 = 0 suuntavektori

2.6. Suorien keskinäinen asema

1.Yhdensuuntaisuusehto kulmakertoimilla
$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$ tai molemmat suorat y-akselin suuntaisia.

2.6.1. Tutki suorien L_1:y = 3x - 4 , L_2:6x + 2y = 3 ja L_3:6x - 2y + 3 = 0 yhdensuuntaisuutta
2. Mikä on a, kun suorat y = ax - 2x + 3 ja y = 3x + 4 ovat yhdensuuntaiset?

2. Yhdensuuntaisuusehto suuntavektoreilla tai suuntakulmilla
$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \mathbf{s}_1 \parallel \mathbf{s}_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$

3. Yhdensuuntaisuusehto suorilla ax + by + c = 0
$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

3. Ovatko suorat 2x + 3y = 4 ja 4x + 5y = 8 yhdensuuntaiset?
4. Mikä on a, kun suorat ax - 2y = 4 ja 3x + 4y = 5 ovat yhdensuuntaiset?

4. Yhdensuuntaisen suoran yhtälön laskeminen
Kulmakertoimen saat toisesta yhtälöstä.
Yhtälön saat normaalilla tavalla $y - y_0 = k(x - x_0)$

5. Mikä on pisteen (1,2) kautta kulkevan, suoran y = 3x + 4 suuntaisen suoran yhtälö?
6. Mikä on janan A(1,2)B(3,-4) suuntaisen ja pisteen (5,6) kautta kulkevan suoran yhtälö?

5. Kohtisuoruusehto kulmakertoimilla
$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$ tai toinen suora x-akselin ja toinen suora y-akselin suuntainen
$\Leftrightarrow k_2 = -1 / k_1$ tai toinen suora x-akselin ja toinen suora y-akselin suuntainen(eli kulmakertoimet käänteislukujen vastalukuja)

7. Mikä on normaalin kulmakerroin, kun suoran kulmakerroin on a) $k = 3$ b) -4 c) ½ d) 0?
8. Tutki suorien L_1:$y = 2x + 3$, L_2:$y = ½x - 1$ ja L_3:$y = -½x + 2$ kohtisuoruutta.
9. Mikä on a, kun suorat $y = ax - x - 1$ ja $y = 3x - 4$ ovat kohtisuorassa?

6. Kohtisuoruusehto suuntavektoreilla
$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = 0$

10. Suorien suuntavektorit ovat $\mathbf{s} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ ja $\mathbf{s} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$. Ovatko suorat kohtisuorassa?
11. Mikä on a, kun suorat $ax - 6y = 4$ ja $3x + 2y = 1$ ovat kohtisuorassa?

7. Normaalin yhtälön laskeminen
Laske kulmakerroin annetusta tiedosta ja suoran yhtälö perustavalla $y - y_0 = k(x - x_0)$

12. Laske pisteen (1,2) kautta kulkevan suoran $y = 2x + 3$ normaalin yhtälö.
13. Laske janan A(2,3)B(5,-6) keskinormaalin yhtälö.

8. Kahden suoran välisen kulman laskeminen suorien suuntakulmista
Laske kummankin suoran suuntakulmat α_1 ja α_2 yhtälöstä $\tan \alpha = k$.
Suorien välinen kulma on $\alpha = |\alpha_2 - \alpha_1|$, jos $\alpha < 90°$ tai $180 - \alpha$, jos $\alpha > 90°$

14. Mikä on suorien a) $y = 2x$ ja $y = 3x$ b) $y = 3x$ ja $y = -4x$ välinen kulma?

9. Kahden suoran välisen kulman laskeminen suorien kulmakertoimesta
$$\tan \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \right|$$

15. Laske suorien $y = 3x$ ja $y = ½x$ välisen kulman tarkka arvo.

10. Kahden suoran välisen kulman laskeminen suunta- tai normaalivektoreilla
$$\cos \alpha = \left| \frac{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1| \cdot |\mathbf{s}_2|} \right|$$ tai samoin **s** korvattuna **n**:llä

16. Laske suorien $2x + 3y = 4$ ja $5x - 6y = 7$ välisen kulman suuruus.

11.Kulmakertoimen laskeminen, kun tunnetaan toinen kulmakerroin ja suorien välinen kulma
Ratkaise kulmakerroin k eo. yhtälöstä 2.6.9.

17. Mikä on k, kun suorien $y = ax$ ja $y = 2x$ välinen kulma on 45° ?

12. Kahden suoran leikkauspisteen laskeminen
saadaan ratkaisemalla suorien yhtälöiden muodostama yhtälöpari

18. Laske suorien a) $y = 2x + 3$ ja $5x - 2y + 4 = 0$ b) $3x - 4y = 5$ ja $5x + 3y = 18$ leikkauspiste
19. Kolmion sivut ovat suorilla $y = 3$, $2x + y = -1$ ja $3x + 2y = 4$. Mitkä ovat kärkipisteet?

13. Yhtälöparin ratkaiseminen graafisella laskimella TI-85
Laita yhtälöt muotoon $ax + by = c$
$\boxed{\text{SIMULT}}$ $\boxed{\text{number = 2}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{a_{1,1} = a}$ $\boxed{a_{1,2} = b}$ $\boxed{b_1 = c}$, …, $\boxed{\text{F5 = SOLVE}}$

20. Laske suorien $2x + 3y - 4 = 0$ ja $y = 3x + 5$ leikkauspiste.
21. Laske kolmion kärkipisteet, kun ne ovat suorilla $y = 2x + 3$, $2x - 3y + 6 = 0$ ja $5x - 2y = 7$

14. Kahden suoran leikkauspisteiden lukumäärä
voi olla 1, 0 tai ∞ riippuen siitä, ovatko suorat erisuuntaisia, yhdensuuntaisia mutta erillään vai yhdensuuntaisia ja yhtyvät. Tai kun lasketaan leikkauspistettä, saadaan ratkaisuja 1, 0 tai ∞ .

22. Montako leikkauspistettä on suorilla a) $y = 2x$ ja $y = 2x + 1$ b) $y = 3x$ ja $y = -x$ c) $y = 2x$ ja $4x - 2y = 0$?
23. Määritä a ja b, kun suorilla $y = 2x + b$ ja $y = ax - 3$ on äärettömän monta yhteistä pistettä.

15. Yhtälöparin $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{cases}$ ratkaisujen lukumäärä

1° on 1, jos $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ 2° on 0, jos $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ 3° on ∞, jos $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$

24. Montako ratkaisua on yhtälöparilla a) $\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ 6x - 2y + 8 = 0 \end{cases}$?

25. Määritä a, kun yhtälöparilla $\begin{cases} ax + 2y = 3 \\ 5x - 6y = 7 \end{cases}$ ei ole ratkaisua.

26. Määritä a ja b, kun yhtälöparilla $\begin{cases} ax + 2y = 3 \\ 3x - by = 2 \end{cases}$ on useampia ratkaisuja kuin yksi.

16. Tason monikulmion alan laskeminen
Piirrä monikulmion ympäri suorakaide, jonka sivut ovat vaaka- ja pystysuoria.
Laske suorakaiteen ala ja vähennä siitä monikulmioon kuulumattomien reunakolmioiden pinta-alat.

27. Laske kolmion A(1,4) B(-2,-3) C(5,3) pinta-ala.
28. Laske nelikulmion A(1,2) B(2,4) C(5,3) D(4,-1) pinta-ala.

17. Osoitus, että parven kaikki suorat kulkevat saman pisteen kautta
Anna a:lle kaksi helppoa arvoa ja muodosta näitä vastaavat suorien yhtälöt.
Ratkaise näiden suorien leikkauspiste. Se on oltava kaikkien suorien yhteinen piste.
Osoita, että tämä piste on kaikilla parven suorilla sijoittamalla se suoraparven yleiseen yhtälöön, jonka pitäisi toteutua identtisesti kaikilla parametrin arvoilla.

29. Osoita, että parven ax + 3a - 4y = 8 kaikki suorat kulkevat saman pisteen kautta. Mikä tämä piste on?
30. Minkä pisteen kautta parven y = 3ax - 9a + 4 kaikki suorat kulkevat?

18. Kahden suoran leikkauspisteen kautta kulkevien suorien parvi
Olkoon suorien yhtälöt ax + by + c = 0 ja dx + ey + f = 0 (a:d $\neq$ b:e, jotta suorat leikkaisivat)
Näiden leikkauspisteen kautta kulkevien suorien parvi on (ax + by + c) + t(dx + ey + f) = 0 , missä t $\in$ R

31. Muodosta suorien 2x + 3y + 4 = 0 ja y = 2x + 3 leikkauspisteen kautta kulkevien suorien parvi.
32. Laske pisteen (1,2) sekä suorien y = 3x - 4 ja 3x - 4y = 5 leikkauspisteen kautta kulkevan suoran yhtälö?

2.7. Pisteen etäisyys suorasta

1. Pisteen etäisyys x-akselin suuntaisesta suorasta y = c
on d = | y_0 - c | , kun piste on (x_0,y_0).

2.7.1. Mikä on pisteen (1,2) etäisyys suorasta y = 4?

2. Pisteen etäisyys y-akselin suuntaisesta suorasta x = c
on d = | x_0 - c | , kun piste on (x_0,y_0).

2. Mikä on pisteen (5,6) etäisyys suorasta x = -3?

3. Etäisyyden laskeminen yleisesti jostakin suorasta
Suoran yhtälö on oltava yleisessä muodossa ax + by + c = 0 ja olkoon piste (x_0,y_0)

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

3. Laske pisteen (1,2) etäisyys suorasta 3x - 4y = 5
4. Mikä y-akselin piste on suorasta 6x + 8y = 9 etäisyydellä 10?

4. Kahden yhdensuuntaisen suoran välisen etäisyyden laskeminen
Valitse toiselta suoralta jokin piste ja laske sen etäisyys toiselle suoralle (2.7.3)

5. Mikä on suorien y = 2x + 3 ja y = 2x - 5 välinen etäisyys?

5. Tietyllä etäisyydellä olevan suoran yhtälön laskeminen
Merkitse kysytyn suoran yleistä pistettä (x,y).
Käytä kaavaa (2.7.3) tekemällä yhtälö (x,y):n etäisyys annetulle suoralle on tietyn etäisyyden suuruinen
Sievennä saatu yhtälö kahdeksi ilman itseisarvoa olevaksi yhtälöksi.

6. Muodosta niiden suorien yhtälöt, jotka ovat suorasta 3x + 4y = 5 etäisyydellä 6.

6. Kahden suoran välisen kulmanpuolittajan yhtälön laskeminen
Merkitse mielivaltaista kulmanpuolittajan pistettä (x,y)
Tee yhtälö tiedosta: pisteen etäisyys ensimmäiselle suoralle = pisteen etäisyys toiselle suoralle.
Sievennä saatu yhtälö kahdeksi ilman itseisarvoa olevaksi yhtälöksi.
Valitse näistä toinen, jos mahdollisesti haluttiin tietty kulmanpuolittaja.

7. Laske suorien 2x + y = 3 ja x - 2y = 4 välisten kulmien puolittajien yhtälöt.

7. Janan keskinormaalin yhtälön laskeminen Merkitse mielivaltaista keskinormaalin pistettä P(x,y). Tee yhtälö tiedosta: PA = PB janan pituus kaavasta (1.1.6) Sievennä neliöjuuret pois.

8. Laske janan A(2,3)B(5,-6) keskinormaalin yhtälö.

8. Käyrän yhtälön laskeminen, kun tunnetaan sen kaikkien pisteiden täyttämä ehto Merkitse mielivaltaista pistettä P(x,y) Tee yhtälö pisteiden täyttämän ehdon perusteella ja sievennä se.

9. Määritä sen suoran yhtälö, jonka pisteet ovat suorasta $x + 2y = 3$ kaksi kertaa niin kaukana kuin suorasta $4x - 2y = 3$.

2.8. Kahden muuttujan lineaarinen epäyhtälö

1. Alueen määrittäminen, kun epäyhtälö on annettu Merkitse > tai < merkin tilalle =, ja piirrä näin saadun yhtälön kuvaaja. Valitse kuvaajan kummaltakin puolelta jokin piste, ja sijoita pisteen koordinaatit epäyhtälöön. Jos epäyhtälö toteutuu, ratkaisualueeseen kuuluu koko pisteen puoleinen tasoalue.

2.8.1. Määritä tasoalue a) $2x - y > 4$ b) $2x + 3y < 6$ c) $x > 3$ d) $2y < 5$

2. Epäyhtälön määrittäminen, kun alueen reunaviivan yhtälö on annettu Ota alueesta jokin piste ja sijoita sen koordinaatit yhtälöön. Laita = merkin tilalle > tai < sen mukaan kummalla merkillä epäyhtälöstä tulee tosi

2. Mikä on suoran $2x + 3y - 4 = 0$ alapuolella olevan tasoalueen epäyhtälö?

3. Alueen määrittäminen, kun epäyhtälöt annettu Määritetään kummankin (kaikkien) epäyhtälöiden määrittämät alueet. Loogisesti päätellään lopullinen alue (ja = leikkausjoukko, tai = unioni)

3. Määritä alue, jossa a) $3x - y > 5$ ja $x - y < 3$ b) $y < 5 - x$ ja $x - y > 1$

4. Epäyhtälöiden määrittäminen, kun alue annettu. Ota alueesta jokin piste ja sijoita sen koordinaatit reunayhtälöihin. Laita = merkin tilalle > tai < sen mukaan kummalla merkillä epäyhtälöstä tulee tosi.

4. Millä epäyhtälöillä voidaan määritellä se alue, joka on suoran $y = 2x + 3$ yläpuolella ja pisteiden A(1,3) ja B(-1,5) kautta kulkevan suoran alapuolella?

2.9. Lineaarinen optimointi

1. Suljettu optimointiongelma Mieti mikä suure on oltava mahdollisimman suuri tai pieni. Mieti mistä suureista tämä maksimoitava suure riippuu ja merkitse niitä x:llä ja y:llä. Muodosta epäyhtälöitä annetuista tiedoista x:n ja y:n välille. Piirrä näiden epäyhtälöiden määrittämä suljettu tasoalue. Laske tasoalueen kärkipisteet. Muodosta maksimoitavalle suureelle lauseke x:n ja y:n avulla. Laske maksimoitavan suureen lausekkeen arvot kaikissa kärkipisteissä. Näistä suurin on kaikkiaan suurin maksimoitavan suureen arvo.

2.9.1. Torimummo menee torille myymään porkkanoita ja perunoita. Litra porkkanoita painaa 0,8 kg ja 1 l perunoita 0,5 kg. Myydessään mummo saa porkkanoista 1,20 mk/l ja perunoista 1 mk/l. Hänellä on kotona porkkanoita ja perunoita paljon, mutta hänen kärryissään on tilaa vain 60 litralle ja kärryt kestävät vain 45 kg. Paljonko mummon kannattaa ottaa mukaansa porkkanoita ja perunoita saadakseen mahdollisimman paljon rahaa? Kuinka paljon mummo sai rahaa yhdestä kuormasta?
2. Maatalossa mietitään vasikoiden ja possujen tuotantoa. Vasikan kasvattamiseen kuluu 100 € ja possun 50€. Varoja on käytettävissä 10 000€. Töitä isäntä ja emäntä ennättävät tehdä 80 tuntia. Possut vaativat hoitoaikaa 1 tunnin ja vasikat puoli tuntia. Possuista saa voittoa 60€ ja vasikoista 50€. Kuinka monta possua ja vasikkaa kannattaa hankkia, jotta voitto olisi mahdollisimman suuri? Mikä on tällöin tuotannosta saatava voitto?

2. Avoin optimointiongelma
Tehtävä etenee, kuten suljettu ongelma, mutta saadaan avoin tasoalue.
Mieti mikä suure on oltava mahdollisimman suuri tai pieni.
Mieti mistä suureista tämä maksimoitava suure riippuu ja merkitse niitä x:llä ja y:llä.
Muodosta epäyhtälöitä annetuista tiedoista x:n ja y:n välille.
Piirrä näiden epäyhtälöiden määrittämä avoin tasoalue.
Laske tasoalueen kärkipisteet.
Muodosta maksimoitavalle suureelle lauseke x:n ja y:n avulla.
Laske maksimoitavan suureen lausekkeen arvot kaikissa kärkipisteissä.
Näistä suurin on kaikkiaan suurin maksimoitavan suureen arvo.

3. Eläinten ruokintaan on käytettävissä kaksi ruokinta-ainetta A ja B, joiden yksikköhinnat ovat 2 mk/kg ja 1 mk/kg sekä ravintosisällöt kg kohti: Kaloreja A:ssa 3000 cal ja B:ssä 2000 cal, Proteiineja A:ssa 100 g ja B:ssä 200 g ja B-vitamiinia A:ssa 10 mg ja B:ssä 10 mg. Ruuan on sisällettävä vähintään 60 000 cal, 3000 g proteiinia ja 250 mg B-vitamiinia. Miten paljon kumpaakin ruokinta-ainetta A ja B on käytettävä, jotta kokonaishinta tulisi mahdollisimman pieneksi?

3. Avaruuden suora ja taso

3.1. Suoran yhtälö avaruudessa

1. Suoran vektorimuotoinen yhtälö, kun tunnetaan piste ja suuntavektori.
Olkoon $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ja $\mathbf{s} = s_x\mathbf{i} + s_y\mathbf{j} + s_z\mathbf{k}$
Suoran yhtälö on $\mathbf{OP} = \mathbf{OP_0} + t\mathbf{s} \Leftrightarrow \mathbf{OP} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k} + t(s_x\mathbf{i} + s_y\mathbf{j} + s_z\mathbf{k})$, missä $t \in R$ on parametri.
Kun parametri t saa kaikki reaalilukuarvot, on saatu kaikkien suoran pisteiden paikkavektorit.

3.1.1. Mikä on sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteen (1,2,3) kautta ja on vektorin $\mathbf{s} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ suuntainen?
2. Mikä on pisteiden (1,2,3) ja (5,-4,3) kautta kulkevan suoran yhtälö?

2. Suoran parametrimuotoinen yhtälöryhmä, kun tunnetaan piste ja suuntavektori.
Olkoon $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ja $\mathbf{s} = s_x\mathbf{i} + s_y\mathbf{j} + s_z\mathbf{k}$
Suoran yhtälö on $\begin{cases} x = x_0 + t\cdot s_x \\ y = y_0 + t\cdot s_y \\ z = z_0 + t\cdot s_z \end{cases}$, missä $t \in R$ on parametri
Kun t on saanut kaikki reaalilukuarvot, on saatu suoran kaikkien pisteiden koordinaatit.

3. Muodosta parametrimuotoinen yhtälö suoralle, joka kulkee pisteen (5,4,-3) kautta ja joka on vektorin $\mathbf{s} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ kanssa.

3. Suoran koordinaattimuotoinen kaksoisyhtälö
$\frac{x - x_0}{s_x} = \frac{y - y_0}{s_y} = \frac{z - z_0}{s_z}$, missä s_x, s_y ja $s_z \neq 0$

4.Suoran pisteiden laskemista
Anna t:lle eri arvoja, saat suoran pisteitä (pmy:stä) tai pisteiden paikkavektoreita (vmy:stä)

4. Anna 3 pistettä suoralta $\mathbf{OP} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} + t(\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$
5. Anna 3 pistettä suoralta $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 5t \\ z = 6t \end{cases}$.

5. Tutkiminen onko jokin annettu piste suoralla, jonka yhtälö tunnetaan.
Lasketaan löytyykö yhtä sellaista t:n arvoa, jolla saadaan annetun pisteen kaikki koordinaatit.

6. Onko piste (19,18,-23) suoralla $\mathbf{OP} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} + t(4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k})$?
7. Onko piste (-1,9,10) suoralla $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 5t \\ z = 6t \end{cases}$

6. Koordinaattiakselien suuntaisten suorien yhtälöt
L || x-akseli : $\begin{cases} x \in R \\ y = \text{vakio (= annetun pisteen y)} \\ z = \text{vakio (= annetun pisteen z)} \end{cases}$. L || y-akseli : $\begin{cases} x = \text{vakio} \\ y \in R \\ z = \text{vakio} \end{cases}$. L || z-akseli : $\begin{cases} x = \text{vakio} \\ y = \text{vakio} \\ z \in R \end{cases}$

8. Mikä on pisteen (2,1,0) kautta kulkevan a) x- b) y- c) z-akselin suuntaisen suoran yhtälö?

7. Parametrimuotoisen yhtälön laskeminen, kun tunnetaan vektorimuotoinen yhtälö
s saadaan t:n kertoimesta ja P_0 vakiovektoriosasta

9. Esitä parametrimuodossa suoran a) **OP** = 2**i** + 3**j** + t(4**i** - 5**j** + 6**k**) b) **OP** = **i** - **k** + t(2**i** + 3**j**) yhtälö.

8. Vektorimuotoisen yhtälön muodostaminen parametrimuotoisesta yhtälöstä
Suuntavektorin kertoimet saadaan t:n kertoimista (s_x on t:n kerroin x:n yhtälössä jne.)
P_0 saadaan t:ttömästä termistä (x_0 on t:tön termi x:n yhtälössä jne.)

10. Esitä vektorimuodossa suoran a) $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 5t \\ z = 6t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 \\ z = 4 - 5t \end{cases}$ yhtälö.

9. Suoran tietyn pisteen laskeminen.
Lasketaan t:n arvo jonkin koordinaatin yhtälöstä annetun ehdon perusteella.
Muut koordinaatit saadaan sijoittamalla saatu parametrin t arvo suoran yhtälöön.

11. Missä pisteessä suora $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 5t \\ z = 12 - 6t \end{cases}$ leikkaa xy-tason?

12. Leikkaako suora **OP** = 2**i** - 3**j** + 4**k** + t(5**i** + 6**j** - 8**k**) leikkaa x-akselin ja jos niin missä pisteessä?

3.2. Sovelluksia

1. Suorien välinen kulma suuntavektoreiden avulla
Lasketaan suuntavektoreiden välinen kulma eli $\cos \alpha = \left| \dfrac{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1| \cdot |\mathbf{s}_2|} \right|$

3.2.1. Mikä on suorien **OP** = **i** + t(**i** - 2**j** + 2**k**) ja **OP** = **j** + t(3**i** + 2**j** - 6**k**) välinen kulma?
2. Millä a:n arvoilla suorien **OP** = t(**i** + **j** + 2**k**) ja **OP** = 5**k** - t(a**i** - **j** + **k**) välinen kulma on 60°?

2. Suorien yhdensuuntaisuus
jos suuntavektorit ovat yhdensuuntaisia eli $\dfrac{s_{1x}}{s_{2x}} = \dfrac{s_{1y}}{s_{2y}} = \dfrac{s_{1z}}{s_{2z}}$

3. Onko suora **OP** = 2**i** + t(2**i** + 3**j** - 4**k**) pisteiden A(4,3,2) ja B(0,-3,8) kautta kulkevan suoran suuntainen?
4. Mikä on a, kun suorat **OP** = **k** + t(a**i** + 2**j** - 3**k**) ja **OP** = **j** + t(2**i** + a**j** + 3**k**) ovat yhdensuuntaiset?

3. Suorien kohtisuoruus
jos suuntavektorit ovat kohtisuorassa eli $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = 0$

5. Osoita, että suorat **OP** = 2**i** + t(3**i** + 5**j** - 7**k**) ja **OP** = **j** + t(2**i** + 3**j** + 3**k**) ovat kohtisuorassa.
6. Millä a:n arvoilla suorat **OP** = **k** + t(a**i** + **j** - 3**k**) ja $\begin{cases} x = 2 + at \\ y = 4 - at \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ ovat kohtisuorassa?

4. Suorien leikkauspisteen koordinaattien laskemista
Merkitään eri suorien parametrejä eri kirjaimella.
Koska leikkauspisteen koordinaatit on oltava samat kummassakin yhtälössä, tehdään kolme yhtälöä merkitsemällä vastaavat koordinaatit yhtä suuriksi.
Ratkaistaan parametrit kahdesta helpoimmasta yhtälöstä ja tarkistetaan toteutuuko kolmas yhtälö eli leikkaavatko suorat.

7. Leikkaavatko suorat **OP** = 2**i** + 4**j** + 5**k** + t(3**i** + 2**j** + **k**) ja **OP** = -2**j** + 3**k** +t(8**i** + 3**j** + 2**k**), jos niin missä?

3.3. Tasot

1. Koordinaattitasojen suuntaisten tasojen yhtälöt
xy-tason suuntaisen tason yhtälö z = vakio (= annetun pisteen z)
xz-tason suuntaisen tason yhtälö y = vakio (= annetun pisteen y)
yz-tason suuntaisen tason yhtälö x = vakio (= annetun pisteen x)

3.3.1. Mikä on pisteen (2,1,0) kautta kulkevan a) xy- b) xz- c) yz-tason suuntaisen tason yhtälö?

2. Koordinaattiakselin suuntaisen tason yhtälö
Olkoon taso z-akselin suuntainen ja se leikkaa xy-tason pitkin suoraa y = kx + b
Tällöin tason yhtälö on $\begin{cases} x = t \\ y = kt + b \\ z \in R \end{cases}$ tai $\begin{cases} y = kx + b \\ z \in R \end{cases}$ tai vain y = kx + b, jos 3-ulotteisuus ilmenee

3. Tason yhtälö, kun tunnetaan piste ja tason normaalivektori
Olkoon piste $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ja normaalivektori **n** = a**i** + b**j** + c**k**
Yhtälö on $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$
TAI Oleta yhtälön olevan muotoa ax + by + cz = d
Sijoita pisteen P_0 koordinaatit yhtälöön ja ratkaise d:n arvo.
Sijoita d:n arvo olettamaasi yhtälöön d:n paikalle.

2. Mikä on pisteen (1,2,3) kautta kulkevan ja vektoria 4**i** + 5**j** + 6**k** vastaan kohtisuoran tason yhtälö?

4. Yhtälön ax + by + cz + d = 0 kuvaaja
on taso, jonka normaalivektori on **n** = a**i** + b**j** + c**k**

3. Missä pisteissä taso 3x + 4y - 6z - 24 = 0 leikkaa koordinaattiakselit?
4. Mikä on tason 2x + 3y + 4z = 0 suuntaisen ja pisteen (5,6,7) kautta kulkevan tason yhtälö?

5. Tason ax + by + cz + d = 0 normaalivektori
on esimerkiksi **n** = a**i** + b**j** + c**k**

5. Anna a) jokin b) kaikki tason 3x - 4y - 5z = 0 normaalivektorit.
6. Millä a:n arvolla suora **OP** = **i** + t(**i** + 2**j** - 3**k**) on tason ax - 2y - z = 0 suuntainen?

6. Tason ja suoran leikkauspisteen laskeminen
Esitä suoran yhtälö parametrimuotoisena yhtälöryhmänä.
Sijoita suoran koordinaatit tason yhtälöön ja ratkaise suoran parametrin arvo.
Sijoita saatu parametrin arvo suoran yhtälöön saadaksesi pisteen.

7. Missä pisteessä suora $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 5t \\ z = 6t \end{cases}$ leikkaa tason 2x - 3y + 4z - 37 = 0?
8. Missä pisteessä suora **OP** = 2**i** + 3**j** - 4**k** + t(5**i** - 6**j** - 7**k**) leikkaa tason 3x - 2y + 4z = 5?

7. Tason ja suoran välinen kulma
Lasketaan ensin tason normaalivektorin ja suoran välinen kulma α
Kysytty tason ja suoran välinen kulma on = 90° - α.

9. Laske tehtävässä 3.3.7. olevan suoran ja tason välinen kulma.
10. Laske tehtävässä 3.3.8. olevan suoran ja tason välinen kulma.

3.4. Kahden tason keskinäinen asema

1. Tasojen yhdensuuntaisuus
$T_1 \parallel T_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

3.4.1. Ovatko tasot 2x + 3y - 4z = 0 ja 4x - 6y - 8z + 10 = 0 yhdensuuntaiset?
2. Mikä on a, kun tasot ax + 2y - 6z = 4 ja 8x + ay - 12z = 20 ovat yhdensuuntaiset?

2. Tasojen kohtisuoruus
$T_1 \perp T_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$

3. Ovatko tasot 2x + 3y - 4z = 0 ja 5x + 6y + 7z = 8 kohtisuorassa toisiaan vastaan?
4. Mikä on a, kun tasot ax + 3y - 4z = 0 ja a(x + y) + z = 1 ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan?

3. Tasojen välisen kulman laskeminen
on sama kuin normaalivektoreiden välinen kulma ja lasketaan : $\cos\alpha = \left|\frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}\right|$

5. Laske tasojen 2x - 3y - 4z = 5 ja 6x + 7y - 8z = 9 välinen kulma.
6. Laske tasojen 2x - 3y = 4 ja 5x - 6y - 7z = 8 välinen kulma.

4. Tasojen leikkaussuoran yhtälön laskeminen
Ratkaise tasojen muodostama yhtälöpari.
Merkitse z = t ja siirrä se vakioiden puolelle.
Ratkaise yhtälöparista t:n avulla x ja y.
Anna vastaus muodossa $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = t \end{cases}$

7. Mikä on tasojen $x + 2y - 3z = 4$ ja $5x - 6y + 7z = 8$ leikkaussuora?
8. Mitä suoraa pitkin taso $2x - 3y + 4z = 5$ leikkaa a) xy- b) xz- c) yz-tason?

3.5. Lineaarisia yhtälöryhmiä

1.Yhtälöparin ratkaiseminen, kun kaksi yhtälöä ja kolme tuntematonta.
Siirrä z vakioiden puolelle ja merkitse z = t.
Ratkaise yhtälöparista t:n avulla x ja y.
Anna vastaus muodossa $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = t \end{cases}$ ts. kyseessä on kahden tason leikkaussuoran määrittäminen.

3.5.1. Ratkaise yhtälöpari a) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ 5x + 7y + 9z = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 4x + 5y - 12z = 13 \end{cases}$ ja anna sille geometrinen tulkinta.

2. Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 5x + 10y - 15z + 20 = 0 \end{cases}$ ja anna sille geometrinen tulkinta.

3. Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} x + 3y - 5z = 6 \\ -2x - 6y + 10z + 12 = 0 \end{cases}$ ja anna sille geometrinen tulkinta.

2. Kolmen tason yhteisen pisteen etsiminen
Ratkaise tasojen yhtälöiden muodostama yhtälöryhmä

4. Missä pisteessä tasot $x + y + z = 12$, $2x + y - z = 5$ ja $3x + 2y - z = 12$ leikkaavat?
5. Onko tasoilla $2x + 4y - 6z = 5$, $2x - 3y - z = 6$ ja $x + 2y - 3z = 7$ yhteistä pistettä?

3. Yhtälöryhmän ratkaiseminen, kun siinä kolme yhtälöä ja kolme tuntematonta
Eliminoi kahdesta eri yhtälöparista z pois, jolloin saat kaksi yhtälöä, joissa kaksi tuntematonta x ja y.
Ratkaise x ja y tästä yhtälöparista.
Laske z sijoittamalla saadut x ja y johonkin yhtälöön.

6. Ratkaise a) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - y + 2z = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 11 \\ x + z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 65 \\ 3x + 2y + z = 50 \\ 2x + y + 3z = 65 \end{cases}$

4. Yhtälöryhmän ratkaiseminen TI-85 laskimella
$\boxed{\text{2nd}}$, $\boxed{\text{SIMULT}}$, anna tuntemattomien lukumäärä, esim. $\boxed{3}$
Syötä yhtälöiden kertoimet ($a_{1,1}$ = 1. yhtälön x:n kerroin) ja lausekkeen arvot (b_1) kaikista yhtälöistä.
Paina $\boxed{\text{F5 = SOLVE}}$. Saat ratkaisut ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$)

7. Ratkaise a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x - y - 2z = -3 \\ x - 2y - 3z = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 1{,}2x + 2{,}3y + 4{,}5z = 6{,}7 \\ 2{,}1x - 0{,}9y - 8{,}7z = 6{,}5 \\ 4{,}3x - 2{,}1y + 0{,}9z = 8{,}7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 102x + 234y + 567z = 1000 \\ 210x - 423y - 758z = 850 \\ 631x - 428y + 259z = 945 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - z = 1 \\ y + 2z = 9 \end{cases}$

5. Yhtälöryhmän ratkaiseminen, kun yhtälöitä on 3 ja tuntemattomia 2.
Valitse ryhmästä kaksi helpointa yhtälöä ja ratkaise niistä x ja y.
Sijoita saadut x ja y kolmanteen vielä käyttämättömään yhtälöön.
Jos tämä kolmas yhtälö toteutuu, niin saatu x ja y on koko ryhmän ratkaisu.
Jos yhtälö ei toteudu, ei koko ryhmällä ole ratkaisua.

8. Ratkaise a) $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x - y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 2x - y = 5 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

4. Toisen asteen käyrät

4.1. Käyrän siirtäminen

1. Siirto y-akselin suunnassa
Jos kuvaajaa siirretään a ruutua ylös, korvataan yhtälössä y lausekkeella (y - a)

4.1.1. Mikä tulee suoran a) $y = 2x$ b) $y = 3x - 4$ c) $2x + 3y = 4$ yhtälöksi, kun sitä siirretään 3 ruutua alaspäin?
2. Mikä tulee paraabelin a) $y = x^2$ b) $y = 2x^2 - 3x$ c) $y = -4x^2$ yhtälöksi, kun y-koordinaatteihin lisätään 5?

2. Siirto x-akselin suunnassa
Jos kuvaajaa siirretään a ruutua oikealle, korvataan yhtälössä x lausekkeella (x - a)

3. Mikä on suoran a) $y = 3x$ b) $y = 4x - 5$ c) $6x + 7y = 8$ yhtälö, kun sitä on siirretty 4 ruutua oikealle?
4. Mikä on paraabelin a) $y = x^2$ b) $y = 3x^2 + 4x$ c) $y = -x^2$ yhtälö, kun sitä on siirretty 5 ruutua vasemmalle?

3. Siirto yleisessä suunnassa
Jos kuvaajan jokaista pistettä siirretään vektorin a**i** + b**j** suuntaisesti ja pituisesti (eli a ruutua oikealle ja b ruutua ylös), niin korvataan yhtälössä x lausekkeella (x - a) ja y lausekkeella (y - b)

5. Mikä on paraabelin $y = 2x^2 - 3x$ yhtälö, kun sille suoritetaan yhdensuuntaissiirto ja $(0,0) \rightarrow (2,-1)$?
6. Miksi muuttuu paraabelin $y = 2x - x^2$ yhtälö, kun kaikkia pisteitä siirretään vektorin 2**i** - 3**j** suuntaisesti?

4 Peilaus suorassa y = x
antaa kaikista kuvioista yhtenevän kuvion.
Tämän yhtälö saadaan vaihtamalla $x \rightarrow y$ ja $y \rightarrow x$

7. Mikä on sen suoran yhtälö, joka saadaan peilaamalla suora $2x + 3y - 4 = 0$ suoran $y = x$ suhteen?
8. Mikä on sen paraabelin yhtälö, joka saadaan peilaamalla paraabeli $y = x^2 - 4x + 5$ suorassa $y = x$?

4.2. Paraabeli

1. Yhtälön $y = x^2$ kuvaaja
on ns. perusparaabeli. Aukeaa ylöspäin. Huippu on origossa. Symmetrinen y-akselin suhteen.

2. Yhtälön $y = ax^2 + bx + c$
on paraabeli, joka aukeaa ylöspäin, jos $a > 0$ ja alaspäin jos $a < 0$

3. Huippumuotoinen yhtälö, kun paraabelin akseli y-akselin suuntainen
Yhtälön $y - y_0 = a(x - x_0)^2$ kuvaaja on paraabeli, jonka huippu on pisteessä (x_0,y_0) ja joka on yhtenevä paraabelin $y = ax^2$ kanssa, eli saatu siitä siirtämällä jokaista pistettä x_0 ruutua oikealle ja y_0 ruutua ylös

4.2.1. Piirrä paraabelit a) $y = x^2$ b) $y + 2 = (x - 3)^2$

4. Yhtälön $y = ax^2 + bx + c$ muuttaminen huippumuotoon $y - y_0 = a(x - x_0)^2$
Siirrä c vasemmalle puolelle yhtälöä ja jaa molemmat puolet a:lla.
Lisää molemmille puolelle sellainen vakiotermi, että oikeasta puolesta tulee neliö.
Esitä oikea puoli neliönä ja kerro molemmat puolet a:lla.

2. Esitä huippumuodossa yhtälö paraabelille a) $y = x^2 + 3$ b) $y = x^2 + 2x$ c) $y = x^2 + 4x + 5$.
3. Esitä huippumuodossa yhtälö paraabelille a) $y = - x^2 + 2x$ b) $y = 2x^2 + 4x - 5$

5. Huipun laskeminen
JOKO sievennä yhtälö huippumuotoon ja katso siitä huippu.
TAI katso taulukkokirjasta kaava huipun laskemiseksi eli $x = - b/2a$ ja y:n saat sijoittamalla.

4. Laske paraabelin a) $y = x^2 - 4x + 5$ b) $y = x^2 - 3x - 4$ c) $y = 2x^2 - 3x + 4$ huippu.

6. Yhtälön $x = y^2$ kuvaaja
on ns. perusparaabeli. Aukeaa oikealle. Huippu on origossa. Symmetrinen x-akselin suhteen.

7. Yhtälön $x = ay^2 + by + c$ kuvaaja
on paraabeli, joka aukeaa oikealle, jos $a > 0$ ja vasemmalle jos $a < 0$

8. Paraabelin $x = ay^2 + by + c$ piirtäminen
Tee lukuparitaulukko ja anna siihen helppoja arvoja y:lle.
Laske vastaavat x:n arvot ja merkitse lukuparit pisteinä koordinaatistoon.
Piirrä pisteiden kautta paraabeli.

5. Piirrä paraabelit a) $x = y^2 - 2y$ b) $x = 2y^2 - 4y - 5$ c) $x = -y^2 + 4y + 3$

9. Paraabelin $x = ay^2 + by + c$ piirtäminen graafisella laskimella TI-85
Piirrä ensin yhtälön $y = ax^2 + bx + c$ kuvaaja. (esim. se on käyrä y1)
MORE , F2=DRAW , MORE , MORE , F2=DrInv , y1
TAI Perusnäytössä valitse DrInv $ax^2 + bx + c$

10. Paraabelin $x = ay^2 + by + c$ huipun laskeminen
Katso taulukkokirjasta kaava, jossa huipun $y = -b/2a$. x:n saat sijoittamalla.

6. Laske paraabelin a) $x = y^2 - 4y - 5$ b) $x = 2y^2 - 6y + 5$ huippu.

11. Paraabelin yhtälön laskeminen, kun siitä tunnetaan tarpeeksi tietoja
Tee paraabelin yhtälöstä huippumuotoinen $y - y_0 = a(x - x_0)^2$ tai normaalimuotoinen $y = ax^2 + bx + c$.
Kummassakin on 3 tuntematonta, joten tarvitset 3 tietoa niiden ratkaisemiseksi x_0, y_0 ja a tai a, b ja c.
Muodosta annetuista tiedoista 3 yhtälöä ja ratkaise ne.
Sijoita saadut parametrien arvot paraabelin yhtälöön parametrien paikalle.

7. Paraabelin huippu on (1,2), akseli y-akselin suuntainen, aukeaa ylöspäin ja se on yhtenevä paraabelin $y = 2x^2$ kanssa. Mikä on paraabeli yhtälö?
8. Paraabelin huippu on pisteessä (1,2), akseli on y-akselin suuntainen ja paraabeli kulkee pisteen (3,4) kautta. Mikä on paraabelin yhtälö?
9. Paraabelin akseli on y-akselin suuntainen ja se kulkee pisteiden (1,2), (0,-1) ja (-1,-2) kautta. Mikä on paraabelin yhtälö?

12. Uraominaisuus
Paraabeli on niiden pisteiden ura, joista on yhtä pitkät matkat paraabelin johtosuoralle ja polttopisteeseen.

13. Yhtälön muodostaminen uratiedosta
Merkitse paraabelin mielivaltaista pistettä (x,y).
Laske tämän etäisyys johtosuoralle ja polttopisteeseen.
Merkitse nämä etäisyydet yhtä suuriksi ja sievennä yhtälö.

10. Mikä on sen käyrän yhtälö, jonka jokainen piste on yhtä kaukana pisteestä (0,2) ja x-akselista?
11. Mikä on sen paraabelin yhtälö, jonka polttopiste on (0,3) ja johtosuora $y - 2 = 0$?

14. Paraabelin sovittaminen havaintoarvoihin
Yritetään saadaan annettujen pisteiden kautta mahdollisimman läheltä menevä paraabeli.
STAT F2 EDIT xlist ylist ja syötä lukuparit (x_1,y_1) , (x_2,y_2) ,…
EXIT F1 CALC xlist ylist MORE F1 P2REG
Saat paraabelin kertoimet järjestyksessä $y = a + bx + cx^2$

12. Auton jarrutusmatka on riippuvainen nopeuden neliöstä. On havaittu seuraavia pysähdysmatkoja

v(km/h)	20	40	60	80	100
s(m)	6	15	30	50	80

Mikä on tähän soveltuvalla laskimella saatu yhtälö s = s(v)? Mikä on pysähdysmatka vauhdista on 50 km/h?

15. Paraabeli yhtälön muodostaminen TI-85 laskimella kolmesta pisteestä
Käytä edellistä menetelmää 4.2.14.

4.3. Paraabelien leikkauspisteitä

1. Suoran ja paraabelin leikkauspisteen laskeminen
Ratkaise suoran ja paraabelin yhtälöiden muodostama yhtälöpari.
Ratkaise jommasta kummasta yhtälöstä y:n lauseke ja sijoita se toiseen yhtälöön.
Ratkaise saadusta yhtälöstä x ja sijoittamalla saat y:n.

4.3.1. Laske paraabelin $y = x^2 - 2x - 3$ ja suoran $y = x - 5$ leikkauspisteet.
2. Laske paraabelin $y = 3x^2 - 4x$ ja suoran $2x + 3y + 1 = 0$ leikkauspisteet.

2. Paraabelin tangentin laskeminen
Muodosta suoraparvi tangentin täyttämästä ehdosta ellei suoraparvea parametreineen ole jo annettu.
Tee yhtälöpari paraabelin ja suoran yhtälöstä ja eliminoi y.
Laita saatu x-yhtälö II asteen yhtälön normaalimuotoon.
Koska tangentilla on vain yksi yhteinen piste paraabelin kanssa, on yhtälöllä oltava vain yksi ratkaisu.
Merkitse II asteen yhtälön diskriminantti = 0 ja ratkaise siitä suoraparven parametrin arvo.
Sijoita parametrin arvo suoran yhtälöön.
HUOM.! Myöhemmin ehkä helpompia keinoja differentiaalilaskennassa.

3. Mikä on a, kun suora $y = x + a$ sivuaa paraabelia $y = x^2 - 3x + 1$?
4. Mikä on suoran $y = 2x$ suuntainen paraabelin $y = x^2$ tangentin yhtälö?

3. Kahden paraabelin leikkauspisteen laskeminen
Ratkaise niiden muodostama yhtälöpari. (1. yhtälön y:n lauseke sijoitetaan 2. yhtälöön y:n paikalle)

5. Laske paraabelien $y = x^2 + 2x - 1$ ja $y = 2x^2 - 3x + 3$ leikkauspisteet.
6. Laske paraabelien $y = x^2 - 3$ ja $3x^2 - 2x + y + 1 = 0$ leikkauspisteet.

4.4.Ympyrä

1. Uraominaisuus.
Ympyräviiva on niiden pisteiden ura, joiden etäisyys keskipisteeseen on säteen suuruinen.

2. Yhtälö, kun tunnetaan keskipiste ja säde
Yhtälö : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, missä keskipiste on (x_0,y_0) ja säde on r.

4.4.1. Mikä on ympyrän yhtälö, kun a) K = (2,3) ja r = 4 b) K = (-5,0) ja r = 6 c) K = (1,-2) ja r = 3?
2. Mikä on sen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on origossa, ja jonka halkaisija on 4?
3. Mikä on ympyrän a) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$ b) $(x + 4)^2 + y^2 = 9$ keskipiste ja säde?

3. Yhtälön muodostamisia eri tilanteissa
Yritetään laskea annetuista tiedoista keskipiste ja säde.

4. Mikä on sen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on (2,3) ja joka kulkee pisteen (5,-1) kautta?
5. Mikä on sen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on (3,-4) ja joka sivuaa y-akselia?
6. Mikä on sen ympyrän yhtälö, jonka säde on 3 ja joka sivuaa x-akselia pisteessä (5,0)?
7. Mikä on sen ympyrän yhtälö, jonka halkaisijan päätepisteet ovat (1,2) ja (-3,4)?

4. Tason pisteen sijainti ympyrään nähden
Piste on ympyrän sisäpuolella, jos pisteen etäisyys keskipisteeseen on pienempi kuin säde ja ulkopuolella, jos etäisyys keskipisteeseen on suurempi kuin säde.
Tai kun sijoitetaan piste ympyrän keskipistemuotoiseen yhtälöön ja vasen puoli < oikea puoli, on piste sisäpuolella ja jos vasen puoli > oikea puoli, on piste ulkopuolella.

8. Onko piste (1,2) ympyrän $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ kehällä, sisä- vai ulkopuolella?
9. Millä a:n arvoilla piste (1,2) on ympyrän $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = a^2$ sisäpuolella?

5. Ympyrän yhtälön yleinen muoto
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

10. Esitä ympyrän $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$ yleisessä muodossa.

6. Yhtälön muuttaminen yleisestä keskipistemuotoon
Siirrä vakio oikealle puolelle.
Lisää x-termeihin sellainen vakio, että niistä muodostuu neliö, samoin y-termeihin.
Lisää samat vakiot oikealle puolelle yhtälöä.
Kirjoita neliömuotoinen yhtälö.

11. Mikä on ympyrän $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ keskipiste ja säde?
12. Määritä ympyrän $x^2 + y^2 + x + 6y + 3 = 0$ keskipiste ja säde.

7. Yleisen yhtälön $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ kuvaajat
Jos neliöön täydentämisen jälkeen
oikea puoli > 0, on kuvaaja ympyrä
oikea puoli = 0, on kuvaaja piste
oikea puoli < 0, ei yhtälöllä ole reaalista vastinetta.

13. Mikä on yhtälön a) $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 20 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 10x + 12y + 62 = 0$ kuvaaja?

8. Vakion määrittämistä, jotta yleisen yhtälön kuvaaja olisi ympyrä Täydennä neliöön ja merkitse oikea puoli > 0. Ratkaise saatu epäyhtälö.

14. Millä a:n arvoilla yhtälön $x^2 + y^2 + 2x - 4y + a = 0$ kuvaaja on ympyrä?
15. Millä a:n arvoilla yhtälön $x^2 + y^2 + 2ax + 4y + 5a = 0$ kuvaaja on ympyrä?

9. Yhtälö, kun tunnetaan 3 kehän pistettä Tee 3 yhtälöä sijoittamalla pisteet vuorotellen yleiseen yhtälöön $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ Ratkaise saatu 3 yhtälön ja 3 tuntemattoman yhtälöryhmä. Sijoita saadut arvot yhtälöön A:n , B:n ja C:n paikalle.

16. Mikä on pisteiden (0,0), (0,2) ja (4,0) kautta kulkevan ympyrän yhtälö?
17. Mikä on pisteiden (-1,3), (1,1) ja (5,5) kautta kulkevan ympyrän yhtälö?

10. Ympyrän yhtälön jakaminen kahdeksi funktioksi Ratkaise y toisen asteen yhtälöstä x:n lausekkeena (Huom.! Syntyy lauseke, jossa ± merkki) Piirrä + ja - merkkiä käyttäen saatujen funktioiden kuvaajat samaan koordinaatistoon.

18. Minkä funktioiden kuvaat muodostavat ympyrän $x^2 + y^2 = 4$?
19. Piirrä graafisella laskimella ympyrä $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$.

4.5. Ympyrän leikkauspisteitä ja tangentteja

1. Suoran ja ympyrän leikkauspisteen laskeminen Ratkaistaan suoran ja ympyrän yhtälöiden muodostama yhtälöpari.

4.5.1. Laske suoran $x - y = 4$ ja ympyrän $x^2 + y^2 = 16$ leikkauspisteet.
2. Laske suoran $y = 2x + 2$ ja ympyrän $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ yhteinen piste.

2. Kahden ympyrän yhteisen sekantin yhtälön muodostaminen. Tarkista ensin, onko keskipisteiden etäisyys pienempi kuin säteiden summa. Eliminoidaan yhtälöiden muodostamasta yhtälöparista II asteen termit. Saatu I asteen yhtälö on leikkauspisteiden kautta kulkevan suoran yhtälö eli yhteisen sekantin.

3. Millä suoralla ovat ympyröiden $x^2 + y^2 = 5$ ja $x^2 + y^2 + 2x - y - 2 = 0$ yhteiset pisteet?
4. Mikä on ympyröiden $x^2 + y^2 - x + 2y - 3 = 0$ ja $x^2 + y^2 + 3x - 4 = 0$ yhteisen sekantin yhtälö?

3. Kahden ympyrän leikkauspisteen laskeminen Ratkaistaan ympyröiden yhtälöiden muodostama yhtälöpari. Eliminoidaan yhteenlaskukeinolla ensin II asteen termit. Tehdään tästä I asteen yhtälöstä ja helpommasta ympyrän yhtälöstä yhtälöpari, joka ratkaistaan.

5. Laske ympyröiden $x^2 + y^2 = 5$ ja $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$ leikkauspisteet.
6. Mikä on ympyröiden $x^2 + y^2 = 10$ ja $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 30 = 0$ leikkauspiste.

4. Tangentin yhtälön muodostaminen, kun tunnetaan tangentin ja ympyrän sivuamispiste Laske ympyrän keskipiste. Laske säteen kulmakerroin. Muodosta tangentin kulmakerroin ($T \perp r$ ts. $k_T = - 1/k_r$) Tee tangenttisuoran yhtälö saadusta kulmakertoimesta ja annetusta pisteestä.

7. Mikä on ympyrän $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$ pisteeseen (4,3) piirretyn tangentin yhtälö?
8. Mikä on ympyrän $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 4 = 0$ pisteeseen (1,1) piirretyn tangentin yhtälö?

5. Tangentin yhtälön muodostaminen, kun tunnetaan tangentin suunta Muodosta annetun suuntaisten suorien parvi. Ratkaise suoraparven parametrin arvo yhtälöstä : Keskipisteen etäisyys suoralle = säde. Sijoita saatu parametrin arvo suoraparven yhtälöön.

9. Mikä on ympyrän $x^2 + y^2 = 5$ sen tangentin yhtälö, joka on suoran $y = 2x$ suuntainen?
10. Määritä ympyrän $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5$ suoran $3x + y = 0$ suuntaiset tangentit.

6. Tangentin yhtälön laskeminen, kun tunnetaan ympyrän ulkopuolinen tangentin piste Muodosta ko. pisteen kautta kulkevien suorien parvi. Ratkaise suoraparven parametrin arvo yhtälöstä : ” Keskipisteen etäisyys suoralle = säde. ” Sijoita saatu parametrin arvo suoraparven yhtälöön. Huom. Jos saat vain yhden suoran, tarkista onko pisteen kautta kulkeva pystysuora suora tangentti.

11. Laske pisteen (0,-5) kautta kulkevien ympyrän $x^2 + y^2 = 5$ tangenttien yhtälöt.
12. Mitkä ovat pisteen (-1,-1) kautta kulkevien ympyrän $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$ tangenttien yhtälöt?

4.6. Pallo

1. Pallon yhtälö
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$, missä keskipiste on (x_0,y_0,z_0) ja säde on r.

4.6.1. Pallon keskipiste on (1,2,3) ja säde 4. Mikä on pallon yhtälö?
2. Mikä on pallon keskipiste ja säde, kun yhtälö on $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 + z^2 = 36$?

2. Yhtälön muuttaminen yleiseen muotoon
Suorita neliöön korotukset ja ryhmittele termit uudelleen järjestykseen $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$

3. Mikä on pallon $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 6)^2 = 49$ yhtälö yleisessä muodossa?

3. Yhtälön muuttaminen yleisestä muodosta keskipistemuotoon
Siirrä vakio oikealle ja täydennä x- , y- ja z-termit neliöön lisäämällä sopiva termi molemmille puolille.

4. Mikä on pallon $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z - 4 = 0$ keskipiste ja säde?

4.7. Ellipsi

1. Ominaisuus
Ellipsiviiva on niiden pisteiden ura, joista ellipsin polttopisteisiin laskettujen etäisyyksien summa on vakio.

2. Piirtäminen uraominaisuuden perusteella
Laita nastat halutun summan mittaisen langan molempiin päihin. Kiinnitä nastat polttopisteisiin.
Piirrä ellipsiviiva siirtäen kynää lankaa pitkin siten, että lanka on jatkuvasti kireällä.

3. Huippumuotoinen yhtälö
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

4. Ellipsin osat yhtälöstä
a, b ovat puoliakselit.
x-akselin leikkauspisteet (±a,0) ja y-akseli leikkauspisteet (0,±b) ovat huiput.
2a = isoakseli (jos a > b)
2b = pikkuakseli (jos a > b)

4.7.1. Mitkä ovat ellipsin $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ puoliakselit, huiput, iso- ja pikkuakseli?
2. Mitkä ovat ellipsin $16x^2 + 25y^2 = 400$ puoliakselit, huiput, iso- ja pikkuakseli?

5. Ellipsin yhtälön muodostaminen, kun tunnetaan osia
Annetuista tiedoista yritetään saada kaksi yhtälöä a:n ja b:n arvon laskemiseksi

3. Ellipsin akselit ovat koordinaattiakselien suuntaiset, yksi huippupiste on (4,0) ja pikkuakselin pituus 6. Mikä on ellipsin yhtälö?
4. Ellipsin akselit ovat koordinaattiakselien suuntaiset, isoakselin pituus 10 ja pikkuakselin pituus 8. Mikä on ellipsin yhtälö?

6. Ellipsin piirtäminen, kun tunnetaan ellipsin huippumuotoinen yhtälö
VAPAALLA KÄDELLÄ: Selvitä a ja b. Laita huiput paikoilleen ja siirrä vapaalla kädellä siisti ellipsi.
LASKIMELLA: Ratkaise y toisen asteen yhtälöstä (Huom.! Syntyy lauseke, jossa ± merkki)
Piirrä + merkkiä käyttäen saadun funktion ja - merkkiä käyttäen saadun funktion kuvaajat samaan koordinaatistoon.

5. Piirrä yhtälön a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ b) $x^2 + 4y^2 = 4$ kuvaaja.

4.8. Hyperbeli

1. Ominaisuus
Hyperbeliviiva on niiden pisteiden ura, joista polttopisteisiin laskettujen etäisyyksien erotus on vakio.

2. Huippumuotoinen yhtälö
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ on oikealle - vasemmalle aukeavan hyperbelin huippumuotoinen yhtälö

3. Liittohyperbeli
$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ on edellisen liittohyperbeli , ylös - alas aukeavan hyperbelin huippumuotoinen yhtälö.

4.8.1. Mikä on hyperbelin a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ b) $x^2 - 4y^2 + 16 = 0$ liittohyperbeli

4. Hyperbelin osat yhtälöstä $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
a ja b ovat puoliakselit.
Pisteet $(\pm a,0)$ ovat x-akselin leikkauspisteet eli huiput.
Suorat $y = \pm b/a \cdot x$ ovat hyperbelin asymptootit.
2a = poikittaisakseli = huppujen etäisyys. 2b = liittoakseli.

2. Mitkä ovat hyperbelin $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ puoliakselit, poikittais- ja liittoakseli, huiput ja asymptootit?

5. Hyperbelin yhtälön muodostamista, kun tunnetaan osia
Tee 2 yhtälö annetuista tiedoista ratkaistaksesi a ja b.

3. Mikä on hyperbelin yhtälö, kun yksi huippupiste on (4,0) ja liittoakselin pituus on 6 sekä sen akselit ovat koordinaattiakselien suuntaiset?
4. Mikä on hyperbelin yhtälö, kun sen asymptootti on $y = 2x$ ja poikittaisakselin pituus on 10 sekä sen akselit ovat koordinaattiakselien suuntaiset?

6. Hyperbelin piirtäminen, kun tunnetaan huippumuotoinen yhtälö
Laita huiput koordinaatistoon.
Piirrä asymptootit katkoviivoilla.
Lähde piirtämään huipusta kohtisuoraan akselia vasten ja kaartaen kohti asymptoottia.

5. Piirrä hyperbeli a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ b) $x^2 - 4y^2 + 4 = 0$.

7. Hyperbelin xy = a piirtäminen
Tee lukuparitaulukko.
Anna x:lle arvoja ja laske vastaavat y:t.
Merkitse pisteet koordinaatistoon ja piirrä niiden kautta hyperbelin kuvaaja.

6. Piirrä hyperbeli a) $xy = 4$ b) $xy + 6 = 0$.

8. Hyperbelin xy = a osat
Asymptootit ovat koordinaattiakselit.
Huiput saa ratkaisemalla hyperbelin ja suoran $y = x$ leikkauspisteet.

7. Mitkä ovat hyperbelin $xy = 4$ huiput ja poikittaisakselin pituus?

9. Kääntäen verrannollisuus
Jos suure A on kääntäen verrannollinen suureeseen B, pätee yhtälö $A = k \cdot 1/B \Leftrightarrow AB = k$ (kuvaaja hyperbeli)

8. Suure A on suoraan verrannollinen suureeseen x ja kääntäen verrannollinen suureen y neliöön. Mikä on suureiden välinen yhtälö? Miten käy suureen A arvon, kun x kolminkertaistuu ja y pienenee puoleen?

Vastaukset E-tehtäviin:

1.1.1. a) 2 b) ±2 c) 2
2. a) 5 b) 4
3. a) 3 b) | a |
4. ± 3
5. a) (4,0) b) (0,-5)
6. a) (a,0) b) (0,3)
7. 5
8. 3

9. a = 6 tai a = -2
10. 2
11. y = 2 tai y = -8
12. a) 5 b) $\sqrt{74}$
13. x = 8 tai x = -4
14. a) 2,4 b) 1,2 tai 2
15. a) (5,4) b) (1,-4) c) (2½,-1½)

16. (-2,17)
17. (2½,1½), (-½,2), (1,1½)
18. (2,-1), 5
19. $\sqrt{73}$
20. 10

1.2.1. a) 4 b) 5 c) 3
2. 4 tai - 1

3. a) (2,-3,0) b) (2,0,-4)
c) (0,-3,-4)
4. 2
5. a) (2,0,0) b) (0,-3,0)
c) (0,0,-4)
6. 4
7. 3
8. (7,0,0), (-5,0,0)
10. 9, 3
11. (5,-3,5)
12. (4,1,2)
13. $\sqrt{34}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{34}$

1.3.1. On
2. Ei
3. 4
4. ± 2
6. Suora
7. x-akselin suuntainen taso, joka leikkaa yz-tason pitkin suoraa z = 3y - 6
8. z-akselin suuntainen suora, joka kulkee pisteen (1,2) kautta

2.1.1. a) nouseva b) laskeva
c) pystysuora d) vaakasuora
e) ei ole
2. a) 1 b) - $1/\sqrt{3}$ c) 0 d) ei ole
3. a) 63,4° b) -71,6° c) 26,6°
d) 0°
4. a) 76,0° b) 33,7°

2.2.1. a) -2 b) -4 c) 0 d) ei ole
2. a = 5

2.3.1. a) y = 3x - 1
b) y = - 3x - 2 c) y = 6x + 29
2. a) 3x - 4y + 6 = 0
b) 12x + 16y - 5 = 0
3. a) 4x - 3y - 17 = 0 b) x = 2
4. 4x - 3y - 10 = 0
5. $y = \sqrt{3}x + 2 - 3\sqrt{3}$
9. a) -2/3 b) 1½ c) 5/6 d) ei ole
f) 0
11. Eivät
12. a = 8
13. a) ½ b) -2 c) - 2/3
14. a) nouseva b) laskeva
c) vaakasuora
15. a) a > 1 b) a < -2
16. a) (0,-4) b) (0,4/3)
17. b = 3
20. y = -3x + 5, 1 ≤ x ≤ 3
21. y = 3,94x + 39,4
22. a) 57 cm b) 2,7 kg

2.4.1. a) y = 3x + c
b) y = -5x + c c) y = c
2. a) 2x + 3y + c = 0
b) 3x - 5y + c = 0 c) x = c
3. a) 4x + y + c = 0
b) 3x - 5y + c = 0 c) x = c

4. a) y = kx + 3 - 2k tai x = 2
b) y = kx + 3 tai x = 0
c) y = kx - 4k tai x = 4
5. 2x + 3y + 10 = 0
6. 3x - 4y ± 12 = 0

2.5.1. a) nouseva b) laskeva
c) nouseva d) vaakasuora
e) pystysuora
2. a) **i** + 2**j** b) **i** - 3**j** c) **i** + ½**j** d) **i**
3. a) **i** - 5**j** b) **i** - 1½**j**
4. a) 2½ b) -4/3 c) 0 d) ei ole
5. a) 2**i** + 3**j** b) 3**i** - 5**j** c) **i** d) **j**
6.a) 6**i** + 5**j** b) 8**i** - 7**j** c) 3**i** d) **j**

2.6.1. $L_1 \parallel L_3$
2. a = 5
3. Eivät
4. a = - 1½
5. y = 3x - 1
6. y = - 3x + 21
7 a) - 1/3 b) ¼ c) - 2 d) ei ole
8 $L_1 \perp L_3$
9. a = 2/3
10. Eivät
11. a = 4
12. y = -½ x + 2½
13. x - 3y - 8 = 0
14. a) 8,1° b) 32,5°
15. 45°
16. 73,5°
17. a = - 3 tai a = 1/3
18. a) (2,7) b) (3,1)
19. (-2,3), (-2/3,3), (-6,11)
20. (-1,2)
21. (-¾, 1½), (13,29), (3,4)
22. a) 0 b) 1 c) ∞
23. a = 2 , b = -3
24. a) 1 b) 0 c) ∞
25. a = - 5/3
26. a = 4½ , b = - 4/3
27. 15,5
28. 10
29. (-3,-2)
30. (3,4)
31. (2x+3y+4) + t(2x-y+3) = 0
32. 21x + 2y = 25

2.7.1. 2
2. 8
3. 2
4. (0,13 5/8) tai (0,-11 3/8)
5. $8/\sqrt{5}$
6. 3x + 4y - 35 = 0 , 3x + 4y + 25 = 0
7. x + 3y + 1 = 0 , 3x - y = 7
8. x - 3y = 8
9. 3x - 4y = 0 tai 5x = 6

2.8.2. 2x + 3y - 4 < 0
4. y > 2x + 3 ja y < - x + 4

2.9.1. 50 l porkkanaa ja 10 l perunaa, 70 mk
2. 80 vasikkaa ja 40 possua, voitto 6400€
3. A 0 kg ja B 30 kg

3.1.1. **OP**=(**i**+2**j**+3**k**)+t(2**i**+**j**-**k**)
2. **OP**=(**i**+2**j**+3**k**) + t(4**i** - 6**j**)
3. $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 4 + 3t \\ z = -3 - 4t \end{cases}$
4. (2,-3,4) , (3,-4,6) , (4,-5,8)
5. (2,4,0) , (5,-1,6) , (-1,9,-6)
6. On
7. Ei
8. a) y = 1 ja z = 0 b) x = 2 ja z = 0 c) x = 2 ja y = 1
9.a) $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 3 - 5t \\ z = 6t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -1 \end{cases}$
10. a) **OP** = (2**i** + 4**j**) + t(3**i** - 5**j** + 6**k**) b) **OP** = (- **i** + 3**j** + 4**k**) + t(2**i** - 5**k**)
11. (8,-6,0)
12. Kyllä, (4½,0,0)

3.2.1. 51,8°
2. a = 2
3. Ei
4. a = -2
6. a = 3 tai a = -2
7. Kyllä, (-16,-8,-1)

3.3.1. a) z = 0 b) y = 1 c) x = 2
2. 4x + 5y + 6z - 32 = 0
3. (8,0,0) , (0,6,0) , (0,0,-4)
4. 2x + 3y + 4z - 56 = 0
5. a) 3**i** - 4**j** + 5**k**
b) t(3**i** - 4**j** + 5**k**) , t ≠ 0
6. a = 1
7. (5,-1,6)
8. (-103,129,143)
9. 87,2°
10. 1,0°

3.4.1. Eivät
2. a = 4
3. Kyllä
4. a = 1 tai a = -4
5. 69,5°
6. 42,2°
7. $\begin{cases} x = 2\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}t \\ y = \tfrac{3}{4} + 1\tfrac{3}{8}t \\ z = t \end{cases}$
8. a) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ z = 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 2x + 4z = 5 \\ y = 0 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x = 0 \\ -3y + 4z = 5 \end{cases}$

3.5.1. a) $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$

2. Ei ratkaisua. Tasot ||
3. Kaikki ko. tason pisteet. Molemmat yhtälöt ovat saman tason yhtälöitä
4. (3,4,5)
5. Ei
6. a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \\ z = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 10 \\ z = 15 \end{cases}$

7. a) $\begin{cases} x = -½ \\ y = 3 \\ z = -½ \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3{,}0 \\ y = 1{,}8 \\ z = -0{,}22 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 9{,}23 \\ y = 9{,}17 \\ z = -3{,}68 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 3{,}14 \\ y = -1{,}57 \\ z = 5{,}29 \end{cases}$

8. a) x = 4, y = 3 b) ei ratkaisua

4.1.1. a) y = 2x - 3 b) y = 3x - 7 c) 2x + 3y + 5 = 0
2. a) $y = y^2 + 5$ b) $y = 2x^2 - 3x + 5$ c) $y = -4x^2 + 5$
3. a) y = 3x - 12 b) y = 4x - 21 c) c) 6x + 7y = 32
4. a) $y = (x + 5)^2$ b) $y = 3x^2 + 34x + 95$ c) $y = -(x + 5)^2$
5. $y = 2x^2 - 11x + 13$
6. $y = -x^2 + 6x - 11$
7. 3x + 2y - 4 = 0
8. $x = y^2 - 4y + 5$

4.2.2. a) $y - 3 = (x - 0)^2$ b) $y + 1 = (x + 1)^2$ c) $y - 1 = (x + 2)^2$
3. a) $y - 1 = -(x - 1)^2$
b) $y + 7 = 2(x + 1)^2$
4. a) (2,1) b) (1½,- 6¼)

c) (¾,2 7/8)
6. a) (-9,2) b) (½,1½)
7. $y = 2x^2 - 4x + 4$
8. $y = ½x^2 - x + 2½$
9. $y = x^2 + 2x - 1$
10. $y = ¼x^2 + 1$
11. $y = ½x^2 + 2½$
12. $s = 0{,}0084 - 0{,}092v + 4{,}8v^2$
s = 21 m

4.3.1. (1,-4) , (2,-3)
2. (1,-1) , (1/9, - 11/27)
3. a = -3
4. y = 2x - 1
5. (1, 2) ja (4, 23)
6. (1, -2) ja (-½, -2¾)

4.4.1. a) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$
b) $(x + 5)^2 + y^2 = 36$
c) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$
2. $x^2 + y^2 = 4$
3. a) K = (1,3) , r = 2
b) K = (-4,0) , r = 3
4. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$
5. $(x - 3)^2 + y + 4)^2 = 9$
6. $(x - 5)^2 + (y \pm 3)^2 = 9$
7. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$
8. Sisäpuolella
9. -5 < a < 5
10. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$
11. K = (1,-2) , r = 3
12. K = (-½,-3) r = 3
13. a) Piste (2,-4) b) Ei kuvaajaa
14. a < 5
15. a > 4 tai a < 1
16. $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$
17. $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$
18. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$
19. $f(x) = 2 + \sqrt{9 - (x - 1)^2}$, $g(x) = 2 - \sqrt{9 - (x - 1)^2}$

4.5.1. (4,0) , (0,-4)
2. (0,2)
3. 2x - y + 3 = 0
4. 4x - 2y -1 = 0
5. (2,1) , (-1,2)
6. (3,1)
7. y = - 3x + 15
8. x - 4y + 3 = 0
9. y = 2x ± 5
10. 3x + y + 9 = 0 , 3x + y = 11
11. y = ± 2x - 5
12. y = ½ x - ½, y = 5½ x + 4½

4.6.1. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$
2. K = (4,-5,0) , r = 6
3. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 12z = 0$
4. K(1,-2,4) , r = 5

4.7.1. a = 3 , b = 2 , IA = 6 , PA = 8, H = (± 3,0), (0,± 2) ,
2. a = 5, b = 4 , H = (± 5, 0), (0,± 4) , IA = 10 , PA = 8
3. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$
4. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

4.8.1. a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$
b) $x^2 - 4y^2 = 16$
2. a = 5, b = 4, PA = 10, LA = 8 H = (± 5,0), y = ± 4/5 · x
3. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
4. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} = 1$, $4x^2 - y^2 = -25$
7. (± 2, ± 2) PA = $4\sqrt{2}$
8. $A = k \cdot \frac{x}{y^2}$, 12-kertaistuu

Koetehtäviä aiemmilta vuosilta

90.1.1. Mikä on pisteiden (5,1) ja (2,3) kautta kulkevan suoran a) kulmakerroin b) yhtälö c) Missä pisteessä kyseinen suora leikkaa x-akselin? [a) $-\frac{2}{3}$ b) 2x + 3y - 13 = 0 c) (6½,0)]

90.1.2. Miten kaukana ovat yhdensuuntaiset suorat 3x - 4y + 10 = 0 ja 3x - 4y + 20 = 0 toisistaan? [2]

90.1.3. Ratkaise yhtälöryhmä $\begin{cases} 2x + z = 9 \\ x + 4y - 2z = -11 \\ 3x + 8y - z = 0 \end{cases}$. [$\begin{cases} x = 1 \\ y = ½ \\ z = 7 \end{cases}$]

90.1.4. Tietokonekauppa tarjoaa monitoimiohjelmaa, levyasemaa ja hiirtä yhteishinnalla 4000 mk. Levyaseman ja hiiren pakettihinta on 2790 mk. Sekä monitoimiohjelman ja hiiren hinnalla 2430 mk. Millä hinnalla saisi yksistään hiiren, jos tiedetään, että ostamalla kaksi tuotetta saadaan kummastakin 10% alennuksen ja ostamalla kolme tuotetta saadaan kaikista 20% alennusta? [800 mk]

90.1.5. Määritä a ja b, kun suora x + ax + by + 3 = 0 on kohtisuorassa suoraa 2x + 3y + 4 = 0 vastaan ja yhdensuuntainen suoran 6x - by + 3 = 0 kanssa. [a = - 7 , b = 4]

90.1.6. Mikä on a, kun suorien x + 2y + 3 = 0 ja ax - y + 1 = 0 välinen kulma on 45° ? [a = 3 tai a = - 1/3]

90.1.7. Mistä suoran y = x + 1 pisteestä on suoralle x + 2y + 2 = 0 kaksi kertaa niin pitkä matka kuin suoralle 4x - 2y + 5 = 0 ? [(- 1,0) ja (- 1,4 ; - 0,4)]

90.2.1. Piirrä ellipsi $x^2 + 2y^2 = 16$. Määritä sen huiput ja akselien pituudet. [H = (±4,0) , (0,$\pm 2\sqrt{2}$; isoaks. = 8 pikkuaks. = $4\sqrt{2}$]

90.2.2. Neliön kärki on pisteessä (2,2) ja sen kaksi sivua on koordinaattiakseleilla. Määritä sen ympyrän yhtälö, joka on piirretty tämän neliön ympäri. [$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$]

90.2.3. Millä a:n arvoilla yhtälön $ax^2 + 2y^2 = 4$ kuvaaja on a) ympyrä b) ellipsi c) hyperbeli? [a) a = 2 b) a > 0 c) a < 0]

90.2.4. Ympyrälle $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ piirretään tangentti pisteeseen (4,1). Missä pisteessä kyseinen tangentti leikkaa y-akselin? [(0,3)]

90.2.5. Eräs hyperbeli kulkee pisteen (4,2) kautta ja suora 2x - 3y = 0 on sen toinen asymptootti sekä hyperbelin akselit ovat koordinaattiakseleilla. Mikä on tämän hyperbelin liittohyperbelin yhtälö? [$4x^2 - 9y^2 = 28$]

90.2.6. Määritä a niin, että suora y = 3x + a on ympyrän $x^2 + y^2 - 10x + 12y + 51 = 0$ tangentti. [- 11 tai - 31]

90.2.7. Olkoon piste P(x,y). Mitä tarkoittaa geometrisesti lauseke $x^2 + y^2$? Mikä on lausekkeen $x^2 + y^2$ pienin arvo, kun piste P on käyrällä $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 15 = 0$? [P:n ja O:n etäisyyden neliö , $\sqrt{5}$]

90.3.1. Mitkä ovat suoran 2x - 3y + 4 = 0 a) kulmakerroin b) suuntakulma c) koordinaattiakselien leikkauspisteet? [a) $\frac{2}{3}$ b) 33,7° c) (-2,0) ja (0,$\frac{4}{3}$)]

90.3.2. Mikä on pisteen (4,1) etäisyys a) pisteestä (1,-3) b) suorasta y = 2x + 3 ? [a) 5 b) $2\sqrt{5}$]

90.3.3. Ratkaise yhtälöryhmä $\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -x + 2y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \end{cases}$. [$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{cases}$]

90.3.4. Reppufirman työntekijöillä A, B ja C on erilainen työteho. Eräänä päivänä he olivat 1. työpaikalla A 3 tuntia, B 2 tuntia ja C 4 tuntia. Vastaavat tuntimäärät toisessa työpaikassa olivat 2 h , 5 h ja 3 h sekä kolmannessa 5 h, 1 h ja 1 h. Mikä oli kunkin työntekovauhti, kun joka paikassa saatiin tehtyä 600 esinettä? [A 100 es/h , B 50 es/h ja C 50 es/h]

90.3.5. Suora kulkee pisteiden (3,0) ja (0,-1) kautta. Mikä suoran piste on lähinnä pistettä (4,3)? [(4,8 ; 0,6)]

90.3.6. Laske suorien 2x + 3y + 1 = 0 ja x - 2y + 7 = 0 välinen kulma. [60,3°]

90.3.7. Kolmion kaksi kärkeä ovat pisteissä (4,-1) ja (5,3) sekä kolmion ala on 6. Määritä kolmas kärki, kun se on suoralla x - 2y + 4 = 0 . [(2,3) tai ($8\frac{6}{7}$, $6\frac{3}{7}$)]

90.4.1. Mikä on ympyrän $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ pisteeseen (-2,4) piirretyn tangentin yhtälö? [x - 2y + 10 = 0]

90.4.2. Mikä on sellaisen paraabelin yhtälö, jonka akseli on koordinaattiakselien suuntainen ja joka saadaan paraabelista $y = 2x^2$ siirtämällä sitä niin, että huipuksi tulee (3,2)? [$y - 2 = \pm 2(x - 3)^2$ tai $x - 3 = \pm 2(y - 2)^2$]

90.4.3. Mikä on ellipsin $x^2 + 2y^2 = 8$ sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden pinta-alojen suhde? [1:2]

90.4.4. Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$. [$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ tai $\begin{cases} x = -2/13 \\ y = -29/13 \end{cases}$]

90.4.5. Hyperbelin keskipisteenä on origo, akseleina koordinaattiakselit ja yhtenä asymptoottina suora y = ½x sekä piste (2,3) on hyperbelillä. Mikä on hyperbelin yhtälö? [$4y^2 - x^2 = 32$]

90.4.6. Millä a:n arvoilla yhtälö $x^2 + y^2 - 2ax + 4y + 5a = 0$ on ympyrän yhtälö? [$a < 1$ tai $a > 4$]

90.4.7. Piirrä kuvaajat yhtälöille $x^2 + y^2 - 2nx + n^2 - 1 = 0$, missä n on jokin kokonaisluku. Mikä on yhden yhtälön kuvaajan sellaisen osan pinta-ala, joka ei kuulu minkään toisen yhtälön kuvaajan sisään? [$\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$]

91.1.1. Mikä on sen suoran kulmakerroin a) joka kulkee pisteiden (1,3) ja (-2,5) kautta b) jonka eräs suuntavektori on **s** = 5**i** - 3**j** c) jonka suuntakulma on 60° ? [a) - 2/3 b) - 3/5 c) $\sqrt{3}$]

91.1.2. Mikä on sen suoran yhtälö, joka on suoran $2x - 3y + 9 = 0$ suuntainen ja joka kulkee pisteen (4,3) kautta? Missä pisteessä suora leikkaa x-akselin? [(-½,0)]

91.1.3. Ratkaise yhtälöryhmä $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2y + z = 4 \\ x + y + z = 9 \end{cases}$. [$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 8 \end{cases}$]

91.1.4. Laske suorien $x + 3y = 15$ ja $4x - 3y = 0$ välisen kulman suuruus. [71,6°]

91.1.5. Määritä luku t siten, että janan A(1,5) B(5,t) keskinormaali kulkee origon kautta. [± 1]

91.1.6. Määritä x-akselilta piste P, jonka etäisyys suorasta $3x + 4y = 12$ on yhtäsuuri kuin etäisyys origosta. [(-6,0) tai (1½,0)]

91.2.1. Mitkä ovat seuraavien yhtälöiden kuvaajat ja mahdollinen aukeamissuunta? a) $x^2 + y^2 = 4$ b) $x + y^2 = 4$ c) $x + y = 4$ d) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$ e) $3x^2 + 4y^2 = 12$ f) $3x^2 - 4y^2 = - 12$ [a) ympyrä b) vas. auk. paraabeli c) suora d) piste e) ellipsi f) ylös-alas auk. hyperbeli]

91.2.2. Piirrä paraabeli $x = y^2 - 4y + 3$. Mikä on paraabelin huippu ja akseli? [H = (-1,2) , y = 2]

91.2.3. Laske ympyröiden $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ ja $x^2 + y^2 - 18x + 6y = 0$ keskipisteet ja säteet. Mikä on keskipisteiden välisen janan pituus? Vertaa tätä etäisyyttä säteisiin. Mitä saatu tulos tarkoittaa geometrisesti? [$2\sqrt{10}$, ympyrät sivuavat toisiaan sisäpuolisesti]

91.2.4. Ellipsille $4x^2 + 9y^2 = 36$ piirretään x-akselin suuntainen tangentti, joka leikkaa hyperbelin $9x^2 - 4y^2 = 36$ pisteissä A ja B. Laske janan AB pituus. [$\frac{4\sqrt{13}}{3}$]

91.2.5. Laske ympyrän $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 25$ origon kautta kulkevat tangentit. [$9x + 40y = 0$ tai $x = 0$]

91.2.6. Missä pisteissä ympyrät $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ ja $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$ leikkaavat? [(0,0) ja (2,4)]

91.4.1. Mitkä ovat seuraavien yhtälöiden kuvaajat? a) $x^2 + y^2 = 1$ b) $x^2 + y = 1$ c) $xy = 1$ d) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ e) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ f) $4x^2 - 16y^2 = 16$. [a) ympyrä b) alasp. auk. paraabeli c) hyperbeli, jonka asymptootteina koordinaattiakselit d) ympyrä e) ellipsi f) oik. vas. auk. hyperbeli]

91.4.2. Mikä on ympyrän $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 20$ sen tangentin yhtälö, joka on suoran $y = 2x$ suuntainen? [$y = 2x + 3$ tai $y = 2x - 17$]

91.4.3. Laske ympyröiden $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$ ja $x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0$ keskipisteet ja niiden välinen etäisyys. Osoita, että tämä etäisyys on yhtä suuri kuin ympyröiden säteiden summa. Mitä tämä tulos tarkoittaa geometrisesti? [(-2,-1) ja (4,2) , $d = 3\sqrt{5}$, ympyrät sivuavat toisiaan ulkopuolisesti]

91.4.4. Määritä käyrien $x^2 + 4y^2 = 16$ ja $9x^2 - 4y^2 = 36$ leikkauspisteet. [($\pm\sqrt{5,2}$, $\pm\sqrt{2,7}$) , missä kaikki mahdolliset + ja - merkkien yhdistelmät]

91.4.5. Paraabelin akseli on y-akselin suuntainen ja paraabeli kulkee pisteiden (-3,6) , (-1,-1) ja (3,9) kautta. Mikä on paraabelin yhtälö? [$y = x^2 + ½x - 1½$]

91.4.6. Millä käyrällä sijaitsevat ne pisteet, joiden pisteestä (1,0) ja suorasta $x = 4$ laskettujen etäisyyksien suhde on tässä järjestyksessä 1:2? [$3x^2 + 4y^2 = 12$]

93.1.1. Mikä on sen suoran kulmakerroin, jonka a) yhtälö on $2x + 3y = 0$ b) suuntakulma on $-45°$ c) suuntavektori on $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$?

93.1.2. Laske suoran yhtälö, kun se kulkee pisteiden (12,17) ja (36,83) kautta. Onko piste (20,40) suoralla?

93.1.3. Ratkaise yhtälöryhmä $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 3x + 2y + z = 6 \\ x - 3y - z = 10 \end{cases}$.

93.1.4. Laske janan A(2,5)B(6,-9) keskipisteen etäisyys suorasta $5x - 12y + 8 = 0$.

93.1.5. Määritä vakion a arvo, kun pisteiden (1,5) ja (a,a^2) kautta kulkeva suora on kohtisuorassa suoraa $x + 2y + 3 = 0$ vastaan.

93.1.6. Laske suorien $y = 3x + 4$ ja $3y = x + 2$ välinen kulma sekä suorien välisen kulmanpuolittajan yhtälö.

93.1.7. Mikä suoran $y = 2x - 1$ pisteistä on suorasta $4y = 3x - 9$ etäisyydellä 3?

1. a) $2x + 3y = 0$; $3y = -2x$; $y = -\frac{2}{3}x$; $k = \mathbf{-\frac{2}{3}}$ b) $k = \tan\alpha = \tan(-45°) = \mathbf{-1}$ c) $k = \frac{s_y}{s_x} = \frac{3}{2} = \mathbf{1½}$

2. $k = \frac{83 - 17}{36 - 12} = \frac{66}{24} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}$; YHT: $y - 17 = \frac{11}{4}(x - 12)$; $4y - 68 = 11x - 132$; $\mathbf{11x - 4y - 64 = 0}$

$11·20 - 4·40 - 64 = 220 - 160 - 64 = -4 \neq 0$ V: **Ei ole suoralla**

3. $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \;\|\; 1 \;| \\ 3x + 2y + z = 6 \;\|\; \;|\; 1 \\ x - 3y - z = 10 \;\|\; 1 \;|\; 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x - 2y = 17 \;\|\; (-1) \\ 4x - y = 16 \;\|\; 2 \end{cases}$; $5x = 15$; $\mathbf{x = 3}$; $12 - y = 16$; $\mathbf{y = -4}$; $6 - 4 + z = 7$; $\mathbf{z = 5}$

4. KP: $x = \frac{2 + 6}{2} = 4$; $y = \frac{5 - 9}{2} = -2$; $d = \frac{|20 + 24 + 8|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{52}{13} = \mathbf{4}$

5. $k_{AB} = \frac{a^2 - 5}{a - 1}$; $2y = -x - 3$; $y = -½x - 1½$; $k_L = -½ \Rightarrow k_N = 2$

$\frac{a^2 - 5}{a - 1} = 2$; $a^2 - 5 = 2a - 2$; $a^2 - 2a - 3 = 0$; $\mathbf{a = 3}$ tai $\mathbf{a = -1}$

6. a) $k_1 = 3$; $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$; $k_2 = \frac{1}{3}$; $\tan\alpha = \frac{|3 - \frac{1}{3}|}{|1 + 3 \cdot \frac{1}{3}|} = \frac{2\frac{2}{3}}{2} = \frac{4}{3}$; $\alpha = \mathbf{53{,}1°}$

b) Olkoon P(x,y) mielivaltainen kulmanpuolittajan piste. Siitä on oltava yhtä pitkä matka kummallekin kyljelle. $\frac{|3x - y + 4|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{|x - 3y + 2|}{\sqrt{1 + 9}}$; $|3x - y + 4| = |x - 3y + 2|$

$3x - y + 4 = x - 3y + 2$ tai $3x - y + 4 = -x + 3y - 2$; $2x + 2y + 2 = 0$ tai $4x - 4y + 6 = 0$

($\mathbf{y = -x - 1}$) tai $\mathbf{y = x + 1½}$ edellinen ei käy, koska suorien välinen kulma on nousevassa suunnassa

7. Olkoon kysytyn pisteen x-koordinaatti = x , jolloin $y = 2x - 1$ eli ko. piste on $(x, 2x - 1)$

$d = 3$; $\frac{|3x - 4(2x - 1) - 9|}{\sqrt{9 + 16}} = 3$; $|3x - 8x + 4 - 9| = 15$; $|-5x - 5| = 15$

$-5x - 5 = 15$ tai $-5x - 5 = -15$; $x = -4$ tai $x = 2$, jolloin $y = -9$ tai $y = 3$

V: **Pisteet ovat (- 4,- 9) tai (2,3)**

93.2.1. Piirrä käyrät a) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ c) $x = 2y^2 - 4y$

93.2.2. Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$.

93.2.3. Määritä ympyrälle $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$ pisteeseen (-1,2) piirretyn tangentin yhtälö.

93.2.4. Ellipsin eksentrisyys e (joka on soikeuden mitta) saadaan kaavasta $e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ ja ellipsin pinta-ala kaavasta $A = \pi ab$, missä a on ellipsin iso- ja b on pikkuakselin puolikas. Laske ellipsin $16x^2 + 25y^2 = 400$ a) eksentisyys b) pinta-ala.

93.2.5. Origokeskeisen hyperbelin asymptoottina on suora y = 2x. Piste (1,3) on hyperbelillä. Laske hyperbelin yhtälö, kun sen akselit ovat koordinaattiakselien suuntaiset.

93.2.6. Neliön kaksi kärkeä ovat x-akselilla ja kaksi paraabelilla $y = x^2 + 1$. Laske neliön sivu.

93.2.7. Millä vakion k arvoilla yhtälön $x^2 + y^2 + kx - 6y + 5k = 0$ kuvaaja on ympyrä, joka ei kohtaa x-akselia?

1. a) **Ympyrä**, jonka keskipiste on (-2,3) ja säde on 3 b) **Ellipsi**, jonka huiput ovat (±2,0) ja (0,±3)
c) Oikealle aukeava **paraabeli**, jonka huippu on (-2,1)

2) y = 1 - x sijoitetaan yhtälöön $x^2 - y^2 = 1$, jolloin $x^2 - (1 - x)^2 = 1$
$x^2 - 1 + 2x - x^2 = 1$; 2x = 2 ; x = 1 ; y = 1 - 1 = 0 V: **x = 1 ja y = 0**

3. Ympyrä : $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 1 + 9 - 5$; $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$; K = (1,3)
P = (-1,2) ; $k_{KP} = \frac{3 - 2}{1 + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow k_T = -2$ Tangentti : y - 2 = - 2(x + 1) ; y - 2 = - 2x - 2 ; **y = - 2x**

4. Yhtälö $16x^2 + 25y^2 = 400 \,||\, : 400$; $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; a = 5 ja b = 4
$e = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \mathbf{\frac{3}{5}}$; A = πab = π·5·4 = **20π**

5. Piste (1,3) on suoran y = 2x pisteen (1,2) yläpuolella ⇒ hyperbeli $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$
As: $y = 2x \Rightarrow \frac{b}{a} = 2$; b = 2a ja siis $b^2 = 4a^2$
Sij. (1,3) ja b = 2a yhtälöön $\frac{9}{4a^2} - \frac{1}{a^2} = 1 \,||\, \cdot 4a^2$; $9 - 4 = 4a^2$; $a^2 = \frac{5}{4}$ ja $b^2 = 4 \cdot \frac{5}{4} = 5$
Yhtälö on $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{5/4} = 1 \,||\, \cdot 5$; $\mathbf{y^2 - 4x^2 = 5}$

6. Olkoon P se neliön kärki, joka on I neljänneksessä ⇒ x-koord = x ja y = 2x
Sijoitetaan (x,2x) paraabelin yhtälöön $2x = x^2 + 1$; $x^2 - 2x + 1 = 0$; $(x - 1)^2 = 0$; x = 1 ; Sivu on 2x = **2**

7. $x^2 + kx + \frac{1}{4}k^2 + y^2 - 6y + 9 = \frac{1}{4}k^2 - 5k + 9$; $(x + \frac{1}{2}k)^2 + (y - 3)^2 = \frac{1}{4}k^2 - 5k + 9$
K = (- ½k, 3) joka on 3 ruudun korkeudella x-akselista ; $r = \sqrt{\frac{1}{4}k^2 - 5k + 9}$
Ympyrä , jos $\frac{1}{4}k^2 - 5k + 9 > 0$; NK: k = 2 ja k = 18 ; paraabelista k < 2 tai k > 18
Tarpeeksi pieni , jos $\sqrt{\frac{1}{4}k^2 - 5k + 9} < 3 \,||\, (\ )^2$; $\frac{1}{4}k^2 - 5k + 9 < 9$; $k^2 - 20k < 0$
NK: k = 0 tai k = 20 ; paraabelista 0 < k < 20
Yhdistämällä epäyhtälöiden ratkaisut saadaan **0 < k < 2** tai **18 < k < 20**

94.1. Laske pisteiden (2,1) ja (9,-1) kautta kulkevan suoran yhtälö. Kulkeeko suora pisteen (-2,2) kautta?

94.2. Mitkä ovat hyperbelin $4x^2 - 25y^2 = 100$ huiput ja asymptootit? Piirrä hyperbelin kuvaaja.

94.3. Ratkaise yhtälöryhmä $\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - y + 2z = 8 \\ -x + 2y + z = 8 \end{cases}$.

94.4. Ympyrän $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$ pisteeseen (3,6) piirretty tangentti rajoittaa koordinaattiakselien kanssa kolmion. Laske a) ympyrän keskipiste ja säde b) tangentin yhtälö c) kolmion pinta-ala.

94.5. Laske suoran 2x + y = 2 ja ellipsin $2x^2 + y^2 = 2$ leikkauspisteet.

94.6. Paraabeli $y = ax^2 + x + b$ kulkee pisteiden (1,0) ja (2,7) kautta. a) Määritä vakiot a ja b. b) Määritä paraabelin huippu ja akseli.

94.7. Piirrä samaan koordinaatistoon käyrät xy = 3 ja $x = -y^2 + 4$. Osoita laskemalla, että käyrillä on täsmälleen kolme yhteistä pistettä.

94.8. Suoran s yhtälö on y = 2x ja suoran l yhtälö on y = x + 1. a) Laske suorien s ja l välinen kulma 0,01° tarkkuudella. b) Mitkä suoran s pisteet ovat suorasta l etäisyydellä $\sqrt{½}$?

94.9. Määritä vakio a siten, että ympyrä $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 - a = 0$ on ympyrän $x^2 + y^2 = 6x$ sisällä ja on alaltaan mahdollisimman suuri. Kuinka suuri on tällöin ympyröiden väliin jäävän alueen pinta-ala?

94.10. Voivatko suorat ax + 9y - 1 = 0 ja 2x - y + a = 0 jollakin vakion a arvolla leikata pisteessä (1,½)? Millä vakion a arvoilla nämä suorat leikkaavat koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä (oikea yläneljännes, missä x ja y > 0)?

1. a) $k = \frac{-1-1}{9-2} = -\frac{2}{7}$; $y - 1 = -\frac{2}{7}(x-2)$; $7y - 7 = -2x + 4$; $2x + 7y = 11$

b) $2\cdot(-2) + 7\cdot 2 = 11$; $-4 + 14 = 11$ V: **Ei ole**

2. $4x^2 - 25y^2 = 100 \;\|:100$; $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$; a = 5 ; b = 2 ; **H = (± 5,0)** ; AS: $\mathbf{y = \pm\frac{2}{5}\cdot x}$

3. $\begin{cases} x + y - z = 4 \;\|\cdot 1 \;|\cdot 2 \\ 2x - y + 2z = 8\| \;\;|\cdot 1 \\ -x + 2y + z = 8 \;\|\cdot 1 \;| \end{cases}$; $\begin{cases} 3y = 12 \\ 4x + y = 16 \end{cases}$; y = 4 ; 4x + 4 = 16 ; x= 3 ; 3 + 4 - z = 4 ; z = 3 V: $\begin{cases} \mathbf{x = 3} \\ \mathbf{y = 4} \\ \mathbf{z = 3} \end{cases}$

4. a) $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 15 + 1 + 9$; $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$; **K = (-1,3) r = 5**

b) $k_r = \frac{6-3}{3+1} = \frac{3}{4}$; $k_T = -\frac{4}{3}$; $y - 6 = -\frac{4}{3}(x - 3)$; $3y - 18 = -4x + 12$; **4x + 3y = 30**

c) x-aks. lp: 4x = 30 ; x = kanta = 7½ ; y-aks. lp: 3y = 30 ; y = korkeus = 10 ; A = ½·7½·10 = **37½**

5. $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$; y = 2 - 2x , joka sijoitetaan alempaan. $2x^2 + (2 - 2x)^2 = 2$; $2x^2 + 4 - 8x + 4x^2 = 2$

$6x^2 - 8x + 2 = 0$; $3x^2 - 4x + 1 = 0$; x = 1 tai x = 1/3 ; y = 0 tai y = 4/3 V: **(1,0)** tai **(1/3 , 4/3)**

6. $\begin{cases} (1,0) \in \text{par} \\ (2,7) \in \text{par} \end{cases}$; $\begin{cases} a + 1 + b = 0 \\ 4a + 2 + b = 7 \end{cases}$; $\begin{cases} a + b = -1 \;\|\cdot(-1) \\ 4a + b = 5 \;\|\cdot 1 \end{cases}$; 3a = 6 ; **a = 2** ; **b = - 3**

b) $x_H = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\cdot 2} = -\frac{1}{4}$; $y_H = 2\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 3 = -3\frac{1}{8}$; $\mathbf{H = (-\frac{1}{4}, -3\frac{1}{8})}$; $\mathbf{Akseli\ x = -\frac{1}{4}}$

8. a) s: k = 2 ; $\tan\alpha_S = 2$; $\alpha_S = 63{,}4349°$; l: k = 1 ; $\tan\alpha_l = 1$; $\alpha_l = 45°$; väl. kulma = $\alpha_S - \alpha_l$ = **18,43°**

b) Olkoon suoran s piste (x,2x) sen etäisyys suoralle x - y + 1 = 0 on $\frac{|x - 2x + 1|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{½}$; $|1 - x| = 1$

1 - x = 1 tai 1 - x = - 1 ; x = 0 tai x = 2 ja y = 0 tai y = 4 P on **(0,0)** tai **(2,4)**

9. $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = a - 6 + 9 + 1$; $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = a + 4$; $K_1 = (3,-1)$ ja $r_1 = \sqrt{a+4}$

$x^2 - 6y + 9 + y^2 = 9$; $(x - 3)^2 + y^2 = 9$; $K_2 = (3,0)$ ja $r_2 = 3$

$K_1K_2 = 1$; Ympyrä K_1 on kokonaan ympyrän K_2 sisällä, jos sen säde on pienempi kuin K_1:n etäisyys isomman ympyrän kehälle eli $r_1 < r_2 - K_1K_2$; $\sqrt{a+4} \le 3 - 1$; $a + 4 \le 4$; $a \le 0$ ja isoin, kun **a = 0** eli r = 2

Ympyröiden välinen ala = $\pi 3^2 - \pi 2^2 = \mathbf{5\pi}$

10. Leikkaavat pisteessä (1,½), jos se toteuttaa molemmat yhtälöt ; a + 4½ - 1 = 0 ja 2 - ½ + a = 0 eli a = - 3½ ja a = - 1½ . Kun a ei voi olla yhtä aikaa kaksi eri lukua, on V : **ei**

$\begin{cases} ax + 9y = 1 \;\|\cdot 1 \\ 2x - y = -a \;\|\cdot 9 \end{cases}$; $(a + 18)x = 1 - 9a$; $x = \frac{1-9a}{a+18}$; $y = 2\cdot\frac{1-9a}{a+18} + a = \frac{2-18a}{a+18} + \frac{a^2+18a}{a+18} = \frac{a^2+2}{a+18}$

Leikkaavat I neljänneksessä, jos x > 0 ja y > 0 eli $\frac{2-18a}{a+18} > 0$ ja $\frac{a^2+2}{a+18} > 0$

Kun viimeinen osoittaja on varmasti > 0 ⇒ a + 18 > 0 ja 2 - 18a > 0 eli a > - 18 ja $a < \frac{1}{9}$ eli $\mathbf{-18 < a < \frac{1}{9}}$

96.1.1. Laske janan A(2,3)B(4,-1) a) kulmakerroin b) suuntakulma c) pituus

96.1.2. a) Ympyrän keskipiste on (3,-2) ja säde 4. Mikä on ympyrän yhtälö? b) Mikä on ympyrän keskipiste ja säde, kun yhtälö on $x^2 + y^2 + 8x - 10y - 8 = 0$?

96.1.3. Ratkaise yhtälöryhmä $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x - 2y - z = 6 \\ 3x - y - 2z = 3 \end{cases}$

96.1.4. Mikä on pisteen (5,-8) kautta kulkevan, suoraa 4x + 5y - 6 = 0 vastaan kohtisuoran suoran yhtälö?

96.1.5. Määritä ympyrän $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ ne tangentit, jotka ovat suoran y = 3x suuntaiset.

96.1.6. Koordinaatistoon merkityn tontin sivut ovat suorilla y = 4x , x = 4y , 4y - x = 15 ja 4x - y = 15. Määritä tontin kärkipisteiden koordinaatit. Kartan pituusyksikkö on luonnossa 10 m. Laske tontin ala.

96.1.7. Piirrä käyrä $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 4t^2 + 4t \end{cases}$. Minkä koordinaattien x ja y välisen yhtälön käyrän pisteet toteuttavat?

96.1.8. Missä pisteessä suora **OP** = 2**i** + 3**j** - 4**k** + t(**i** + 2**j** - **k**) leikkaa tason 2x - 3y + z = 1. Mikä on suoran ja tason välinen kulma?

96.1.9. Maantiesillan aukko on paraabelin muotoinen. Sen huippupiste on 5,0 m tienpinnan yläpuolella ja suurin leveys on 8,0 m. Mahtuuko suorakulmion muotoinen kontti, jonka korkeus tien pinnasta on 3,8 m ja leveys 4,0 m kulkemaan sillan alta, jos tie suljetaan muulta liikenteeltä?

96.1.10. Opiskelija päättää tehdä 4 henkilölle mahdollisimman edullisen aterian perunoista ja lenkkimakkarasta. Rautaa tulisi olla ateriassa vähintään 36 mg, valkuaisaineita 160 g ja hiilihydraatteja 235 g. Yhdessä kilogrammassa perunoita on näitä aineita samassa järjestyksessä 9 mg, 20 g ja 160 g sekä makkarassa vastaavasti 18 mg, 120 g ja 50 g. Miten paljon on ostettava kumpaakin tuotetta, kun perunakilon hinta on 5 mk ja lenkkimakkaran 20 mk?

1. a) $k_{AB} = \frac{-1 - 3}{4 - 2} = -2$ b) $\tan \alpha = -2$; $\alpha = -63{,}4°$ c) $\sqrt{(4-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

2. a) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$ b) $x^2 + y^2 + 8x - 10y - 8 = 0$; $x^2 + 8x + 16 + y^2 - 10x + 25 = 8 + 16 + 25$
$(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 49$ K = (-4,5) , r = 7

3. $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \;\|\cdot 1 \;\|\cdot 2 \\ x - 2y - z = 6 \;\|\cdot 1 \\ 3x - y - 2z = 3 \;\| \quad \|\cdot 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x - y = 13 \;\|\cdot 1 \\ 7x + y = 17 \;\|\cdot 1 \end{cases}$; $10x = 30$; $x = 3$
$7\cdot 3 + y = 17$; $y = -4$; $2\cdot 3 - 4 + z = 7$; $z = 5$; V : x = 3 ja y = -4 ja z = 5

4. $5y = -4x + 6$; $y = -\frac{4}{5}x + \frac{6}{5} \Rightarrow k_L = -\frac{4}{5} \Rightarrow k_N = \frac{5}{4}$; Yht.: $y + 8 = \frac{5}{4}(x - 5) \;\|\cdot 4$; $4y + 32 = 5x - 25$; $5x - 4y = 57$

5. $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = -3 + 4 + 9$; $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$; K = (2,3) , $r = \sqrt{10}$
Suoraparvi y = 3x + c ; 3x - y + c = 0. Keskipisteen etäisyys suoralle = säde
$\frac{|3\cdot 2 - 3 + c|}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{10} \;\|\cdot\sqrt{10}$; $|c + 3| = 10$; $c + 3 = \pm 10$; c = 7 tai c = -13 ; y = 3x + 7 tai y = 3x - 13

6. A : $\begin{cases} y = 4x \\ x = 4y \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ B: $\begin{cases} y = 4x \\ 4y - x = 15 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ C: $\begin{cases} x = 4y \\ 4x - y = 15 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ D: $\begin{cases} -x + 4y = 15 \;\|\cdot 1 \\ 4x - y = 15 \;\|\cdot 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$
Piirr. pisteiden A ja D kautta vaaka- ja pystysuorat viivat, jotka muodostavat neliön, jonka sisällä tontti on.
Yhdistetään myös B ja C neliön kärkiin, jolloin neliön sisällä on neljä pikkukolmioa
Ala = neliön ala - reunakolmioiden ala = 5·5 - ½·5·1 - ½·5·1 - ½·5·1 - ½·5·1 = 15
1 ruudun ala = 10 m · 10 m = 1 a . Alueen ala = 15 a

7. Tehdään lukukolmikkotaulukko, johon annetaan t:lle arvoja ja lasketaan sitä vastaavat x ja y

t	1	½	0	-½	-1	-1½
x	3	2	1	0	-1	-2
y	8	3	0	-1	0	3

Kuvaaja on paraabeli, jonka H = (0,-1)

$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 4t^2 + 4t \end{cases}$; Ylemmästä t = ½x - ½ , joka sijoitetaan alempaan
$y = 4(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})^2 + 4(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) = 4(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) + 2x - 2 = x^2 - 2x + 1 + 2x - 2$; $y = x^2 - 1$

8. **OP** = 2**i** + 3**j** - 4**k** + t(**i** + 2**j** - **k**) ; $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = -4 - t \end{cases}$ sijoitetaan nämä tason yhtälöön
$2(2 + t) - 3(3 + 2t) + (-4 - t) = 1$; $4 + 2t - 9 - 6t - 4 - t = 1$; $-5t = 10$; $t = -2$; Piste on x = 0, y = -1, z = -2
Tason **n** = 2**i** - 3**j** + **k** ; Suoran **s** = **i** + 2**j** - **k** . Näiden vektoreiden välinen kulma olkoon β
$\cos\beta = \frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}|}{|\mathbf{n}|\cdot|\mathbf{s}|} = \frac{|2 - 6 - 1|}{\sqrt{4+9+1}\cdot\sqrt{1+4+1}} = \frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{6}}$; $\beta = 56{,}9°$; $\alpha = 90° - \beta = 90° - 56{,}9° = 33{,}1°$

9. Piirretään siltakaari koordinaatistoon, jossa x-akseli on maanpinnan taso ja y-akseli kulkee huipun kautta.
Siltakaaren pisteitä ovat (0,5) , (4,0) ja (-4,0). Olkoon paraabelin yhtälö muotoa $y = ax^2 + bx + c$
$\begin{cases} 0 + 0 + c = 5 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ 16a - 4b + c = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} c = 5 \\ 16a + 4b = -5 \\ 16a - 4b = -5 \end{cases}$; $\begin{cases} c = 5 \\ a = -5/16 \\ b = 0 \end{cases}$ $y = 5 - 5/16 \cdot x^2$;
Kulkekoon auto pitkin tien keskiivaa. Silta on matalimmillaan kontin reunoilla, siis kohdalla x = 2, jossa
y = 5 - 5/16 · 4 = 3,75 < 3,80 . Auto ei mahdu sillan alta!

10. Olkoon perunoita x kg ja makkaraa y kg
EHDOT: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $9x + 18y \geq 36$, $20x + 120y \geq 160$, $160x + 50y \geq 235$
A: $\begin{cases} y = 0 \\ 20x + 120y = 160 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 8 \\ y = 0 \end{cases}$ B: $\begin{cases} 20x + 120y = 160 \\ 9x + 18y = 36 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$
C: $\begin{cases} 9x + 18y = 36 \\ 160x + 50y = 235 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1{,}5 \end{cases}$ D: $\begin{cases} x = 0 \\ 160x + 50y = 235 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4{,}7 \end{cases}$
Kohdefunktiona on hinta $H = 5x + 20y$
$H(A) = 5\cdot8 + 20\cdot0 = 40$; $H(B) = 5\cdot2 + 20\cdot1 = 30$; $H(C) = 5\cdot1 + 20\cdot1{,}5 = 35$; $H(D) = 5\cdot0 + 20\cdot4{,}7 = 94$
Halvinta, kun perunoita 2 kg ja makkaraa 1 kg

96.2.1. Määritä pisteiden (21,27) ja (18,23) kautta kulkevan suoran yhtälö. Missä pisteissä suora leikkaa koordinaattiakselit?

96.2.2. Mikä on ympyrän $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ keskipiste, säde ja pinta-ala?

96.2.3. Ratkaise yhtälöryhmä $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ 3x - y - z = 4 \\ x - 8y - 2z = 4 \end{cases}$

96.2.4. Mikä on paraabelin $y = x^2 + 4x + 5$ huipun etäisyys suorasta $3x - 4y = 5$?

96.2.5. Missä ympyrän $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 13 = 0$ pisteeseen (3,-2) piirretty tangentti leikkaa x-akselin?

96.2.6. Mitkä ovat suorien $x - 3y + 4 = 0$ ja $6x - 2y = 5$ välisten kulmanpuolittajien yhtälöt?

96.2.7. Määritä vakiot a ja b, kun yhtälöparilla $\begin{cases} ax + by = 1 \\ (a - 2b)x + (2a - 3)y = 2 \end{cases}$ on useampia ratkaisuja kuin yksi

96.2.8. Ympyrä kulkee pisteiden (1,2), (3,4) ja (1,0) kautta. Mikä on ympyrän yhtälö? Mahtuuko sen sisään neliö, jonka ala on 25?

96.2.9. Leipomon varastossa on päivän tarvetta varten ruisjauhoja 600 kg ja vehnäjauhoja 1100 kg. Näistä valmistetaan kahta leipäälaatua A ja B. Leipään A tarvitaan 250 g ruisjauhoja ja 750 g vehnäjauhoja. Leipään B taas tarvitaan 600 g ruisjauhoja ja 400 g vehnäjauhoja. Kuinka monta leipää A ja B on edullisinta valmistaa päivittäin, kun molemmista leivistä saadaan voittoa 3 mk?

96.2.10. Määritä tasojen $x + y = 0$ ja $x + 2z = 2$ leikkaussuorasta pallon $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sisään jäävän janan pituus.

1. $k = \frac{23 - 27}{18 - 21} = \frac{4}{3}$; YHT: $y - 27 = \frac{4}{3}(x - 21)$; $3y - 81 = 4x - 84$; $4x - 3y = 3$
x-akselin lp. $y = 0$; $4x = 3$; $x = \frac{3}{4}$; y-aks. lp. $x = 0$; $-3y = 3$; $y = -1$

2. $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 3 + 4 + 9$; $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$; $K = (2,-3)$ $r = 4$; $A = \pi r^2 = 16\pi$

3. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \;\|\cdot1 \;\|\cdot2 \\ 3x - y - z = 4 \;\|\cdot1 \\ x - 8y - 2z = 4 \;\| \quad \|\cdot1 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x + 2y = 8 \\ 5x - 2y = 12 \end{cases}$; $10x = 20$; $x = 2$; $10 + 2y = 8$; $y = -1$; $4 - 3 + z = 4$; $z = 3$

4. HUIPPU: $x_H = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\cdot1} = -2$; $y_H = (-2)2 + 4\cdot(-2) + 5 = 1$ $H = (-2,1)$
Yht. $3x - 4y - 5 = 0$; Etäisyys: $d = \frac{|-6 - 4 - 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} = 3$

5. Onko piste P(3,-2) ympyrällä? $9 + 4 - 6 - 20 + 13 = 0$; $0 = 0$; ON
$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 10y + 25 = -13 + 1 + 25$; $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 13$; $K = (1,-5)$
$k_r = \frac{-2 + 5}{3 - 1} = \frac{3}{2}$; $k_T = -\frac{2}{3}$ Yht: $y + 2 = -\frac{2}{3}(x - 3)$; $y + 2 = -\frac{2}{3}x + 2$; $y = -\frac{2}{3}x$. $y = 0 \Rightarrow x = 0$. LP = (0,0)

6. Olkoon P(x,y) mielivaltainen kulmanpuolittajan piste. Se on yhtä kaukana kummastakin kyljestä.
$\frac{|x - 3y + 4|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{|6x - 2y - 5|}{\sqrt{36 + 4}}$; $\frac{|x - 3y + 4|}{\sqrt{10}} = \frac{|6x - 2y - 5|}{2\sqrt{10}}$ $\|\cdot2\sqrt{10}$; $|2x - 6y + 8| = |6x - 2y - 5|$
$2x - 6y + 8 = 6x - 2y - 5$ tai $2x - 6y + 8 = -6x - 2y - 5$; $4x + 4y = 13$ tai $8x - 8y + 3 = 0$

7. $\frac{a}{a-2b} = \frac{b}{2a-3} = \frac{1}{2}$; $\frac{a}{a-2b} = \frac{1}{2}$ JA $\frac{b}{2a-3} = \frac{1}{2}$; $\begin{cases} 2a = a - 2b \\ 2a - 3 = 2b \end{cases}$; $\begin{cases} a + 2b = 0 \\ 2a - 2b = 3 \end{cases}$; $3a = 3$; $a = 1$; $1 + 2b = 0$; $b = -\frac{1}{2}$

8. $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$; $\begin{cases} 1 + 4 + A + 2B + C = 0 \\ 9 + 16 + 3A + 4B + C = 0 \\ 1 + 0 + A + C = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} A + 2B + C = -5 \ \|\cdot 2 \\ 3A + 4B + C = -25 \ \|\cdot(-1) \\ A + C = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} -A + C = 15 \\ A + C = -1 \end{cases}$

$2C = 14$; $C = 7$; $A = -8$; $-8 + 2B + 7 = -5$; $B = -2$; $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 7 = 0$

$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = -7 + 16 + 1$; $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 10$; $r = \sqrt{10}$, Halkaisija $d = 2r = 2\sqrt{10} = \sqrt{40}$

Neliön halkaisija $= s\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = \sqrt{50} > \sqrt{40}$ = ympyrän halkaisija V: Ei mahdu

9. Olkoon A-leipiä = x ja B-leipiä y kpl. Ehdot: $0{,}25x + 0{,}6y \le 600$ JA $0{,}75x + 0{,}4y \le 1100$ JA $x \ge 0$ JA $y \ge 0$

Alueen nurkkapisteet: A $\begin{cases} y = 0 \\ 0{,}75x + 0{,}4y = 1100 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1466{,}66.. \\ y = 0 \end{cases}$; B $\begin{cases} 0{,}25x + 0{,}6y = 600 \\ 0{,}75x + 0{,}4y = 1100 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1200 \\ y = 500 \end{cases}$

C $\begin{cases} x = 0 \\ 0{,}25x + 0{,}6y = 600 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1000 \end{cases}$ ja O(0,0)

Voittofunktio $V = 3x + 3y$. $V(A) = 3\cdot 1466{,}66 = 4400$; $V(B) = 3\cdot 1200 + 3\cdot 500 = 5100$; $V(C) = 3\cdot 1000 = 3000$ ja $V(O) = 0$. Voitto suurin pisteessä B. V: A-leipiä tehdään 1200 kpl ja B-leipiä 500 kpl

10. Leikkaussuora: $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2z = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2 - 2z \\ y = 2z - 2 \\ z = z \end{cases}$

Leikkauspisteet: $(2 - 2z)^2 + (2z - 2)^2 + z^2 = 1$; $4 - 8z + 4z^2 + 4z^2 - 8z + 4 + z^2 = 1$; $9z^2 - 16z + 7 = 0$

$z = \dfrac{16 \pm \sqrt{256 - 252}}{18} = \dfrac{16 \pm 2}{18}$; $z = 1$ tai $z = \dfrac{7}{9}$, jolloin pisteet $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ ja $\begin{cases} x = 4/9 \\ y = -4/9 \\ z = 7/9 \end{cases}$

Pisteiden väliin jäävän janan pituus $= \sqrt{\dfrac{16}{81} + \dfrac{16}{81} + \dfrac{4}{81}} = \sqrt{\dfrac{36}{81}} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

96.3.1. Avaruussuora kulkee pisteen (2,3,1) kautta ja on vektorin **s** = 3**i** - 2**j** + 4**k** suuntainen. Mikä on suoran a) vektorimuotoinen b) parametrimuotoinen yhtälö?

96.3.2. Mikä on sen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on (4,-5) ja säde 6? Onko origo kehällä?

96.3.3. Laske janan A(2,3)B(4,-5) keskipiste, kulmakerroin ja keskinormaalin yhtälö.

96.3.4. Ratkaise yhtälöryhmä $\begin{cases} 3x - 2y + z = 8 \\ 2x + 3y - z = 17 \\ 4x + y + 2z = 33 \end{cases}$

96.3.5. Laske ympyröiden $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$ ja $x^2 + y^2 = 9$ keskipisteet ja säteet. Mikä on lyhin matka ensimmäisen ympyrän kehältä toisen ympyrän kehälle?

96.3.6. Neliön kaksi kärkeä ovat x-akselilla ja kaksi paraabelilla $y = ½x^2$. Laske neliön piiri.

96.3.7. Määritä vakio c siten, että suora $x - 3y + c = 0$ on ympyrän $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$ tangentti. Missä pisteessä se tangentti, jossa c on positiivinen, sivuaa ympyrää?

96.3.8. Osoita, että suora $(C^2 + 1)x - C^2y + C^2 - 1 = 0$ kaikilla vakion C arvoilla kulkee kiinteän pisteen kautta. Mikä tämä piste on? Piirrä suoraparvi.

96.3.9. Minkä kulman tasojen $2x + 3y - z = 3$ ja $x + 2y + z = 4$ leikkaussuora muodostaa xy-tason kanssa?

96.3.10. Sami valmistaa kahdenlaisia kellotauluja. Mäntykellotaulun tekeminen kestää 2 tuntia ja siihen kuluu 60 g lakkaa. Tammikellotaulun valmistaminen kestää 2½ tuntia ja siihen kuluu 120 g lakkaa. Varastossa on lakkaa 6,9 kg ja valmistukseen on käytettävissä aikaa 200 tuntia. Mäntykellotaulusta saa voittoa 15 mk ja tammikellotaulusta 20 mk. Miten valmistusmäärät on valittava voiton maksimoimiseksi?

1. a) **OP** = (2**i** + 3**j** + **k**) + t(3**i** - 2**j** + 4**k**) b) P = $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$

2. $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 36$; $(0 - 4)^2 + (0 + 5)^2 = 36$; $16 + 25 = 36$; $41 = 36$ V: EI

3. Keskipiste : $x = \dfrac{2 + 4}{2} = 3$; $y = \dfrac{3 + (-5)}{2} = -1$. K = (3,-1) kulmakerroin: $k = \dfrac{-5 - 3}{4 - 2} = -4$; $k_N = \dfrac{1}{4}$

yhtälö: $y - (-1) = \dfrac{1}{4}(x - 3) \ \|\cdot 4$; $4y + 4 = x - 3$; $x - 4y - 7 = 0$.

4. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 8 \;||\cdot 1 \\ 2x + 3y - z = 17 \;||\cdot 1 \;||\cdot 2 \\ 4x + y + 2z = 33 \;|| \quad ||\cdot 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x + y = 25 \;||\cdot 7 \\ 8x + 7y = 67 \;||\cdot(-1) \end{cases}$; $27x = 108$; $x = 4$; $20 + y = 25$; $y = 5$

$12 - 10 + z = 8$; $z = 6$ V: $x = 4$, $y = 5$, $z = 6$

5. Y_1: $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 9 + 16 - 24$; $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$; $K_1 = (3,4)$, $r_1 = 1$

Y_2: $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 9$; $K_2 = (0,0)$, $r_2 = 3$

$K_1K_2 = \sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = 5$; Etäisyys $= K_1K_2 - r_1 - r_2 = 5 - 1 - 3 = 1$

6. Paraabeli symmetrinen y-akselin suhteen $\Rightarrow$ neliö symmetrinen y-akselin suhteen.
Olkoon x = paraabelilla $y = \frac{1}{2}x^2$ I neljänneksessä olevan kärjen x-koordinaatti
Kanta $= 2x$, korkeus on $y = \frac{1}{2}x^2$. Neliön sivut yhtä pitkät $\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = 2x \;||\cdot 2$; $x^2 - 4x = 0$ $\quad x(x - 4) = 0$
$x = 0$ tai $x = 4$. Joten sivu $= 2x = 2\cdot 4 = 8$. Piiri $= 4\cdot 8 = 32$.

7. $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 4 + 1 + 5$; $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$; $K = (2,-1)$ ja $r = \sqrt{10}$ Suora on ympyrän tangentti, jos ympyrän keskipisteen etäisyys suoralle on = säde. $\dfrac{|2 - 3\cdot(-1) + c|}{\sqrt{1 + 9}} = \sqrt{10} \;||\cdot\sqrt{10}$; $|c + 5| = 10$

$c + 5 = \pm 10$; $c = 5$ tai $c = -15$

$\begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$; $(3y - 5)^2 + y^2 - 4(3y - 5) + 2y - 5 = 0$; $9y^2 - 30y + 25 + y^2 - 12y + 20 + 2y - 5 = 0$

$10y^2 - 40y + 40 = 0$; $y^2 - 4y + 4 = 0$; $(y - 2)^2 = 0$; $y = 2$; $x = 3\cdot 2 - 5 = 1$ V : $P = (1,2)$

8. $\begin{cases} C = 0 \\ C = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$; $x = 1$ ja $y = 2$.
Piste (1,2) on kaikilla käyrillä, sillä $(C^2+1)\cdot 1 - C^2\cdot 2 + C^2 - 1 = 0$; $C^2 + 1 - 2C^2 + C^2 - 1 = 0$; $0 = 0$ eli piste toteuttaa käyrän yhtälön parametrin C arvosta riippumatta

$C^2y = (C^2 + 1)x + (C^2 - 1)$; $y = \dfrac{C^2 + 1}{C^2}x + \dfrac{C^2 - 1}{C^2}$ $y = (1 + \dfrac{1}{C^2})x + (1 - \dfrac{1}{C^2})$ ts. suorien kulmakertoimet ovat > 1.

Parven kuvaajaan kuuluu pisteen (1,2) kautta kulkevista suorista ne joiden kulmakertoimet ovat välillä $k > 1$

9. Suora: $\begin{cases} 2x + 3y = 3 + z \;||\cdot 2 \;||\cdot(-1) \\ x + 2y = 4 - z \;||\cdot(-3) \;||\cdot 2 \end{cases}$; $x = -6 + 5z$; $y = 5 - 3z$; $\begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 5 - 3t \\ z = t \end{cases}$; $\mathbf{s} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$; xy-tason

normaalivektori on $\mathbf{k}$. $\cos(\angle(\mathbf{s},\mathbf{n})) = \dfrac{\mathbf{s}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{s}|\cdot|\mathbf{n}|}$; $\cos\alpha = \dfrac{0 + 0 + 1}{\sqrt{25 + 9 + 1}\sqrt{0 + 0 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{35}}$ $\alpha = 80{,}3°$

$\angle(\mathbf{s},T) = 90° - 80{,}3° = 9{,}7°$

10. x = mäntykellotaulujen lukumäärä, y = tammikellotaulujen lukumäärä.
$x \geq 0$; $y \geq 0$; $2x + 2\frac{1}{2}y \leq 200$; $60x + 120y \leq 6900$, joista muodostuu alue.

Alueen kärkipisteet: A $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ (0,0) B $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 2\frac{1}{2}y = 200 \end{cases}$ (100,0) C $\begin{cases} 2x + 2\frac{1}{2}y = 200 \;||\cdot(-3) \\ 6x + 12y = 690 \;||\cdot 1 \end{cases}$ $4\frac{1}{2}y = 90$; $y = 20$; $2x + 50 = 200$; $2x = 150$; $x = 75$ (75,20) D $\begin{cases} x = 0 \\ 60x + 120y = 6900 \end{cases}$ (0,57½) Kohdefunktio eli voitto $= 15x + 20y$

A: $15\cdot 0 + 20\cdot 0 = 0$; B: $15\cdot 100 + 20\cdot 0 = 1500$; C: $15\cdot 75 + 20\cdot 20 = 1525$; D: $15\cdot 0 + 20\cdot 57\frac{1}{2} = 1150$.
Suurin arvo saadaan C:ssä. V: 75 mäntykellotaulua ja 20 tammikellotaulua.

96.4.1. Määritä vakiot k ja b siten, että suora $y = kx + b$ kulkee pisteiden (6,5) ja (-2,1) kautta

96.4.2. Mikä on tason $2x - 3y + z + 6 = 0$ normaalivektori ja pisteet, joissa taso leikkaa koordinaattiakselit?

96.4.3. Ratkaise yhtälöryhmä $\begin{cases} 2x + 3y - z = 6 \\ 3x - 2y + z = 5 \\ x + 2y + 3z = 7 \end{cases}$.

96.4.4. Määritä niiden suorien yhtälöt, jotka ovat etäisyydellä 2 suorasta $3x - 4y + 6 = 0$.

96.4.5. Millä vakion a arvoilla suorien $x - ay - a = 0$ ja $2ax + 5y - 6 = 0$ leikkauspiste on x-akselilla?

96.4.6. Janan päätepiste on (2,5) ja sen keskinormaalin yhtälö $x + 3 = 2y$. Mikä on janan toinen päätepiste?

96.4.7. Mikä on sen ympyrän yhtälö, joka sivuaa x-akselia origossa ja joka kulkee pisteen (-3,4) kautta?

96.4.8. Epäyhtälöt $2x + y - 5 \leq 0$, $2x - 3y + 7 \geq 0$ ja $2x + 5y - 1 \geq 0$ määräävät kolmion. Mikä on lausekkeen $x + y$ suurin ja mikä pienin arvo, kun piste (x,y) on kolmion piste?

96.4.9. Suora $3x - 2y + 4 = 0$ leikkaa paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2$ pisteissä A ja B. Kuinka suuressa kulmassa jana AB näkyy origosta?

96.4.10. Osoita, että ympyröillä $x^2 + y^2 - 2ax + 2ay = 8a + 8$ on yhteinen tangentti vakion a saadessa kaikki reaaliset arvot, jotka ovat $\neq -2$. Mikä on tämän tangentin yhtälö?

1. $k = \frac{5-1}{6+2} = \frac{1}{2}$; $y = ½x + b$; $5 = ½ \cdot 6 + b$; $b = 2$

2. $2x - 3y + z + 6 = 0 \Rightarrow \mathbf{n} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ x-aks. lp: $y = 0$, $z = 0$, $2x + 6 = 0$; $x = -3$ (-3,0,0)
y-aks. lp: $x = 0$, $z = 0$, $-3y + 6 = 0$; $y = 2$ (0,2,0) z-aks. lp: $x = 0$, $y = 0$, $z + 6 = 0$; $z = -6$ (0,0,-6)

3. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 6 \ \| \cdot 1 \ \| \cdot 3 \\ 3x - 2y + z = 5 \ \| \cdot 1 \\ x + 2y + 3z = 7 \ \| \quad \| \cdot 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x + y = 11 \ \| \cdot 11 \\ 7x + 11y = 25 \ \| \cdot(-1) \end{cases}$; $4x = 96$; $x = 2$
$10 + y = 11$; $y = 1$; $6 - 2 + z = 5$; $z = 1$ V: $x = 2, y = 1, z = 1$

4. Olk. P(x,y) mielivaltainen suoran piste. P:n etäisyys suoralle on = 2 ; $\frac{|3x - 4y + 6|}{\sqrt{9 + 16}} = 2$
$|3x - 4y + 6| = 10$; $3x - 4y + 6 = 10$ tai $3x - 4y + 6 = -10$; $3x - 4y = 4$ tai $3x - 4y + 16 = 0$

5. Suorien ja x-akselin leikkauspisteet. P: $y = 0$; $x = a$. Q: $y = 0$; $x = \frac{6}{2a} = \frac{3}{a}$
$P = Q \Rightarrow a = \frac{3}{a}$; $a^2 = 3$; $a = \pm\sqrt{3}$

6. $x - 2y + 3 = 0$; $y = ½x + 1½$; $k_L = ½ \Rightarrow k_N = -2$
NORM. YHT.: $y - 5 = -2(x - 2)$; $y - 5 = -2x + 4$; $2x + y = 9$
LP: $\begin{cases} x - 2y = -3 \ \| \cdot 1 \\ 2x + y = 9 \ \| \cdot 2 \end{cases}$; $5x = 15$; $x = 3$; $6 + y = 9$; $y = 3$
Olk. janan päätepiste = (x,y). KP = (3,3) $\Rightarrow \frac{2 + x}{2} = 3$; $x + 2 = 6$; $x = 4$. $\frac{5 + y}{2} = 3$; $5 + y = 6$; $y = 1$ V☹4,1)

7. Olk. KP = (0,y) ; KA = KO ; $\sqrt{(0 + 3)^2 + (4 - y)^2} = \sqrt{(0 - 0)^2 + (y - 0)^2} \ \| (\ )^2$
$9 + 16 - 8y + y^2 = y^2$; $8y = 25$; $y = \frac{25}{8} = r$ V: $(x - 0)^2 + (y - \frac{25}{8})^2 = (\frac{25}{8})^2$

8. Lasketaan kärjet A: $\begin{cases} 2x + y = 5 \ \| \cdot 1 \\ 2x - 3y = -7 \ \| \cdot(-1) \end{cases}$; $4y = 12$; $y = 3$; $2x + 3 = 5$; $x = 1$; A = (1,3)
B: $\begin{cases} 2x + y = 5 \ \| \cdot (-1) \\ 2x + 5y = 1 \ \| \cdot 1 \end{cases}$; $4y = -4$; $y = -1$; $2x - 1 = 5$; $x = 3$; B = (3,-1)
C: $\begin{cases} 2x - 3y = -7 \ \| \cdot (-1) \\ 2x + 5y = 1 \ \| \cdot 1 \end{cases}$; $8y = 8$; $y = 1$; $2x + 5 = 1$; $x = -2$. C = (-2,1)
Suurin arvo saadaan jossakin päätepisteessä
A: $x + y = 1 + 3 = 4$ B: $x + y = 3 - 1 = 2$ C: $x + y = -2 + 1 = -1$ V: Suurin = 4, pienin = -1

9. LP: $\begin{cases} 3x - 2y + 4 = 0 \\ y = ½x^2 \end{cases}$; $3x - x^2 + 4 = 0$; $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$; $x = 4$ tai $x = -1$
A(4,8) , B(-1,½)
$k_{OA} = \frac{8 - 0}{4 - 0} = 2$; $k_{OB} = \frac{½ - 0}{-1 - 0} = -½$; $\tan\alpha = 2$; $\alpha = 63{,}4°$; $\tan\beta = -½$; $\beta = -26{,}6°$
Kulma = $180° - \alpha - |\beta| = 180° - 63{,}4° - 26{,}6° = 90°$

10. $x^2 + y^2 - 2ax + 2ay = 8a + 8$; $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 + 2ay + a^2 = a^2 + a^2 + 8a + 8$
$(x - a)^2 + (y + a)^2 = 2(a + 2)^2 \Rightarrow$ KP = (a,-a) ja $r = |a + 2|\sqrt{2}$
Ympyröiden leikkaussuora: $\begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \ \| \cdot 1 \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y = 16 \ \| \cdot(-1) \end{cases}$ $2x - 2y = -8$; $x - y + 4 = 0$ on näiden kahden ympyrän leikkaauspisteiden kautta kulkeva suora. Tämä on kuitenkin kaikkien ympyröiden tangentti, koska kaikkien ympyröiden keskipisteen etäisyys tälle suoralle = $\frac{|a + a + 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{|2a + 4|}{\sqrt{2}} = |a + 2| \cdot \sqrt{2} = r$

97.1.1. Mikä on suoran kulmakerroin, kun a) suora kulkee pisteiden (-2,3) ja (4,-1) kautta
b) suoran yhtälö on $5x + 2y - 4 = 0$ c) suoran suuntakulma on -45° d) suoran suuntavektori on $\mathbf{s} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$
e) suora on suoran $y = x/2 + 7$ normaali f) suora on suoran $x - 2y + 6 = 0$ suuntainen?

97.1.2. a) Missä pisteessä taso $2x + 3y - 4z + 6 = 0$ leikkaa x-akselin? b) Mitä xy-tason suoraa pitkin taso leikkaa xy-tason?

97.1.3. Kolmion kärkipisteet ovat A(-3,1) B(1,-2) ja C(4,3). Laske a) sivun AB pituus b) kolmion ala.

97.1.4. Missä pisteissä suora $2x + y = 4$ leikkaa paraabelin $y = x^2 + 3x - 2$

97.1.5. Onko piste (-1002,1004) suorien $4x - 2y + 1 = 0$ ja $x - 2y + 3 = 0$ välisen kulman puolittajalla?

97.1.6. Mikä on ympyrää $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$ pisteessä (1,2) sivuavan tangentin yhtälö?

97.1.7. Osoita, että tasot $(x + 2y - z + 3) + a(2x - y + z - 2) + b(x + y + z) = 0$ kulkevat saman pisteen kautta. Mikä on tämä piste?

97.1.8. Millä a:n arvoilla yhtälö $x^2 + y^2 + ax - 6y + 5a = 0$ esittää ympyrää? Millä a:n arvoilla tämä ympyrä sivuaa y-akselia?

97.1.9. Oy Aita ja Rappu AB valmistaa aitaelementtejä ja rappuralleja. Aitaelementistä saadaan voittoa 80 mk ja rappurallista 32 mk. Aitaelementtejä on tilattu ennakkoon 120 ja rappuralleja 210. Työtunteja on käytettävissä 160. Yhden aitaelementin valmistamiseen kuluu puoli tuntia ja yhden rappurallin 10 minuuttia. Miten tuotanto on suunniteltava, jotta tuotto olisi mahdollisimman suuri ja tilatut tuotteet voitaisiin toimittaa?

97.1.10. Osoita, että suorat $\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 2}{-3} = \frac{z + 1}{4}$ ja $\frac{x + 2}{3} = \frac{y + 5}{2} = \frac{z + 1}{2}$ leikkaavat toisensa ja laske niiden välinen kulma.

---

1. a) $k = \frac{-1 - 3}{4 + 2} = -\frac{2}{3}$ b) $2y = -5x + 4$; $y = -2½x + 2$; $k = -2½$ c) $k = \tan(-45°) = -1$

d) $k = \frac{s_y}{s_x} = \frac{6}{-2} = -3$ e) $k_L = ½$; $k_N = -2$ f) $-2y = -x - 6$; $y = ½x + 3$; $k = ½$

---

2. a) x-akselilla $y = 0$ ja $z = 0 \Rightarrow 2x + 3\cdot0 - 4\cdot0 + 6 = 0$; $2x = -6$; $x = -3$ V : P = (-3,0,0)

b) xy-tasolla $z = 0 \Rightarrow 2x + 3y - 4\cdot0 + 6 = 0$. V : $2x + 3y + 6 = 0$

---

3. a) $AB = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$

b) Ympäröidään kolmio suorakulmiolla. $A_S = 7\cdot5 = 35$; $A_1 = ½ \cdot4\cdot3 = 6$; $A_2 = ½ \cdot3\cdot5 = 7½$

$A_3 = ½ \cdot 2 \cdot 7 = 7$; $A = A_S - A_1 - A_2 - A_3 = 35 - 6 - 7½ - 7 = 14½$

---

4. LP : $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y = x^2 + 3x - 2 \end{cases}$; $2x + x^2 + 3x - 2 = 4$; $x^2 + 5x - 6 = 0$; $x = \frac{-5 \pm \sqrt{24 + 24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$

$x = 1$ tai $x = -6$, jolloin $y = 1 + 3 - 2 = 2$ tai $y = 36 - 18 - 2 = 16$ V : (1,2) ja (-6,16)

---

5. Piste on kulmanpuolittajalla, jos se on yhtä etäällä kummastakin kulman kyljestä.

$d_1 = \frac{|4\cdot(-1002) - 2\cdot1004 + 1|}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{6015}{\sqrt{20}} = \frac{6015}{2\sqrt{5}}$; $d_2 = \frac{|-1002 - 2\cdot1004 + 3|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{3007}{\sqrt{5}} = \frac{6014}{2\sqrt{5}} \neq d_1$ V : ei ole.

---

6. P = (1,2) ; $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 5 + 4 + 1$; $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$; K = (2,-1)

$k_{KP} = \frac{-1 - 2}{2 - 1} = -3 \Rightarrow k_T = \frac{1}{3}$; YHTÄLÖ : $y - 2 = \frac{1}{3}(x - 1)$; $3y - 6 = x - 1$; $x - 3y + 5 = 0$

---

7. Jos kaikki sulkulausekkeet ovat arvoltaan 0, niin yhtälö toteutuu a:n ja b:n arvosta riippumatta.

$\begin{cases} x + 2y - z + 3 = 0 \quad \| \cdot 1 \quad \| \cdot 1 \\ 2x - y + z - 2 = 0 \quad \| \cdot 1 \\ x + y + z = 0 \quad \| \cdot 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x + y + 1 = 0 \quad \| \cdot 3 \\ 2x + 3y + 3 = 0 \quad \| \cdot (-1) \end{cases}$; $7x = 0$; $x = 0$; $y + 1 = 0$; $y = -1$

$0 - 1 + z = 0$; $z = 1$, joten piste (0,-1,1) tekee kaikki sulkulausekkeet nolliksi ja on tasojen yhteinen piste.

---

8. $x^2 + ax + ¼a^2 + y^2 - 6y + 9 = -5a + ¼a^2 + 9$; $(x - ½a)^2 + (y - 3)^2 = ¼a^2 - 5a + 9$

Kuvaaja on ympyrä, jos OP> 0 ; $¼a^2 - 5a + 9 > 0$; NK: $a^2 - 20a + 36 = 0$;

$a = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 144}}{2} = \frac{20 \pm 16}{2}$; a = 18 tai a = 2 ; Kuvaaja YAP. Merkit +++ 2 --- 18 +++ V : a < 2 tai a > 18

Ympyrä sivuaa y-akselia, jos keskipisteen etäisyys y-akselista on sama kuin säde.

$|½a| = \sqrt{¼a^2 - 5a + 9} \ \| (\ )^2$; $¼a^2 = ¼a^2 - 5a + 9$; $5a = 9$; $a = 9/5$

---

9. x = aitaelementtien määrä ; y = rallien määrä: $x \geq 120$; $y \geq 210$; $x/2 + y/6 \leq 160$, mitkä määrittävät erään kolmion, jonka kärkipisteet

A : (120,210) B: $x = 120$; $120 / 2 + y/6 = 160$; $y = 600$ (120,600)

C : $y = 210$; $x/2 + 210/6 = 160$; $x = 250$ (250,210)

Tuotto = 80x + 32y A : $T = 80\cdot120 + 32\cdot210 = 16\,320$ B: $T = 80\cdot120 + 32\cdot600 = 28\,800$

C : $T = 80\cdot250 + 32\cdot210 = 26\,720$, joten suurin arvo B:ssä V : 120 aitaelementtiä ja 600 rallia

---

10. Merkitään ensimmäinen suhde = t ja toinen = s, jolloin saadaan suorien yhtälöiksi

$\begin{cases} x - 2 = 2t \\ y - 2 = -3t \\ z + 1 = 4t \end{cases}$ ja $\begin{cases} x + 2 = 3s \\ y + 5 = 2s \\ z + 1 = 2s \end{cases}$ eli $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$ ja $\begin{cases} x = -2 + 3s \\ y = -5 + 2s \\ z = -1 + 2s \end{cases}$, jotka leikkaavat, jos suorilla sama x, y ja z

$\begin{cases} 2 + 2t = -2 + 3s \\ 2 - 3t = -5 + 2s \\ -1 + 4t = -1 + 2s \end{cases}$; $\begin{cases} 2t - 3s = -4 \\ 3t + 2s = 7 \quad \| \cdot 1 \\ 4t - 2s = 0 \quad \| \cdot 1 \end{cases}$; $7t = 7$; $t = 1$; $3 + 2s = 7$; $2s = 4$; $s = 2$

Sijoitetaan t ja s viimeisen ryhmän ylimpään yhtälöön ; $2\cdot1 - 3\cdot2 = -4$; $2 - 6 = -4$,

joten suorille tulee samat x, y ja z, kun t = 1 ja s = 2, jolloin piste on (4,-1,3).
$\mathbf{s_1} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ja $\mathbf{s_2} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; $\cos\alpha = \frac{\mathbf{s_1}\cdot\mathbf{s_2}}{|\mathbf{s_1}|\cdot|\mathbf{s_2}|} = \frac{6 - 6 + 8}{\sqrt{4 + 9 + 16}\sqrt{9 + 4 + 4}} = 0{,}360$; $\alpha = 68{,}9°$

97.2.1. Olkoon pisteet A(-2,-3) ja B(4,-1). Laske janan AB a) keskipiste b) kulmakerroin c) keskinormaalin kulmakerroin d) keskinormaalin yhtälö.

97.2.2. Kulkevatko suorat 2x + 3y - 9 = 0, x - y + 5 = 0 ja 9x + 5y - 8 = 0 saman pisteen kautta?

97.2.3. Mikä on pisteen (3,4,5) a) projektio xy-tasolla b) projektio z-akselilla c) etäisyys xy-tasosta d) etäisyys z-akselista e) etäisyys origosta f) kautta kulkevan xz-tason suuntaisen tason yhtälö?

97.2.4. Missä tasojen 2x + 3y - z = 5 ja 3x + y + z = 6 leikkaussuora leikkaa tason 4x + 5y + 2z = 3?

97.2.5. Piste (2,3) on ympyrällä $x^2 + y^2 + 3x - 2y + k = 0$. Määritä k:n arvo ja pisteen (2,3) kautta piirretyn ympyrän tangentin yhtälö.

97.2.6. Piirrä se xy-tason alue, jonka pisteissä lausekkeiden x - y + 1 ja $y - x^2 + 1$ arvot ovat erimerkkiset.

97.2.7. Ympyrät $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 40$ ja $x^2 + y^2 - 6x + k = 0$ sivuavat toisiaan. Määritä vakion k arvo.

97.2.8. Kymmenen (10) metriä leveän tien yli rakennetaan huoltamokeskusta mainostava paraabelin muotoinen kaari. Kaaren leveys on 60 cm ja sen aukon suurin leveys 30,0 m. Kuinka korkea mainoskaari on, kun sen pienin vapaa alituskorkeus tien kohdalla on nykyisten asetusten mukaisesti 4,6 metriä?

97.2.9. Mikä suoran y = 2x piste on yhtä kaukana suorista x + 2y = 3 ja 2x - y = 4?

97.2.10. Maanviljelijällä on 100 ha maata. Hän viljelee perunaa ja vihanneksia. Jonkin osan maastaan hän voi jättää kesannolle. Viljelykustannukset hehtaaria kohti ovat perunalla 100 mk ja vihanneksilla 200 mk. Peruna vaatii työpäiviä hehtaaria kohti 1 ja vihannekset 4. Viljelijällä on käytössä 11000 mk ja 160 miestyöpäivää. Perunoista saa puhdasta voittoa 400 mk hehtaarilta ja vihanneksista 1200 mk. Kuinka maanviljelys tulisi organisoida, että saataisiin maksimaalinen voitto?

1. a) $x = \frac{-2 + 4}{2} = 1$, $y = \frac{-3 - 1}{2} = -2$; K = (1,-2) b) $k_{AB} = \frac{-1 + 3}{4 + 2} = \frac{1}{3}$ c) $k_N = -3$
d) YHT: y + 2 = -3(x - 1) ; y + 2 = -3x + 3 ; y = -3x + 1

2. Lasketaan 2 ensimmäisen suoran leikkauspiste ja tarkastetaan onko se kolmannella suoralla
$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \ \|\cdot 1 \\ x - y = -5 \ \|\cdot 3 \end{cases}$; 5x = -6 ; x = -1,2 ; -1,2 - y = -5 ; y = 5 - 1,2 ; y = 3,8
$9 \cdot (-1{,}2) + 5 \cdot 3{,}8 - 8 = -10{,}8 + 19 - 8 = 0{,}2 \neq 0$ V: Eivät kulje

3. a) (3,4,0) b) (0,0,5) c) d = | z | = 5 d) $\sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 0)^2 + (5 - 5)^2} = 5$
e) $\sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 0)^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ f) y = 4

4. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \ \|\cdot 1 \ \|\cdot 2 \\ 3x + y + z = 6 \ \|\cdot 1 \\ 4x + 5y + 2z = 3 \ \| \ \ \|\cdot 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x + 4y = 11 \ \|\cdot 11 \\ 8x + 11y = 13 \ \|\cdot(-4) \end{cases}$; 23x = 69 ; x = 3
15 + 4y = 11 ; 4y = -4 ; y = -1 ; 9 - 1 + z = 6 ; z = -2 . V: LP = (3,-1,-2)

5. Piste (2,3) on ympyrän kehällä, jos se toteuttaa ympyrän yhtälön. 4 + 9 + 6 - 6 + k = 0 ; k = -13
$x^2 + 3x + 9/4 + y^2 - 2y + 1 = 13 + 9/4 + 1$; $(x + 1\frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = 16\frac{1}{4}$; KP = $(-1\frac{1}{2},1)$
$k_r = \frac{3 - 1}{2 + 1\frac{1}{2}} = \frac{2}{3\frac{1}{2}} = \frac{4}{7}$; $k_T = -\frac{7}{4}$ YHT: $y - 3 = -\frac{7}{4}(x - 2)$; 4y - 12 = -7x + 14 ; 7x + 4y = 26

6. $\begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ y - x^2 + 1 < 0 \end{cases}$ eli $\begin{cases} y < x + 1 \\ y < x^2 - 1 \end{cases}$ eli alue, joka on suoran y = x + 1 ja paraabelin $y = x^2 - 1$alapuolella
tai $\begin{cases} x - y + 1 < 0 \\ y - x^2 + 1 > 0 \end{cases}$ eli $\begin{cases} y > x + 1 \\ y > x^2 - 1 \end{cases}$ eli alue, joka on suoran y = x + 1 ja paraabelin $y = x^2 - 1$ yläpuolella

7. Ympyrä 1. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 40$; $K_1 = (2,3)$ $r_1 = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
Ympyrä 2. $x^2 - 6x + 9 + y^2 = 9 - k$; $K_2 = (3,0)$ $r_2 = \sqrt{9 - k}$
Keskipisteiden etäisyys $K_1K_2 = \sqrt{(3 - 2)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{10} < r_1$, joten ympyrät sivuavat sisäpuolisesti
$K_1K_2 = r_2 - r_1$ tai $K_1K_2 = r_2 - r_1$; $\sqrt{10} = \sqrt{9 - k} - 2\sqrt{10}$ tai $\sqrt{10} = 2\sqrt{10} - \sqrt{9 - k}$
$\sqrt{9 - k} = 3\sqrt{10}$ tai $\sqrt{9 - k} = \sqrt{10}$; 9 - k = 90 tai 9 - k = 10 ; k = - 81 tai k = -1

8. Asetetaan koordinaatisto siten, että x-akseli yhtyy tien pintaan ja y-akseli kulkee korkeimmalta kohdalta paraabelin yhtälö on tällöin $y = ax^2 + c$. Paraabelin lopussa y = 0 ja tien yläpuolella > 4,6.
$\begin{cases} y(15) = 0 \\ y(5) = 4{,}6 \end{cases}$; $\begin{cases} 225a + c = 0 \;\|\cdot(-1) \\ 25a + c = 4{,}6 \;\|\cdot 9 \end{cases}$; 8c = 41,4 ; c = 5,175, joten kaaren korkeus on 5,18m + 0,60m = 5,78m

---

9. Olkoon suoran y = 2x piste (x,2x). Sen etäisyys molemmille suorille on oltava sama.
$\frac{|x + 2\cdot 2x - 3|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|2x - 2x - 4|}{\sqrt{4 + 1}}$; |5x - 3| = 4 ; 5x - 3 = ±4 ; 5x = 7 tai 5x = -1 ; x = 1,4 tai x = -0,2
jolloin y = 2,8 tai y = -0,4 V: (1,4 ; 2,8) tai (-0,2 ; -0,4)

---

10. Olkoon perunaa x (ha) ja vihanneksia y (ha)
$100x + 200y \le 11000$ JA $x + 4y \le 160$ JA $x + y \le 100$ JA $x \ge 0$ JA $y \ge 0$
Piirretään alue koordinaatistoon ja lasketaan alueen kärkipisteet.
O = (0,0) A : $\begin{cases} x + y = 100 \\ y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 100 \\ y = 0 \end{cases}$ A = (100,0) B: $\begin{cases} x + y = 100 \\ x + 2y = 110 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 95 \\ y = 5 \end{cases}$, B = (95,5)
C: $\begin{cases} x + 2y = 110 \\ x + 4y = 160 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 60 \\ y = 25 \end{cases}$ D: $\begin{cases} x + 4y = 140 \\ x = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \\ y = 40 \end{cases}$
Tuotto = T = 400x + 1200y. Lasketaan tämän funktion arvo kaikissa nurkkapisteissä
A: T = 400 · 100 = 40 000 ; B: T = 400 · 95 + 1200 · 5 = 44 000 ; C: T = 400 · 60 + 1200 · 25 = 54 000
D: T = 1200 · 40 = 48 000, joten tuotto on suurin pisteessä C
V: Viljellään 60 ha perunaa, 25 ha vihanneksia ja 15 ha kesantoa.

97.3.1. Mikä on pisteiden (-3,2) ja (4,7) kautta kulkevan suoran a) kulmakerroin b) yhtälö c) suuntakulma?

97.3.2. Mikä on a) pisteen (2,-1) projektio x-akselilla b) etäisyys y-akselista c) pisteen (2,-1,3) projektio xy-tasolla d) etäisyys yz-tasosta?

97.3.3. Missä pisteessä suora y = 2x - 5 leikkaa ympyrän $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$?

97.3.4. Laske suorien 2x + y = 4 ja 3x - 2y + 2 = 0 välinen kulma?

97.3.5. Mikä on ympyrän $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ sen tangentin yhtälö, joka on suoran y = 2x suuntainen?

97.3.6. Missä pisteessä tasot 2x + 3y + z = 1 , 3x - 2y - z = 10 ja 4x + 5y + 2z = 6 leikkaavat toisensa?

97.3.7. Mikä on sen suoran yhtälö, jonka pisteillä on se ominaisuus, että pisteen etäisyys suoralle 3x - 7y + 4 = 0 on kaksi kertaa niin suuri kuin etäisyys suoralle 3x - 7y - 13 = 0?

97.3.8. Suoran maantietunnelin poikkileikkaus on paraabelin muotoinen. Tunnelin korkeus on 7,50 m ja leveys tienpinnan tasossa 8,10 m. Kuinka korkea, 260 cm leveä rekka-auto mahtuu ajamaan tunnelin läpi keskiviivan oikealla puolella pysyen?

97.3.9. Onko piste (5,2) sillä paraabelilla, jonka polttopiste on (3,5) ja johtosuora 3x + 2y = 6?

97.3.10. Osoita, että tasojen 2x + 3y - 4z = 6 ja 4x - 6y + 5z = 4 leikkaussuora on suoran
OP = (2 + 9t)**i** + (5 + 26t)**j** + (1 + 24t)**k** suuntainen.

1. a) $k = \frac{7 - 2}{4 + 3} = \frac{5}{7}$ b) $y - 2 = \frac{5}{7}(x + 3)$; 7y - 14 = 5x + 15 ; 5x - 7y + 29 = 0 c) $\tan\alpha = \frac{5}{7}$; $\alpha = 35{,}5°$

---

2. a) (2,-1,0) b) 2 c) y = - 1

---

3. $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10 \end{cases}$; $(x - 1)^2 + (2x - 5 - 2)^2 = 10$; $x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 28x + 49 = 10$; $5x^2 - 30x + 40 = 0$
$x^2 - 6x + 8 = 0$; $x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$; x = 4 tai x = 2 ; y = 2·4 - 5 = 3 tai y = 2·2 - 5 = -1 V: (4,3) tai (2,-1)

---

4. 2x + y = 4 ; y = -2x + 4 ; $k_1 = -2$; 3x - 2y + 2 = 0 ; 2y = 3x + 2 ; y = 1½x + 1 ; $k_2 = 1½$
$\tan\alpha = \left|\frac{1½ + 2}{1 - 3}\right| = \frac{7}{4}$; $\alpha = 60{,}3°$

---

5. $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 4 + 9 - 8$; $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$; K = (2,-3) ja $r = \sqrt{5}$
Suoran y = 2x suuntaisten suorien parvi on y = 2x + c ; 2x - y + c = 0
Keskipisteen etäisyys suoraparven suoralle = säde ; $\frac{|4 + 3 + c|}{\sqrt{4 + 1}} = \sqrt{5}$; | 7 + c | = 5 ; 7 + c = 5 tai 7 + c = -5
c = -2 tai c = -12 ; V: y = 2x - 2 tai y = 2x - 12

6. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \;\|\cdot 1 \\ 3x - 2y - z = 10 \;\|\cdot 1 \;\|\cdot 2 \\ 4x + 5y + 2z = 6 \;\| \quad\;\; \|\cdot 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x + y = 11 \;\|\cdot(-1) \\ 10x + y = 26 \;\|\cdot 1 \end{cases}$; $5x = 15$; $x = 5$

$15 + y = 11$; $y = -4$; $6 - 12 + z = 1$; $z = 7$ V: Piste on (3,-4,7)

7. Olkoon P = (x,y) mielivaltainen suoran piste. $\dfrac{|3x - 7y + 4|}{\sqrt{9 + 49}} = 2 \cdot \dfrac{|3x - 7y - 13|}{\sqrt{9 + 49}}$

$|3x - 7y + 4| = |6x - 14y - 26|$; $3x - 7y + 4 = 6x - 14y - 26$ tai $3x - 7y + 4 = -6x + 14y + 26$

$3x - 7y - 30 = 0$ tai $9x - 21y - 22 = 0$

8. Yhtälö on muotoa $y = 7{,}50 - ax^2$; Piste (4,05 ; 0) on paraabelilla ; $0 = 7{,}50 - a\cdot 4{,}05^2$; $a = 0{,}457$

$\Rightarrow y = 7{,}50 - 0{,}457x^2$; korkeus = $y(2{,}60) = 7{,}50 - 0{,}457\cdot 2{,}60^2 = 4{,}41$ V: 4,40 m korkea.

9. Piste on paraabelilla, jos etäisyys polttopisteeseen = etäisyys johtosuoralle.

$d_1 = \sqrt{(5 - 3)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$; $d_2 = \dfrac{|3\cdot 5 + 2\cdot 2 - 6|}{\sqrt{9 + 4}} = \dfrac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \Rightarrow d_1 = d_2$ V: ON.

10. Tasojen leikkaussuora on $\begin{cases} 2x + 3y = 4z + 6 \;\|\cdot 2 \;\|\cdot 2 \\ 4x - 6y = -5z + 4 \;\|\cdot 1 \;\|\cdot(-1) \end{cases}$

$8x = 3z + 16$; $x = 3/8 \cdot z + 2$; $12y = 13z + 8$; $y = 13/12 \cdot z + 2/3$; $\begin{cases} 3/8 \cdot z + 2 \\ 13/12 \cdot z + 2/3 \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3/8 \cdot t + 2 \\ 13/12 \cdot t + 2/3 \\ z = t \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbf{s}_1 = 3/8 \cdot \mathbf{i} + 13/12 \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{s}_2 = 9\mathbf{i} + 26\mathbf{j} + 24\mathbf{k} = 24(3/8 \cdot \mathbf{i} + 13/12 \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k}) = 24\,\mathbf{s}_1 \Rightarrow \mathbf{s}_1 \parallel \mathbf{s}_2$

98.1.1. Suora kulkee pisteiden (5,-7) ja (1,3) kautta. Laske a) kulmakerroin b) suuntakulma c) suoran yhtälö.

98.1.2. Ympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 + 4x - y - 4{,}75 = 0$. Määritä ympyrän keskipiste ja säde.

98.1.3. Ratkaise yhtälöryhmä $2x + 3y + z = 4$ ja $3x + y - z = 3$ ja $2x - 3y - 2z = 4$..

98.1.4. Mikä on suoran $2x + 3y = 6$ ja x-akselin leikkauspisteen etäisyys suorasta $3x - 4y = 5$?

98.1.5. Piirrä paraabelit $2y = x^2 - 2x + 1$ ja $x = y^2 + 4y + 3$ ja määritä niiden huiput.

98.1.6. Laske suorien $5x + 5y - 7 = 0$ ja $y = 7x + 5$ välisten kulmien puolittajien yhtälöt.

98.1.7. Missä xy-tason osassa lauseke $x^2 + y^2$ saa pienempiä arvoja kuin lauseke $2x - 4y + 4$? Esitä kyseinen xy-tason osa myös piirtämällä.

98.1.8. Suora $y = x$ sivuaa pisteessä (3,3) ympyrää, jonka keskipiste on suoralla $y=2x$. Laske ympyrän yhtälö.

98.1.9. Laske suorien $\mathbf{OP} = 3\mathbf{i} + t(\mathbf{j} + \mathbf{k})$ ja $\begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 2 + s \\ z = 5 - 2s \end{cases}$ leikkauspiste. Mikä on suorien välinen kulma?

98.1.10. Maanviljelijä ryhtyy kasvattamaan fasaaneja ja kalkkunoita. Yritykseen on käytettävissä rahaa enintään 40 000 mk. Fasaaniuntuvikko maksaa 10 mk ja kalkkunauntuvikko 20 mk. Tilojen takia fasaaneita voidaan ottaa enintään 2000 ja kalkkunoita enintään 1000. Täysikasvuisesta fasaanista maanviljelijä saa 75 mk ja kalkkunasta 120 mk. Kuinka monta fasaania ja kalkkunaa maanviljelijän tulisi kasvattaa saadakseen mahdollisimman suuren tuoton, kun ruokintaan on varattava neljäsosa sijoitettavasta pääomasta?

1. a) $k = \dfrac{3 + 7}{1 - 5} = \dfrac{10}{-4} = -2½$ b) $\tan\alpha = -2½$; $\alpha = -68{,}2°$ c) $y - 3 = -2½(x - 1)$; $y = -2½x + 5½$

2. $x^2 + 4x + 4 + y^2 - y + 0{,}25 = 4{,}75 + 4 + 0{,}25$; $(x + 2)^2 + (y - ½)^2 = 9$; K = (-2,½) r = 3

3. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \;\|\cdot 1 \;|\cdot 2 \\ 3x + y - z = 3 \;\;\;\|\cdot 1 \;| \\ 2x - 3y - 2z = 4 \;\| \quad\; |\cdot 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x + 4y = 7 \;\;\|\cdot(-3) \\ 6x + 3y = 12 \;\|\cdot 4 \end{cases}$; $9x = 27$; $x = 3$

$15 + 4y = 7$; $4y = -8$; $y = -2$; $6 - 6 + z = 4$; $z = 4$ V: x = 3 , y = -2 , z = 4

4. LP: $y = 0$; $2x + 3y = 6$; $2x = 6$; $x = 3$ LP = (3,0) Suora: $3x - 4y = 5 \Leftrightarrow 3x - 4y - 5 = 0$

$d = \dfrac{|3\cdot 3 - 4\cdot 0 - 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \dfrac{4}{5}$

5. $2y = x^2 - 2x + 1$; $2y = (x - 1)^2$; $y = ½(x - 1)^2$ H = (1,0) on ylöspäin aukeava. Piirrä.

$x = y^2 + 4y + 3$; $x + 1 = y^2 + 4y + 4$; $x + 1 = (y + 2)^2$; H = (-1,-2) oikealle aukeava. Piirrä.

6. Olkoon P(x,y) mielivaltainen kulmanpuolittajan piste. Se on yhtä kaukana molemmista kyljistä. $\frac{\lvert 5x + 5y - 7\rvert}{\sqrt{25 + 25}} = \frac{\lvert 7x - y + 5\rvert}{\sqrt{49 + 1}}$; $\lvert 5x + 5y - 7\rvert = \lvert 7x - y + 5\rvert$; $5x + 5y - 7 = 7x - y + 5$ tai $5x + 5y - 7 = -7x + y - 5$ $2x - 6y + 12 = 0$ tai $12x + 4y - 2 = 0$; $x - 3y + 6 = 0$ tai $3x + y - ½ = 0$
7. $x^2 + y^2 < 2x - 4y + 4$; $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 < 4 + 1 + 4$; $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 < 9$ Reunaviiva on ympyrä, jonka K = (1,-2) ja r = 3   Sisäpiste (1,-2) : $(1 - 1)^2 + (-2 + 2)^2 < 9$; 0 + 0 < 9 on tosi   Ulkopiste (1,2) : $(1 - 1)^2 + (2 + 2)^2 < 9$; 0 + 16 < 9 on epätosi   V: Ehto toteutuu ko. ympyrän sisäpisteissä
8. Sivuamispisteeseen P(3,3) piirretty säde on kohtisuorassa suoraa y = x vastaan eli keskipiste on suoralla y - 3 = -1(x - 3) ; y = -x + 6. Toisaalta K on suoralla y = 2x, joten lasketaan leikkauspiste y = 6 - x ja y = 2x ; 2x = 6 - x ; 3x = 6 ; x = 2 ; y = 4 K = (2,4) ; r = KP = $\sqrt{(2 - 3)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ YHTÄLÖ : $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 2$
9. L_1 : **OP** = 3**i** + t(**j** + **k**) ⇔ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 + t \\ z = 0 + t \end{cases}$; L_2 : $\begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 2 + s \\ z = 5 - 2s \end{cases}$ LP:ssä samat x, y ja z $\begin{cases} 3 = 1 + 2s \\ t = 2 + s \\ t = 5 - 2s \end{cases}$ josta saadaan   s = 1 ja t = 3 → P = (3,3,3) $\mathbf{s}_1 = \mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{s}_2 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ $\cos\alpha = \frac{\lvert \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 \rvert}{\lvert\mathbf{s}_1\rvert \cdot \lvert\mathbf{s}_2\rvert} = \frac{\lvert 0 + 1 - 2 \rvert}{\sqrt{1+1}\sqrt{4+1+4}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$; $\alpha = 76{,}4°$
10. x = fasaanit , y = kalkkunat ; EHDOT; $10x + 20y \le 30\,000$; $x \le 2\,000$; $y \le 1\,000$; $x \ge 0$; $y \ge 0$ Piirretään yhtäsuuruusviivat ja saadaan alueeksi 5-kulmio OABCD, missä O = (0,0) , A = (2000,0) , B = (2000,500) , C = (1000,1000) ja D = (0,1000) TUOTTO = 65x + 100y . O:ssa TU = 0   A:ssa TU = 65·2000 + 100·0 = 130 000 , B:ssä TU = 65·2000 + 100·500 = 180 000   C:ssä TU = 65·1000 + 100·1000 = 165 000 ja D:ssä TU = 65·0 + 100·1000 = 100 000. Suurin tuotto B:ssä   V : Kasvatetaan 2000 fasaania ja 500 kalkkunaa.

98.2.1. Määritä suorien 2x + y = 3 ja 3x - 2y = 4 a) kulmakertoimet b) suuntakulmat c) normaalivektorit?

98.2.2. Mikä on sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteen (3,1) kautta ja joka on pisteiden (2,1) ja (4,-9) kautta kulkevan suoran kanssa yhdensuuntainen?

98.2.3. Taso z = 3 leikkaa pinnan $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - z - 18 = 0$. Laske leikkauskuvion ala.

98.2.4. Missä kulmassa suora $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$ leikkaa tason 2x + y - 3z = 5?

98.2.5. Selvitä laskemalla onko suora x - y + 2 = 0 ympyrän $x^2 + y^2 - 2 = 0$ tangentti.

98.2.6. Millä a:n arvolla yhtälöryhmällä $\begin{cases} 2x - 3y = a - 6 \\ x + 2y = 2a + 7 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$ on ratkaisu ja mikä se on?

98.2.7. 120 m leveän joen yli rakennetaan paraabelin muotoinen, keskeltä 20 m korkea kaarisilta. Siltaa tukemaan sijoitetaan symmetrisesti kaksi kannatinpilaria, joiden korkeus veden pinnasta on 16 m. Laske pilareiden paikat.

98.2.8. Suora y = 3x + c, c ∈ R, leikkaa suorat 5x - 2y - 4 = 0 ja 2x - y + 4 = 0 vakiosta c riippuvissa pisteissä A ja B. Minkä käyrän muodostavat janojen AB keskipisteet?

98.2.9. Ympyrän keskipiste on suoralla x - 2y = 4. Mikä on ympyrän yhtälö, kun ympyrä sivuaa x-akselia ja suoraa 3x - 4y - 6 = 0?

98.2.10. Puutarhassa on tilaa korkeintaan 26 marjapensaalle. Taimien hankkimiseen on varattu 1000 mk. karviaismarjataimen hinta on 20 mk ja herukkataimen 50 mk. Mitkä määrät pensaita tulisi hankkia, jotta puutarhasta saataisiin mahdollisimman suuri tuotto, kun arvioidaan, että herukkapensaan tuotto on puolitoistakertainen karviaismarjapensaan tuottoon nähden?

1. 2x + y = 3 ; y = -2x + 3 a) k = -2, b) tan α = -2 ; α = -63,4° c) **n** = 2**i** + **j**   3x - 2y = 4 ; y = 1½x + 2 a) k = 1½ b) tan α = 1½ ; α = 56,3° c) **n** = 3**i** - 2**j**
2. $k = \frac{-9 - 1}{4 - 2} = -5$; y - 1 = -5(x - 3) ; y - 1 = -5x + 15 ; y = -5x + 16

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - z - 18 = 0 \\ z = 3 \end{cases}$; $x^2 + y^2 + 3^2 - 2x + 2y - 3 - 18 = 0$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 12 + 1 + 1$; $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 14$; $r^2 = 14$; $A = \pi r^2 = 14\pi$

---

4. Suoran $s = 3i + 2j - k$; tason $n = 2i + j - 3k$

$\cos(\mathbf{s},\mathbf{n}) = \dfrac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{s}| \cdot |\mathbf{n}|} = \dfrac{6 + 2 + 3}{\sqrt{9 + 4 + 1}\sqrt{4 + 1 + 9}} = \dfrac{11}{14}$; $\angle(\mathbf{s},\mathbf{n}) = 38{,}2°$; $\angle(\mathbf{s},T) = 90° - 38{,}2° = 51{,}8°$

---

5. Suora on ympyrän tangentti, jos ympyrän keskipisteen etäisyys suoralle = säde

$x^2 + y^2 = 2$; $K = (0,0)$ $r = \sqrt{2}$; $d = \dfrac{|0 - 0 + 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = r$ V: on

---

6. $\begin{cases} 2x - 3y - a = -6 \;\|\; \cdot 2 \\ x + 2y - 2a = 7 \;\|\; \cdot(-1) \\ 2x - y = -4 \quad \| \quad \| \cdot 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 8y = -19 \;\|\; \cdot(-2) \\ 2x - y = -4 \quad \| \cdot 3 \end{cases}$; $13y = 26$; $y = 2$; $2x - 2 = -4$; $x = -1$

$-2 - 6 - a = -6$; $a = -2$ V: $a = -2$, jolloin $x = -1$ ja $y = 2$

---

7. Olkoon x-akseli pitkin veden pintaa ja y-akseli joen keskikohdalla

Tällöin siltaparaabelin yhtälö on muotoa $y = 20 - ax^2$; $y(60) = 0$; $0 = 20 - 3600a$; $a = \dfrac{1}{120}$

$16 = 20 - \dfrac{1}{120} \cdot x^2$; $\dfrac{1}{120} \cdot x^2 = 4$; $x^2 = 720$; $x = 26{,}8$ V: 26,8 m keskeltä rannoille päin

---

8. A: $\begin{cases} y = 3x + c \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$; $5x - 2(3x + c) = 4$; $5x - 6x - 2c = 4$; $x = -2c - 4$; $y = -6c-12+c = -5c - 12$

B: $\begin{cases} y = 3x + c \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases}$; $2x - 3x - c + 4 = 0$; $x = 4 - c$; $y = 12 - 3c + c = 12 - 2c$

$A = (-2c - 4, -5c - 12)$ ja $B = (4 - c, 12 - 2c)$

K: $x = ½(-2c - 4 + 4 - c) = -1½c$; $y = ½(-5c - 12 + 12 - 2c) = -3½c$

$x = -1½c$; $c = 2/3 \cdot x$; $y = -3½c = -3½ \cdot 2/3x \;\|\; \cdot 3$; $3y = 7x$; $7x - 3y = 0$

---

9. Olkoon keskipisteen y-koordinaatti = y, jolloin $x = 2y + 4$; $K = (2y + 4, y)$

K:n etäisyys x-akselille ja suoralle $3x - 4y - 6 = 0$ on yhtä suuri = säde.

$|y| = \dfrac{|3(2y + 4) - 4y - 6|}{\sqrt{9 + 16}}$; $5|y| = |2y + 6|$; $5y = 2y + 6$ tai $5y = -2y - 6$

$y = 2$ tai $y = -6/7$, jolloin $x = 8$ tai $x = 16/7$

Ympyröiden yhtälöt ovat joko $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$ tai $(x - 16/7)^2 + (y + 6/7)^2 = (6/7)^2$

---

10. Ostettakoon karviaispensaita x kpl ja herukkapensaita y kpl

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 26$, $20x + 50y \leq 1000 \Leftrightarrow 2x + 5y \leq 100$

Reunasuorista muodostuu koordinaatistoon nelikulmio, jonka järjet ovat $O = (0,0)$, $A = (26,0)$, $B = (0,20)$

C: $\begin{cases} 2x + 5y = 100 \;\|\; \cdot(-1) \\ x + y = 26 \quad \| \cdot 5 \end{cases}$; $3x = 30$; $x = 10$. Täten $C = (10,16)$

Tuottofunktio $T = ax + 1½ay$ saa suurimman arvonsa jossakin nurkkapisteessä

$T(O) = 0$, $T(A) = 26a$; $T(B) = 30a$ ja $T(C) = 10a + 1½a \cdot 16 = 34a$, joka suurin

V: Ostetaan 10 karviaismarjataintа ja 16 herukkatainta.

99.1.1. Ympyrän keskipiste on $(–1, 3)$ ja säde $\sqrt{5}$. Määritä ympyrän yhtälö.

99.1.2. Määritä suorien $2x – 5y + 3 = 0$ ja $x – 3y – 7 = 0$ leikkauspisteen kautta kulkevista suorista se, joka on kohtisuorassa suoraa $4x + y = 0$ vastaan.

99.1.3. Ratkaise yhtälöryhmä $\begin{cases} 2x + 3y + z = 14 \\ 3x - 2y - 2z = 13 \\ 4x - 5y - z = -6 \end{cases}$

99.1.4. Määritä ympyrän $x^2 + y^2 – 2x + 4y = 20$ pisteeseen $(4, 2)$ piirretyn tangentin yhtälö.

99.1.5. Määritä tasojen $2x – 4y + 4z = 7$ ja $6x + 2y + 3z = 2$ välinen kulma.

99.1.6. Määritä yhtälö suoralle, jonka pisteet ovat yhtä etäällä suorista $x – 2y + 2 = 0$ ja $2x + y – 3 = 0$.

99.1.7. Osoita, että suorat $L_1 : x = –1 + 4t$, $y = 3 + t$, $z = 1$, $t \in R$.
$L_2 : x = –13 + 12s$, $y = 1 + 6s$, $z = 2 + 3s$, $s \in R$ leikkaavat toisensa.

99.1.8. Millä vakion k arvoilla yhtälön $y = kx^2 – x^2 + 10x + 7 – 2k$ kuvaaja on paraabeli ? Osoita, että tasossa on kaksi kiinteää pistettä, joiden kautta jokainen näistä paraabeleista kulkee. Mitkä nämä pisteet ovat?

99.1.9. Laske pisteen $P(–2, 1, 1)$ etäisyys suorasta $x = 3 – t$, $y = t$, $z = 1 + 2t$, $t \in R$.

99.1.10. Kanoja ruokitaan kahdella rehulla A ja B, joiden kokoomus on
A: valkuaista 20%, rasvaa 10% ja hiilihydraatteja 70%
B: valkuaista 30%, rasvaa 20% ja hiilihydraatteja 50%.
Päivittäinen annos x g rehua A ja y g rehua B täyttää seuraavat vaatimukset
1) Annos painaa korkeintaan 100 g 2) Annos sisältää vähintään 12 g valkuaista
3) Annos sisältää korkeintaan 16 g rasvaa 4) Vitamiinitarpeen tyydyttämiseksi annos sisältää vähintään 30 g rehua A. Rehu A maksaa 0,8 p/g ja rehu B 0,4 p/g.
Määritä x ja y siten, että päivittäinen annos tulee mahdollisimman halvaksi. Mikä on tämä päiväannoksen minimihinta?

1. K = (-1, 3) ja säde $\sqrt{5}$. Yhtälö $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$

2. $\begin{cases} 2x - 5y + 3 = 0 \;\|\cdot 1 \\ x - 3y - 7 = 0 \|\cdot(-2) \end{cases}$; $y + 17 = 0$; $y = -17$; $x + 51 - 7 = 0$; $x = -44$ P = (-44,-17)
$y = -4x \rightarrow k = -4$; $k_N = 1/4$. Yhtälö $y + 17 = \frac{1}{4}(x + 44) \;\|\cdot 4$; $4y + 68 = x + 44$; $x - 4y = 24$

3. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 14 \|\cdot 1 \;\|\cdot 2 \\ 3x - 2y - 2z = 13 \| \;\;\|\cdot 1 \\ 4x - 5y - z = -6 \;\;\|\cdot 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 6x - 2y = 8 \;\;\|\cdot 2 \\ 7x + 4y = 41 \|\cdot 1 \end{cases}$; $19x = 57$; $x = 3$
$7\cdot 3 + 4y = 41$; $4y = 20$; $y = 5$; $2\cdot 3 + 3\cdot 5 + z = 14$; $z = -7$ V: $x = 3$; $y = 5$; $z = -7$

4. $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$; $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 20 + 1 + 4$; $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$
K = (1,-2) .Piste (4,2) kehällä? : $(4 - 1)^2 + (2 + 2)^2 = 9 + 16 = 25$ ON!
$k_r = (2 + 2)/(4 - 1) = 4/3 \rightarrow k_N = -3/4$ Yhtälö: $y - 2 = -\frac{3}{4}(x - 4) \;\|\cdot 4$; $4y - 8 = -3x + 12$; $3x + 4y = 20$

5. $2x - 4y + 4z = 7$; $\mathbf{n}_1 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ja $6x + 2y + 3z = 2$; $\mathbf{n}_2 = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
$\cos\alpha = \dfrac{|\mathbf{n_1}\cdot\mathbf{n_2}|}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \dfrac{|12 - 8 + 12|}{\sqrt{4 + 16 + 16}\sqrt{36 + 4 + 9}} = \dfrac{16}{6\cdot 7}$; $\alpha = 67{,}6°$

6. Etäisyydet suorille $x - 2y + 2 = 0$ ja $2x + y - 3 = 0$ samat. Olkoon P(x,y) mieliv. piste
$\dfrac{|x - 2y + 2|}{\sqrt{1 + 4}} = \dfrac{|2x + y - 3|}{\sqrt{4 + 1}} \;\|\cdot\sqrt{5}$; $|x - 2y + 2| = |2x + y - 3|$
$x - 2y + 2 = 2x + y - 3$ TAI $x - 2y + 2 = -2x - y + 3$; $x + 3y = 5$ TAI $3x - y = 1$

7. $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 3 + t \\ z = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -13 + 12s \\ y = 1 + 6s \\ z = 2 + 3s \end{cases}$ Valitaan kaksi alinta yhtälöä, joista ratkaistaan t ja s
$\begin{cases} 3 + t = 1 + 6s \\ 1 = 2 + 3s \end{cases}$; $s = -1/3$; $3 + t = 1 - 2$; $t = -4$. Näillä t ja s on pisteillä samat y ja z.
Jos samoilla t ja s saadaan myös samat x-koordinaatit, niin suorilla on yhteinen piste.
$x = -1 + 4t = -1 + 4\cdot(-4) = -17$; $x = -13 + 12\cdot(-1/3) = -13 - 4 = -17$.
Joten, kun $t = -4$ ja $s = -1/3$ saadaan kummankin suoran pisteeksi (-17,-1,1)

8. $y = kx^2 - x^2 + 10x + 7 - 2k$; $y = (k - 1)x^2 + 10x + 7 - 2k$. Paraabeli, jos $k - 1 \neq 0$; $k \neq 1$
Valitaan parvesta kaksi paraabelia, ja lasketaan niiden leikkauspiste.
$\begin{cases} k = 0 \\ k = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} y = -x^2 + 10x + 7 \\ y = x^2 + 10x + 3 \end{cases}$; $x^2 + 10x + 3 = -x^2 + 10x + 7$; $2x^2 = 4$; $x^2 = 2$; $x = \pm\sqrt{2}$
$y = 2 + 10(\pm\sqrt{2}) + 3 = 5 \pm 10\sqrt{2}$. Näiden yhteiset pisteet ovat $(\pm\sqrt{2}, 5 \pm 10\sqrt{2})$
Osoitetaan, että nämä ovat parven jokaisella paraabelilla k:n arvosta riippumatta.
$5 \pm 10\sqrt{2} = (k - 1)(\pm\sqrt{2})^2 + 10(\pm\sqrt{2}) + 7 - 2k$; $5 \pm 10\sqrt{2} = (k - 1)\cdot 2 \pm 10\sqrt{2} + 7 - 2k$
$5 \pm 10\sqrt{2} = 2k - 2 \pm 10\sqrt{2} + 7 - 2k$; $0 = 0$, joten yhtälö on tosi kaikilla k:n arvoilla.

9. Olkoon suoran lähin piste A = (3 - t,t,1 + 2t) P = (-2,1,1). Suoran $\mathbf{s} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
$\mathbf{AP} = (3 - t + 2)\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j} + (1 + 2t - 1)\mathbf{k} = (5 - t)\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$; $\mathbf{AP} \perp \mathbf{s} \Leftrightarrow \mathbf{AP}\cdot\mathbf{s} = 0$
$t - 5 + t - 1 + 4t = 0$; $6t = 6$; $t = 1$. Piste A = (2,1,3)
Etäisyys = AP = $\sqrt{(2 + 2)^2 + (1 - 1)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{16 + 0 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

10. Ehdot rehumäärille x ja y saadaan annetuista ehdoista
1) $x + y \leq 100$ 2) $0{,}2x + 0{,}3y \geq 12$ 3) $0{,}1x + 0{,}2y \geq 16$ ja 4) $x \geq 30$ sekä 5) $y \geq 0$
Epäyhtälöiden määräämän viisikulmion nurkkapisteet ovat
P: $\begin{cases} 2x + 3y = 120 \\ y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 60 \\ y = 0 \end{cases}$ Q: $\begin{cases} x + y = 100 \\ y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 100 \\ y = 0 \end{cases}$ R: $\begin{cases} x + y = 100 \\ x + 2y = 160 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 40 \\ y = 60 \end{cases}$
S: $\begin{cases} x = 30 \\ x + 2y = 160 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 30 \\ y = 65 \end{cases}$ T: $\begin{cases} x = 30 \\ 2x + 3y = 120 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 30 \\ y = 20 \end{cases}$
Menot $M(x,y) = 0{,}8x + 0{,}4y$ on pienin jossakin nurkkapisteessä
$M(P) = 0{,}8\cdot 60 + 0{,}4\cdot 0 = 48$; $M(Q) = 0{,}8\cdot 100 + 0{,}4\cdot 0 = 80$; $M(R) = 0{,}8\cdot 40 + 0{,}4\cdot 60 = 56$
$M(S) = 0{,}8\cdot 30 + 0{,}4\cdot 65 = 50$; $M(T) = 0{,}8\cdot 30 + 0{,}4\cdot 20 = 32$, joka on pienin
V: Rehua A 30 g ja rehua B 20 g, jolloin kustannukset 32 penniä

99.2.1. Laske pisteiden A(2,-4) ja B(7,6) kautta kulkevan suoran yhtälö ja suuntakulma.

99.2.2. Määritä ympyrän $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$ keskipiste ja säde.

99.2.3. Ratkaise yhtälöryhmä $\begin{cases} 3x + 2y - z = 12 \\ 4x - 3y + 2z = 10 \\ 2x + 3y + 4z = 38 \end{cases}$

99.2.4. Määritä suorien $3x + 4y – 6 = 0$ ja $3x + 4y + 15 = 0$ välinen etäisyys.

99.2.5. Laske suorien **OP** = (2**i** + 3**j**) + t(3**i** + 2**j** - 6**k**) ja $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ välisen kulman suuruus.

99.2.6. Millä vakion a arvoilla suorat $(1 + a)x – ay = 2a$ ja $2ax + (a – 2)y = 3$ ovat yhden-suuntaiset ja mikä on tällöin niiden kulmakerroin ?

99.2.7. Osoita, että suoraparven $(a + 1)x – y – 2a – 1 = 0$ kaikki suorat kulkevat saman pisteen kautta. Millä a:n arvoilla parven suorat ovat sekä nousevia että leikkaavat negatiivisen y-akselin?

99.2.8. Kuinka suuressa kulmassa pisteestä (–2, 3) ympyrälle $x^2 + y^2 – 6x + 2y + 6 = 0$ piirretyt tangentit leikkaavat toisensa ?

99.2.9. Määritä a siten, että paraabeli $y = x^2 – ax$ leikkaa suorasta $3x = 4y$ jänteen, jonka pituus on 2½.

99.2.10. Laske pisteen (1, 0, –3) etäisyys tasosta $2x – 3y + 6z = –1$.

1. $k_{AB} = \dfrac{6 + 4}{7 - 2} = 2$; $y + 4 = 2(x - 2)$; $y + 4 = 2x - 4$; $y = 2x - 8$; $\tan \alpha = 2$; $\alpha = 63{,}4°$

2. $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$; $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = 8 + 1 + 16$; $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$ K = (-1,4) , r = 5

3. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 12 & \| \cdot 2 \\ 4x - 3y + 2z = 10 & \| \cdot 1 \ \| \cdot 2 \\ 2x + 3y + 4z = 38 & \qquad \| \cdot (-1) \end{cases}$; $\begin{cases} 10x + y = 34 & \| \cdot 9 \\ 6x - 9y = - 18 & \| \cdot 1 \end{cases}$; $96x = 288$; $x = 3$

$30 + y = 34$; $y = 4$; $12 - 12 + 2z = 10$; $z = 5$ V: x = 3 ; y = 4 ; z = 5

4. Yhdensuuntaiset suorat ovat joka kohdassa yhtä kaukana toisistaan, joten voidaan laskea ensimmäisen suoran minkä tahansa pisteen etäisyys toiselle suoralle.
Suoralla $3x + 4y - 6 = 0$ on esim. piste (2,0), jonka etäisyys suoralle $3x + 4y + 15 = 0$ on
$d = \dfrac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{21}{5} = 4{,}2$

5. Suorien suuntavektorit ovat $\mathbf{s}_1 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ ja $\mathbf{s}_2 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, jolloin niiden välinen kulma saadaan $\cos \alpha = \dfrac{|\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2|}{|\mathbf{s}_1| \cdot |\mathbf{s}_2|} = \dfrac{3 + 4 + 12}{\sqrt{9 + 4 + 36} \cdot \sqrt{1 + 4 + 4}} = \dfrac{19}{7 \cdot 3}$; $\alpha = 25{,}2°$

6. $L_1 : (1 + a)x - ay = 2a \Leftrightarrow y = \dfrac{1 + a}{a} x - 2$; $k_1 = \dfrac{1 + a}{a}$

$L_2 : 2ax + (a - 2)y = 3 \Leftrightarrow y = - \dfrac{2a}{a - 2} x + \dfrac{3}{a - 2}$; $k_2 = \dfrac{2a}{2 - a}$

$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$ (tai $L_1 \parallel L_2 \parallel$ y-akseli) ; $\dfrac{1 + a}{a} = \dfrac{2a}{2 - a}$; $2a^2 = 2 - a + 2a - a^2$; $3a^2 - a - 2 = 0$

$a = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6} = \dfrac{1 \pm 5}{6}$; a = 1 tai a = -2/3 ; a = 1 : k = 2 ; a = -2/3 : k = - ½

7. Valitaan parvesta kaksi suoraa ja lasketaan niiden leikkauspiste
$\begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x - y = 1 \\ - y = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$, joten nämä kaksi suoraa leikkaavat pisteessä (2,1)
Sijoitetaan (2,1) suoraparven yhtälöön ; $(a + 1) \cdot 2 - 1 - 2a - 1 = 2a + 2 - 1 - 2a - 1 = 0$, joten piste (2,1) on kaikilla parven suorilla a:n arvosta riippumatta.
Suora $y = (a + 1)x + (-2a - 1)$ on nouseva, jos $k > 0$; $a + 1 > 0$; $a > -1$
ja leikkaa negatiivisen y-akselin, jos $-2a - 1 < 0$; $a > - ½$ eli kaikkiaan $a > -½$

8. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$; $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = -6 + 9 + 1$; $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$
K = (3,1) , r = 2. Olkoon A tangentin sivuamispiste. Kolmio AKP on suorakulmainen
$KP = \sqrt{(3 + 2)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{41}$. $\sin \alpha = 2 / \sqrt{41}$; $\alpha = 25{,}9°$; $2\alpha = 51{,}8°$

9. $\begin{cases} y = x^2 - ax \\ 3x = 4y \end{cases}$; $3x = 4(x^2 - ax)$ ||:x ; $x = 0$; $y = 0$ tai $3 = 4x - 4a$; $x = a + \frac{3}{4}$; $y = \frac{3}{4}(a + \frac{3}{4})$
pituus = $2\frac{1}{2}$; $\sqrt{(a + \frac{3}{4})^2 + 9/16(a + \frac{3}{4})^2} = 5/2$; $\sqrt{25/16(a + \frac{3}{4})^2} = 5/2$ || $(\ )^2$
$25/16(a + \frac{3}{4})^2 = 25/4$; $(a + \frac{3}{4})2 = 4$; $a + \frac{3}{4} = \pm 2$; $a = \frac{1}{4}$ tai $a = 1\frac{1}{4}$ tai $a = -2\frac{3}{4}$

10. $2x - 3y + 6z = -1$; $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$; normaalin yhtälö pisteen (1,0,-3) kautta $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 - 3t \\ z = -3 + 6t \end{cases}$
normaalin ja tason leikkauspisteessä $2(1 + 2t) - 3(- 3t) + 6(-3 + 6t) = -1$
$2 + 4t + 9t - 18 + 36t = -1$; $49t = 15$; $t = 15/49$
$d = \sqrt{(1 + 2t - 1)^2 + (-3t - 0)^2 + (-3 + 6t + 3)^2} = \sqrt{4t^2 + 9t^2 + 36t^2} = 7t = 7 \cdot 15/49 = 15/7 = 2\ 1/7$.

00.1.1. Määritä luvun a arvo, kun piste (2,3) on käyrällä $a(3x + a) = 2(y^2 - 1)$

00.1.2. Suora L kulkee pisteen (5,1) kautta ja on kohtisuorassa suoraa $6x + 7y - 19 = 0$ vastaan. Määritä suoran L yhtälö.

00.1.3. Pisteen P(1,2,3) projektio x-akselilla on A ja projektio yz-tasolla B.
Laske a) piste A b) piste B c) janan AB pituus.

00.1.4. Missä pisteiden (1,-2) ja (3,4) kautta kulkeva suora leikkaa suoran $2x + 5y = 26$?

00.1.5. Mitkä suoran $3x + 4y = 5$ suuntaisista suorista ovat pisteestä (2,1) etäisyydellä 3?

00.1.6. Määritä k siten, että suorien $y = kx + 1$ ja $2x + 3y + 4 = 0$ välinen kulma on 45°.

00.1.7. Huonekalutehdas valmistaa keinutuoleja ja nojatuoleja. Keinutuolin osia sahataan 3 tuntia ja viimeistellään 2 tuntia. Nojatuolin osia sahataan 2 tuntia ja viimeistellään 4 tuntia. Keinutuolista saadaan voittoa 140 euroa ja nojatuolista 120 euroa. Saha on käytössä 12 tuntia ja viimeistelyyn on käytettävissä 16 tuntia vuorokaudessa. Miten tuotanto kannattaa järjestää, jotta voitto olisi mahdollisimman suuri?

1. Kun (2,3) on käyrällä $a(3x + a) = 2(y^2 - 1)$, niin sen koordinaatit toteuttavat yhtälön
$a(3 \cdot 2 + a) = 2(3^2 - 1)$; $a^2 + 6a - 16 = 0$; $a = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2}$; $a = 2$ tai $a = -8$

2. $6x + 7y - 19 = 0$; $7y = - 6x + 19$; $y = -6/7 \cdot x + 19/7$, jonka $k = - 6/7$, täten $k_N = 7/6$
$y - 1 = 7/6 \cdot (x - 5)$ || $\cdot 6$; $6y - 6 = 7x - 35$; $-7x + 6y = -29$ || $\cdot (-1)$; $7x - 6y = 29$

3. P(1,2,3). a) x-akselilla $y = z = 0$, joten A = (1,0,0) b) yz-tasolla $x = 0$, joten B = (0,2,3)
c) $AB = \sqrt{(1 - 0)^2 + (0 - 2)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$

4. Kulmakerroin: $k = \frac{4 + 2}{3 - 1} = 3$. Yhtälö: $y + 2 = 3(x - 1)$; $y + 2 = 3x - 3$; $y = 3x - 5$
LP : $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ 2x + 5y = 26 \end{cases}$; $2x + 5(3x - 5) = 26$; $2x + 15x - 25 = 26$; $17x = 51$; $x = 3$
$y = 3 \cdot 3 - 5 = 4$ V: LP = (3,4)

5. Suoran $3x + 4y = 5$ suuntaisten suorien parvi on $3x + 4y + c = 0$
Määritetään c tiedosta "pisteen (2,1) etäisyys suoralle = 3"
$\frac{|3 \cdot 2 + 4 + c|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$ ||$\cdot 5$; $|c + 10| = 15$; $c + 10 = \pm 15$; $c = 5$ tai $c = -25$ V: $3x + 4y + 5 = 0$ tai $3x + 4y = 25$

6. $L_1 : y = kx + 1$; $k_1 = k$; $L_2 : 2x + 3y + 4 = 0$; $3y = - 2x - 4$; $y = -2/3 \cdot x - 4/3$; $k_2 = -2/3$
$\tan 45° = \frac{| k + 2/3 |}{| 1 - 2k/3 |}$; $|1 - 2k/3| = |k + 2/3|$; $1 - 2k/3 = k + 2/3$ || $\cdot 3$ tai $1 - 2k/3 = -k - 2/3$ || $\cdot 3$
$3 - 2k = 3k + 2$ tai $3 - 2k = - 3k - 2$; $5k = 1$ tai $k = - 5$; $k = \frac{1}{5}$ tai $k = - 5$

7. Olkoon keinutuolien lukumäärä = x ja nojatuolien lukumäärä = y
Ehtoja x:lle ja y:lle : $x \geq 0$, $y \geq 0$, sahauksesta $3x + 2y \leq 12$ ja viimeistelystä $2x + 4y \leq 16$
Epäyhtälöt rajaavat tasoon nelikulmion, jonka kärjet ovat
A : $\begin{cases} y = 0 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$ B : $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ C : $\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$ ja origo (0,0)
Tuotto tehtäessä x keinutuolia ja y nojatuolia on $T(x,y) = 140x + 120y$
Tuotto on suurimmillaan jossakin alueen kärkipisteessä, joten lasketaan arvo kärjissä
O: $T(0,0) = 0$ A: $T(4,0) = 140 \cdot 4 + 120 \cdot 0 = 560$ B: $T(2,3) = 140 \cdot 2 + 120 \cdot 3 = 640$
C: $T(0,4) = 140 \cdot 0 + 120 \cdot 4 = 480$, joten tuotto suurin, kun $x = 2$ ja $y = 3$
V: Tehdään 2 keinutuolia ja 3 nojatuolia päivässä.

00.2.1. Suoran yhtälö on $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$. a) Anna kolme pistettä suoralta.
b) Onko piste (11,14,-17) kyseisellä suoralla?

00.2.2. Mikä on ympyrän $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$ keskipiste ja säde? Onko piste P(4,-3) ympyrän sisä- vai ulkopuolella? Mikä on pisteen P etäisyys ympyrän lähimpään pisteeseen?

00.2.3. Laske tasojen $2x - 3y - 4z = 4$, $3x - 2y + z = 4$ ja $x + y + z = 4$ yhteinen piste.

00.2.4. Mitkä ovat suoran $2x + y + 3 = 0$ ja paraabelin $y = x^2 - 3x - 9$ yhteiset pisteet? Onko suora paraabelin sekantti, tangentti vai ulkopuolinen suora?

00.2.5. Missä pisteessä suora **OP** = (2 - t)**i** + (3 + 2t)**j** + t**k** leikkaa tason $2x + 3y - 6z = 25$. Mikä on suoran ja tason välinen kulma?

00.2.6. Määritä ympyrän $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$ ne tangentit, jotka ovat suoran $y = 3x$ suuntaiset.

00.2.7. Taso leikkaa x-akselin, kun x = 2, y-akselin, kun y = 3 ja z akselin, kun z = 4. Laske tämän tason ja xy-tason välinen kulma.

---

1. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$ a) t = 0 $P_1 = (3,2,1)$ t = 1 $P_2 = (1,-1,5)$ t = -1 $P_3 = (5,5,-3)$
b) Piste (11,14,-17) on suoralla, jos löytyy sellainen t, jolla suoran yhtälöstä saadaan kaikki koordinaatit.
11 = 3 - 2t ; 2t = -8 ; t = -4 JA 14 = 2 - 3t ; 3t = -12 ; t = -4 JA -17 = 1 + 4t ; 4t = -18 ; t = $-4\tfrac{1}{2} \neq -4$ V: Ei ole

---

2. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$; $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 9 + 16 - 21$; $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$
K = (3,-4) r = 2. PK = $\sqrt{(4 - 3)^2 + (-4 + 3)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} < r$, joten piste on sisäpuolella.
Etäisyys lähimpään pisteeseen on säde - etäisyys keskipisteestä = $2 - \sqrt{2}$

---

3. $\begin{cases} 2x - 3y - 4z = 4 \ \| \cdot 1 \\ 3x - 2y + z = 4 \ \| \cdot 4 \ \| \cdot 1 \\ x + y + z = 4 \ \| \quad \| \cdot (-1) \end{cases}$; $\begin{cases} 14x - 11y = 20 \ \| \cdot 1 \\ 2x - 3y = 0 \ \| \cdot -7 \end{cases}$; 10y = 20 ; y = 2
2x - 6 = 0 ; 2x = 6 ; x = 3 ; 3 + 2 + z = 4 ; z = -1 . V : P = (3,2,-1)

---

4. LP : $\begin{cases} 2x + y + 3 = 0 \\ y = x^2 - 3x - 9 \end{cases}$; $\begin{cases} y = -2x - 3 \\ y = x^2 - 3x - 9 \end{cases}$; $x^2 - 3x - 9 = -2x - 3$; $x^2 - x - 6 = 0$
$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$; $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ jolloin $y_1 = -2 \cdot 3 - 3 = -9$; $y_2 = -2 \cdot (-2) - 3 = 1$
V: Pisteet ovat (3,-9) ja (-2,1) joten suora on paraabelin sekantti.

---

5. **OP** = (2 - t)**i** + (3 + 2t)**j** + t**k** suoran yhtälö parametrimuodossa $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = t \end{cases}$
LP : Piste (2 - t, 3 + 2t, t) on tasolla 2x + 3y - 6z = 25 ; 2(2 - t) + 3(3 + 2t) - 6t = 25
4 - 2t + 9 + 6t - 6t = 25 ; -2t = 12 ; t = -6 P = (8,-9,-6)
Suoran suuntavektori **s** = -**i** + 2**j** + **k** ; tason normaalivektori **n** = 2**i** + 3**j** - 6**k**
$\cos(\mathbf{s},\mathbf{n}) = \frac{|\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{s}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{|-2 + 6 - 6|}{\sqrt{1 + 4 + 1} \cdot \sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{2}{7\sqrt{6}}$
$\angle(\mathbf{s},\mathbf{n}) = 83{,}3°$, $\angle(s,T) = 90° - 83{,}3° = 6{,}7°$

---

6. Suoran y = 3x suuntaisten suorien parvi on y = 3x + c ⇔ 3x - y + c = 0
Ympyrä $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$; K = (2,3) ja r = $\sqrt{10}$
Parametri c ratkaistaan yhtälöstä : K:n etäisyys suoralle on = säde
$\frac{|3 \cdot 2 - 3 + c|}{\sqrt{9 + 1}} = \sqrt{10} \ \| \cdot \sqrt{10}$; |c + 3| = 10 ; c + 3 = ± 10 ; c = 7 tai c = -13
V: y = 3x + 7 tai y = 3x - 13

---

7. Olkoon tason yhtälö muotoa ax + by + cz = d
x-akselin LP on (2,0,0) 2a = d ; a = d/2 ; vastaavasti 3b = d ; b = d/3 ja 4c = d ; d = d/4
d/2 · x + d/3 · y + d/4 · z = d || ·12 ; 6dx + 4 dy + 3dy = 12d || : d ; 6x + 4y + 3z = 12
$\mathbf{n}_1 = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $\mathbf{n}_2 = \mathbf{k}$
$\cos(\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2) = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{|0 + 0 + 3|}{\sqrt{36 + 16 + 9} \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{61}}$; $\alpha = 67{,}4°$

00.3.1. Mikä on suoran $5x + 2y = 7$ kulmakerroin ja kuinka suuren kulman se muodostaa x-akselin kanssa?

00.3.2. Suora L kulkee pisteen (-5,1) kautta ja on suoran $3x + 4y = 1$ suuntainen. Määritä L:n yhtälö.

00.3.3. Millä a:n arvoilla yhtälö $x^2 + y^2 - 6x + 2y + a = 0$ esittää ympyrää?

00.3.4. Ympyrän keskipiste on (4,1) ja säde 5. Osoita, että piste (7,-3) on ympyrän kehällä. Määritä tähän pisteeseen piirretyn tangentin yhtälö.

00.3.5. Laske suorien $4x + 7y = 8$ ja $y = 8x + 9$ välisten kulmien puolittajien yhtälöt.

00.3.6. Suora kulkee pisteiden (1,2,3) ja (-1,0,4) kautta. Missä pisteessä se leikkaa xy-tason?

00.3.7. Maasta heitetty kivi lentää likimain paraabelin muotoisen kaaren, käy 15 m korkeudessa ja osuisi maahan 50 m päässä heittokohdasta, jollei 35 m päässä olisi korkea pystysuora seinä. Millä korkeudella kivi osuu seinään? Maan pinta oletetaan tasaiseksi ja heitto alkavaksi maan pinnan tasalta.

00.3.8. Taso T leikkaa xy-tason pitkin suoraa $x + 3y = 12$ ja yz-tason pitkin suoraa $4y - z = 16$. Mikä on T:n ja xz-tason leikkaussuoran yhtälö.

00.3.9. Muodosta pisteiden (0,1) ja (1,0) kautta kulkevien ympyröiden parvi.

00.3.10. Pellon lannoitukseen olisi käytettävä 36 kg fosfaatteja ja 30 kg nitraatteja. Yhdessä kilossa lannoitetta A on 0,2 kg fosfaatteja ja 0,1 kg nitraatteja sekä lannoitteessa B 0,2 kg fosfaatteja ja 0,3 kg nitraatteja. Lannoite A maksaa 2 mk/kg ja lannoite B 4 mk/kg. Millaisen sekoituksen hän tekee peltoa varten, jotta se olisi mahdollisimman halpa?

---

1. $5x + 2y = 7 \Leftrightarrow 2y = -5x + 7 \Leftrightarrow y = -2\tfrac{1}{2}x + 3\tfrac{1}{2}$; $k = -2\tfrac{1}{2}$; $\tan\alpha = -2\tfrac{1}{2}$; $\alpha = -68{,}2°$

---

2. $L \parallel 3x + 4y = 1$; L on $3x + 4y = c$. $P = (-5,1) \in L$; $3\cdot(-5) + 4\cdot 1 = c$; $-11 = c$; L : $3x + 4y = -11$

---

3. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + a = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 9 + 1 - a \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 10 - a$, jonka kuvaaja on ympyrä, kun $10 - a > 0 \Leftrightarrow a < 10$

---

4. $K = (4,1)$ ja $P = (7, -3)$; $KP = \sqrt{(4 - 7)^2 + (1 + 3)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 = r \Rightarrow$ P on kehällä

$k_r = \dfrac{1 + 3}{4 - 7} = -\dfrac{4}{3} \Rightarrow k_T = \tfrac{3}{4}$ Tangentin yhtälö on $y + 3 = \tfrac{3}{4}(x - 7) \;\|\cdot 4$; $4y + 12 = 3x - 21$; $3x - 4y = 33$

---

5. Olkoon piste P(x,y) suorien $4x + 7y = 8$ ja $y = 8x + 9$ välisen kulman puolittajalla.

P:stä on yhtä pitkä matka kummallekin suoralle. $\dfrac{|4x + 7y - 8|}{\sqrt{16 + 49}} = \dfrac{|8x - y + 9|}{\sqrt{64 + 1}} \;\|\cdot\sqrt{65}$

$|4x + 7y - 8| = |8x - y + 9|$; $4x + 7y - 8 = 8x - y + 9$ tai $4x + 7y - 8 = -8x + y - 9$

$4x - 8y + 17 = 0$ tai $12x + 6y + 1 = 0$

---

6. Olkoon $A = (1,2,3)$ ja $B = (-1,0,4)$. Suoran suuntavektori $\mathbf{s} = \mathbf{AB} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Suoran yhtälö $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$. xy-tasolla $z = 0$; $3 + t = 0$; $t = -3$; $P = \begin{cases} x = 1 - 2\cdot(-3) \\ y = 2 - 2\cdot(-3) \\ z = 3 + (-3) \end{cases} = (7,8,0)$

---

7. Olkoon y-akseli paraabelin huipun kohdalla. Tällöin paraabelilla on pisteet (-25,0) ja (0,15) sekä paraabelin yhtälö muotoa $y = ax^2 + c$

$(0,15) \in$ Par ; $15 = c$ ja $(-25,0) \in$ Par ; $0 = 625a + 15$; $c = -15/625 = -3/125$

Kivi osuu seinään, kun $x = 10$; $y = -3/125 \cdot 10^2 + 15 = -2{,}4 + 15 = 12{,}6$ V: 12,6 m korkeudella

---

8. Olkoon tason yhtälö $ax + by + cz = d$. se leikkaa xy-tason pitkin suoraa $ax + by = d$ ja yz-tason pitkin suoraa $by + cz = d$

$\begin{cases} ax + by = d \text{ sama kuin } x + 3y = 12 \\ by + cz = d \text{ sama kuin } 4y - z = 16 \end{cases}$; $\begin{cases} a:1 = b:3 = d:12 \\ b:4 = c:(-1) = d:16 \end{cases}$ Valitaan $d = 48$ (12:n ja 16:n yhteinen jaettava)

$a = 4$ ja $b = 12$ sekä $b = 12$ ja $c = -3$. Kun b:tkin samoja yhtälö on $4x + 12y - 3z = 48$

---

9. Olkoon ympyrän yhtälö muotoa $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

$\begin{cases} (1,0) \text{ on ympyrällä} \\ (0,1) \text{ on ympyrällä} \end{cases}$; $\begin{cases} 1 + 0 + A + C = 0 \\ 0 + 1 + B + C = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} A = -C - 1 \\ B = -C - 1 \end{cases}$

$x^2 + y^2 - (C + 1)x - (C + 1)y + C = 0$

Ehto sille, että tulee ympyrä on että neliöön täydentämisen jälkeen oikea puoli on > 0

$x^2 - (C + 1)x + \tfrac{1}{4}(C + 1)^2 + y^2 - (C + 1)y + \tfrac{1}{4}(C + 1)^2 = \tfrac{1}{2}(C + 1)^2 - C$

$\tfrac{1}{2}(C + 1)^2 - C > 0 \;\|\cdot 2$; $C^2 + 2C + 1 - 2C > 0$; $C^2 + 1 > 0$, joten kuvaaja on ympyrä kaikilla C:n arvoilla.

V: $x^2 + y^2 - (C + 1)x - (C + 1)y + C = 0$, $C \in R$

10. Ostettakoon x kg lannoitetta A ja y kg lannoitetta B. Ehtoja määrille $x \ge 0$, $y \ge 0$,
fosfaateista $0{,}2x + 0{,}2y \ge 36$ eli $x + y \ge 180$ ja nitraateista $0{,}1x + 0{,}3y \ge 30$ eli $x + 3y \ge 300$.
Reunapisteet Y : $\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 180 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \\ y = 180 \end{cases}$, K : $\begin{cases} x + y = 180 \\ x + 3y = 300 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 120 \\ 60 \end{cases}$ ja S : $\begin{cases} y = 0 \\ x + 3y = 300 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 300 \\ y = 0 \end{cases}$
Minimoitava lauseke on kustannuksien lauseke $K(x,y) = 2x + 4y$
Arvo Y:ssä on $2·0 + 4·180 = 720$, K:ssa $2·120 + 4·60 = 480$ ja S:ssä $2·300 + 4·0 = 600$.
Joten kustannukset ovat pienimmillään K:ssa V: 120 kg lannoitetta A ja 60 kg lannoitetta B

01.1.1. Määritä paraabelin $y = - x^2 + 2x + 2$ ja suoran $2x - y - 2 = 0$ yhteiset pisteet.

01.1.2. Määritä paraabelin yhtälö, kun paraabelin akselina on *y*-akseli ja paraabeli kulkee pisteiden (0,2) ja (7, -4) kautta.

01.1.3. Ympyrän halkaisijan päätepisteet ovat (-3, 4) ja (5, -2). Määritä ympyrän yhtälö.

01.1.4. Laske suorien $2x - 6y - 1 = 0$ ja $- x + 3y + 3 = 0$ etäisyys.

01.1.5. Määritä ympyrän $x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$ pisteeseen (-2, 1) piirretyn tangentin yhtälö.

01.1.6. Ratkaise yhtälöryhmä $\begin{cases} x - 3y - 2 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ y + 2z + 7 = 0 \end{cases}$. Mikä on ratkaisun geometrinen tulkinta?

01.1.7. Määritä vakiot a ja b siten, että suora $ax + 2y + b = 0$ kulkee pisteen (-1, 2) kautta ja on suoran $3x + y - 2 = 0$ suuntainen.

01.1.8. Suora s_1 kulkee pisteen (0, 1, 1) kautta ja on vektorin $3\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ suuntainen. Suora s_2 kulkee pisteen (2, 1, 4) kautta ja on vektorin $3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ suuntainen. Leikkaavatko suorat toisensa? Jos, niin missä?

01.1.9. Kauppias myy täytettyjä sämpylöitä kahdella erilaisella täytteellä: juustotäytteellä tai kinkkutäytteellä. Juustosämpylöitä voidaan valmistaa enintään 20 kappaletta. Kinkkusämpylään tarvikkeet löytyvät korkeintaan 30 kappaleen valmistamiseen. Yhteensä sämpylöitä voidaan kuitenkin valmistaa enintään 40 kappaletta. Juustosämpylöiden myynnistä kauppias saa voittoa 1,3 euroa sämpylältä ja kinkkusämpylöistä 0,8 euroa sämpylältä. Kuinka monta juusto- ja kinkkusämpylää kauppiaan olisi myytävä, jotta voitto olisi mahdollisimman suuri?

01.1.10. Määritä sellaisen käyrän yhtälö, jonka jokaisen pisteen etäisyys pisteestä (0, 2) on kaksinkertainen verrattuna pisteen etäisyyteen origosta. Mikä käyrä on kyseessä?

1. $\begin{cases} y = - x^2 + 2x + 2 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases}$; $2x - (- x^2 + 2x + 2) - 2 = 0$; $x^2 = 4$; $x = 2$; $y = 2$ ja $x = -2$; $y = -6$ V: (2,2) ja (-2,-6)

2. Akseli on y-akseli ⇒ yhtälö on muotoa $y = ax^2 + b$ (0,2) paraabelilla ⇒ $2 = 0 + b$; $b = 2$
(7,-4) paraabelilla ⇒ $-4 = a·49 + 2$; $a = -6/49$ V: $y = -6/49 · x^2 + 2$

3. K: $x = ½(-3 + 5) = 1$; $y = ½(4 - 2) = 1$ ⇒ K = (1,1)
Halkaisija = $\sqrt{(-3 - 5)^2 +(4 + 2)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10 \Rightarrow r = 5$ Yhtälö : $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$

4. Suorat ovat yhdensuuntaiset, sillä 2 : (-1) = -6 : 3, joten suorien etäisyys on sama joka kohdassa.
Valitaan jälkimmäiseltä suoralta piste x = 0 ; y = -1

$$d = \frac{|2·0 - 6·(-1) - 1|}{\sqrt{2^2 + 6^2}} = \frac{5}{\sqrt{40}} = \frac{5}{2\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{2·10} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

5. $x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$; $x^2 + y^2 - 4y + 4 = 1 + 4$; $(x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 5 \Rightarrow K = (0,2)$
$k_r = \frac{1 - 2}{-2 - 0} = ½ \Rightarrow k_T = -2$ Tangentin yhtälö : $y - 1 = -2(x + 2)$; $y - 1 = -2x - 4$; $y = -2x - 3$

6. $\begin{cases} x - 3y - 2 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ y + 2z + 7 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x + y - z = 0 \;\|\; ·2 \\ y + 2z = - 7 \;\|\; ·1 \end{cases}$; $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases}$; $5x = -5$; $x = -1$
$-1 - 3y = 2$; $-3y = 3$; $y = -1$; $-1 + 2z + 7 = 0$; $2z = -6$; $z = -3$ Tasot leikkaavat pisteessä (-1,-1,-3)

7. $ax + 2y + b = 0 \Leftrightarrow y = -½ax - ½b$; $3x + y - 2 = 0$; $y = -3x + 2$ Suorat yhdensuuntaisia ⇒ $-½a = -3$; $a = 6$
Piste (-1,2) suoralla ⇒ $6·(-1) + 2·2 + b = 0$; $b = 2$ V: a = 6 , b = 2

8. $s_1: \begin{cases} x = 0 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$; $s_2: \begin{cases} x = 2 + 3s \\ y = 1 + s \\ z = 4 + 3s \end{cases}$; $\begin{cases} 3t = 2 + 3s \\ 1 - t = 1 + s \\ 1 - t = 4 + 3s \end{cases}$

Valitaan 2 alinta yhtälöä: $\begin{cases} 1 - t = 1 + s \\ 1 - t = 4 + 3s \end{cases}$; 1 + s = 4 + 3s ; 2s = -3 ; s = -1½ ; t = 1½

Toteutuuko ylin yhtälö? 3 · 1½ = 2 + 3 · (-1½), joka on epätosi. V: Suorat eivät leikkaa.

9. Olkoon juustosämpylöitä x kpl ja kinkkusämpylöitä y kpl
$0 \le x \le 20$; $0 \le y \le 30$; $x + y \le 40$, joiden muodostama tasoalue on viisikulmio, joka kärjet
O = (0,0) , A = (20,0) , B = (20,20) , C = (10,30) ja D = (0,30)
Voittofunktio V(x,y) = 1,3x + 0,8y
A: V(20,0) = 26 € , B: V(20,20) = 42 € , C : V(10,30) = 37 € ja D : V(0,30) = 24 €
V: 20 juustosämpylää ja 20 kinkkusämpylää

10. Olkoon P(x,y) mielivaltainen kysytyn käyrän piste, A = (0,2) ja O = (0,0).
$PA = 2 \cdot PO$; $\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 2)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ || $(\ )^2$; $x^2 + (y - 2)^2 = 4(x^2 + y^2)$
$4x^2 + 4y^2 - x^2 - y^2 + 4y - 4 = 0$; $3x^2 + 3y^2 + 4y - 4 = 0$ || : 3 ; $x^2 + y^2 + 4/3 \cdot y - 4/3 = 0$
$x^2 + y^2 + 4/3 \cdot y + 4/9 = 4/3 + 4/9$; $(x - 0)^2 + (y + 2/3)^2 = 16/9$, joka on ympyrä, jonka keskipiste on (0,2/3) ja säde = 4/3

01.2.1. Määritä suoralle 2x - 4y - 7 = 0 pisteestä (-2, 3) piirretyn normaalin yhtälö.

01.2.2. Määritä ylöspäin aukeavan paraabelin yhtälö, kun huippu on origossa ja paraabeli kulkee pisteen (6,12) kautta.

01.2.3. Laske kulma, jonka suorat y + 2x - 5 = 0 ja 3x - 4y = -7 muodostavat.

01.2.4. Laske pisteen (-1, 2) etäisyys pisteiden (5, 2) ja (-2, 9) kautta kulkevasta suorasta.

01.2.5. Paraabelilla $y = -x^2 + 2x + 1$ on jänne, joka on suoralla y = 4x - 7. Määritä jänteen päätepisteet.

01.2.6. Määritä lausekkeen 2x + y suurin arvo, kun $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 3$ ja $4x + y \le 8$.

01.2.7. Millä vakion a arvoilla yhtälön $x^2 - 2x + y^2 + 4y + a = 0$ kuvaaja on ympyrä? Millä a:n arvolla piste (1, 3) on ympyrän kehällä? Mikä on tällöin ympyrän säde?

01.2.8. Mikä on tasojen 2x + y + 4z = 5 ja x - y + 2z = 4 leikkaussuora?

01.2.9. Suora l kulkee pisteen (2,-1,3) kautta ja on vektorin **s** = 4**i** + 2**j** - 3**k** suuntainen. Missä pisteessä suora l leikkaa tason x - 2y - 3z = 13? Mikä on suoran ja tason välinen kulma?

01.2.10. Janan päätepiste on käyrällä $y = 2x^2$ ja toinen päätepiste (0, 2). Millä käyrällä on janan keskipiste?

1. Suora: 2x - 4y - 7 = 0. Normaalien parvi: 4x + 2y + C = 0 ; Piste (-2,3) on normaalilla
$4 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + C = 0$; C = 2. 4x + 2y + 2 = 0 ⇔ 2x + y + 1 = 0

2. Paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2$. Piste (6,12) on paraabelilla. $12 = a \cdot 6^2$; a = 1/3 V: $y = x^2/3$

3. y + 2x - 5 = 0 ⇔ y = -2x + 5 ; $k_1 = -2$. 3x - 4y = -7 ⇔ y = ¾x + 1¾ ; k_2 = ¾
$\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right| = \left|\frac{-2 - 3/4}{1 + (-2)\cdot 3/4}\right| = \left|\frac{-11}{-2}\right| = 5½$; $\alpha = 79{,}7°$

4. $k = \frac{9 - 2}{-2 - 5} = -1$. Suoran yhtälö: y - 2 = -1(x - 5) ; y -2 = -x + 5 ; x + y - 7 = 0
$d = \frac{|-1 + 2 - 7|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

5. LP: $\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 1 \\ y = 4x - 7 \end{cases}$; $4x - 7 = -x^2 + 2x + 1$; $x^2 + 2x - 8 = 0$; $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$
x = 2 tai x = -4 V: (2,1) ja (-4,-23)

6. Alueen reunat : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 0 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = 3 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5/3 \\ y = 4/3 \end{cases}$
$2x + y|_{(0,0)} = 0 + 0 = 0$; $2x + y|_{(0,3)} = 0 + 3 = 3$; $2x + y|_{(2,0)} = 4 + 0 = 4$
$2x + y|_{(5/3,4/3)} = 10/3 + 4/3 = 4\ 2/3$, joka on suurin

7. $x^2 - 2x + y^2 + 4y + a = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 1 + 4 - a \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5 - a$
Ympyrä, kun 5 - a > 0 ⇔ a < 5. (1,3) on kehällä, kun $(1 - 1)^2 + (3 + 2)^2 = 5 - a$; a = -20
$r^2 = 5 - a = 5 + 20 = 25$; r = 5

8. $\begin{cases} 2x + y + 4z = 5 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = -4z + 5 \\ x - y = -2z + 4 \end{cases}$; 3x = -6z + 9 ; x = -2z + 3 ; -4z + 6 + y = -4z + 5 ; y = -1 V: $\begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$
9. l : P = (2,-1,3) ja **s** = 4**i** + 2**j** - 3**k** ; $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$ LP: 2 + 4t - 2(-1 + 2t) -3(3 - 3t) = 13 2 + 4t + 2 - 4t - 9 + 9t = 13 ; 9t = 18 ; t = 2 ⇒ P = (10,3,-3) Taso : x - 2y - 3z = 13 ; **n** = **i** - 2**j** - 3**k** ; $\alpha = \angle(\mathbf{n},\mathbf{s})$ $\cos\alpha = \dfrac{\lvert \mathbf{n}\cdot\mathbf{s} \rvert}{\lvert\mathbf{n}\rvert\cdot\lvert\mathbf{s}\rvert} = \dfrac{\lvert 4 - 4 + 9 \rvert}{\sqrt{16+4+9}\sqrt{1+4+9}} = \dfrac{9}{\sqrt{29\cdot 14}} \approx 0{,}447$; α = 63,5°. Suoran ja tason välinen kulma = 90° - 63,5° = 26,5°
10. Olkoon janan toinen päätepiste paraabelin piste $(t,2t^2)$. Toinen päätepiste on (0,2) KP: x = ½(t + 0) = ½t ⇒ t = 2x, $y = ½(2t^2 + 2) = t^2 + 1 = (2x)^2 + 1 = 4x^2 + 1$ V: $y = 4x^2 + 1$

02.1.1. Määritä suorien y = 4x + 1 ja x - y = 2 leikkauspiste ja laske suorien välinen kulma.

02.1.2. Laske ympyrän $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$ ala.

02.1.3. Laske tasojen 2x + 3y + z = -5 , x - y - z = 8 ja 3x - 2y - z = 24 leikkauspiste

02.1.4. Laske pisteen (-1, 0). etäisyys suorasta 2x + y - 4 = 0. Onko tämä suora ympyrän $(x + 1)^2 + y^2 = \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}}\right)^2$ tangentti?

02.1.5. Mikä on sen paraabelin yhtälö, joka kulkee origon kautta, jonka akseli on suoralla y = 1 ja huippu suoralla x = 2?

02.1.6. Osoita, että suoraparven y + 1 = (t + 1)x - 2t, missä parametri t saa kaikki reaaliarvot, kaikki suorat kulkevat saman pisteen kautta. Määritä se parven suora, joka muodostaa *x*-akselin kanssa 45° kulman.

02.1.7. Millä vakion a arvoilla yhtälö $x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 4a^2 = 0$ esittää ympyrää? Määritä parametri a siten, että ympyrän keskipiste on suoralla x + y + 1 = 0.

02.1.8. Suora L_1 kulkee pisteen (1, 2, 3) kautta ja suoran suuntavektori on $\mathbf{s}_1 = -5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$. Suora L_2 kulkee pisteen (-4, -1, 5) kautta ja on vektorin $\mathbf{s}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ suuntainen. Mikä on suorien leikkauspiste?

02.1.9. Taso leikkaa koordinaattiakselit pisteissä (1,0,0) (0,2,0) ja (0,0,3). Mikä on tason yhtälö?

02.1.10. Puuseppä valmistaa tuoleja ja pöytiä. Yhden tuolin valmistus vaatii 10 työtuntia ja yhden pöydän valmistus 15 työtuntia. Jalopuulevyä kuluu yhteen tuoliin 50 cm ja yhteen pöytään 200 cm. Käytettävissä on 450 työtuntia ja 40 m jalopuulevyä. Mikä on optimaalinen tuotanto-ohjelma kun tuolin tuotto on 45 euroa ja pöydän 80 euroa kappaleelta?

1. LP: $\begin{cases} y = 4x + 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ x-(4x + 1) = 2 ; x - 4x - 1 = 2 ; -3x = 3 ; x = -1 ; y = 4·(-1) + 1 = -3 V:(-1,-3) $\tan\alpha = \dfrac{\lvert k_2 - k_1 \rvert}{\lvert 1 + k_1k_2 \rvert} = \dfrac{\lvert 4 - 1 \rvert}{\lvert 1 + 4\cdot 1 \rvert} = \dfrac{3}{5}$; α = 31°
2. $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 9 + 4 - 8 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$ $r^2 = 5$, joten $A = \pi r^2 = \pi\cdot 5 = 5\pi$
3. $\begin{cases} 2x + 3y + z = -5 \parallel \cdot 1 \parallel \cdot 1 \\ x - y - z = 8 \parallel \cdot 1 \\ 3x - 2y - z = 24 \quad \parallel \cdot 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \parallel \cdot(-1) \\ 5x + y = 19 \parallel \cdot 2 \end{cases}$ 7x = 35 ; x = 5 ; 5·5 + y = 19 ; y = -6 2·5 + 3·(-6) + z = -5 ; 10 - 18 + z = -5 ; z = 3 V: (5,-6,3)
4. Pisteen (-1, 0). etäisyys suorasta 2x + y - 4 = 0 on $d = \dfrac{\lvert 2\cdot(-1) + 0 - 4 \rvert}{\sqrt{4 + 1}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$ Piste (-1,0) on ympyrän $(x + 1)^2 + y^2 = \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}}\right)^2$ keskipiste ja sen etäisyys suorasta = säde. Täten suora on ympyrän tangentti.

5. Akseli y =1 on x-akselin suuntainen $\Rightarrow$ paraabeli aukeaa oikealle tai vasemmalle.
Yhtälö on muotoa $x - x_0 = a(y - y_0)^2$ Huippu on suoralla x = 2. Siis $x_0 = 2$ ja $y_0 = 1$
$x - 2 = a(y - 1)^2$. Paraabeli kulkee origon kautta, $0 - 2 = a(0 - 1)^2 \Leftrightarrow -2 = a$
Yhtälö $x - 2 = -2(y - 1)^2 \Leftrightarrow x - 2 = -2(y^2 - 2y + 1) \Leftrightarrow x - 2 = -2y^2 + 4y - 2 \Leftrightarrow x = -2y^2 + 4y$

6. Valitaan parvesta y + 1 = (t + 1)x - 2t kaksi suoraa ja lasketaan niiden leikkauspiste.
$\begin{cases} t = 0 \\ t = -1 \end{cases} ; \begin{cases} y + 1 = x \\ y + 1 = 2 \end{cases} ; \begin{cases} 2 = x \\ y = 1 \end{cases}$ Nämä kaksi suoraa leikkaa pisteessä (2,1)
Näytetään, että kaikki parven suorat kulkevat pisteen (2,1) kautta sijoittamalla yhtälöön
$1+1 = (t + 1)\cdot 2 - 2t \Leftrightarrow 2 = 2t + 2 - 2t \Leftrightarrow 0 = 0$, joten piste on suoralla t:n arvosta riippumatta
Kun suora muodostaa x-akselin kanssa 45° kulman, on kulmakerroin k = 1 tai k = -1
$(t + 1) = 1 \Leftrightarrow t = 0$; suora on $y + 1 = (0 + 1)x - 2\cdot 0$; $y = x - 1$
$(t + 1) = -1 \Leftrightarrow t = -2$; suora on $y + 1 = (-2 + 1)x - 2\cdot(-2)$; $y = -x + 3$

7. $x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 4a^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2ax + a^2 + y^2 - 4ay + 4a^2 = a^2 + 4a^2 - 4a^2$
$\Leftrightarrow (x + a)^2 + (y - 2a)^2 = a^2$, Kuvaaja on ympyrä, kun $a^2 > 0$ eli $a \neq 0$
Keskipiste on (-a,2a) on suoralla x + y + 1 = 0 kun -a + 2a + 1 = 0 ; a = -1

8. $L_1 : \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - 7t \end{cases}$ $L_2 : \begin{cases} x = -4 + s \\ y = -1 - s \\ z = 5 + 2s \end{cases}$ Suorat leikkaavat, jos niiden koordinaatit samat
$\begin{cases} 1 - 5t = -4 + s \\ 2 + 3t = -1 - s \\ 3 - 7t = 5 + 2s \end{cases}$ Ratkaistaan kahdesta ylimmästä s ja t ja tarkistetaan onko kolmas tosi
3 - 2t = -5 ; 2t = 8 ; t = 4 ; 1 - 20 = -4 + s ; s = -15
Tällöin kolmas yhtälö : $3 - 7\cdot 4 = 5 + 2\cdot(-15) \Leftrightarrow 3 - 28 = 5 - 30 \Leftrightarrow -25 = -25$ toteutuu
Piste on $x = 1 - 5\cdot 4 = -19$; $y = 2 + 3\cdot 4 = 14$ ja $z = 3 - 7\cdot 4 = -25$ V: P = (-19,14,-25)

9. Olkoon tason yhtälö muotoa ax + by + cz = d. sijoitetaan pisteet yhtälöön
$\begin{cases} a + 0 + 0 = d \\ 0 + 2b + 0 = d \\ 0 + 0 + 3c = d \end{cases} ; \begin{cases} a = d \\ b = ½d \\ c = 1/3\cdot d \end{cases}$ $dx + ½dy + 1/3\cdot dz = d \;||\; \cdot 6/d$; $6x + 3y + 2z = 6$

10. Tehdään tuoleja x kpl ja pöytiä y kpl
Ehto työtunneista $10x + 15y \leq 450$, ehto levyistä $0,5x + 2y \leq 40$; reaalisuus $x \geq 0$, $y \geq 0$
Reunapisteet O(0,0) , A: $\begin{cases} y = 0 \\ 10x + 15y = 450 \end{cases} ; \begin{cases} y = 0 \\ x = 45 \end{cases}$ B: $\begin{cases} 10x + 15y = 450 \\ 0,5x + 2y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 14 \end{cases}$ C : $\begin{cases} x = 0 \\ 0.5x + 2y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x = 0 \\ y = 20 \end{cases}$ Optimoitavana on tuotto F(x,y) = 45x + 80y
F(45,0) = 2025 ; F(24,14) = 2200 on suurin; F(0,20) = 1600 V: 24 tuolia ja 14 pöytää

02.2.1. Suora, jonka kulmakerroin on ½, kulkee pisteen (1,1) kautta.
Missä pisteessä suora leikkaa a) *y* -akselin, b) *x* -akselin?

02.2.2. Olkoon annettu suorat y = 1 - 2px ja y = 2x + 1. Määritä luku p siten, että suorat ovat
a) yhdensuuntaiset, b) kohtisuorassa toisiaan vastaan.

02.2.3. Janan päätepisteet ovat (1,3) ja (5, -1). Mikä on janan keskinormaalin yhtälö?

02.2.4. Laske ympyrän $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$ keskipiste ja säde. Miten kaukana keskipiste on suorasta 4x - 3y + 1 = 0? Miten pitkä on ympyrän ja suoran lyhin etäisyys?

02.2.5. Osoita, että pisteestä $(0,\sqrt{2})$ ympyrälle $x^2 + y^2 = 1$ piirretyt tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Määritä sen viivan yhtälö, jonka pisteistä ympyrä näkyy suorassa kulmassa.

02.2.6. Missä pisteessä suora **OP** = (2**i** + 3**j** - 4**k**) + t(**i** - 2**j** - **k**) leikkaa tason 3x - 2y + z = 8?
Mikä on suoran ja tason välinen kulma

02.2.7. Paraabeli, jonka akseli on *y* -akselin suuntainen, kulkee pisteiden (3, -9), (4, -3) sekä (5, -1) kautta.
Määritä paraabelin yhtälö.

02.2.8. Mikä on tasojen 2x - y - 3z = 4 ja 3x + 2y - z = 6 leikkaussuora?

02.2.9. Hoitokoti Karvakuonot tarjoaa koirille täysihoidon hintaan 10€ ja kissoille 5€ vuorokausi. Kotiin mahtuu korkeintaan 28 eläintä. Kissojen hoitoon kuluu 10 ja koirien 30 minuuttia. Hoitotunteja on käytettävissä 10.
Montako kissaa ja koiraa kannattaa ottaa, jotta päivätuotto olisi suurin?

02.2.10. Ympyrän keskipiste on (5,3) ja säde 4. Missä suhteessa suora x + y = 4 jakaa ympyrän kehän?

1. Suoran yhtälö: $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$; $y - 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. y-akselin leikkauspiste: $(0, \frac{1}{2})$ x-akselin leikkauspiste: $y = 0$; $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$; $\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}$; $x = -1$; $(-1, 0)$
2. $k_1 = -2p$; $k_2 = 2$; a) $L_1 \parallel L_2$; $k_1 = k_2$: $-2p = 2$; $p = -1$; $L_1 \perp L_2$: $k_1 \cdot k_2 = -1$; $-2p \cdot 2 = -1$; $-4p = -1$; $p = \frac{1}{4}$
3. Keskipiste: $x = \frac{1}{2}(1 + 5) = 3$; $y = \frac{1}{2}(3 - 1) = 1$; $k_L = \frac{-1 - 3}{5 - 1} = -1$; $k_N = 1$ Normaalin yhtälö: $y - 1 = 1 \cdot (x - 3)$; $y = x - 2$
4. $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 16$; $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4^2$; $K = (3, -4)$ $r = 4$ etäisyys suoralle: $d = \frac{\lvert 4 \cdot 3 - 3 \cdot (-4) + 1 \rvert}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{25}{5} = 5$; Lyhin etäisyys = $d - r = 5 - 4 = 1$
5. Ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ keskipiste on $K = (0, 0)$ ja säde $r = 1$. Pisteen $P = (0, \sqrt{2}\,)$ etäisyys ympyrän keskipisteestä = $\sqrt{2}$. Piirretään kolmio KPT, missä T on tangentin sivuamispiste. Kolmio on suorakulmainen, kun tangentti on kohtisuorassa sädettä vastaan. Olkoon $\angle KPT = \alpha$; $\sin \alpha = 1 : \sqrt{2}$. $\alpha = 45°$ Tangenttikulman kärjen ja ympyrän keskipisteen yhdysjana puolittaa tangenttikulman. Siis tangenttikulma on $2 \cdot 45° = 90°$. Muut pisteet, josta ympyrä näkyy suorassa kulmassa on ympyräviiva, jolla on sama keskipiste ja säde on sama kuin PK ; $x^2 + y^2 = 2$
6. Suoran yhtälö parametrimuodossa $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = -4 - t \end{cases}$ Piste on tasolla kun $3(2 + t) - 2(3 - 2t) + (-4 - t) = 8$; $6 + 3t - 6 + 4t - 4 - t = 8$; $6t = 12$; $t = 2$ Piste on $x = 2 + 2 = 4$, $y = 3 - 4 = -1$; $z = -4 - 2 = -6$ $P = (4, -1, -6)$ Suoran $\mathbf{s} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Tason $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\cos \alpha = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}}{\lvert\mathbf{s}\rvert \cdot \lvert\mathbf{n}\rvert} = \frac{3 + 4 - 1}{\sqrt{1 + 4 + 1}\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{6 \cdot 14}}$; $\alpha = 49{,}1°$. $\angle(L,T) = 90° - 49{,}1° = 40{,}9°$
7. Paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$ $\begin{cases} (3, -9) \in P \\ (4, -3) \in P \\ (5, -1) \in P \end{cases}$; $\begin{cases} 9a + 3b + c = -9 \\ 16a + 4b + c = -3 \\ 25a + 5b + c = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} 7a + b = 6 \\ 9a + b = 2 \end{cases}$; $2a = -4$; $a = -2$; $-14 + b = 6$; $b = 20$ $-18 + 60 + c = -9$; $c = -51$. Paraabelin yhtälö on $y = -2x^2 + 20x - 51$
8. $\begin{cases} 2x - y = 3z + 4 \parallel \cdot 2 \\ 3x + 2y = z + 6 \parallel \cdot 1 \end{cases}$; $7x = 7z + 14$; $x = z + 2$; $2(z + 2) - y = 3z + 4$; $2z + 4 - y = 3z + 4$; $y = -z$; Leikkaussuoran yhtälö on $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$
9. Olkoon kissoja x ja koiria y. $x \geq 0$, $y \geq 0$, tilaehto: $x + y \leq 28$; aikaehto: $10x + 30y \leq 600$ Ehdot rajoittavat alueen O = origo ; $A = \begin{cases} y = 0 \\ x + y = 28 \end{cases} = (28, 0)$; $B = \begin{cases} x + y = 28 \\ x + 3y = 60 \end{cases}$; $2y = 32$; $y = 16$; $x + 16 = 28$; $x = 12$ AB = (12, 16) $C = \begin{cases} x = 0 \\ x + 3y = 60 \end{cases} = (0, 20)$ Kohdefunktio saadaan tuloista $T(x,y) = 5x + 10y$; $T(0,0) = 0$ $T(28,0) = 140$; $T(12,16) = 60 + 160 = 220$; $T(0,20) = 200$. Joten tulot suurimmat kun kissoja on 12 ja koiria 16.
10. Keskipisteen etäisyys suoralle on $d = \frac{\lvert 5 + 3 - 4 \rvert}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ Olkoon keskuskulma α. Piirretään keskipisteestä suoralle normaali. Syntyneestä suorakulmaisesta kolmiosta saadaan: $\cos \frac{1}{2}\alpha = 2\sqrt{2} : 4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}\alpha = 45°$; $\alpha = 90°$ Suora erottaa ympyrästä kaaret 90° ja 270°, joten kehä jakaantuu suhteessa 90:270 = 1:3