PITKÄ

MATEMATIIKKA

KURSSI MA4

TRIGONOMETRIA JA VEKTORIT

Markku Männikkö
2003

Sisällysluettelo:

MA4. Trigonometria ja vektorit.

1. Kolmion ratkaiseminen

1.1 Suorakulmaisen kolmion trigonometriaa

1. Trigonometriset funktiot suorakulmaisessa kolmiossa
Sini, kosini, tangentti, kotangentti, sekantti ja kosekantti ovat kulman funktioita. Niiden arvo on kulman suuruudesta riippuvia yksikäsitteisiä lukuja, sillä jos kulma on tietty ja lisäksi kolmiossa on suora kulma, niin kaikki tällaiset kolmiot ovat yhdenmuotoisia ja näin ollen niiden sivujen suhteet ovat samoja

2. Terävän kulman sini
sin α = kulman vastainen kateetti : hypotenuusa = a : c

3. Terävän kulman kosini
cos α = kulman viereinen kateetti : hypotenuusa = b : c

4. Terävän kulman tangentti
tan α = kulman vastainen kateetti : viereinen kateetti = a : b

1.1.1. Suorakulmaisen kolmion sivut ovat 3, 4 ja 5. Laske pienimmän kulman sini, kosini ja tangentti.
2. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 5 ja 12. Laske keskimmäisen kulman sini, kosini ja tangentti.
3. Tasakylkisen kolmion kanta on 6 ja kylki 5. Laske kantakulman sini ja huippukulman puolittajan kosini.
4. Ympyrän säde on 10 ja jänne 12. Laske jännettä vastaavan kehäkulman tangentti.

5. Suorakulmaisen kolmion ratkaiseminen
A. Piirrä kolmio. Jollei se ole valmiiksi suorakulmainen, tee apupiirros, jotta syntyisi suorakulmainen kolmio.
B. Merkitse siihen annetut osat ja kysytty osa käyttäen kirjainta x tms.
C. Mieti millaisia sivuja (vast., vier. kateetti, hypotenuusa) annetut tai kysytyt sivut ovat annetulle kulmalle
D. Päättele mikä trigonometrinen funktio näistä muodostuu ja kirjoita sitä vastaava yhtälö.
E. Ratkaise saadusta yhtälöstä kysytty osa.

5. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on 7,2 cm ja pienin kulma 41°. Laske kateetit.
6. Suorakulmaisen kolmion kateetti on 4,7 m ja vastainen kulma 63°. Laske hypotenuusa.
7. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 12 ja 17. Laske terävät kulmat.
8. Ympyrän säde on 25 cm. Laske 80° keskuskulmaa vastaavan jänteen pituus.
9. Laske kolmion kanta, kun korkeus on 12 cm ja kantakulmat 54° ja 32°.
10. Tasakylkisen kolmion kanta on 8 ja kantakulma 72°. Laske kolmion kylki ja ala.
11. Laske ympyrän, jonka säde on 5 cm, sisään piirretyn säännöllisen 10-kulmion ala.
12. Suoran tien eräästä kohdasta näkyy torni 30° kulkusuunnasta oikealle ja 200 m tietä pitkin lähemmäksi tultaessa 45° kulmassa. Kuinka kaukana tiestä torni on?
13. Torni näkyy 10° korkeuskulmassa ja 300 m lähempää 20° kulmassa. Mikä on tornin korkeus?
14. Puolisuunnikkaassa on kolme 5 m pitkää sivua ja neljäs sivu on 8 m. Laske puolisuunnikkaan kulmat.
15. Tasaiselle maalle itä-länsi suuntaan rakennetun 8,40 m leveän ja 5,80 m korkean harjakattoisen talon pohjoispuolella 9,5 m päässä seinästä on lipputanko. Auringon paistaessa suoraan etelästä talon harjan varjo osuu lipputankoon 2,15 m korkeudella. Missä kulmassa auringon säteet kohtaavat maan pinnan?
16. Missä kulmassa maapallo (säde 6366 km) näkyy 1650 km korkeudella olevasta satelliitista?
17. Kolmion ala on 210 cm^2. Sen kaksi korkeusjanaa ovat 15,0 cm ja 16,6 cm. Laske näiden korkeusjanojen välinen kulma.
18. Kiilahihna kulkee kahden väkipyörän yli. Väkipyörien halkaisijat ovat 200 mm ja 400 mm sekä niiden keskipisteiden välimatka 1200 mm. Laske kiilahihnan pituus.

6. Tietyn kulman trigonometristen funktioiden arvot, kun yhden arvo tunnetaan
A. Piirrä suorakulmainen kolmio ja laita siihen ko. kulma
B. Merkitse annetusta trigonometrisestä funktiosta sen määritelmän mukaisesti kahden sivun pituudet.
C. Laske Pythagoraan teoreemalla kolmannen sivun pituus.
D. Anna näin saadun kolmion sivujen suhteina kysyttyjen trigonometristen funktioiden arvot.

19. Määritä sin x ja tan x tarkka arvo, kun cos x = ¼ ja kulma on terävä.
20. a) Määritä sin x ja cos x, kun tan x = ¾.b) Terävälle kulmalle x on sin x = 5/13. Määritä cos x ja tan x.
21. Terävän kulma tangentti on 2. Laske kulman sini ja kosini.

7. Harvinaisemmat trigonometriset funktiot
kotangentti : cot α = kulman viereinen kateetti : vastainen kateetti = b : a
sekantti ; sec α = hypotenuusa : viereinen kateetti = c : b
kosekantti : cosec α = hypotenuusa : vastainen kateetti = c : a

22. Kolmion sivut ovat 6, 8 ja 10. Mitä on pienimmän kulman α cot α, sec α ja cosec α?

8. Harvinaisien ja tavallisten trigonometristen funktioiden välinen yhteys
cot α = 1 / tan α eli kulman kotangentin arvo on saman kulman tangentin arvon käänteisluku
sec α = 1 / cos α eli kulman sekantin arvo on saman kulman kosinin arvon käänteisluku
cosec α = 1 / sin α eli kulman kosekantin arvo on saman kulman sinin arvon käänteisluku

23. Määritä a) cot 21° b) sec 34° c) cosec 54°.

1.2. Vinokulmaisen kolmion ratkaiseminen

1. Sinilause
$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ ts. kolmion kahden sivun suhde = vastaisten kulmien sinien suhde

2. Sinilause ja kolmion ympäripiirretyn ympyrän säde
$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$, missä R on kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde

1.2.1. Kolmion sivu on 8 cm ja vastainen kulma 60°. Mikä on kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde?
2. Laske kolmion sivu, kun vastainen kulma on 72° ja kolmion ympäri piirretyn ympyrän halkaisija on 8,6 cm.
3. Tiedetään, että $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = k$. Todista, että tällöin $\frac{a+b+c}{x+y+z} = k$
4. Laske kolmion sivut, kun sen piiri on 47 cm sekä kaksi kulmaa ovat 43° ja 59°. (vihje: ed. tehtävä)

3. Millaisessa tilanteessa sinilausetta voi käyttää
Kun kolmiosta tunnetaan kolme osaa sivuista ja kulmista ja niissä on yksi ” sivu vastainen kulma ” pari

4. Sinilauseen käyttö vinokulmaiseen kolmion ratkaisemisessa
Piirretään kolmio, tehdään yhtälö sinilauseesta ja ratkaistaan haluttu sivu tai kulma

5. Kolmion kaksi kulmaa ovat 48° ja 61° sekä edellisen vastainen sivu 7,5 cm. Ratkaise kolmion osat.
6. Kolmion kaksi sivua ovat 8 ja 13 sekä edellisen vastainen kulma a) 40° b) 30°. Laske kolmion kulmat.
7. Kolmion yksi sivu on 28,3 cm ja sen viereiset kulmat 49,5° ja 71,6°. Laske kolmion muut osat.
8. Kolmion kaksi kulmaa ovat 35° ja 47° sekä pienin sivu 5,1 cm. Laske kolmion pisin sivu.
9. Säännöllisessä 7-kulmiossa on kahden pituisia lävistäjiä. Laske pitempi, kun lyhempi on 8,3 cm.
10. Järven eri puolilla olevien kohteiden P ja Q etäisyyden selvittämiseksi mitattiin matka PR = 235 m sekä kulmat QPR = 106,4° ja QRP = 67,8°. Laske etäisyys PQ.
11. Laiva kulkee suoraan vauhdilla 22,5 km/h. Eräänä hetkenä majakka näkyy kulkusuunnasta 42,8° etuoikealla. Tasan 20 minuuttia myöhemmin kulma on 63,2°. Mikä on tällöin laivan etäisyys majakasta?
12. Linkkimaston korkeuden selvittämiseksi mitattiin pisteistä A ja B maston korkeuskulmiksi 13,1° ja 17,2°. A ja B ovat samalla vaakatasolla ja maston kanssa samalla pystytasolla sekä niiden välinen etäisyys on 200 m. Laske maston korkeus.

5. Pinta-ala kahdesta sivusta ja niiden välisestä kulmasta
A = ½ · b · c · sin α , eli puolet kolmion kahden sivun ja niiden välisen kulman sinin tulosta.

13. Kolmion kulma on 118° sekä viereiset sivut 36,9 cm ja 25,3 cm. Laske kolmion ala.
14. Kolmion kaksi sivua ovat 6 ja 8 sekä ala 12. Laske näiden sivujen välinen kulma.
15. Suunnikkaan kaksi sivua ovat 4 ja 5. Laske suunnikkaan ala, kun yksi kulma on 67°.
16. Ympyrän säde on 1. Laske sisään piirretyn säännöllisen 1000-kulmion ala. Vertaa ympyrän alaan = π.

6. Kosinilause
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$, HUOM ! Kulma γ on sivujen a ja b välinen kulma ⇔ sivun c vastainen kulma.

7. Millaisessa tilanteessa kosinilausetta voi käyttää
A. kun tunnetaan kaksi sivua ja välinen kulma, jolloin saadaan kolmas sivu.
B. kun tunnetaan kolme sivua, jolloin voidaan laskea jokin kulma (suurin jos useampia mahdollisuuksia)

8. Kosinilauseen käyttö vinokulmaisen kolmion ratkaisemisessa Piirretään kolmio, tehdään yhtälö kosinilauseesta ja ratkaistaan haluttu sivu tai kulma.

17. Kolmion kaksi sivua ovat 7 ja 2 sekä näiden välinen kulma 67,2°. Laske kolmas sivu ja muut kulmat.
18. Kolmion sivut ovat 3,5 ja 6. Laske kolmion pienin kulma.
19. Tasakylkisen kolmion huippukulma on 40° ja kylki 2. Laske kyljelle piirretyn keskijanan pituus.
20. Kolmion sivut ovat 5, 6 ja 7. Laske suurimman kulman puolittajan pituus.
21. Suunnikkaan sivut ovat 4 ja 5. Laske toinen lävistäjä, kun toinen lävistäjä on 6.
22. Kiekonheiton tulos mitataan optisesti heittosektorin ulkopuolella olevasta pisteestä A. Siihen asennettu laite mittaa putoamispaikan C etäisyyden AC = 54,51 m ja kulman CAB = 97,2°, missä B on heittoympyrän keskipiste. Laske heiton pituus, kun AB = 35,53 m ja heittoympyrän halkaisija 2,50 m.
23. Kolmion sivut ovat 5, 6 ja 7. Laske keskimmäiselle sivulle tulevan keskijanan pituuden tarkka arvo.
24. Kolmion sivut ovat 2, 3 ja 4. Laske kolmion alan tarkka arvo.
25. Kolmiossa on sivut 10 ja 20 sekä ala 60. Laske kolmannen sivun pituus.

9. Heronin kaava kolmion alan laskemiseksi $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, missä p on kolmion piirin puolikas eli $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$

26. Kolmion sivut ovat 6, 8 ja 10. Laske kolmion ala. Tarkista toisella tavalla.
27. Kolmion sivut ovat 2, 3 ja 4. Laske kolmion ala. Vrt. tehtävä 1.2.24.

2. Kulma reaalilukuna

2.1. Suunnattu kulma ja kehäpiste

1. Suunnattu kulma syntyy, kun puolisuora kiertyy tasossa alkupisteensä ympäri. Kulma on se alue, jonka yli puolisuora kiertyi.

2. Millainen kulma on positiivinen, millainen negatiivinen Jos suunnatun kulman syntyessä puolisuora kiertyy vastapäivään, on kulma positiivinen. Jos kiertyminen tapahtuu myötäpäivään, on kulma negatiivinen.

3. Kulman kehäpiste Kun suunnatun kulman alkukylki on origosta positiivisen x-akselin suuntaan, on kehäpiste se piste, missä suunnatun kulman kääntynyt kylki leikkaa origo keskipisteenä piirretyn yksikköympyrän kehän.

4. Kulmat, joilla sama kehäpiste ovat parven $\alpha + n \cdot 360°$ kulmia, eli ne poikkeavat toisistaan täyden kierroksen monikerran verran.

2.1.1. Millä kulmilla on sama kehäpiste kuin kulmalla, jonka suuruus on 20°?
2. Mikä välillä [0°,360°] oleva kulma omaa saman kehäpisteen kuin a) 1000° b) 1 000 000° kulma?
3. Määritä kulma väliltä $[0,2\pi]$, jolla on sama kehäpiste kuin kulmalla a) 5π b) $-16\frac{1}{2}\pi$ c) 100?

2.2. Kulman suuruus radiaaneina

1. Kulman suuruus radiaaneina on b / r , missä b on kulman kylkien välissä olevan ympyränkaaren pituus ja r kyseisen ympyrän säde. Jos ympyrän säde on 1, on radiaanimäärä sama kuin kulman kylkien välisen kaaren pituus.

2. Radiaanien ja asteiden välinen yhteys $360° = 2\pi$, $180° = \pi$ ja $90° = \frac{1}{2}\pi$ sekä yleisesti $t : \pi = \alpha : 180°$, missä t on sama kuin kulma α on asteina

2.2.1. Paljonko on radiaaneina a) 100° b) 36° c) - 24° d) 1000° e) 36 000° ?
2. Paljonko on asteina a) $\pi/8$ b) 3π c) $2\pi/5$ d) 10 e) $-\frac{3}{4}\pi$ radiaania?

3. Kaaren pituus asteiden avulla $b = \alpha / 360° \cdot 2\pi r$, missä α on kaaren asteluku ja r on ympyrän säde

3. Mikä on 25° kaaren pituus ympyrässä, jonka säde on 30 cm?
4. Ympyrän kaaren pituus on 12 cm ja säde 8 cm. Mikä on kaaren asteluku?
5. Tie kaartuu kuten ympyräviiva. Kaarteen alussa tien suunta on pohjoiseen ja lopussa luoteeseen. Mikä on kaarevuussäde, kun tieosan pituus on 300 m?

4. Kaaren pituus radiaanien avulla
$b = tr$, missä t on kaaren suuruus radiaaneina ja r on ympyrän säde.

6. Ympyrän keskuskulma on 2,34 rad ja säde 5,0 cm. Mikä on keskuskulmaa vastaavan kaaren pituus?
7. Ympyrän kaari on pituudeltaan 4,2 cm ja säde 7,1 cm. Mikä on kaaren suuruus radiaaneina?

5. Sektorin pinta-ala asteiden avulla
$A = \alpha / 360° \cdot \pi r^2$

8. Mikä on sektorin ala, kun ympyrän säde on 32 cm ja keskuskulma 40°?
9. Miten suuri keskuskulma on ympyrästä (r = 5 m) otettava, jotta sektorin ala olisi 10 m^2?

6. Sektorin pinta-ala radiaanien avulla
$A = ½tr^2$

10. Mikä on sektorin ala, kun ympyrän säde on 7,5 cm ja keskuskulma 0,75 rad?
11. Mikä on ympyrän säde, kun sektorin, jonka keskuskulma on 2,1 rad, pinta-ala on 6,8 cm^2?

7. Sektorin pinta-ala kaaren pituuden avulla
$A = ½br$

12. Sektorin kaari on 2,5 cm ja säde 4,0 cm. Mikä on sektorin ala?
13. Sektorin ala on 20 cm^2 ja säde 1,2 dm. Mikä on sektorin kaaren pituus?

3. Trigonometriset funktiot

3.1. Trigonometristen funktioiden määritelmät yksikköympyrässä

1. Kulman sini
on kulman kehäpisteen v-koordinaatti (y-koordinaatti)

2. Kulman kosini
on kulman kehäpisteen u-koordinaatti (x-koordinaatti)

3. Kulman tangentti
on kulman v / u eli v- ja u-koordinaatin suhde. EHTO: $u \neq 0$

4. Trigonometristen funktioiden arvot, kun kehäpiste tunnetaan
saadaan laskettua määritelmien mukaisesti

3.1.1. Määritä sin α, cos α ja tan α, kun kulman α kehäpiste on a) (0,6;0,8) b) (-4/5,-3/5) c) (5/13,-12/13).
2. Määritä muistikolmiota käyttäen sin α, cos α ja tan α, kun α on a) 30° b) 135° c) 210°.

5. Kehäpiste, kun kulma tunnetaan
$u = \cos\alpha$ ja $v = \sin\alpha$ eli kehäpiste on $(\cos\alpha, \sin\alpha)$

3. Mikä on kulman α kehäpiste, kun kulma α on a) 60° b) 240° c) 51°?

6. Sini- ja kosinifunktion arvojoukko
on [-1, 1]

7. Trigonometrisen funktion suurin ja pienin arvo, kun funktiossa siniä tai kosinia.
Yritetään saada sini tai kosini vain yhteen kohtaan.
Tällöin sinin suurin arvo on 1 ja pienin arvo -1. Samoin kosinin.
Jos määrittelyjoukko ei ole koko jakso, täytyy suurin ja pienin arvo päätellä esim. yksikköympyrästä.
Päätellään muista termeistä suurin ja pienin arvo (ja samalla arvojoukko)

4. Mikä on funktion suurin ja pienin arvo, kun a) $f(x) = \sin x + 2$ b) $f(x) = 2\cos x - 3$ c) $f(x) = 4 - 5\sin 2x$?
5. Mikä on funktion a) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + \sin 2x$ b) $f(x) = \sin^2 x + 2\cos^2 x$ suurin arvo?
6. Määritä funktion $f(x) = 3\sin x + 2$ suurin ja pienin arvo, kun kulma $0 \leq x \leq 7\pi / 6$.
7. Laske funktion a) $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$ b) $f(x) = \sin^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x$ suurin ja pienin arvo.

8. Tangenttifunktion määrittelyjoukko
kulma $x \neq ½\pi + n \cdot \pi$ (kulma $\alpha \neq 90° + n \cdot 180°$)

8. Mikä on funktion a) $f(x) = \tan 2x$ b) $f(x) = \tan(3x - \pi)$ c) $f(x) = 1 / \tan(x - ¼\pi)$ määrittelyjoukko?

9. Tangenttifunktion arvojoukko on koko R

10. Trigonometristen funktioiden merkit eri neljänneksissä Sini : $\begin{matrix} + & + \\ - & - \end{matrix}$ Kosini : $\begin{matrix} - & + \\ - & + \end{matrix}$ Tangentti: $\begin{matrix} - & + \\ + & - \end{matrix}$

3.2. Jaksollisuus

1. Trigonometristen funktioiden jaksollisuus Sinin ja kosinin perusjakso on 2π eli 360° . Tangentin perusjakso on π eli 180°

2. Trigonometristen funktioiden perusjakson laskemalla kahdesta jakson päässä olevasta kulmasta Lasketaan se x_1, jolla kulma = 0 ja se x_2, jolla kulma on 2π (tangenttifunktiolla π) . Jakso on $x_2 - x_1$

3.2.1. Mikä on funktion a) f(x) = sin 2x b) f(x) = cos (x/3) c) f(x) = tan (4x - π) perusjakso?

3. Trigonometristen funktioiden perusjakson laskeminen kun kulma on lineaarinen lauseke. Jos f(x) = sin (kx + b) tai f(x) = cos (kx + b), niin perusjakso on 2π / k. Jos f(x) = tan (kx + b), niin perusjakso on π / k.

2. Mikä on funktion a) f(x) = sin 5x b) f(x) = cos (x - ½π) c) f(x) = tan (6x + 7π) perusjakso?

3.3. Tangenttipiste

1. Kulman tangenttipiste on se piste, missä suunnatun kulman loppukylki tai sen jatke leikkaa yksikköympyrälle pisteeseen (1,0) piirretyn tangentin

3.3.1. Mikä on kulman a) 30° b) 45° c) 60° d) 90° e) 120° f) 71,4° tangenttipiste?

4. Trigonometriset kaavat

4.1. Perusyhteyksiä

1. Sinin ja kosinin yhteys cos α = sin (90° - α) eli KOSINI on KOmplementtikulman SINI

4.1.1. Tiedetään, että sin 30° = ½. Mitä on cos 60°

2. Olkoon sin x = a ja cos y = b. Mitä on cos (90° - x) ja sin (90° - y)?

2. Tangentin yhteys saman kulman siniin ja kosiniin tan α = sin α : cos α

3. Sievennä a) sin 40° : cos 40° b) sin x : cos x c) sin (3x + 10°) : cos (3x + 10°) d) sin 40° : sin 50°.

3. Saman kulman sinin ja kosinin yhteys $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

4. Olkoon a) sin x = ½ b) sin x = a. Mitä on cos x, kun x on terävä kulma?

5. Sievennä $(\sin x - \cos x)^2 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$.

4.2. Kulmia, joilla trigonometrisen funktion itseisarvot ovat yhtä suuria.

1. Suplementtikulman sini sin (180° - α) = sin α tai sin (π - x) = sin x

4.2.1. a) Olkoon sin 50° = 0,77. Mitä on sin 130°? b) Olkoon sin 148° = b. Mitä on sin 32°?

2. Olkoon sin α = a ja sin β = b. Määritä sin α + sin β + sin (180° - α) - sin (180° - β).

2. Suplementtikulman kosini cos (180° - α) = - cos α tai cos (π - x) = - cos x

3. a) Olkoon cos 41° = a. Mitä on cos 139°? b) Olkoon cos 156° = - 0,91. Mitä on cos 24°?

4. Olkoon cos x = a ja cos y = b. Määritä cos x + cos y + cos (π - x) - cos (π - y).

3. Suplementtikulman tangentti
$\tan (180° - \alpha) = - \tan \alpha$ tai $\tan (\pi - x) = - \tan x$

5. a) Olkoon $\tan 71° = 2,9$. Mitä on $\tan 109°$? b) Olkoon $\tan \pi/7 = b$. Määritä $\tan 6\pi/7$.

4. Vastakulman sini
$\sin (- x) = - \sin x$

6. a) Olkoon $\sin x = 0,4$. Mitä on $\sin (- x)$? b) Olkoon $\sin (- 20°) = a$. Mitä on $\sin 20°$?
7. Sievennä $\sin 24° + \sin (- 156°)$

5. Vastakulman kosini
$\cos (- x) = \cos x$

8. a) Olkoon $\cos 56° = a$. Mitä on $\cos (- 56°)$? b) Olkoon $\cos (- 35°) = a$. Mitä on $\cos 35°$?
9. Sievennä $\cos 25° + \cos (-25°) + \cos 155° + \cos (-155°)$.

6. Vastakulman tangentti
$\tan (- x) = - \tan x$

10. a) Olkoon $\tan x = 1,5$. Mitä on $\tan (-x)$? b) Olkoon $\tan (-54°) = b$. Mitä on $\tan 54°$?

7. Parillinen funktio
Funktio f on parillinen, jos kaikilla x pätee: $f(-x) = f(x)$ eli funktion arvot vastaluvuilla ovat yhtä suuret

8. Pariton funktio
Funktio f on pariton, jos kaikilla x pätee: $f(-x) = -f(x)$ eli funktion arvot vastaluvuilla ovat vastalukuja

9. Trigonometristen funktioiden parillisuus ja parittomuus
kosini on parillinen, koska $\cos (-x) = \cos x$
sini ja tangentti ovat parittomia, koska $\sin (-x) = - \sin x$ ja $\tan (-x) = - \tan x$

10. $x + \pi$ kulman sini
$\sin (x + \pi) = - \sin x$

11. a) Olkoon $\sin 34° = a$. Mitä on $\sin 214°$. b) Mikä on terävä kulma α, kun $\sin \alpha = - \sin 234°$?
12. Tiedetään, että $\sin 50° = 0,766$. Mikä on α, kun $180° < \alpha < 270°$ ja $\sin \alpha = - 0,766$
13. Olkoon $\sin x = a$. Mitä on $\sin x - \sin (x + \pi) + \sin (\pi - x)$?

11. $x + \pi$ kulman kosini
$\cos (x + \pi) = - \cos x$

14. a) Olkoon $\cos 25° = a$. Mitä on $\cos 205°$? b) Olkoon $\cos 245° = b$. Mitä on $\cos 65°$?
15. Tiedetään, että kun $\cos x = 0,3$, niin $x = 72,5°$. Mikä on α, kun $180° < \alpha < 270°$ ja $\cos \alpha = - 0,3$?
16. Olkoon $\cos x = a$. Mitä on $\cos (\pi + x) + \cos (\pi - x) + \cos x$?

12. $x + \pi$ kulman tangentti
$\tan (x + \pi) = \tan x$

17. a) Olkoon $\tan 61° = a$. Mitä on $\tan 241°$? b) Olkoon $\tan 199° = b$. Mitä on $\tan 19°$
18. Tiedetään, että $\tan 58° = 1,6$. Mikä on α, kun $\tan \alpha = 1,6$ ja $180° < \alpha < 270°$?

13. Eri neljännesten kulmat, joilla trigonometristen funktioiden itseisarvot ovat yhtä suuret		
$\alpha_2 = 180° - \alpha_1$	$\alpha_3 = 180° + \alpha_1$	$\alpha_4 = 360° - \alpha_1 = - \alpha_1$
$x_2 = \pi - x_1$	$x_3 = \pi + x_1$	$x_4 = 2\pi - x_1 = - x_1$

14. Palautuskaavat eli trigonometrisen funktion arvon palauttaminen terävän kulman trigonometrisen funktion arvoksi
Edellisistä kaavoista saadaan se I neljänneksen kulma, jolla trigonometrisen funktion itseisarvo on sama. Arvon etumerkki saadaan sen perusteella missä neljänneksessä kulma on.

19. Olkoon $\sin 15° = a$. Mitä on a) $\sin 165°$ b) $\sin 195°$ c) $\sin 345°$ d) $\sin (-15°)$?
20. Olkoon $\cos 23° = b$. Mitä on a) $\cos 157°$ b) $\cos 203°$ c) $\cos 337°$ d) $\cos (-23°)$?
21. Olkoon $\tan 76° = c$. Mitä on a) $\tan 104°$ b) $\tan 256°$ c) $\tan 284°$ d) $\tan (-76°)$?
22. Mikä on se neljännen neljänneksen kulma α, jolle $\cos \alpha = 0,87$?
23. Laske a) $\sin^2 25° + \cos^2 25°$ b) $\sin^2 155° + \cos^2 25°$ c) $\sin^2 (\pi - x) + \cos^2 x$.
24. a) Terävälle b) tylpälle kulmalle α on $\sin \alpha = 0,6$. Laske $\cos \alpha$.

25. Sievennä a) $\frac{\sin 56°}{\cos 56°}$ b) $\frac{\sin 124°}{\cos 56°}$ c) $\frac{\sin 236°}{\cos 56°}$ d) $\frac{\sin (\pi - x)}{\cos (\pi + x)}$
26. Olkoon sin x = a. Mitä on a) $\cos (½\pi - x)$ b) $\cos (x - ½\pi)$ c) $\cos (x + ½\pi)$?
27. Olkoon cos α = a. Mitä on a) $\sin (90° - \alpha)$ b) $\sin (\alpha - 90°)$ c) $\sin (\alpha + 270°)$?

15. Kulman trigonometristen funktioiden tarkkojen arvojen laskeminen, kun ko. kulman yhden trigonometrisen funktion arvo tunnetaan
A. Piirrä suorakulmainen kolmio ja merkitse annetusta tiedosta kulmaan liittyvät kaksi sivua
B. Laske Pythagoraan lauseella kolmion kolmas sivu.
C. Päättele missä neljänneksessä kulma sijaitsee.
D. Vastauksen etumerkin saat neljänneksen perusteella ja itseisarvon suorakulmaisesta kolmiosta.

28. Laske sin α ja cos α, kun tan α = ¾ ja $180° < \alpha < 270°$.
29. Laske sin α ja tan α, kun cos α = 2/3 ja $180° < \alpha < 360°$
30. Laske cos α ja tan α, kun sin α = -4/5 ja $-90° < \alpha < 180°$

16. Trigonometrisen lausekkeen sieventäminen perusyhteyksien avulla
Käytä tilanteeseen sopivaa kaavaa ja yleisiä sievennysperiaatteita.

31. Sievennä a) $\sin \alpha + \cos (90° - \alpha) + \sin (180° - \alpha)$ b) $\cos x + \sin x \cdot \tan x$.
32. Sievennä $\sin x \cdot (\sin x + 1) + \cos^2 x$

17. Trigonometrisen kaavan oikeaksi osoittaminen perusyhteyksien avulla
Tee esim. 1° yhtäpitäviä yhtälöitä TAI 2° lähde vasemmasta puolesta ja pyri oikean puolen lausekkeeseen.

33. Osoita, että a) $\sin (90° + x) = \cos x$ b) $\cos (90° + x) = -\sin x$
34. Todista, että a) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ b) $1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$

4.3. Laskukaavat

1. Sinin yhteenlaskukaava
$\sin (x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

4.3.1. Sievennä a) $\sqrt{2} \cdot \sin (x + 45°)$ b) $\sin (60° + 45°)$
2. Olkoon sin x = 4/5 ja sin y = 5/13 sekä kulmat x ja y teräviä. Mitä on sin (x + y)?

2. Kosinin yhteenlaskukaava
$\cos (x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

3. Sievennä $\cos (x + 120°) + \cos (x + 60°)$
4. Laske cos (x + y), kun sin x = ½ ja cos y = - 0,8 sekä kulmat x ja y ovat tylppiä?

3. Tangentin yhteenlaskukaava
$\tan (x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$

5. Laske tarkka arvo tan 105° : lle. Vihje: tan 105 = tan (60° + 45°)
6. Mitä on tan x, kun tan y = -1 ja tan (x + y) = 2?

4. Sinin vähennyslaskukaavat
$\sin (x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$

7. Sievennä a) $\sin (½\pi - x)$ b) $\sin (\pi/3 - x)$
8. Olkoon sin x = ½ ja sin y = 2/3 sekä kulmat x ja y tylppiä. Mitä on sin (x - y)?
9. Sievennä $\sin (x + 60°) + \sin (x - 30°)$

5. Kosinin vähennyslaskukaava
$\cos (x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

10. Sievennä a) $\cos (180° - x)$ b) $\cos (x - 90°)$ c) $\cos (270° - x)$
11. Olkoon cos x = ½ ja cos y = ¾ sekä kulmat x ja y teräviä. Määritä cos (x - y)
12. Sievennä $\cos (x - 2\pi/3) + \cos (x - \pi/3)$.

6. Tangentin yhteenlaskukaava
$\tan (x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$

13. Sievennä a) tan (180° - x) b) tan (60° - 45°) c) tan (x - 45°) + tan (x + 45°)
14. Määritä tan x, kun tan (x - y) = 3 ja tan y = 4.

7. Kaksinkertaisen kulman sini
$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

15. Määritä sin 2x, kun sin x = 4/5 ja kulma x on tylppä.
16. Terävän kulman α tangentti on 3. Laske $\sin 2\alpha$.
17. Laske lausekkeen $(\sin x + \cos x)^2$ arvo, kun $\sin 2x = -\frac{1}{4}$.
18. Mikä on funktion $f(x) = \dfrac{30}{2 - \sin x \cdot \cos x}$ suurin ja pienin arvo

8. Kaksinkertaisen kulman kosini
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cdot \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$

19. Laske cos 2x, kun a) sin x = ½ b) cos x = -½ c) tan x = -½.
20. Laske cos x, kun kulma x on tylppä ja cos 2x = ½.

9. Kaksinkertaisen kulman tangentti
$\tan 2x = \dfrac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x}$

21. Määritä tan 2x, kun a) tan x = ¼ b) sin x = ¼.
22. Laske tan x, kun tan 2x = 4/3 ja kulma x on a) terävä b) tylppä.

10. Kaavojen käyttö lausekkeiden sieventämisessä
Lähdetään annetusta lausekkeesta, korvataan jokin osa sen kanssa yhtä suurella lausekkeella.
Yritetään saada lauseke mahdollisimman yksinkertaiseksi

23. Sievennä a) $\dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$ b) sin 4x (= sin (2 · 2x))
24. Osoita, että lausekkeella $\sin^4 x + \cos^4 x + \frac{1}{2}\sin^2 2x$ on sama arvo riippumatta x:n arvosta.
25. Olkoon cos x = a. Määritä a:n avulla cos 4x.

11. Kaavojen käyttö yhtälön oikeaksi osoittamisessa
JOKO lähetään yhtälön vasemmasta puolesta ja yritetään sieventää se oikean puolen kanssa samaksi.
TAI tehdään yhtäpitäviä yhtälöitä annetun väitteen kanssa ja yritetään saada lopuksi tosi yhtälö.

26. Osoita, että $\tan x + \tan y = \dfrac{\sin (x + y)}{\cos x \cdot \cos y}$, kun $x, y \neq \frac{1}{2}\pi + n\pi$.
27. Osoita, että $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.
28. Todista, että $\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \dfrac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}$

5. Trigonometristen funktioiden kuvaajat

5.1. Sinifunktion kuvaaja

1. Sinifunktion kuvaaja
on jatkuva aalto. Lähtee origosta ja kasvaa arvoon 1, kun $x = \frac{1}{2}\pi$.
Jatkaa kulkua pisteiden $(\pi,0)$, $(1\frac{1}{2}\pi,-1)$ ja $(2\pi,0)$ kautta. Sama aalto toistuu vasemmalle ja oikealle.

2. Sinifunktion määrittelyjoukko
on koko R

3. Sinifunktion arvojoukko
on väli [-1,1] eli $-1 \leq \sin x \leq 1$

5.1.1. Mikä on funktion a) f(x) = sin x + 3 b) f(x) = 2sin x c) f(x) = 2sin x + 3 arvojoukko?
2. Millä a:n arvoilla yhtälöllä $2a \cdot \sin 3x - 1 = 0$ on ratkaisuja?

4. a:n vaikutus kuvaajaan a + sin x
Nostaa kuvaajaa joka kohdassa a ruutua ylöspäin

3. Miten funktion f(x) = 2 + sin x kuvaaja sijaitsee sinifunktion kuvaajaan nähden?
4. Mikä on sellaisen funktion lauseke, jonka kuvaaja on 3 ruutua sinifunktion a) ala- b) yläpuolella?

5. a:n vaikutus kuvaajaan $a \cdot \sin x$
Leikkaa x-akselin samoissa kohdissa kuin $y = \sin x$ kuvaaja. Huippu samalla kohtaa, mutta korkeudella a.
Tekee y-koordinaatin a-kertaiseksi jokaisella kohdalla x. Joka piste on x-akselista a-kertaisella etäisyydellä.
Aalto jyrkkenee, jos $a > 1$ ja loivenee, jos $a < 1$.
Jos a on negatiivinen, niin aallon harja muuttuu pohjaksi ja päinvastoin.

5. Miten funktion $f(x) = 2\sin x$ kuvaaja saadaan sinifunktion kuvaajasta?
6. Mikä on sen funktion lauseke, joka saadaan venyttämällä sinifunktiota y-akselin suunnassa joka kohdassa kolminkertaisen matkan päähän x-akselista?

6. a:n vaikutus kuvaajaan $\sin ax$
aaltoja tulee lisää tai vähemmän. Jos $a = 2$, niin kuvaajassa on kaksi aaltoa välillä, jolla oli aikaisemmin vain yksi aalto. Siis jaksoksi tulee $2\pi/a$.

7. Mikä on funktion a) $f(x) = \sin 5x$ b) $f(x) = \sin \frac{1}{2}x$ perusjakso?
8. Montako aaltoa on funktiolla $f(x) = \sin 6x$ sinä aikana, kun funktiolla $f(x) = \sin x$ on yksi aalto?

7. a:n vaikutus kuvaajaan $\sin (x - a)$
Siirtää $y = \sin x$ kuvaajan jokaista pistettä a ruutua oikealle, eli pisteen y pysyy samana ja x kasvaa a:lla.

9. Mikä on sen funktion lauseke, jonka kuvaajan pisteet ovat käyrästä $y = \sin x$ 2 ruutua a) oikealle b) vasemmalle?

5.2. Kosinifunktion kuvaaja

1. Kosinifunktion kuvaaja
on aaltomainen. Lähtee y-akselin pisteestä (0,1) ja vähenee arvoon 0 kohdalla $x = \frac{1}{2}\pi$.
Jatkaa pisteiden $(\pi,-1)$, $(1\frac{1}{2}\pi,0)$ ja $(2\pi,1)$ kautta. Sama aalto toistuu oikealle ja vasemmalle.

2. Kosinifunktion määrittelyjoukko
on koko R

3. Kosinifunktion arvojoukko
on väli $[-1,1]$ eli $-1 \le \cos x \le 1$

5.2.1. Mikä on funktion $f(x) = 2 - 3\cos x$ suurin ja pienin arvo?

5.3. Tangenttifunktion kuvaaja

1. Tangenttifunktion kuvaaja
Pystysuorat asymptootit ovat kohdissa $x = \pm \frac{1}{2}\pi + n\cdot\pi$.
Funktio on kahden peräkkäisen asymptootin välissä koko ajan kasvava
Kuvaaja tulee $-\infty$:stä, kulkee origon kautta $+\infty$:een. Kummallakin reunalla kuvaaja lähestyy asymptoottiaan.

2. Tangenttifunktion määrittelyjoukko
$x \ne \frac{1}{2}\pi + n \cdot \pi$

3. Tangenttifunktion arvojoukko
on koko R

4. Tangenttifunktion määrittelemättömyyskohta
on $x = \frac{1}{2}\pi + n \cdot \pi$. Suora $x = \frac{1}{2}\pi + n \cdot \pi$ on tangenttifunktion pystysuora asymptootti.

5.3.1. Missä funktiota a) $f(x) = \tan 2x$ b) $f(x) = \tan (2x - \frac{1}{2}\pi)$ c) $f(x) = \tan (2\pi - \frac{1}{2}x)$ ei ole määritelty?

6. Trigonometriset yhtälöt

6.1. Yhtälöt tyyppiä T(x) = T(y)

1. Yhtälön $\sin x = \sin y$ ratkaiseminen
$x = y + n \cdot 360°$ tai $x = 180° - y + n \cdot 360°$ eli kulmat ovat samat tai suplementtikulmia
$x = y + n \cdot 2\pi$ tai $x = \pi - y + n \cdot 2\pi$

6.1.1. Ratkaise a) $\sin x = \sin 20°$ b) $\sin 2x = \sin 20°$ c) $\sin 2x = \sin x$ d) $\sin 2x - \sin (x + 20°) = 0$
2. Ratkaise a) $\sin 2x = \sin \pi/3$ b) $\sin 3x = \sin (\frac{1}{2}\pi - x)$ c) $\sin (2x - \pi/3) = \sin (\pi/6 - x)$

2. Yhtälön $\cos x = \cos y$ ratkaiseminen
$x = y + n \cdot 360°$ tai $x = -y + n \cdot 360°$ eli kulmat ovat samat tai vastalukuja
$x = y + n \cdot 2\pi$ tai $x = -y + n \cdot 2\pi$

3. Ratkaise a) $\cos x = \cos 40°$ b) $\cos 4x = \cos 40°$ c) $\cos 4x = \cos x$ d) $\cos 4x - \cos (x + 60°) = 0$
4. Ratkaise a) $\cos 2x = \cos \pi/3$ b) $\cos (2x - \pi/3) = \cos \pi/6$ c) $\cos (2x - \pi/3) = \cos (\pi/6 - x)$

3. Yhtälön $\tan x = \tan y$ ratkaiseminen
$x = y + n \cdot 180°$ EHDOT: $x \neq 90° + n \cdot 180°$ ja $y \neq 90° + n \cdot 180°$
$x = y + n \cdot \pi$ EHDOT: $x \neq \frac{1}{2}\pi + n \cdot \pi$ ja $y \neq \frac{1}{2}\pi + n \cdot \pi$

5. Ratkaise a) $\tan x = \tan 54°$ b) $\tan 3x = \tan 54°$ c) $\tan 3x = \tan (x + 54°)$ d) $\tan 3x - \tan x = 0$
6. Ratkaise a) $\tan 2x = \tan \frac{1}{4}\pi$ b) $\tan 3x = \tan (x + \frac{1}{2}\pi)$ c) $\tan (3x - \pi/3) = \tan (x + \pi/6)$

4. Tietyllä alueella olevien ratkaisujen määrittäminen.
Ratkaistaan ensin yhtälö täydellisesti.
Lasketaan eri n:n arvoilla (0, ±1, ±2, …) saatavia ratkaisuja
Valitaan niistä ne, jotka ovat halutulla alueella.

7. Määritä yhtälön $\sin 2x = \sin 30°$ ne ratkaisut, jotka ovat välillä [-180°, 270°].

6.2. Yhtälöt tyyppiä T(x) = a

1. Yhtälön $\sin x = a$ ratkaiseminen
Etsitään kulma α, jolle $\sin \alpha = a$. Korvataan a $\sin \alpha$:lla. Ratkaistaan sitten kuten 6.1.1.

6.2.1. Ratkaise a) $\sin x = 0{,}6$ b) $\sin 2x = 0{,}3$ c) $\sin (2x - 50°) = 0{,}7$ d) $2\sin (2x - 50°) = 0{,}7$

2. Yhtälön $\cos x = a$ ratkaiseminen
Etsitään kulma α, jolle $\cos \alpha = a$. Korvataan a $\cos \alpha$:lla. Ratkaistaan sitten kuten 6.1.2.

2. Ratkaise a) $\cos x = 0{,}2$ b) $\cos 3x = 0{,}4$ c) $\cos (x - 35°) = 0{,}5$ d) $3\cos (x - 20°) - \frac{1}{2} = 0$

3. Yhtälön $\tan x = a$ ratkaiseminen
Etsitään kulma α, jolle $\tan \alpha = a$. Korvataan a $\tan \alpha$:lla. Ratkaistaan sitten kuten 6.1.3.

3. Ratkaise a) $\tan x = 2$ b) $\tan (x + 40°) = 1{,}5$ c) $2\tan (2x - 50°) = 7$.

4. Yhtälöiden $\sin f(x) = 0$ tai ± 1 ja $\cos f(x) = 0$ tai ± 1 ratkaiseminen
Piirrä yksikköympyrä ja merkitse kehälle ne kulmat, joilla sini tai kosini saa kyseisen arvon.
Merkitse kulma = saadut kulmat ja ratkaise x.

4. Ratkaise a) $\sin x = 0$ b) $\cos x = 0$ c) $\sin 2x = 1$ d) $\cos 2x = -1$

6.3. Muita yhtälöitä

1. Yhtälön $\sin x = \cos y$ ratkaiseminen
Muuta $\sin x = \cos (90° - x)$:ksi ja ratkaise sitten kuten 6.1.2.

6.3.1. Ratkaise a) $\sin 2x = \cos x$ b) $\sin 2x = \cos (x + 20°)$ c) $\sin (3x - 40°) = \cos (x - 30°)$

2. Yhtälön $\sin x = -\sin y$ ratkaiseminen
Muuta $-\sin y = \sin (-y)$: ksi ja ratkaise sitten kuten 6.1.1.

2. Ratkaise a) $\sin 2x + \sin x = 0$ b) $\sin 2x + \sin (x - 60°) = 0$ c) $\sin (3x - 40°) + \sin (50° - x) = 0$

3. Yhtälön $\cos x = -\cos y$ ratkaiseminen
Muuta $-\cos y = \cos (180° - y)$: ksi ja ratkaise sitten kuten 6.1.2.

3. Ratkaise a) $\cos 2x + \cos x = 0$ b) $\cos 2x + \cos (x + 10°) = 0$ c) $\cos (5x - \frac{1}{2}\pi) + \cos (x + \pi) = 0$

4. Yhtälön $\tan x = -\tan y$ ratkaiseminen
Muuta $-\tan x = \tan (-x)$: ksi ja ratkaise sitten kuten 6.1.3.

4. Ratkaise a) $\tan 2x + \tan x = 0$ b) $\tan 4x + \tan (x - 40°) = 0$ c) $\tan (5x - 60°) + \tan (20° - x) = 0$

5. Homogeeninen yhtälö saman kulman sinin ja kosinin suhteen
Jaa jokainen termi kulman kosinilla (tai sen potenssilla, joka on sama kuin jokaisen termin asteluku)
Saat yhtälön jossa on vain tan x:n potensseja.
Korvaa tan x = y:llä ja ratkaise y ja sen jälkeen x.

5. Ratkaise a) $2\sin x = \cos x$ b) $2 \sin 4x = \cos 4x$ c) $3\sin x - 4\cos x = 0$
6. Ratkaise a) $3 \sin^2 x = 4 \cos^2 x$ b) $\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x = 0$

6. Tulo = 0 yhtälön ratkaiseminen
Merkitse tulon tekijät = 0 ja ratkaise näin saadut yhtälöt

7. Ratkaise a) $\sin x \cdot (\cos x - ½) = 0$ b) $(2\sin 2x - 1)(4\cos 3x + 1) = 0$

7. Yhtälön molempien puolien jakaminen YHTEISELLÄ tekijällä
Tee KAKSI yhtälöä : 1) jakamalla saatu ja 2) yhteinen tekijä = 0 sekä ratkaise nämä.

8. Ratkaise a) $2\sin^2 x = \sin x$ b) $\cos x \cdot \tan x = 3\cos x$ c) $(\cos x - 1)\sin x = \cos^2 x - \cos x$

8. Kaavojen käyttö yhtälöiden ratkaisemisessa
Sievennyskaavoja käyttämällä yritetään päästä johonkin edelle olevista perustilanteista.

9. Ratkaise a) $2\sin 2x = \cos x$ b) $\sin x \cdot \cos x = 1$ c) $1 + \sin 2x = \cos 2x$ d) $\cos 2x = \cos^2 x$
10. Ratkaise $\sin 2x \cdot \cos (x - 45°) = 1$

9. Esiintyy vain yhtä trigonometristä lauseketta.
Merkitse lauseketta aputuntemattomalla a.
Ratkaise saadusta polynomiyhtälöstä a.
Korvaa a omalla lausekkeellaan ja ratkaise x kuten kohdissa 6.3.

11. Ratkaise yhtälö a) $\sin^2 x = ½$ b) $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$ c) $3\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$.

7. Vektori

7.1. Vektorin määritelmä

1. Vektorisuure
on suure, johon liittyy a) suuruus ja b) suunta

2. Skalaarisuure
on suure, johon liittyy vain sen suuruus

3. Suuntajana
on jana, jonka toinen päätepiste on sovittu alkupisteeksi ja toinen päätepiste suuntajanan loppupisteeksi.

4. Suuntajanojen yhdensuuntaisuus, erisuuntaisuus
Suuntajanat ovat yhdensuuntaisia, jos ne suorat, joilla suuntajanat ovat, ovat yhdensuuntaisia.
Muussa tapauksessa suuntajanat ovat erisuuntaisia.

5. Suuntajanojen samansuuntaisuus, vastakkaissuuntaisuus
Jos suuntajanat ovat yhdensuuntaisia, ne ovat joko saman- tai vastakkaissuuntaisia.

7.1.1. Vierekkäin on 4 yhtenevää suunnikasta ABED, BCFE, DEHG ja EFIH. Mitkä suuntajanat ovat vastakkaissuuntaisia a) suuntajanan AB b) suuntajanan CE kanssa?

6. Suuntajanan pituus
on sama kuin alku- ja loppupisteiden välisen janan pituus.

2. Vierekkäin on 4 yhtenevää suunnikasta ABED, BCFE, DEHG ja EFIH. Mitkä suuntajanat ovat yhtä pitkiä kuin suuntajana a) AB b) FD c) DB?

7. Nollasuuntajana
on piste ts. sen pituus on nolla ja sillä ei ole suuntaa.

8. Vektori
on A) tarkemmin kaikkien niiden suuntajanojen joukko, jotka ovat yhtä pitkiä ja samansuuntaisia
ja B) käytännöllisemmin jokin kyseisen joukon suuntajanoista

9. Vektorit samoja
jos ne ovat yhtä pitkiä ja samansuuntaisia

10. Nollavektori
on vektori, jonka pituus on nolla. ts. sillä ei ole suuntaakaan ja sitä voidaan pitää pistemäisenä.

11. Yksikkövektori
on tietyn vektorin kanssa samansuuntainen, mutta pituus on yksi.

12. Vastavektori
on annetun vektorin kanssa yhtä pitkä mutta vastakkaissuuntainen.

13. Samojen vektoreiden katsominen ruudukosta
Katsotaan menevätkö vektorit yhtä monta ruutua ylös - alas ja oikealle - vasemmalle suunnassa

3. Vierekkäin on 4 yhtenevää suunnikasta ABED, BCFE, DEHG ja EFIH. Mitkä vektorit ovat samoja kuin vektori a) **AB** b) **DC**?
4. Koordinaatistossa on vektori **a** = **AB**, missä A = (2,3) ja B = (4,-1). Mikä on piste D, kun a) **CD** = **a** b) **CD** = - **a** ja C = (5,6)?

7.2. Vektoreiden yhteen- ja vähennyslasku

1. Vektoreiden yhteenlasku
Aseta toinen yhteenlaskettava alkamaan ensimmäisen loppupisteestä.
Summavektori on tällöin ensimmäisen alkupisteestä toisen loppupisteeseen. Ts. **AB** + **BC** = **AC**

7.2.1. Olkoon A = (3,2), B = (-1,4), C = (1,-2) ja D = (-3,5). Määritä piirtämällä P, kun **OP** = **AB** + **CD**.
2. Mitä on a) **PQ** + **QR** b) **XY** + **YZ** c) **KL** + **IK**?

2. Resultantti, komponentit
Summavektori on yhteenlaskettaviensa resultantti. Yhteenlaskettavat ovat summavektorin komponentteja.

3. Nollavektorin lisääminen
a + **0** = **a**

4. Vektorin ja vastavektorin summa
a + (-**a**) = **0**

5. Vektoreiden yhteenlaskun vaihdantalaki
a + **b** = **b** + **a**

6. Vektoreiden yhteenlaskun liitäntälaki
a + (**b** + **c**) = (**a** + **b**) + **c**

7. Summavektorin pituuden laskeminen geometrisesti
Piirrä kuvio. Siitä saanet summavektorin pituuden yhteen- tai vähennyslaskulla, Pythagoraan teoreemalla tai trigonometrialla

3. Olkoon |**a**| = 6 ja |**b**| = 8. Määritä |**a** + **b**|, kun a) **a** $\uparrow\uparrow$ **b** b) **a** $\uparrow\downarrow$ **b** c) **a** $\perp$ **b** d) $\angle$(**a**,**b**) = 60°.

8. Vektoreiden vähennyslasku lisäämällä vastavektori
Laita vähentäjävektorin loppupiste vähenevän loppupisteeseen.
Erotus on vähenevän alkupisteestä vähentäjän alkupisteeseen menevä vektori. Ts. **a** - **b** = **a** + (-**b**)

4. Olkoon |**a**| = 5 ja |**b**| = 12. Määritä |**a** - **b**|, kun a) **a** $\uparrow\uparrow$ **b** b) **a** $\uparrow\downarrow$ **b** c) **a** $\perp$ **b** d) $\angle$(**a**,**b**) = 120°.

9. Vektoreiden vähennyslasku, kun vektorit alkavat samasta pisteestä
Erotusvektori on tällöin - merkkisen vektorin loppupisteestä + merkkisen loppupisteeseen menevä vektori.
AB - **AC** = **CB**

5. Mitä on a) **PQ** - **PR** b) **XY** - **XZ** c) **TU** - **TV**.

7.3. Reaaliluvun ja vektorin tulo

1. Reaaliluku kertaa vektori on vektori, jonka a) pituus | r**a** | = | r | · | **a** | ja b) suunta ↑↑ **a** , kun r > 0 ja ↑↓ **a** , kun r < 0 sekä **0** , kun r = 0

7.3.1. Olkoon |**a**| = 7. Määritä a) |3**a**| b) | - 5**a**|

2. Reaaliluvun ja vektorin tulon liitäntälaki r(s**a**) = (rs)**a**

2. Sievennä a) 5(6**a**) b) 7(**a** + 2**b**)

3. Reaaliluvun ja vektorin tulon osittelulaki r(**a** + **b**) = r**a** + r**b** ; (r + s)**a** = r**a** + s**a**

3. Määritä a) 3(**a** + **b**) b) 3**a** + 4**a**.

4. Vektorin jakaminen reaaliluvulla on sama kuin jakajan käänteisluvulla kertominen $\frac{\mathbf{a}}{r} = \frac{1}{r} \cdot \mathbf{a}$

5. Yksikkövektorin muodostaminen $\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{\mid \mathbf{a} \mid}$

4. Olkoon |**a**| = 5. Määritä a) vektorin **a** avulla $\mathbf{a}^0$ b) vektorin $\mathbf{a}^0$ avulla **a**.

6. Vektorien laskulait Vektoreilla lasketaan kuten kirjainpolynomeilla (tai reaaliluvuilla, koska laskusäännöt samanlaisia)

5. Sievennä a) 3(2**a** + 3**b**) - 4(**a** - 2**b**) b) 4(**a** + 2**b**) - ½[**a** - (3**a** - 4**b**)]

7. Uuden vektorin muodostaminen annetuista vektoreista +, -, · -laskuja ja geometrisia tietoja käyttäen Lähdetään alkupisteestä ja mennään tunnettuja vektoreita pitkin loppupisteeseen. Jos mennään vektorin suuntaan, lisätään kyseinen vektori. Jos siirrytään vektoria alkupisteeseen päin vähennetään kyseinen vektori. Jos mennään vektorista vain osa, niin tämä on eräs luku (menopituus : koko pituus) kertaa kyseinen vektori

6. Kolmiossa ABC on **AB** = **a** ja **AC** = **b** sekä D on sivun AB keskipiste. Määritä vektorit a) **BC** b) **CD**.
7. Suunnikkaan ABCD keskipiste on K. Olkoon **AK** = **a** ja **BK** = **b**. Määritä **a**:n ja **b**:n avulla a) **AB** b) **AD**.
8. Olkoon kolmiossa ABC **AB** = **a** ja **AC** = **b**. Lausu **a**:n ja **b**:n avulla keskijanavektorit **AD**, **BE** ja **CF**.
9. Nelikulmiossa ABCD on **AB** = **a**, **AC** = **b** ja **CD** = **c**. Lausu **a**:n, **b**:n ja **c**:n avulla a) **CB** b) **DB** c) **DA**.
10. Suunnikkaassa ABCD ovat pisteet E ja F sivulla CD siten, että CE = EF = FD, piste G on sivun AD keskipiste ja P lävistäjien leikkauspiste. Olkoon **AB** = **a** ja **AD** = **b**. Esitä **a**:n ja **b**:n avulla vektorit a) **AC** b) **DB** c) **FG** d) **PE** e) **FP**.
11. Suunnikkaassa ABCD on K sivun AD keskipiste ja **AB** = **a**. Lausu **KB** + **KC** vektorin **a** avulla.

8. Vektoreiden ominaisuuksia

8.1.Yhdensuuntaisuusehto

1. Vektorien yhdensuuntaisuusehto yleisesti **a** || **b** ⇔ ∃ t : **b** = t · **a**

8.1.1. Olkoon |**a**| = 5 ja |**b**| = 7. Lausu **a**:n avulla vektori **b**, kun ne ovat a) saman- b) vastakkaissuuntaiset.
2. Olkoon |**a**| = 6. Mikä on **a**:n kanssa vastakkaissuuntainen vektori, jonka pituus on 15?
3. Osoita, että vektorit ½**a** - 3**b** ja 6**b** - **a** ovat yhdensuuntaiset.

2. Tutkiminen, ovatko kaksi vektoria yhden- vai vastakkaissunntaisia **b** = t · **a** JA t > 0 ⇒ **a** ↑↑ **b**   **b** = t · **a** JA t < 0 ⇒ **a** ↑↓ **b**

4. Vektorit **a** ja **b** toteuttavat yhtälön 3**a** + 7**b** = 0. Osoita, että **a** ja **b** ovat vastakkaissuuntaisia.
5. Vektoreille **a** ja **b** (≠ **0**) on voimassa 2(**a** - **b**) = 3**a** + **b**. Osoita, että **a** ja **b** ovat vastakkaissuuntaisia.

3. Osoittaminen, että kolme pistettä ovat samalla suoralla.
Osoitetaan, että pisteestä toiseen ja kolmanteen menevät vektorit ovat yhdensuuntaisia. Tällöin paralleeliaksiooman perusteella pisteet ovat samalla suoralla.

6. Millä ehdolla samasta pisteestä alkavien vektorien **a**, **b** ja **c** kärjet ovat samalla suoralla?
7. Samasta pisteestä alkavat vektorit toteuttavat yhtälön 2**a** - 3**b** + **c** = **0**. Osoita, että vektorien **a**, **b** ja **c** loppupisteet ovat samalla suoralla.
8. Osoita: Samasta pisteestä alkavien vektorien 4**a - b**, 2**a** + **b** ja **-a** + 4**b** kärjet ovat samalla suoralla.

8.2. Janan jakosuhde

1. Mitä janan AB jakosuhde m:n tarkoittaa
Janan osien suhde on m:n samassa järjestyksessä kuin janan päätepisteet annettu AP : PB = m : n

8.2.1. Janalla AB on piste P siten, että AB = 6 cm ja AP = 4 cm. Miten piste P jakaa janan a) AB b) BA?

2. Piste jakaa janan sisäpuolisesti suhteessa m:n
Piste P jakaa janan AB sisäpuolisesti m:n, jos P on janalla ja PA : PB = m : n

2. Piste P jakaa janan AB suhteessa 1:3. Olkoon **AB** = **a**. Mikä on a) **AP** b) **BP a**:n avulla esitettynä?
3. Janalla AB on piste P siten, että **AP** = 3/5 · **AB**. Missä suhteessa P jakaa janan AB?
4. Janalla AB on pisteet C ja D siten, että AC:CD:DB = 2:3:4. Lausu **AB** = **a**:n avulla a) **AC** b) **AD** c) **DC**.

3. Piste jakaa janan ulkopuolisesti suhteessa m:n
Piste P jakaa janan AB ulkopuolisesti m : n, jos P on janan AB jatkeella ja PA : PB = m : n

5. Piste P on janan AB jatkeella siten, että AB = 6 cm ja AP = 8 cm. Miten P jakaa janan a) AB b) BA?
6. Piste P jakaa janan AB ulkopuolisesti suhteessa 5:3. **AB** = **a**. Määritä **a**:n avulla a) **AP** b) **PB**.
7. Missä suhteessa piste P jakaa janan AB, kun **AB** = **a** ja **PA** = -2½**a**?
8. Pisteet A, B, C ja D ovat samalla suoralla siten, että **AB** = **a**, **AC** = 1¼**a** ja **AD** = -½**a**. Missä suhteessa a) piste B jakaa janan AC b) piste D jakaa janan CA c) pisteet A ja B jakavat janan DC?
9. Kolmion ABC sivulla BC on piste D, joka jakaa sivun BC suhteessa 2:1 ja E on janan AD keskipiste. Olkoon **AB** = **a** ja **AC** = **b**. Lausu vektorien **a** ja **b** avulla vektorit **AD** ja **BE**.

4. Jakopisteeseen menevän vektorin laskeminen, kun tunnetaan päätepisteisiin menevät vektorit
Lähdetään alkupisteestä, mennään janan toisen päätepisteen kautta jakopisteeseen.
Lasketaan reitin varrella olevat vektorit yhteen. (HUOM! Janaa esittäväkin vektori saadaan kiertotietä)

10. Piste P jakaa janan AB suhteessa 5:3. Olkoon **OA** = **a** ja **OB** = **b**. Lausu **a**:n ja **b**:n avulla vektori **OP**.
11. Piste P jakaa janan AB suhteessa 3:2. Olkoon **OA** = **a** ja **OB** = **b**. Lausu **a**:n ja **b**:n avulla vektori **PO**.

5. Jakopistelause
Olkoon O:sta päätepisteisiin A ja B menevät vektorit **a** ja **b** sekä piste P jakaa janan suhteessa m : n.
$$\mathbf{OP} = \frac{n\mathbf{a} + m\mathbf{b}}{m + n}$$

12. Ratkaise edelliset tehtävät 10 ja 11 tätä kaavaa käyttäen.

8.3. Lineaariyhdistely

1. Vektoreiden lineaariyhdistely
on summa, jonka yhteenlaskettavat ovat reaaliluku kertaa jokin ko. vektori

2. Vektorin esittäminen toisten vektoreiden lineaariyhdistelynä
Muodostetaan vektorille lauseke käyttäen vain toisia annettuja vektoreita lineaariyhdistelyssä

8.3.1. Olkoon **u** = 2**a** + 3**b** ja **v** = 3**a** - 4**b**. Esitä vektori **c** = 5**u** + 6**v** vektorien **a** ja **b** lineaarisena yhdistelynä.

3. Vektoriyhtälön ratkaiseminen
Ratkaistaan kuten ensimmäisen asteen yhtälöt

2. Ratkaise vektori **x** yhtälöstä a) **x** - **a** = 2**b** b) 2**x** - 3**a** = 3(4**a** - **x**)
3. Ratkaise vektorit **x** ja **y**, kun ne toteuttavat yhtälöt 2**x** + 3**y** = 4**a** - 7**b** ja 3**x** - 2**y** = 6**a** + 9**b**

8.4. Kantavektorit

1. Milloin 2 vektoria määrittävää tason?
Kun ne ovat erisuuntaisia ja eivät nollavektoreita ts. $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ ja $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$

8.4.1. Vektorit **a** ja **b** toteuttavat yhtälön 2**a** - 3**b** = **0**. Voivatko **a** ja **b** olla tason kantavektoreita?

2. Tason kantavektorit
Kaikki kaksi vektoria (**a** ja **b**), jotka määrittävät tason, ovat eräät tason kantavektorit.
Määrittäminen tarkoittaa, että niiden avulla voidaan esittää kaikki tason vektorit **v** = x**a** + y**b**

3. Vektorin esittäminen kannassa (**a**,**b**) geometrisesti konstruoiden
Piirretään alkupisteen kautta vektorin **a** ja loppupisteen kautta vektorin **b** suuntaiset suorat.
Komponentit ovat alkupisteestä leikkauspisteeseen ja leikkauspisteestä loppupisteeseen menevät vektorit.

4. Vektorin koordinaatit kannassa
Vektorin **v** = x**a** + y**b** koordinaatit kannassa (**a**,**b**) on (x,y) eli kantavektoreiden kertoimet.

2. Mitkä ovat vektorin **c** koordinaatit kannassa (**a**,**b**), kun a) **c** = 5**a** - 6**b** b) **c** = (2**a** - 3**b**) - (**a** + 4**b**)?
3. Vektorin **u** koordinaatit kannassa (**a**,**b**) on (3,7) ja vektorin **v** on (5,-2). Mitkä ovat vektorin 4**u** + 5**v** koordinaatit kannassa (**a**,**b**)?

5. Vektorin komponentit kannassa
Vektorin **v** = x**a** + y**b** komponentit (eli yhteenlaskettavat) ovat x**a** ja y**b**

4. Mitkä ovat vektorin **c** komponentit kannassa (**a**,**b**), kun a) **c** = 7**a** - 8**b** b) **c** = (4**a** + 5**b**) - (6**a** - 7**b**)?

6. Kantavektoreiden avulla esitetyt vektorit samoja
$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = r\mathbf{a} + s\mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = s \end{cases}$ ts. samoja kantavektoreita on kummassakin vektorissa yhtä paljon

5. Olkoon (**a**,**b**) kanta. Määritä x ja y, kun vektorit **u** = (x - 2)**a** + 3**b** ja **v** = 4**a** + (y - 5)**b** ovat samoja.
6. Määritä x ja y, kun a) x(2**a** + **b**) + y(**a** - 3**b**) = 13**a** - 11**b** b) x(**a** - 2**b**) - (**a** - 8**b**) = y(**a** + **b**). ($\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$)
7. Vektorien **u**, **v** ja **w** koordinaatit kannassa (**a**,**b**) ovat (-2,3), (3,-1) ja (6,5). Laske x ja y, kun x**u**+y**v**=**w**.

7. Kantavektoreiden esittämät vektorit yhdensuuntaisia
$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} \parallel r\mathbf{a} + s\mathbf{b} \Leftrightarrow \frac{x}{r} = \frac{y}{s}$

8. Ovatko vektorit a) 4**a** - 6**b** ja 6**a** - 9**b** b) 8**a** - 12**b** ja 10**a** - 16**b** yhdensuuntaisia, kun (**a**,**b**) on kanta?
9. Määritä x, kun vektorit x**a** - 3**b** ja 5**a** + 4**b** ovat yhdensuuntaisia ja (**a**,**b**) on kanta.
10. Olkoon **a** ja **b** erisuuntaisia. Mikä on x, kun vektorit 2**a** - 3**b** ja x**a** + (x - 1)**b** ovat yhdensuuntaiset?
11. Olkoon (**a**,**b**) kanta, **u** = 2**a** - 3**b** ja **v** = 4**a** + k**b**. Määritä k, kun **u** + **v** ja 2**u** - 3**v** ovat yhdensuuntaiset.

8. Milloin kolme vektoria määrittävää avaruuden?
Kolme vektoria määrittää avaruuden, jos ne eivät ole nollavektoreita ja eivät ole samassa tasossa.

9. Avaruuden kanta, kantavektorit, komponentit, koordinaatit
Jos (**a**,**b**,**c**) on avaruuden kanta, niin kaikki avaruuden vektorit voidaan esittää niiden lineaariyhdistelynä.
Jos **v** = x**a** + y**b** + z**c**, niin **a**, **b** ja **c** ovat kantavektorit. x**a**, y**b** ja z**c** ovat komponentit ja (x,y,z) on koordinaatit tässä kannassa

8.5. Geometrisia sovelluksia

1. Vektoreiden käyttö geometrisissa todistuksissa
Vektoreilla osoitetaan suorat yhdensuuntaisiksi, kulmat yhtä suuriksi tai sivut yhtä pitkiksi tms.

8.5.1. Kolmion ABC sivulla AC oleva piste P ja sivulla BC oleva piste Q jakavat ko. sivut suhteessa 3:5. Osoita, että PQ || AB
2. Suunnikkaan ABCD sivun CD keskipiste on P ja Q jakaa BD:n suhteessa 1:2. Osoita, että AP || CQ.

2. Janan keskipisteeseen menevä vektori samasta pisteestä päätepisteisiin menevien vektorien avulla
Keskipisteeseen menevä vektori on samasta pisteestä päätepisteisiin menevien vektorien keskiarvo.
OK = ½(**OA** + **OB**), missä K on keskipiste sekä janan päätepisteet ovat A ja B

3. Kolmion painopisteeseen menevä vektori samasta pisteestä kärkiin menevien vektorien avulla
Painopisteeseen menevä vektori on samasta alkupisteestä kärkiin menevien vektorien keskiarvo
$\mathbf{OK} = \dfrac{\mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC}}{3}$, missä K on painopiste ja kolmion kärkipisteet ovat A, B ja C

4. Tetraedrin painopisteeseen menevä vektori samasta pisteestä kärkiin menevien vektorien avulla
Painopisteeseen menevä vektori on samasta alkupisteestä kärkipisteisiin menevien vektorien keskiarvo
$\mathbf{OK} = \dfrac{\mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC} + \mathbf{OD}}{4}$, missä K on painopiste ja tetraedrin kärkipisteet ovat A, B, C ja D.

5. Todistus: Jos nelikulmion kaksi sivua ovat yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset, niin se on suunnikas
Osoitetaan vektoreilla, että toinenkin pari vastakkaisia sivuja ovat yhdensuuntaisia.

6. Todistus: Jos nelikulmion lävistäjät puolittavat toisensa, niin nelikulmio on suunnikas
Osoitetaan, että toinen pari vastakkaisia sivuvektoreita ovat samoja (ts. yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset)

7.Janojen jakosuhteen laskeminen
Valitaan kaksi kantavektoria (kaksi erisuuntaista vektoria) a ja b.
Muodostetaan kyseisille janoille lauseke a:n ja b:n avulla.
Janan osat ovat silloin x·janavektori$_1$ ja y·janavektori$_2$
Tehdään yhtälö esittämällä jokin vektori kahdella eri tavalla (esim. kierto pisteestä takaisin pisteeseen = **0**)
Tehdään yhtälöpari siitä, että kantavektoreiden kertoimet ovat samat.
Ratkaistaan x ja y, ja näin saadaan selville miten suuri on toinen osa koko vektorista ja edelleen jakosuhde.

3. Suunnikkaassa ABCD on **AB** = **a**, **AD** = **b** ja piste E jakaa sivun BC suhteessa 2:1. Määritä **a**:n ja **b**:n avulla vektorit **BD** ja **AE**. Missä suhteessa lävistäjä BD jakaa janan AE?

9. Vektori koordinaatistossa

9.1. Suorakulmainen koordinaatisto

1. Pisteen paikkavektori
on origosta pisteeseen menevä vektori.

2. Janan keskipisteen paikkavektori
on pätepisteiden paikkavektoreiden keskiarvo. **OP** = ½(**OA** + **OB**)

3. Kantavektoreiden virittämä koordinaatisto
Jokainen vektori **v** voidaan esittää kantavektoreiden **a** ja **b** avulla muodossa **v** = x**a** + y**b**.
(x,y) on vektorin loppupisteen koordinaatit tässä koordinaatistossa

4. Ortonormeerattu koordinaatisto
on silloin kun kantavektorit ovat kohtisuorassa ja pituudeltaan 1.

5. xy-koordinaatiston kantavektorit **i** ja **j**
i on pituudeltaan 1 ja x-akselin positiivisen suunnan suuntainen.
j on pituudeltaan 1 ja positiivisen y-akselin suuntainen.

6. Koordinaatiston paikkavektori, kun piste tunnetaan
P = (x,y) ⇔ **OP** = x**i** + y**j**

1. Määritä pisteen a) (2,3) b) (4,-1) c) (10,-12) d) (-89,97) e) (½,0) f) (0,-3) g) (a,-b) paikkavektori.

7. Koordinaatiston piste, kun paikkavektori tunnetaan
OA = r**i** + s**j** ⇔ A = (r,s)

2. Määritä piste, kun sen paikkavektori on a) 4**i** + 5**j** b) 6**i** - 7**j** c) 35**i** + 47**j** d) 50**i** e) -69**j** f) 2a**i** + 3b**j**.

8. Koordinaatistovektorin esittäminen graafisessa laskimessa TI-85
Vektorin kertoimet annetaan hakasulkujen sisällä, ts x**i** + y**j** = [x,y]

9. Laskut koordinaatistovektoreilla graafisella laskimella TI-85
Kuten muutkin laskut, käytetään vektoreita [a,b], +, - ja * merkkejä

3. Laske laskimella 3(2**i** - 3**j**) - (4**i** + 6**j**)/2.

9.2. Vektorin pituus

1. **ij**-vektorin pituus
OP = x**i** + y**j** $\Rightarrow$ | **OP** | = $\sqrt{x^2 + y^2}$

9.2.1. Laske vektorin a) 4**i** - 3**j** b) 6**i** + 8**j** c) 5**i** - 12**j** d) 15**i** + 8**j** e) 2**i** + 6**j** f) -7**j** g) a**i** + 2**j** pituus.
2. Määritä x, kun vektorin x**i** + 21**j** pituus on 29.
3. Millä x:n arvoilla vektorin (x - 1)**i** + x**j** pituus on 1?
4. Millä x:n arvoilla vektorin x**i** - (1 - 2x)**j** pituus on pienempi kuin 1?
5. Määritä x siten, että vektorit 2**i** - (x + 1)**j** ja x**i** + 3**j** ovat yhtä pitkät.
6. Kolmion kahtena sivuna on vektorit 5**i** + 3**j** ja 2**i** - **j**. Määritä kolmion sivujen pituudet.
7. Muodosta yksikkövektori $\mathbf{a}^0$, kun a) **a** = 3**i** - 4**j** b) **a** = 12**i** + 9**j** c) **a** = 7**i** - 24**j**.
8. Määritä jokin vektorien 3**i** + 4**j** ja 8**i** - 6**j** välisen kulman puolittajavektori.

2. Vektorin pituus graafisella laskimella TI-85
[2nd] [VECTR] [F3 = MATH] [F3 = norm] [[a,b]] [ENTER]

3. Yksikkövektori graafisella laskimella TI-85
[2nd] [VECTR] [F3 = MATH] [F2 = unitV] [[a,b]] [ENTER]

4. Pisteestä toiseen menevä vektori
AB = $(x_B - x_A)$**i** + $(y_B - y_A)$**j** , missä A = (x_A,y_A) ja B = (x_B,y_B)

9. Määritä vektori **AB**, kun a) A = (2,5) ja B = (6,8) b) A = (4,-3) ja B = (2,1) c) A = (-3,7) ja B = (-1,4).

9.3. Janan pituus ja keskipiste

1. Janan pituus, kun tunnetaan päätepisteiden koordinaatit
$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

9.3.1. Laske janan AB pituus, kun a) A = (2,5) ja B = (6,8) b) A = (3,7) ja B = (9,-1) c) A = (1,2) ja B = (3,-4).
2. Määritä x, kun janan AB pituus on 5 sekä A = (x,3) ja B = (4,6).
3. Mikä x-akselin piste on pisteestä (7,-6) etäisyydellä 10?

2. Janan keskipiste, kun tunnetaan janan päätepisteiden koordinaatit
$x_K = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$

4. Määritä janan AB keskipiste, kun a) A = (2,5) ja B = (6,8) b) A = (12,-16) ja B = (20,30)
5. Mikä on janan AB päätepiste B, kun A = (4,7) ja janan keskipiste on (2,-1)?

10. Vektorin komponenttiesitys

10.1. Tasovektorin komponenttiesitys

1. **ij**-vektorit samoja
x**i** + y**j** = r**i** + s**j** $\Leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = s \end{cases}$ eli kummassakin vektorissa on samoja kantavektoreita yhtä monta

10.1. Määritä x ja y, kun vektorit **a** = x**i** + 2**j** ja **b** = 3**i** + (y - 3)**j** ovat samoja.
2. Määritä x ja y, kun a) x(3**i** - **j**) + y(**i** - 2**j**) = 3**i** + 4**j** b) x(-3**i** - 2**j**) - (**i** + 4**j**) = y(-4**i** - **j**)
3. Olkoon **u** = 3**i** - **j** ja **v** = -2**i** + 4**j**. Määritä luvut x ja y siten, että **i** = x**u** + y**v**.
4. Vektorin **a** alkupiste on (x,5) ja loppupiste (3,y). Määritä x ja y siten, että **a** = 2**i** + 3**j**.
5. Olkoon **u** = -2**i** + 3**j**, **v** = 3**i** - **j** ja **w** = 6**i** + 5**j**. Määritä luvut x ja y siten, että x**u** + y**v** = **w**.

2. **ij**-vektorit yhdensuuntaisia

x**i** + y**j** || r**i** + s**j** ⇔ $\frac{x}{r} = \frac{y}{s}$.

Vektorit ovat samansuuntaisia, jos suhde on positiivinen, vastakkaissuuntaisia, jos suhde on negatiivinen.

6. Ovatko vektorit **a** = 18**i** - 24**j** ja **b** = -12**i** + 16**j** yhdensuuntaisia?
7. Millä x:n arvolla vektorit 2**i** + 3**j** ja x**i** - 2**j** ovat yhdensuuntaiset.
8. Olkoon **a** = 2**i** - 3**j** ja **b** = **i** + k**j**. Määritä vakio k, kun vektorit **a** + **b** ja 2**a** - 3**b** ovat yhdensuuntaisia.
9. Olkoon **a** = **i** + 2**j** ja **b** = 3**i** + **j**. Määritä x siten, että vektorit **a** - x**b** ja **i** + **j** ovat samansuuntaiset.

3. Tutkiminen, ovatko pisteet samalla suoralla
Ne ovat, jos yhdestä pisteestä muihin menevät vektorit ovat yhdensuuntaisia.

10. Ovatko pisteet a) (3,2), (4,3) ja (5,4) b) (1,-1), (-3,2) ja (4,-3) samalla suoralla?
11. Määritä x siten, että pisteet (1,-1), (x,3) ja (5,9) ovat samalla suoralla.
12. Millä x:n arvolla origosta alkavan vektorin **a** = 3**i** + x**j** kärki on pisteiden (1,6) ja (6,1) välisellä janalla?

4. Vektorin jakaminen komponentteihin
Muodostetaan yhtälö vektori = komponenttiensa summa (esim. **c** = x**a** + y**b**)
Sijoitetaan **a**:n, **b**:n ja **c**:n paikalle niiden **ij**-esitys.
x ja y ratkaistaan kohdan 2.6.5.1 mukaisesti saatavasta yhtälöparista

13. Jaa vektori **a** = 3**i** - 5**j** kahteen komponenttiin, joista toinen on vektorin **i** ja toinen **i** - **j** suuntainen.
14. Jaa vektori 3**i** + 13**j** vektorien **i** + **j** ja -2**i** + 3**j** suuntaisiin komponentteihin.
15. Mikä on se vektorin **i** + 3**j** suuntainen vektori, jonka toinen komponentti on 28**i** + 7**j** ja toinen komponentti vektorin 22**i** - 11**j** suuntainen?
16. Olkoon **a** = 2**i** + 3**j**, **b** = 3**i** - 2**j** ja **c** = 13**j**. Esitä vektori **c** vektoreiden **a** ja **b** avulla.
17. Olkoon A(6,8) ja B(1,-5). Jaa **AB** vektoreiden **a** = **i** - 3**j** ja **b** = 2**i** + **j** suuntaisiin komponentteihin.

10.2. Avaruuskoordinaatisto

1. Yleisten kantavektoreiden muodostama avaruuskoordinaatisto
Jokainen vektori **v** voidaan esittää kantavektoreiden **a**, **b** ja **c** avulla muodossa **v** = x**a** + y**b** + z**c**
(x,y,z) on vektorin loppupisteen koordinaatit tässä koordinaatistossa

2. Ortonormeerattu avaruuskoordinaatisto
Kantavektorit ovat pareittain kohtisuorassa ja kantavektoreiden pituudet ovat 1.
Vektorit muodostavat järjestyksessä oikeankätisen kannan.

3. xyz-koordinaatiston kantavektorit **i**, **j** ja **k**
i on pituudeltaan 1 ja positiivisen x-akselin suuntainen
j on pituudeltaan 1 ja positiivisen y-akselin suuntainen
k on pituudeltaan 1 ja positiivisen z-akselin suuntainen

4. Pisteen ja paikkavektorin välinen yhteys
P = (x,y,z) ⇔ **OP** = x**i** + y**j** + z**k**

10.2.1. Määritä pisteiden a) A = (2,3,1) b) B = (4,-7,3) c) C = (5,0,-8) d) D = (0,3,0) paikkavektorit.
2. Minkä pisteen paikkavektori on a) 2**i** + 7**j** - 4**k** b) 3**i** - 6**j** + 5**k** c) 4**j** - 9**k** d) (2**i** + 3**j** - 4**k**) - (**i** - 2**j** - 4**k**)?
3. Millä vakion a arvolla paikkavektori 2a**i** - (a - 2)**j** + (a - 1)**k** on xz-tasossa?

5. **ijk**-vektorin pituus
|**OP**| = $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

4. Laske vektorin a) **a** = 2**i** + **j** - 2**k** b) **b** = 3**i** - 2**j** - 6**k** c) **c** = 8**j** - 6**k** d) **d** = 4**i** - 3**j** + 5**k** pituus.
5. Laske vektorin **a** = 2**i** - 3**j** + 6**k** pituus ja yksikkövektori.
6. Mikä on x, kun vektorin x**i** + 3**j** - 2**k** pituus on 7.
7. Määritä x, kun vektorin x(**i** - 2**j** + **k**) + **k** pituus on 3.
8. Millä x:n arvolla vektori xi + (x - 4)j + 3k on mahdollisimman lyhyt?

6. Pisteestä toiseen menevä vektori
AB = $(x_B - x_A)$**i** + $(y_B - y_A)$**j** + $(z_B - z_A)$**k**

9. Määritä AB; kun a) A = (1,2,3) ja B = (5,-6,-7) b) A = (0,3,4) ja B = (8,-6,-5).

7. Avaruusjanan pituus, kun tunnetaan janan päätepisteet
$\|\mathbf{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

10. Mikä on pisteiden a) (2,3,4) ja (5,1,-2) b) (4,5,6) ja (3,0,-1) välisen janan pituus?
11. Laske kolmion A(1,3,2) B(0,1,0) C(3,2,4) sivujen pituudet.
12. Mikä on x, kun janan A(x,4,5) B(7,6,6) pituus on 3?
13. Mikä y-akselin piste on yhtä etäällä pisteistä (4,5,6) ja (2,-3,4)?

8. Avaruusjanan keskipiste, kun tunnetaan janan päätepisteet
$x_K = \frac{x_A + x_B}{2}$; $y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$; $z_K = \frac{z_A + z_B}{2}$

14. Mikä on janan a) A(2,3,4) B(8,-9,10) b) A(5,-4,3) B(11,10,9) keskipiste?
15. Määritä piste A, kun janan AB keskipiste on (4,1,-3) ja B = (5,7,-4).

9. Pisteen koordinaattien määrittäminen vektoreilla
JOKO Lasketaan pisteen paikkavektori
TAI Merkitään pisteen koordinaatteja (x,y,z).
Esitetään jokin vektori kahdella eri tavalla käyttäen annettuja tietoja ja tuntemattomia x, y ja z..
Tuntemattomat ratkaistaan yhtälöryhmästä: kummassakin on oltava sama määrä samoja kantavektoreita

16. Vektorin **a** = 3**i** + 4**j** alkupiste on (5,2). Mikä on vektorin loppupiste?
17. Määritä vektorin **a** = 2**i** - **j** + 2**k** suuntaisen vektorin loppupiste, kun alkupiste on (2,1,0) ja pituus 15.
18. Suunnikkaan ABCD kärkinä ovat A(3,5), B(6,6) ja C(4,7). Määritä kärjen D koordinaatit.
19. Suunnikkaan kolme kärkeä ovat (1,2,3), (-2,1,-5) ja (0,3,-2). Missä voi olla 4. kärkipiste?
20. Olkoon A(-3,4) ja B(2,-1). Määritä piste, joka jakaa janan AB sisäpuolisesti suhteessa 2:3.
21. Mikä piste jakaa janan AB suhteessa 1:3, kun A(2,7,-3) ja B(3,0,4)?
22. Olkoon A(1,2), B(3,-5) ja C(2,3). Mikä on a) sivun BC keskipiste b) kolmion painopiste?
23. Tetraedrin kärjet ovat origo, (-1,-3,2), (4,-1,-2) ja (3,1,6). Laske tetraedrin painopiste.
24. Kolmion kaksi kärkeä ovat (1,3) ja (-2,1). Keskijanojen leikkauspiste on origo. Mikä on kolmas kärki?
25. Missä pisteessä pisteiden (8,-3,7) ja (2,5,-1) kautta kulkeva suora leikkaa xz-tason?
26. Janalla A(11,23)B(41,63) on 4 pistettä, jotka jakavat janan yhtä pitkiin osiin. Määritä nämä pisteet.

10. **ijk**-vektorit samoja
$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = r\mathbf{i} + s\mathbf{j} + t\mathbf{k} \Leftrightarrow \begin{cases} x = r \\ y = s \\ z = t \end{cases}$

27. Määritä x, y ja z, kun (x - 2)**i** + (3 - y)**j** - (z - 5)**k** = 6**i** - 7**j** + 8**k**.
28. Määritä luvut a, b ja c, kun a(2**i** - **j** + **k**) + b(**i** - 2**k**) + c(3**j**) = 5**k** - **j**.
29. Olkoon A(2,1), B(-1,0) ja C(1,-4). Määritä piste P, kun **AP** + **BP** + **CP** = **0**.

11. **ijk**-vektorit yhdensuuntaisia
$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \parallel r\mathbf{i} + s\mathbf{j} + t\mathbf{k} \Leftrightarrow \frac{x}{r} = \frac{y}{s} = \frac{z}{t}$

30. Ovatko vektorit a) **i** - 2**j** + **k** ja -2**i** + 4**j** - 2**k** b) 2**i** - 4**k** ja -**i** + 2**j** yhdensuuntaisia?
31. Määritä vakio t siten, että vektorit ½**i** + t**j** + **k** ja -**i** + 1½**j** - 2**k** ovat yhdensuuntaisia.
32. Määritä x ja y siten, että vektorit x**i** + y**j** + (x + 6)**k** ja 2**i** + 3**j** + 5**k** ovat yhdensuuntaiset.
33. Määritä x, kun vektorit x^2**i** + (x - 2)**j** + 8**k** ja 2**i** + x**j** + **4**k ovat yhdensuuntaisia.

12. 3 pistettä samalla suoralla
jos kaksi erilaista pisteiden välistä vektoria ovat yhdensuuntaisia.

34. Ovatko pisteet (1,2,4) , (0,0,3) ja (-3,-6,0) samalla suoralla?
35. Osoita, että pisteet (2,3,4) , (4,4,2) ja (8,6,-2) ovat samalla suoralla.
36. Määritä x ja y, kun pisteet (4,3,5) , (5,5,8) ja (x,y,2) ovat samalla suoralla.

13. 3 vektoria samassa tasossa
jos jokin vektoreista voidaan esittää kahden muun avulla (lineaarisena yhdistelynä)
eli jos on olemassa luvut x ja y siten, että **c** = x**a** + y**b**

37. Onko vektori **c** = 2**i** + **j** - **k** vektoreiden **a** = **i** + **j** ja **b** = **j** + **k** määräämässä tasossa?
38. Ovatko vektorit **i** + 2**j**, 3**i** - **j** + **k** ja **i** - 4**j** + **k** samassa tasossa?
39. Ovatko vektorit **i** + **j**, **i** - **k** ja **j** + **k** saman tason suuntaiset?

14. 4 pistettä samassa tasossa
jos jostakin pisteestä muihin kolmeen menevät vektorit ovat samassa tasossa
eli jos on olemassa luvut x ja y siten, että **AD** = x**AB** + y**AC**

40. Ovatko pisteet A = (1,0,2), B = (3,-1,-1), C = (-1,5,1) ja D = (3,-13,11) samassa tasossa?
41. Ovatko pisteet (1,1,1), (3,2,4), (7,8,9) ja (-1,-1,-1) samassa tasossa?

15. Onko 3 vektoria avaruuden kantavektoreita
Tutkitaan, ovatko ne $\neq$ **0** ja ne eivät ole samassa tasossa (**a** $\nparallel$ **b** ja ei ole x, y siten, että **c** = x**a** + y**b**)

42. Voivatko vektorit **a** = **i** + 2**j**, **b** = 3**i** - **j** + **k** ja **c** = **i** - 4**j** + **k** olla avaruuden kantavektoreita?
43. Osoita, että vektorit **i** + **j**, **i** - 2**k** ja 2**j** + **k** ovat 3-ulotteisen avaruuden kantavektoreita.

11. Skalaaritulo

11.1. Vektori- ja skalaariprojektio

1. Vektorin **a** vektoriprojektio vektorilla **b**
on **a**:n alkupisteen projektiopisteestä **b**:llä loppupisteen projektiopisteeseen **b**:llä menevä vektori

2. Vektorin skalaariprojektio
on vektoriprojektion pituus.

3. Vektorien välinen kulma
on pienempi niistä kahdesta kulmasta, jotka muodostuvat kun vektorit laitetaan alkamaan samasta pisteestä

4. Skalaariprojektio vektorin pituudesta ja niiden välisestä kulmasta
$b_a = |\,\mathbf{b}\,| \cdot \cos\alpha$, missä $\alpha = \angle(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

11.1.1. Laske b_a ja a_b, kun $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 10$ ja vektoreiden välinen kulma on 60°.
2. Kuinka pitkä on vektori **a**, kun sen skalaariprojektio **b**:llä on -5 ja vektoreiden välinen kulma on 120°?

5. Vektoriprojektio skalaariprojektion avulla
$\mathbf{b_a} = b_a \cdot \mathbf{a^0}$, missä $\mathbf{b_a}$ on vektoriprojektio b_a on skalaariprojektio ja $\mathbf{a^0}$ on **a**:n suuntainen yksikkövektori.

3. Laske $\mathbf{b_a}$, kun $|\mathbf{b}| = 30$, **a** = 3**i** - 4**j** sekä vektoreiden **a** ja **b** välinen kulma on 60°.

11.2. Skalaaritulon määritelmä

1. Skalaaritulo
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\,\mathbf{a}\,| \cdot |\,\mathbf{b}\,| \cdot \cos\alpha$, missä $\alpha = \angle(\mathbf{a},\mathbf{b})$

12.2.1. Laske $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, kun $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 10$ ja vektoreiden välinen kulma on a) 0° b) 60° c) 90° d) 120° e) 180°.
2. Suorakulmiossa ABCD on AB = 8 ja BC = 6. Laske a) **AB · AD** b) **AB · DC** c) **AB · DC** d) **AC · BD**.
3. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin sivusärmä on 6 ja pohjasärmä 4. Pohjaneliö on ABCD ja pyramidin kärki E. Laske a) **BA · BE** b) **BA · BD** c) **EA · EC**.

2. Skalaaritulo skalaariprojektion avulla
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\,\mathbf{a}\,| \cdot b_a = |\,\mathbf{b}\,| \cdot a_b$

4. Laske $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, kun $|\mathbf{a}| = 6$ ja $b_a = 4$. Laske $|\mathbf{b}|$, kun $a_b = 8$.

11.3. Skalaaritulon laskulait

1. Skalaaritulon vaihdantalaki
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

2. Skalaaritulon osittelulaki
$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

3. Skalaarikertoimen siirtosääntö
$(r\mathbf{a}) \cdot (s\mathbf{b}) = (rs)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

4. Vektorin neliö
$\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$

11.4. Skalaaritulo kannassa (**i**,**j**,**k**)

1. **ijk**- vektorien skalaaritulo
(x**i** + y**j** + z**k**) · (r**i** + s**j** + t**k**) = xr + ys + zt , eli **i**:n kertoimien tulo + **j**:n kertoimien tulo + **k**:n kertoimen tulo

11.4.1. Laske **a · b**, kun a) **a** = 3**i** + 4**j** , **b** = 6**i** + 5**j** b) **a** = 2**i** - 4**j** + 5**k** , **b** = **i** + 3**j** + 8**k** c) **a** = x**i** + 2**j** , **b** = 3**i** - 4**j**
2. Olkoon **a** = 3**i** + 4**j** - **k** ja **b** = -**i** + **k**. Laske a) **a · b** b) **a** · (**a** - **b**) c) 2**a** · (**a** - 2**b**)

2. Skalaaritulosta saatavan yhtälön ratkaiseminen
Laske pistetulo. Tee vaadittu yhtälö. Ratkaise kyseinen yhtälö.

3. Mikä on x, kun **a · b** = - 1 ja **a** = x**i** + 2**j** - 3**k** ja **b** = x(**i** - 2**j**) + 2**k**.
4. Olkoon **a** = **i** + 2**j** + x**k** ja **b** = 2**i** - 3**j** + 2**k**. Määritä luku x siten, että **a** · (**a** + **b**) = 9
5. Olkoon A = (x,x,x), B = (3,0,0,) ja C = (0,0,3). Millä x:n arvolla **AB · AC** < 0?

3. Pistetulo graafisella laskimella TI-85
2nd | VECTR | F3 = MATH | F4 = dot | [a,b] , [c,d] | ENTER

6. Laske a) (2i - 3j) · (5i - 4j) b) [4,-1] · [-3,2]

11.5. Skalaaritulon sovelluksia

1. Vektorin pituus skalaaritulon avulla
$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ eli vektorin pituus toiseen on vektorin pistetulo itsensä kanssa

11.5.1. Olkoon |**a**| = 4 , |**b**| = 7 ja **a · b** = 8. Laske vektorin a) **a** + **b** b) 3**a** - 2**b** pituus.
2. Vektorien **a** ja **b** pituudet ovat 2 ja 4 sekä niiden välinen kulma 120°. Laske vektorin 2**a** + 3**b** pituus.
3. Vektorien **a**, **b** ja **a** - **b** pituudet ovat 5, 6 ja 7. Laske vektorin **a** + **b** pituus.

2. Janan pituuden laskeminen geometrisessa tehtävässä muuttamalla se vektoritehtäväksi
Esitetään laskettava jana vektoreilla ja lasketaan tämän vektorin pituus esim. eo. tavalla

4. Suunnikkaan sivut ovat 2 ja 3 sekä niiden välinen kulma 60°. Laske lävistäjien pituudet.
5. Määritä kolmion keskijanojen pituudet, kun AB = 4, AC = 3 ja kulma A = 120°.

3. Vektorien välisen kulman laskeminen
$\cos \alpha = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$

6. Laske vektorien **a** ja **b** välinen kulma, kun **a · a** = 8, **b · b** = 9 ja **a · b** = -6
7. Laske vektoreiden a) 4**i** + 3**j** ja 2**i** - **j** b) **i** - **j** + 2**k** ja 2**i** + 3**j** välinen kulma.
8. Kolmion kärjet ovat A(1,1,1), B(4,6,-1) ja C(9,4,6). Laske kolmion kulmat.
9. Laske vektorin 4**i** + 8**j** + **k** ja positiivisten koordinaattiakselien väliset kulmat.
10. Laske vektorin 3**i** + 12**j** + 4**k** ja xz-tason välinen kulma.
11. Olkoon |**a**| = |**b**| = 6 ja **a · b** = 20. Laske a) ∠(**a**,**b**) b) ∠(**a**,**b** - **a**) c) ∠(**a** + **b**,**a** - **b**)
12. Tetraedrin kärjet ovat origo, A(3,0,0), B(0,4,0) ja C(1,2,4). Määritä pienin särmien välisistä kulmista.
13. Määritä x siten, että vektorien x**i** + **j** ja 2**i** + **j** välinen kulma on 45°.

4. Vektorien kohtisuoruus
$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \text{ , } \mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$

14. Osoita, että vektorit a) 4**i** - 5**j** ja 15**i** + 12**j** b) 3**i** + 4**j** - 5**k** ja 3**i** + 4**j** + 5**k** ovat kohtisuorassa.
15. Mikä on x, kun vektorit 3**i** - 5**j** + x**k** ja -4**i** - x**j** - ½x**k** ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
16. Samasta pisteestä alkavat vektorit **a** = 2**i** + **j** + 4**k**, **b** = -**i** + 3**j** + **k** ja **c** = 3**i** + **j** määräävät suuntaissärmiön. Osoita, että vektorin **a** alku- ja loppupisteestä piirretyt särmiön avaruuslävistäjät ovat kohtisuorassa.
17. Jaa vektori **a** = **i** - **j** + 3**k** kahteen komponenttiin, joista toinen on vektorin **b** = 2**i** - 4**j** + 4**k** suuntainen ja toinen vektoria **a** vastaan kohtisuorassa.
18. Olkoon **a** = 24**i** - 10**j** - 13**k** ja **b** = 2**i** - 2**j** - **k**. Jaa vektori **a** komponentteihin, joista toinen on **b**:n suuntainen ja toinen kohtisuorassa **b**:tä vastaan.
19. Osoita, että **i** - **j** on kohtisuorassa pisteiden (1,2,3), (2,3,4) ja (3,4,4) kautta kulkevaa tasoa vastaan.
20. Miltä xy-tason viivalta pisteitä (0,0,1) ja (6,8,1) yhdistävä jana näkyy suorassa kulmassa?
21. Kuinka kaukana on origo pisteiden (-3,6,0) ja (-1,4,1) kautta kulkevasta suorasta?

5. Ehto, että vektorien välinen kulma on tylppä tai terävä
Vektoreiden välinen kulma on tylppä, jos $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ ja terävä, jos $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$

22. Millä x:n arvoilla vektorien $x\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ja $\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ välinen kulma on a) terävä b) tylppä c) suora?
23. Osoita, että vektorien $x\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ja $x\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ välinen kulma on terävä kaikilla x:n arvoilla?
24. Millä x:n arvoilla vektoreiden $\mathbf{a} = x(\mathbf{i} + \mathbf{j}) - \mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = x^2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ välinen kulma on terävä?
25. Osoita, että vektorien $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ ja $t\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + (1 - 2t)\mathbf{k}$ välinen kulma on tylppä kaikilla t:n reaaliarvoilla.
26. Kolmion kärjet ovat origo, $A(1,t,t^2)$ ja $B(4,-4,1)$. Osoita, että kulma AOB $\leq 90°$.

6. Skalaariprojektio skalaaritulosta
$$b_a = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\,\mathbf{a}\,|}$$

27. Laske skalaariprojektio b_a, kun a) $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ ja $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ b) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

7. Vektoriprojektio skalaaritulon avulla
$$\mathbf{b_a} = b_a \cdot \mathbf{a^0} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\,\mathbf{a}\,|} \cdot \mathbf{a^0}$$

28. Laske vektoriprojektio $\mathbf{b}_a$, kun a) $\mathbf{a} = 12\mathbf{i} + 16\mathbf{j}$ ja $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ b) $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

12. Vektoritulo

12.1. Vektoritulon määritelmä

1. Vektori- eli ristitulo
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\,\mathbf{a}\,| \cdot |\,\mathbf{b}\,| \cdot \sin\alpha \cdot \mathbf{e^0}$, missä α on vektoreiden **a** ja **b** välinen kulma ja $\mathbf{e^0}$ on yksikkövektori, joka on kohtisuorassa vektoria **a** ja vektoria **b** vastaan sekä **a**, **b** ja $\mathbf{e^0}$ muodostavat oikeankätisen järjestelmän

12.2. Ominaisuuksia

1. Vaihdantalaki ?
ei ole voimassa

2. Osittelulait
$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ ja $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

3. Skalaarikertoimen siirtosääntö
$(r\mathbf{a}) \times (s\mathbf{b}) = (rs)(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

12.3. **ijk**-vektoreiden vektoritulo

1. $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k}$, ...
$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$

12.3.1. Määritä a) $2\mathbf{i} \times 3\mathbf{j}$ b) $3\mathbf{i} \times 4\mathbf{k}$ c) $5\mathbf{j} \times 6\mathbf{k}$ d) $(-2\mathbf{i}) \times (-5\mathbf{k})$ e) $(2\mathbf{k}) \times (-3\mathbf{j})$ f) $(-\mathbf{j}) \times (-5\mathbf{i})$
2. Laske a) $3\mathbf{i} \times (4\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$ b) $2\mathbf{j} \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$ c) $4\mathbf{k} \times (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$
3. Laske $(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \times (5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$

2. Vektoritulo determinanttimuodossa
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

4. Laske a) $(\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$ b) $(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$
5. Muodosta vektorit, jotka ovat kohtisuorassa vektoreita $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ja $2\mathbf{i} - \mathbf{k}$ vastaan ja joiden pituus on 18.
6. Mikä on vektoreiden $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ja $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ määräämää tasoa vastaan kohtisuora yksikkövektori.

3. Vektoritulo graafisella laskimella TI-85
[2nd] [VECTR] [F3 = MATH] [F1 = cross] [[a,b] , [c,d]] [ENTER]

7. Laske a) (3i - 2j + k) x (2i + 3j + 4k) b) [2,3,-1] x [3,-4,2]

4. Vektorikolmitulo
on $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

8. Olkoon $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ja $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Muodosta vektori a) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

12.4. Kolmion ja suunnikkaan pinta-ala

1. Suunnikkaan ala vektoritulolla
$A = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, missä **a** ja **b** ovat suunnikkaan viereiset sivuvektorit

12.4.1. Suunnikkaan sivuina ovat vektorit $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$. Laske suunnikkaan ala.
2. Nelikulmion kärjet ovat A(1,1,1), B(2,3,4), C(-1,2,1) ja D(-2,0,-2). Osoita, että nelikulmio on suunnikas ja laske sen ala.

2. Kolmion ala vektoritulolla
$A = \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, missä **a** ja **b** ovat kolmion kaksi sivuvektoria.

3. Kolmion kahtena sivuvektorina on $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Laske kolmion ala.
4. Kolmion kärkinä ovat A(1,1,0), B(2,1,-1) ja C(3,4,2). Laske kolmion ala.
5. Määritä x-akselilta piste, joka pisteiden (1,0,2) ja (2,3,1) kanssa muodostaa kolmion, jonka ala on 4?

3. Korkeuden tai etäisyyden laskeminen alasta
Lasketaan ala eo. tavalla ja kantasivuna olevan vektorin pituus.
A = kanta · korkeus (jos suunnikas), mistä yhtälöstä voidaan ratkaista korkeus.

6. Suunnikkaan kantasivuna on vektori $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ja kylkenä $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$. Laske suunnikkaan korkeus.
7. Kolmion kärjet ovat A(1,1,1), B(2,1,3) ja C(-1,2,-2). Laske AB:lle piirretyn korkeusjanan pituus.
8. Mikä on pisteen A(2,1,3) etäisyys pisteiden B(1,0,-1) ja C(0,2,1) kautta kulkevasta suorasta?
9. Mikä x-akselin piste on pisteiden (1,2,3) ja (3,4,2) kautta kulkevasta suorasta etäisyydellä 4?

12.5. Skalaarikolmitulo

1. Skalaarikolmitulo
on $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$, jota voidaan merkitä myös $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

2. Lasku suorittamalla ensi vektori- ja sitten pistetulo
Lasketaan vektoritulo kohdan 12.3.2 mukaisesti ja sen jälkeen pistetulo (kohdan 11.4.1 mukaisesti)

12.5.1. Olkoon $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ja $\mathbf{c} = 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Muodosta a) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ b) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

3. Laskeminen determinanttimuodosta

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

2. Laske $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ ja $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, kun $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ja $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

12.6. Skalaarikolmitulon sovelluksia

1. Suuntaissärmiön tilavuus skalaarikolmitulosta
$V = |\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|$, missä **a**, **b** ja **c** ovat särmiön eri sivuvektorit

12.6.1. Suuntaissärmiön samasta kärjestä lähtevät vektorit $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ja $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{k}$ ovat särminä. Laske suuntaissärmiön tilavuus.

2. 4-sivuisen pyramidin tilavuus skalaarikolmitulosta, kun pohja on suunnikas.
$V = \frac{1}{3} \cdot |\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|$, missä **a**, **b** ja **c** ovat samasta kärjestä lähtevät särmävektorit

2. Pyramidin pohja on suunnikas, jonka sivuina ovat vektorit $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ja $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ sekä samasta kärjestä lähtevä sivuvektori on $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$. Laske pyramidin tilavuus.

3. Tetraedrin tilavuus skalaarikolmitulosta
$V = \frac{1}{6} \cdot |\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|$, missä **a**, **b** ja **c** ovat samasta kärjestä lähtevät särmävektorit.

3. Mikä on sen tetraedrin tilavuus, jonka kärkinä ovat (2,1,1), (1,-1,2), (0,1,-1) ja (1,-2,1)

4. Korkeuden tai etäisyyden laskeminen tilavuudesta
Lasketaan tilavuus kuten edellä ja pohjan ala ristitulon itseisarvosta 12.4.1
Korkeus saadaan yhtälöstä $V = A \cdot h$ (jos kyseessä suuntaissärmiö)

4. Tetraedrin pohjan kärjet ovat (2,1,3), (4,2,5) ja (6,2,6) sekä huippu pisteessä (4,0,0). Laske korkeus.
5. Kuinka kaukana piste (4,0,8) on pisteiden (1,3,0), (3,1,8) ja (4,3,6) määräämästä tasosta?
6. Ovatko pisteet (1,2,3), (2,4,3), (1,3,2) ja (2,6,1) samassa tasossa?

Vastaukset E-tehtäviin

1.1.1. $\sin\alpha = 3/5$, $\cos\alpha = 4/5$, $\tan\alpha = ¾$
2. $\sin\alpha = 12/13$, $\cos\alpha = 5/13$, $\tan\alpha = 12/5$
3. $\sin\alpha = 4/5$, $\cos ½\beta = 4/5$
4. ¾
5. 4,7 cm, 5,4 cm
6. 5,3 cm
7. 35,2°, 54,8°
8. 32,1 cm
9. 28 cm
10. k = 12,9, A = 49,2
11. 73,5
12. 270 m
13. 100 m
14. 72,5°, 107,5°
15. 14,9°
16. 105°
17. 36,4°
18. 3,4 m
19. $\sin x = \sqrt{15}/4$, $\tan x = \sqrt{15}$
20. a) $\sin x = 3/5$, $\cos x = 4/5$
b) $\cos x = 12/13$, $\tan x = 5/12$
21. $\sin x = 2/\sqrt{5}$, $\cos x = 1/\sqrt{5}$
22. $\cot\alpha = 4/3$, $\sec\alpha = 5/4$, $\operatorname{cosec}\alpha = 5/3$
23. a) 2,61 b) 1,21 c) 1,24

1.2.1, $8/\sqrt{3}$
2. 8,2 cm
4. 12,7 cm, 16,0 cm, 18,3 cm
5. 71°, 8,8 cm, 9,5 cm
6. a) ei mahd. b) 54,3° ja 95,7° tai 125,7° ja 24,3°
7. 58,9°, 31,4 cm, 25,1 cm
8. 8,8 cm
9. 10,3 cm
10. 2150 m
11. 14,6 km
12. 190 m
13. 412 cm^2
14. 30° tai 150°
15. 18,4
16. 3,14157, $\pi \approx 3{,}14159$
17. 6,5, 16,5° ja 96,3°
18. 29,9°
19. 1,39
20. 4,2
21. $\sqrt{46}$
22. 66,20 m
23. $\sqrt{28}$
24. $¾\sqrt{15}$
25. $6\sqrt{5}$ tai $2\sqrt{205}$
26. 24
27. $¾\sqrt{15}$

2.1.1. $20° + n\cdot 360°$
2. a) 280° b) 280°
3. a) π b) $1½\pi$ c) 5,75

2.2.1. a) $5\pi/9$ b) $\pi/5$ c) $-2\pi/15$
d) $50\pi/9$ e) 200π
2. a) 22,5° b) 540° c) 72°
d) 573° e) -135°
3. 13 cm
4. 86°
5. 380 m
6. 11,7 cm
7. 0,59 rad
8. 360 cm^2
9. 45,8°
10. 2,1 cm^2
11. 2,5 cm
12. 5 cm^2
13. 3,3 cm

3.1.1.a) $\sin\alpha = 0{,}8$, $\cos\alpha = 0{,}6$, $\tan\alpha = 1{,}33$ b) $\sin\alpha = -3/5$, $\cos\alpha = -4/5$, $\tan\alpha = ¾$
c) $\sin\alpha = -12/13$, $\cos\alpha = 5/13$, $\tan\alpha = -12/5$
2. a) $\sin 30° = ½$, $\cos 30° = ½\sqrt{3}$, $\tan 30° = 1/\sqrt{3}$ b) $\sin 135° = ½\sqrt{2}$, $\cos 135° = -½\sqrt{2}$, $\tan 135° = -1$ c) $\sin 210° = -½$, $\cos 210° = -½\sqrt{3}$, $\tan 210° = 1/\sqrt{3}$
3. a) $(½, ½\sqrt{3})$ b) $(-½, -½\sqrt{3})$
c) (0,629, 0,777)
4. a) S = 3,p = 1 b) S = -1,p = -5
c) S = 9, p = -1
5. a) 2 b) 2
6. S = 5, p = ½
7. a) S = 1,p = -1 b) S = 1,p = 0
8. a) $x \neq ¼\pi + n\cdot ½\pi$ b) $x \neq ½\pi + n\cdot\pi/3$ c) $x \neq ¼\pi + n\cdot ½\pi$

3.2.1. a) π b) 6π c) $¼\pi$
2. a) $2\pi/5$ b) 2π c) $\pi/6$

3.3.1. a) $(1, 1/\sqrt{3})$ b) (1,1)
c) $(1, \sqrt{3})$ d) ei ole e) $(1, -\sqrt{3})$
f) (1; 2,97)

4.1.1. ½
2. a, b
3. a) tan 40° b) tan x
c) tan (3x + 10°) d) tan 40°
4. a) $½\sqrt{3}$ b) $\sqrt{1 - a^2}$
5. 1

4.2.1. a) 0,77 b) b
2. 2a
3. a) -a b) 0,91
4. 2b
5. a) -2,9 b) -b
6. a) -0,4 b) -a
7. 0
8. a) a b) a
9. 0
10. a) -1,5 b) -b
11. a) -a b) $\alpha = 54°$
12. $\alpha = 230°$
13. 3a
14. a) -a b) -b
15. 252,5°
16. -a
17. a) a b) b
18. 238°
19. a) a b) -a c) -a d) -a
20. a) -b b) -b c) b d) b
21. a) -c b) c c) -c d) -c
22. 330,5°
23. a) 1 b) 1 c) 1
24. a) 0,8 b) -0,8
25. a) tan 56° b) tan 56°
c) -tan 56° d) - $\tan(\pi + x)$
26. a) a b) a c) -a
27. a) a b) -a c) -a
28. $\sin\alpha = -3/5$, $\cos\alpha = -4/5$
29. $\sin\alpha = -\sqrt{5}/3$, $\tan\alpha = -\sqrt{5}/2$
30. $\cos\alpha = 3/5$, $\tan\alpha = -4/3$
31. a) $3\sin\alpha$, b) $1/\cos x$
32. $1 + \sin x$

4.3.1.a) sinx+cosx b) $¼(\sqrt{2}+\sqrt{6})$
2. 63/65
3. $-\sqrt{3}\sin x$
4. $\dfrac{4\sqrt{3} - 3}{10}$
5. $-2 - \sqrt{3}$
6. -3
7. a) cos x
b) $½(\sqrt{3}\cos x - \sin x)$

8. $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{5}}{6}$
9. ½[($\sqrt{3}$+1)sin x+ ($\sqrt{3}$ -1)cos x]
10. a) -cos x b) sin x c) -sin x
11. $\frac{3 + \sqrt{21}}{8}$
12. $\sqrt{3}$sin x
13. a) -tan x b) 2 - $\sqrt{3}$
c) $\frac{4\tan x}{1 - \tan^2 x}$
14. -1/13
15. -24/25
16. 3/5
17. ¾
18. S = 20, p = 12
19. a) ½ b) -½ c) 3/5
20. -½$\sqrt{3}$
21. a) 8/15 b) $\sqrt{15}$/7
22. a) ½ b) -2
23. a) cos x
b) cos x(4sin x - 8$\sin^3$ x)
24. Arvo = 1
25. $8a^4 - 8a^2 + 1$

5.1.1. a) [2,4] b) [-2,2] c) [1,5]
2. |a| ≥ ½
3. 2 yksikköä yläpuolella
4. a) sin x - 3 b) sin x + 3
5. y on joka kohdalla x 2-kertainen
6. 3sin x
7. a) 2π/5 b) 4π
8. 6
9. a) sin (x - 2) b) sin (x + 2)

5.2.1. S = 5, p = -1

5.3.1. a) ¼π + n·½π b) n·½π
c) π + n·2π

6.1.1. a) 20° + n·360°,160° + n·360°
b) 10° + n·180°, 80° + n·180°
c) n·360°, 60° + n·120°
d) 20° + n·360°, 53,3° + n·120°
2. a) π/6 + n·π, π/3 + n·π
b) π/8 + n·½π, ¼π + n·π
c) π/6 + n·2π/3, 7π/6 + n·2π
3. a) ±40° + n·360°
b) ±10° + n·90° c) n·120°, n·72°
d) 20° + n·120°, -12° + n·72°
4. a) ±π/6 + n·π b) ¼π + n·π, π/12 + n·π c) π/6 + n·2π/3
5. a) 54° + n·180° b) 18° + n·60° c) 27° + n·90° d) n·180°
6. a) π/8 + n·½π b) ¼π + n·½π
c) ¼π + n·½π
7. -165°, -105°, 15°, 75°, 195°, 255°

6.2.1. a) 36,9° + n·360°, 143,1° + n·360° b) 8,7° + n·180°, 81,3° + n·180° c) 47,2° + n·180°, 92,8° + n·180° d) 35,2° + n·180°, 104,8° + n·180°
2. a) ±78,5° + n·360° b) ±22,1° + n·120° c) 95° + n·360°, -25° + n·360° d) 100,4° + n·360°, -60,4° + n·360°
3. a) 63,4° + n·180° b)16,3° + n·180° c) 62° + n·90°
4. a) n·180° b) 90° + n·180°
c) 45° + n·180° d) 90° + n·180°

6.3.1. a) 30° + n·120°, 90° + n·360° b) 23,3° + n·120°, 110° + n·360° c) 40° + n·90°, 50° + n·180°
2. a) n·120°, 180° + n·360°
b) 20° + n·120°, 120° + n·360°
c) -5° + n·180°, 67,5° + n·90°
3. a) 60° + n·120°, 180° + n·360° b) 56,7° + n·120°, -170° + n·360° c) π/12 + n·π/3, π/8 + n·½π
4. a) n·60° b) 8° + n·32°
c) 10° + n·45°
5. a) 26,6° + n·180° b) 6,6° + n·45° c) 53,1° + n·180°
6. a) ±49,1° + n·180° b) 71,6° + n·180°, -45° + n·180°
7. a) n·180°, ±60° + n·360°
b) 15° + n·180°, 75° + n·180°, ±34,8° + n·120° c) n·180°, 90° + n·360°
8. a) n·180°, 30° + n·360°, 150° + n·360° b) 90° + n·180°, 71,6° + n·180° c) n·360°, 45°+ n·180°
9. a) 90° + n·180°, 14,5° + n·360°, 165,5° + n·360° b) ei ratk. c) n·180°, -45° + n·180°
d) n·180°
10. 45° + n·360°
11. a) 45° + n·90° b) -90° + n·360° c) n·360°, ±109,5° + n·360°

7.1.1. a) BA, CB, CA, ED, FE, FD, HG, IH, IG b) DB, EC, GC, HF, GE
2. BC, DE, EF, GH, HI, BA, CB, ED, FE, HG,IH b) AC, CA, DF, GI, IG, c) BD, CE, EC, EG, GE, HF, FH
3. a) **BC**, **DE**, **EF**, **GH**, **HI** b) **GF**
4. a) (7,2) b) (3,10)

7.2.2. a) **PR** b) **XZ** c) **IL**
3. a) 14 b) 2 c) 10 d) 2$\sqrt{37}$
4. a) 7 b) 17 c) 13 d) $\sqrt{229}$
5. a) **RQ** b) **ZY** c) **VU**

7.3.1. a) 21 b) 35
2. a) 30**a** b) 7**a** + 14**b**
3. a) 3**a** + 3**b** b) 7**a**
4. a) **a**/5 b) 5$\mathbf{a}^0$
5. a) 2**a** + 17**b** b) 5**a** + 6**b**
6. a) **b** - **a** b) ½**a** - **b**
7. a) **a** - **b** b) **a** + **b**
8. a) ½**a**+½**b** b) ½**b**-**a** c) ½**a**-**b**
9. a) **a** - **b** b) **a** - **b** - **c** c) -**b** - **c**
10. a) **a** + **b** b) **a** - **b** c) -**a**/3 - ½**b**
d) **a**/6 + ½**b** e) **a**/6 - ½**b**
11. 2**a**

8.1.1. a) 7**a**/5 b) - 7**a**/5
2. -2½**a**
6. **a** = (1 + k)**b** - k**c**

8.2.1. a) 2:1 b) 1:2
2. a) ¼**a** b) - ¾**a**
3. 3:2
4. a) 2**a**/9 b) 5**a**/9 c) -**a**/3
5. a) 4:1 tai 4:7 b) 1:4 tai 7:4
6. a) 2½**a** b) - 1½**a**
7. 5:3
8. a) 4:1 b) 7:2 c) 2:4:1
9. **AD** = **a**/3 + 2**b**/3, **BE** = **b**/3 - 5**a**/6
10. (3**a** + 5**b**) / 8
11. - (2**a** + 3**b**) / 5

8.3.1. 28**a** - 9**b**
2. a) **a** + 2**b** b) 3**a**
3. **x** = 2**a** + **b**, **y** = -3**b**

8.4.1. eivät
2. a) (5,-6) b) (1,-7)
3. (37,18)
4. a) 7**a** ja -8**b** b) -2**a** ja 12**b**
5. x = 6, y = 8
6. a) x = 4, y = 5 b) x=3, y=2
7. x = 3, y = 4
8. a) kyllä b) ei
9. -3¾
10. 2/5
11. -6

8.5.3. **BD** = **b** - **a**, **AE** = **a** + 2**b**/3, 3:2

9.1.1. a) 2**i**+3**j** b) 4**i**-**j** c) 10**i**-12**j**
d) -89**i**+97**j** e) ½**i** f) -3**j** g) a**i**-b**j**
2. a) (4,5) b) (6,-7) c) (35,47)
d) (50,0) e) (0,-69) f) (2a,3b)
3. 4**i** - 12**j**

9.2.1. a) 5 b) 10 c) 13 d) 17
e) 2$\sqrt{10}$ f) 7 g) $\sqrt{a^2 + 4}$
2. 20
3. 0 tai 1
4. 0 < x < 4/5
5. 2
6. $\sqrt{34}$, $\sqrt{5}$ ja 5 tai $\sqrt{53}$
7. a) 3**i**/5 - 4**j**/5 b) 4**i**/5 + 3**j**/5
c) 7**i**/25 - 24**j**/25
8. 7**i**/5 + **j**/5
9. a) 4**i**+3**j** b) -2**i**+4**j** c) 2**i**-3**j**

9.3.1. a) 5 b) 10 c) 2$\sqrt{10}$

2. 0 tai 8
3. (15,0) tai (-1,0)
4. a) (4,6½) b) (16,7)
5. (0,-9)

10.1.1. x = 3, y = 5
2. a) x= 2, y= -3 b) x= -3, y= -2
3. x = 2/5, y = 1/10
4. x = 1, y = 8
5. x = 3, y = 4
6. kyllä
7. -4/3
8. -1½
9. -½
10. a) ovat b) eivät
11. 2,6
12. 4
13. **a** = -2**i** + 5(**i** - **j**)
14. 7(**i** + **j**) + 2(-2**i** + 3**j**)
15. 6**i** + 18**j**
16. **c** = 3**a** - 2**b**
17. **AB** = 3**a** - 4**b**

10.2.1. a) 2**i** + 3**j** + **k** b) 4**i** - 7**j** + 3**k** c) 5**i** - 8**k** d) 3**j**
2. a) (2,7,-4) b) (3,-6,5) c) (0,4,-9) d) (1,5,0)
3. 2
4. a) 3 b) 7 c) 10 d) $5\sqrt{2}$
5. 7, 2**i**/7 - 3**j**/7 + 6**k**/7
6. ±6
7. 1 tai -4/3
8. 2 , $\sqrt{17}$
9.a) 4**i** -8**j** -10**k** b) 8**i** -9**j** -9**k**
10. a) 7 b) $5\sqrt{3}$
11. 3, 3 ja $\sqrt{26}$
12. 5 tai 9
13. (0,3,0)
14. a) (5,-3,7) b) (8,3,6)
15. (3,-5,-2)
16. (8,6)
17. (12,-4,10)
18. (1,6)
19. (3,4,-4), (-3,2,0), (-1,0,10)
20. (-1,2)
21. (2¼,5¼,-1¼)
22. a) (2½,-1) b) (2,0)
23. (1½,-¾,1½)
24. (1,-4)
25. (5¾,0,4)
26. (17,31), (23,39), (29,47), (35,55)
27. x = 8, y = 10, z = -3
28. a = 1, b = -2, c = 0
29. (2/3,-1)
30. a) ovat b) ei
31. -¾
32. x = 4, y = 6
33. -2
34. ovat
36. x = 3, y = 1
37. ovat
38. eivät
39. ovat
40. ovat
41. eivät
42. kyllä

11.1.1. $b_a = 5$, $a_b = 3$
2. 10
3. 9**i** - 12**j**

11.2.1. a) 60 b) 30 c) 0 d) -30 e) -60
2. a) 0 b) 64 c) 64 d) -28
3. a) 8 b) 16 c) 20
4. a·b = 24, |b| = 3

11.4.1. a) 38 b) 30 c) 3x - 8
2. a) -4 b) 30 c) 68
3. 5, -1
4. 2, -4
5. 0 < x < 2
6. a) 22 b) -14

11.5.1. a) 9 b) $2\sqrt{61}$
2. $4\sqrt{7}$
3. $\sqrt{73}$
4. $\sqrt{19}$, $\sqrt{7}$
5. ½$\sqrt{13}$, $\sqrt{19}$, ½$\sqrt{97}$
6. 135°
7. a) 63,4° b) 96,8°
8. 61,6°, 80,5°, 37,9°
9. 63,6°, 27,3°, 83,6°
10. 67,6°
11. a) 56,3° b) 118,1° c) 90°
12. 36,7°
13. 1/3
15. 6 tai 4
17. **a** = 11**b**/18 + (-2**i** + 13**j** + 5**k**)/9
18. **a** =9**b** + (6**i** + 8**j** - 4**k**)
20. $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$
21. 3
22. a) x > 6 b) x < 6 c) x = 6
24. -2 < x < - 1 tai x > 3
27. a) 18/5 b) -2/3
28. a) 32(3**i** + 4**j**) / 25 b) - 3(3**i** + 4**j** + 5**k**) / 25

12.3.1. a) 6**k** b) -12**j** c) 30**i** d) -10**j** e) 6**i** f) -5**k**
2. a) -15**j** + 12**k** b) 6**i** - 2**k** c) -4**i** + 8**j**
3. -25**i** - 14**j** - 23**k**
4.a) -3**i**-3**j**-3**k** b) 8**i**+11**j**+10**k**
5. ±6(**i** - 2**j** + 2**k**)
6. (2**j** + **k**)/ $\sqrt{5}$
7. a) -11**i** - 10**j** + 13**k** b) 2**i** - 7**j** - 17**k**
8. a) **i** - 2**j** + 3**k** b) 3**i** + **j** + 2**k**

12.4.1. $5\sqrt{5}$
2. A = $\sqrt{70}$
3. ½$\sqrt{42}$
4. ½$\sqrt{34}$
5. ($\frac{6 \pm \sqrt{61}}{5}$, 0)
6. 2
7. $\sqrt{6}$ / $2\sqrt{5}$
8. 3
9. (3,0,0), (-9/5,0,0)

12.5.1. a) -7 b) -7
2. a) -111 b) -111

12.6.1. 22
2. 3 1/3
3. 4/3
4. 2
5. 4/3
6. ovat

Koetehtäviä vanhasta 3. kurssista

90.1.1. Olkoon kolmiossa ABC **AB** = **a** ja **AC** = **b**. Piste D on sivun AC keskipiste ja piste E jakaa sivun BC suhteessa 3:1. Lausu vektoreiden **a** ja **b** avulla vektorit **CB**, **BD** ja **AE**. [**a** - **b** , - **a** + ½ **b** , ¼ **a** + ¾ **b**]

90.1.2. Janan AB pituus on 100, vektori **AB** on vektorin 4**i** + 3**j** kanssa samansuuntainen. Mikä on piste A, kun piste B = (43,72)? [(-37,12)]

90.1.3. Olkoon | **a** | = 5 , | **b** | = 4 ja **a** · **b** = -10. a) Mikä on vektoreiden **a** ja **b** välinen kulma? b) Miten pitkä on vektori 2**a** - 1½ **b**? [120° , 14]

90.1.4. Jaa vektori 2**i** + **j** vektoreiden **i** - **j** ja -**i** + 2**j** suuntaisiin komponentteihin. [5(**i** - **j**) + 3(-**i** + 2**j**)]

90.1.5. Olkoon **a** = 4**i** - 2**j** , **b** = 3**i** - 5**j** ja **c** = 2**i** + **j**. Vektori **a** + t**b** ja **c** ovat kohtisuorassa. Laske t. Mikä on tällöin vektorin **a** + t**b** pituus? [t = - 6 , $14\sqrt{5}$]

90.1.6. Ympyrässä, jonka säde on 10, on segmentti, jonka korkeus on 2. Mikä on segmentin kaaren asteluku ja segmenttiä rajoittavan jänteen pituus? [73,7° , 12]

90.1.7. Mikä on x, kun origosta alkavien vektoreiden **a** = -3**i** + 8**j** , **b** = **i** + 2x**j** ja **c** = x^2**i** + 2**j** kärjet ovat samalla suoralla? [3 tai 1 tai 0]

90.2.1. Kolmion kaksi kulmaa ovat 55° ja 43° sekä edellisen vastaisen sivun pituus 6,3 cm. Laske muut sivut. [5,2 cm ja 7,6 cm]

90.2.2. Vartija havaitsee tykkiveneen etelässä ja saa etäisyydeksi mittauslaitteellaan 15,6 km. 5 min kuluttua on veneen suunta 12° eteläsuunnasta länteen ja etäisyys 12,8 km. Mikä on veneen vauhti? [13,6 m/s]

90.3.1. Olkoon A = (3,2) ja B = (5,-3). Muodosta vektori **AB** ja laske **| AB |**. Mikä on x, kun vektori 4**i** + x**j** on yhtä pitkä kuin vektori **AB**? [2**i** - 5**j** , $\sqrt{29}$, $\pm\sqrt{13}$]

90.3.2. Laske kolmion ABC pienin kulma B, kun A(2,3) , B(5,1) ja C(4,5). [42,3°]

90.3.3. Puolisuunnikkaassa ABCD on toinen kantasivu **DC** = **a** ja sen pituus on kolmasosa toisesta kantasivusta sekä **AD** = **b**. Piste P jakaa sivun BC suhteessa 3:2. Muodosta vektori **DP** vektoreiden **a** ja **b** avulla. [$\frac{9}{5}$ **a** - $\frac{2}{5}$ **b**]

90.3.4. Janan AB pituus on 20 ja se on vektorin 3**i** - 4**j** suuntainen. Laske piste B, kun A = (25,30). [(37,14) tai (13,46)]

90.3.5. Tasakylkisen kolmion kanta on 5,4 cm ja kylkeä vastaan piirretty korkeusjana 4,3 cm. Laske kyljen pituus. [4,5 cm]

90.3.6. Määritä x, kun vektori **a** = 2**i** + x(**i** + 3**j**) voidaan jakaa kahteen komponenttiin, joista toinen on **b** = 5**i** + 4**j** ja toinen vektorin **i** - 2**j** suuntainen. [2]

90.3.7. Olkoon vektorit **a** = x^2**i** + x**j** ja **b** = 2**i** - 3**j**. Määritä x, kun a) **a** $\perp$ **b** b) **a** || **b**. [a) 1½ b) - $\frac{2}{3}$]

90.4.1. Kolmion kahden sivun pituudet ovat 5 ja 7 sekä edellisen vastainen kulma 40°. Laske kolmion kulmat. [64° ja 76° tai 116° ja 24°]

90.4.6. Tutka ilmoittaa lentokoneen olevan suoraan etelässä 2400 m päässä tutkasta ja sen korkeuskulma on 23,5°. Toinen lentokone on suunnassa 35° etelästä länteen etäisyydellä 3000 m ja korkeuskulmassa 18,6°. Osoita, että koneet ovat yhtä korkealla. Mikä on niiden välinen etäisyys? [1630 m]

91.1.1. a) Anna kolmen desimaalin tarkkuudella cos 37,2° b) Millä kulmilla 0° < α < 180° on sin α = 0,762 ? c) Terävälle kulmalle α on voimassa tan α = 3/4 . Mitä on sin α ja cos α ? [a) 0,797 b) 49,6° tai 130,4° c) sin a = $\frac{3}{5}$, cos a = $\frac{4}{5}$]

91.1.2. Kolmion kärjet ovat A(-2,-3), B(-5,8) ja C(5,6). Määritä kulman B asteluku 0,1° tarkkuudella. [63,4°]

91.1.3. Nelikulmiossa ABCD on **AB** = **a** , **AD** = **b** ja **DC** = **c** . Piste P jakaa janan AD suhteessa 1:2 ja piste Q janan BC suhteessa 2:1. Ilmoita vektori **PQ** vektoreiden **a**, **b** ja **c** avulla. [$\frac{1}{3}$ **a** + $\frac{1}{3}$ **b** + $\frac{2}{3}$ **c**]

91.1.4. Määritä janalta A(1,2) B(9,6) pisteet P ja Q siten, että AP:PQ:QB = 1:2:3. [P = ($\frac{7}{3}$, $\frac{8}{3}$) , Q = (5,4)]

91.1.5. Pohjoiseen viettävän rinteen kaltevuuskulma vaakatasoon nähden on 28°. Kun aurinko paistaa etelästä, on 12 m korkean puun varjon pituus rinnettä pitkin mitattuna 16 m. Kuinka suuren kulman auringon säteet muodostavat vaakatason kanssa? [54,1°]

91.1.6. Jaa vektori $12\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ kolmeen komponenttiin seuraavasti: Ensimmäinen ja toinen komponentti ovat yhtä pitkiä, ensimmäinen on vektorin **i**, toinen vektorin **j** ja kolmas vektorin $3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ kanssa samansuuntainen [$1\frac{1}{2}\mathbf{i} + 1\frac{1}{2}\mathbf{j} + 3\frac{1}{2}(3\mathbf{i} - \mathbf{j})$]

91.1.7. Määritä $|2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}|$ pituus, kun $|\mathbf{a}| = 5$ ja $|\mathbf{b}| = 2$ sekä vektorien **a** ja **b** välinen kulma on 120°. [$\sqrt{76}$]

91.2.1. Suoran ympyräkartion pohjan säde on 3 cm ja korkeus 4 cm. Kuinka suuri on kartion tilavuus ja kokonaispinta-ala? [75 cm^2]

91.2.2. Suunnikkaan sivujen pituudet ovat 4 ja 7 sekä toinen lävistäjä 5. Määritä suunnikkaan a) kulmat 0,1° tarkkuudella b) toisen lävistäjän pituus. [a) 44,4° ja 135,6° b) 10,2]

91.2.3. Kolmion kaksi sivua ovat 4 ja 5 sekä jälkimmäisen vastainen kulma 50°. Laske kolmion suurin kulma. [92,2°]

91.2.7. Vene kulkee tasaisella vauhdilla eräästä salmesta suuntaan, joka on 8° länsisuunnasta lounaaseen. Salmi on eräästä majakasta 1200 m päässä majakasta kaakkoon. Majakka on 6 min myöhemmin suunnassa 10° pohjoisesta luoteeseen. Veneen nopeusmittari näyttää 9,2 solmua. Kuinka monen prosentin virhe on nopeusmittarissa, kun 1 solmu on 1852 m tunnissa? [147% liikaa]

93.1.1. Vaeltaja näki linkkitornin suoraan pohjoisessa ja käveltyään 400 m itään, oli torni 10° pohjoissuunnasta länteen. Miten kaukana torni oli ensimmäisellä hetkellä?

93.1.2. Määritä vakio x siten, että vektorit a) $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ja $\mathbf{s} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ovat yhdensuuntaiset $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ja $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ovat yhtä pitkät c) $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ja $\mathbf{b} = (x - 1)\mathbf{i} - \mathbf{j}$ ovat kohtisuorassa

93.1.3. Suunnikkaassa ABCD on A(3,0) ja B(5,2) sekä lävistäjien leikkauspiste K(2,3).
a) Määritä kärkipisteen D koordinaatit.
b) Piste Q jakaa sivun DA suhteessa 3:1. Määritä pisteen Q koordinaatit.

93.1.4. Määritä sin α ja cos α, kun tiedetään, että terävän kulman α tangentti on 2,4.

93.1.5. Nelikulmion kärjet ovat A(-7,-1), B(-3,-2), C(5,4) ja D(-8,3). Laske lävistäjien välinen kulma.

93.1.6. Jaa vektori $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ vektoreiden $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ja $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ suuntaisiin komponentteihin.

93.1.7. Olkoon $|\mathbf{a}| = 6$ ja $|\mathbf{b}| = 3$. Laske $|\mathbf{a} + 5\mathbf{b}|$ pituus, kun vektoreiden **a** ja **b** välinen kulma on 120°.

1. $\frac{x}{400} = \tan 80°$; $x = 400 \cdot \tan 80° = 2270$ (m) V: **2300 m**
2. a) $\frac{3}{2} = \frac{x}{3}$; $2x = 9$; $\mathbf{x = 4\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt{4 + x^2} = \sqrt{9 + 9}$; $4 + x^2 = 9 + 9$; $x^2 = 14$; $\mathbf{x = \pm\sqrt{14}}$ c) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$; $x(x - 1) - 2 = 0$; $x^2 - x - 2 = 0$; **x = 2** tai **x = -1** .
3. $\mathbf{OD} = \mathbf{OK} + \mathbf{KD} = \mathbf{OK} + \mathbf{BK} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + (-3\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; **D = (-1,4)** $\mathbf{OQ} = \mathbf{OA} + \mathbf{AQ} = \mathbf{OA} + \frac{1}{4}\mathbf{AD} = 3\mathbf{i} + \frac{1}{4}(-4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$; **Q = (2,1)**
4. $\tan\alpha = 2{,}4 = \frac{2{,}4}{1}$; sijoitetaan kolmioon kateetit 2,4 ja 1. Hypotenuusa x on silloin $x^2 = 2{,}4^2 + 1 = 6{,}76$; $x = 2{,}6$ $\mathbf{\sin\alpha} = \frac{2{,}4}{2{,}6} = \mathbf{\frac{12}{13}}$; $\mathbf{\cos\alpha} = \frac{1}{2{,}6} = \mathbf{\frac{5}{13}}$
5. Lävistäjät ovat $\mathbf{AC} = 12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$; $\mathbf{BD} = -5\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ $\cos\alpha = \frac{\mathbf{AC}\cdot\mathbf{BD}}{\lvert\mathbf{AC}\rvert \cdot \lvert\mathbf{BD}\rvert} = \frac{-60 + 25}{\sqrt{144 + 25}\sqrt{25 + 25}} = \frac{-35}{13\sqrt{50}} = -0{,}3807$; $\alpha = 112{,}4°$ kulma = 180° - 112,4° = **67,6°** , koska suorien välinen kulma on terävä
6. $\mathbf{a} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$; $7\mathbf{i} + 3\mathbf{i} = x(2\mathbf{i} + \mathbf{j}) + y(\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = 2x\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$ $\begin{cases} 2x + y = 7 \ \|\|3 \\ x + 3y = 3 \ \|\|(-1) \end{cases}$; $\begin{cases} 6x + 3y = 21 \\ -x - 3y = -3 \end{cases}$; $5x = 18$; $x = \frac{18}{5}$; $\frac{36}{5} + y = 7$; $y = -\frac{1}{5}$; $\mathbf{a} = \frac{18}{5}\mathbf{u} - \frac{1}{5}\mathbf{v}$
7. $\lvert\mathbf{a} + 5\mathbf{b}\rvert^2 = (\mathbf{a} + 5\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} + 5\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 10\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + 25\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = \lvert\mathbf{a}\rvert^2 + 10\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos 120° + 25\lvert\mathbf{b}\rvert^2$ $= 36 + 10\cdot6\cdot3\cdot(-\frac{1}{2}) + 25\cdot9 = 36 - 90 + 225 = 171$; $\lvert\mathbf{a} + 5\mathbf{b}\rvert = \sqrt{171} = \mathbf{3\sqrt{19}}$

93.2.1. Kolmion kaksi kulmaa ovat 48° ja 55° sekä jälkimmäisen vastaisen sivun pituus on 8,2. Laske muiden sivujen ja kulmien arvot.

93.2.7. Kun auringon korkeuskulma on 20°, osuu erään puun latvan varjo erääseen pihalla olevaan kiveen. Kaksi tuntia myöhemmin, kun maa on kääntynyt 30° ja auringon korkeuskulma on 10°, osuu latvan varjo toiseen kiveen, joka on edellisestä 50 m päässä. Kuinka korkea on kyseinen puu?

1. Kolmas kulma on γ = 180° - 48° - 55° = **77°** $\frac{a}{8{,}2} = \frac{\sin 48°}{\sin 55°}$; $a = \frac{\sin 48°}{\sin 55°} 8{,}2 = \mathbf{7{,}4}$; $\frac{c}{8{,}2} = \frac{\sin 77°}{\sin 55°}$; $c = \frac{\sin 77°}{\sin 55°} 8{,}2 = \mathbf{9{,}8}$.
7. Olkoon varjon etäisyydet lipputangon juurelta a ja b. $\frac{a}{h}$ = tan 70° ; a = h·tan 70°. Samoin b = h·tan 80° $a^2 + b^2 - 2ab\cos 30° = 50^2$; $h^2\tan^2 70° + h^2\tan^2 80° - 2h \tan 70°\, h \tan 80° \cos 30° = 2500$ $12{,}72h^2 = 2500$; $h^2 = 196{,}5$; **h = 14 (m)**

94.1.1. Kolmiossa ABC olkoon **AB** = **a** ja **AC** = **b**. Sivulla AB oleva piste P jakaa sivun AB suhteessa 2:3 ja sivulla AC oleva piste Q jakaa sivun AC suhteessa 2:3. Laske vektorit **BC** ja **PQ**. (Seuraavasta 2 lisäpistettä : Osoita, että jana PQ on yhdensuuntainen sivun BC kanssa.)

94.1.2. Määritä vakio x siten, että vektorit **u** = 2**i** + x**j** ja **v** = 4**i** - 3**j** ovat a) yhdensuuntaiset b) kohtisuorassa c) yhtä pitkät.

94.1.3. Kolmion ABC kärjet ovat A = (2,1) , B = (4,11) ja C = (19,-1). Piste D jakaa sivun BC suhteessa 2:1 ja E on janan AD keskipiste. Laske pisteiden D ja E koordinaatit.

94.1.4. Olkoon kulma α terävä ja $\tan\alpha = 1\frac{1}{3}$. Laske tarkat arvot lausekkeille $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ sekä $\sin(180° - \alpha) + \cos(180° - \alpha)$.

94.1.5. Jaa vektori 20**i** vektorien 6**i** - 8**j** ja **i** + 2**j** suuntaisiin komponentteihin.

94.1.6. Laske lentokoneen lentokorkeus, kun se havaitaan paikasta A suoraan idässä 45° korkeuskulmassa ja paikasta B mitataan samalla hetkellä korkeuskulmaksi 25°. Havaintopaikka B on 3 km havaintopaikasta A länteen sen kanssa samalla tasangolla.

94.1.7. Määritä vektorien **a** ja **b** välinen kulma asteen sadasosan tarkkuudella,
kun | **a** + **b** | = 2 , | **a** - **b** | = 1 ja | **a** | = $\sqrt{½}$.

1. **BC** = **BA** + **AC** = -**a** + **b** = **b** - **a** $\mathbf{PQ} = \mathbf{PA} + \mathbf{AQ} = \frac{2}{5}\mathbf{BA} + \frac{2}{5}\mathbf{AC} = -\frac{2}{5}\mathbf{a} + \frac{2}{5}\mathbf{b} = \frac{2}{5}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$; $\mathbf{PQ} = \frac{2}{5}\mathbf{BC} \Rightarrow PQ \parallel BC$
2. a) $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \Leftrightarrow \frac{2}{4} = \frac{x}{-3} \Leftrightarrow 4x = -6 \Leftrightarrow x = -1½$ b) $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow 2\cdot 4 + x\cdot(-3) = 0 \Leftrightarrow -3x = -8 \Leftrightarrow x = 2\frac{2}{3}$ c) $\lvert\mathbf{u}\rvert = \lvert\mathbf{v}\rvert \Leftrightarrow \sqrt{4 + x^2} = \sqrt{16 + 9}\ \Vert\ (\ )^2 \Leftrightarrow 4 + x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 21 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{21}$
3. $\mathbf{OD} = \mathbf{OB} + \mathbf{BD} = \mathbf{OB} + \frac{2}{3}\mathbf{BC} = 4\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + \frac{2}{3}(15\mathbf{i} - 12\mathbf{j}) = 4\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 10\mathbf{i} - 8\mathbf{j} = 14\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \Rightarrow D = (14,3)$ $\mathbf{OE} = \mathbf{OA} + \mathbf{AE} = \mathbf{OA} + ½\mathbf{AD} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + ½(12\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 6\mathbf{i} + \mathbf{j} = 8\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \Rightarrow E = (8,2)$
4. $\tan\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow$ kateetit 4 ja 3 , jolloin hypotenuusa on 5 $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; $\sin(180° - \alpha) + \cos(180° - \alpha) = +\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$
5. 20**i** = x(6**i** - 8**j**) + y(**i** + 2**j**) ; 20**i** = 6x**i** - 8x**j** + y**i** + 2y**j** ; $\begin{cases} 6x + y = 20 \\ -8x + 2y = 0 \ \Vert\cdot(-½) \end{cases}$; $\begin{cases} 6x + y = 20 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$ 10x = 20 ; x = 2 ; 12 + y = 20 ; y = 8 ; Vastaus : 20**i** = 2(6**i** - 8**j**) + 8(**i** + 2**j**)
6.Olkoon lentokone pisteessä D ja suoraan sen alapuolella maan pinnan tasalla piste C. Olkoon x korkeus. $\frac{x}{AC} = \tan 45° = 1 \Rightarrow AC = x$ ja BC = x + 3 Kolmiosta BCD saadaan trigonometrialla $\frac{x}{x + 3} = \tan 25°\ \Vert\cdot(x + 3)$ x = x·tan 25° + 3·tan 25° ; x - x·tan 25° = 3 · tan 25° ; x(1 - tan 25°) = 3·tan 25° 0,5337x = 1,3989 ; x = 2,62 V : korkeus on 2,6 km
7. $\begin{cases} \lvert\mathbf{a} + \mathbf{b}\rvert = 2 \\ \lvert\mathbf{a} - \mathbf{b}\rvert = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} (\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 4 \\ (\mathbf{a} - \mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} \lvert\mathbf{a}\rvert^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 = 4 \\ \lvert\mathbf{a}\rvert^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 = 1\ \Vert\cdot(-1) \end{cases}$ 4**a·b** = 3 ; **a·b** = ¾ $½ + 2\cdot¾ + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 = 4$; $\lvert\mathbf{b}\rvert^2 = 2$; $\lvert\mathbf{b}\rvert = \sqrt{2}$; $\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\cdot\lvert\mathbf{b}\rvert} = \frac{¾}{\sqrt{½}\cdot\sqrt{2}} = ¾$; $\alpha = 41{,}41°$

94.2.2. Kolmion kaksi sivua ovat pituudeltaan 4 ja 8 sekä niiden välinen kulma 30°. Laske kolmion kolmas sivu ja pienin kulma.

94.2.4. 1200 m pitkä suora metsäautotie on teräväkulmaisen kolmion muotoisen korjuukypsän metsäpalstan sivu. Kahtena muuna sivuna ovat suorat purot, jotka alittaessaan tien muodostavat sen kanssa 36° ja 62° kulmat. Paikallinen puutavarayhtiö Lahosaha Oy tarjoaa puustosta palstan omistajalle Kustaa Kuuselle 24 000 mk hehtaarilta. Mikä on tarjouksen arvo?

2. Kolmas sivu x saadaan kosinilauseella $x^2 = 16 + 64 - 2\cdot4\cdot8\cdot\cos 30°$; $x^2 = 24{,}6$; $\mathbf{x = 4{,}96}$
Pienin kulma on pienimmän sivun 4 vastainen kulma, joka saadaan sinilauseella
$\frac{\sin\alpha}{\sin 30°} = \frac{4}{4{,}96}$; $\sin\alpha = \frac{4}{4{,}96}\cdot\sin 30°$; $\sin\alpha = 0{,}403$; $\boldsymbol{\alpha = 24°}$

4. Kolmas kulma = 180° - (36° + 62°) = 82° Olkoon sivu x kulman 62° vastainen sivu. Sinilauseella saadaan
$\frac{x}{1200} = \frac{\sin 62°}{\sin 82°}$; $x = \frac{\sin 62°}{\sin 82°}\cdot 1200 = 1070$
$A = ½\cdot1200\cdot1070\cdot\sin 36° = 377000\ m^2 = 37{,}7$ ha ; Arvo = 37,7·24 000 mk = **900 000 mk**

Koetehtäviä vanhasta 5. kurssista

91.3.2. Ratkaise yhtälö $2\cdot\sin(2x - 50°) = 1$. [40° + n·180° tai 100° + n·180°]

91.3.4. Määritä a ja b, että funktio $f(x) = a\cdot\sin x + b\cdot\cos x$ täyttää ehdot $f(\frac{\pi}{3}) = 1$ ja $f(-\frac{\pi}{3}) = 2$. [$a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $b = 3$]

91.3.5. Laske sin 2x , kun $\tan\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$. [$\frac{24}{25}$]

92.1.2. Ratkaise yhtälöt a) sin 2x = 0,85 b) cos 3x = cos x

92.1.3. Tiedetään, että tan x = 2/3 ja $x \in [\pi/2, 2\pi]$. Määritä sin x ja cos x tarkka arvo.

92.1.5. Olkoon funktio $f(x) = a\cdot\sin x + b\cdot\cos 2x$. Määritä a ja b, kun $f(\pi/2) = 5$ ja $f(5\pi/6) = ½$.

92.1.7. Mikä on lausekkeen cos x · cos 36° - sin x · sin 144° suurin arvo, ja millä x:illä se arvo saavutetaan?

2. a) sin 2x = sin 58,2° ; 2x = 58,2° + n·360° tai 2x = 121,8° + n·360° ;
x = 29,1° + n·180° tai **x = 60,9° + n·180°** .
b) 3x = x + n·360° tai 3x = -x + n·360° ; 2x = n·360° tai 4x = n·360° ; x = n·180° tai **x = n·90°**.

3. Voidaan valita kateeteiksi 2 ja 3, jolloin hypotenuusa c on $c^2 = 2^2 + 3^2 = 13$; $c = \sqrt{13}$.
Kulma on III neljänneksessä, sillä tan on positiivinen ja kulma $\in [½\pi, 2\pi]$ $\mathbf{\sin x = -\frac{2}{\sqrt{13}}}$; $\mathbf{\cos x = -\frac{3}{\sqrt{13}}}$.

5. $\begin{cases} f(\pi/2) = 5 \\ f(5\pi/6) = ½ \end{cases}$ $\begin{cases} a - b = 5 \\ ½a + ½b = ½ \end{cases}$ $\begin{cases} a - b = 5 \\ a + b = 1 \end{cases}$; $2a = 6$; $\begin{cases} \mathbf{a = 3} \\ \mathbf{b = -2} \end{cases}$

7. cos x·cos 26° - sinx·sin144° = cos x·cos 36° - sin x·sin 36° (koska $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$) = cos(x + 36°)
suurin arvo on = 1 , kun x + 36° = n·360° ; **x = - 36° + n·360°**
pienin arvo = -1 , kun x + 36° = 180° + n·360° ; **x = 144° + n·360°** .

92.2.2. Ratkaise yhtälöt a) tan 2x = 0,85 b) sin 3x = sin x.

92.2.4. Olkoon funktio f:Z→Z jaksollinen, jonka jaksona on 3. Lisäksi tiedetään, että f(4) = 5 , f(32) = 2 ja f(-60) = 4. Laske a) f(100) b) f(-100). c) Millä x:n arvolla f(x) = 4?

92.2.7. Laske cos 3x + sin 4x arvo, kun 3·cos x - 4·sin x = 0 ja kulma x on terävä.

2. a) tan 2x = 0,85 ; tan 2x = tan 40,4° ; 2x = 40,4° + n·180° ; **x = 20,2° + n·90°**
b) sin 3x = sin x ; 3x = x + n·360° tai 3x = 180° - x + n·360° ; 2x = n·360° tai 4x = 180° + n·360°
x = n·180° tai **x = 45° + n·90°** .

4. a) f(100) = f(100 - 32·3) = f(4) = **5** ; b) f(-100) = f(-100 + 44·3) = f(32) = **2**
c) f(x) = 4 ; f(x) = f(-60) ; f(x) = f(-60 + 20·3) : f(x) = f(0) ; **x = 0 + n·3** .

7. $3\cos x - 4\sin x = 0 \;\|:4\cos x$; $\tan x = \frac{3}{4}$; Kun x on I neljänneksessä, on $\sin x = 3/5$ ja $\cos x = 4/5$

$\cos 3x + \sin 4x = 4\cos^3 x - 3\cos x + 2\sin 2x \cdot \cos 2x = 4\cos^3 x - 3\cos x + 4\sin x\cos x(2\cos^2 x - 1)$

$= 4\cdot(64/125) - 3\cdot(4/5) + 4\cdot 3/5\cdot(4/5)(2\cdot 16/25 - 1) = \mathbf{116/625}$.

94.3.6. Laske lausekkeen $\cos 2x + \cos^2 x$ tarkka arvo, kun $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$.

94.3.8. Ratkaise yhtälö $\sin x \cdot \sin 2x = \cos x$.

6. Voidaan valita kateeteiksi 1 ja $\sqrt{2}$. Hypotenuusa $c^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2 = 3$; $c = \sqrt{3}$. $\cos x = \sqrt{2} : \sqrt{3}$

$\cos 2x + \cos^2 x = 2\cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 3\cos^2 x - 1 = 3\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 3\cdot\frac{2}{3} - 1 = 2 - 1 = \mathbf{1}$

8. $\sin x \cdot 2\sin x \cdot \cos x = \cos x \;\|:\cos x$; $2\sin^2 x = 1$ tai $\cos x = 0$

$\sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ tai $\cos x = 0$; $\sin x = \sin \pm 45°$ tai $\cos x = 0$

$x = \pm 45° + n\cdot 360°$ tai $x = \pm 135° + n\cdot 360°$ tai $x = 90° + n\cdot 180°$; $\mathbf{x = 45° + n\cdot 90°}$ tai $\mathbf{x = 90° + n\cdot 180°}$

94.4.4. Ratkaise yhtälöt a) $\sin x = -1$ b) $\cos 2x = \cos x$ c) $2\sin x = 3\cos x$

94.4.5. Laske lausekkeen tan 2x tarkka arvo, kun $\cos x = -\frac{3}{5}$ ja kulma x on välillä $[\pi, 2\pi]$.

94.4.9. Määritä vakio a siten, että käyrät $y = \sin x$ ja $y = 1 - a\cdot\cos x$ leikkaavat kohdassa $x = \frac{\pi}{6}$. Määritä käyrien kaikki leikkauskohdat välillä $0 \le x \le 2\pi$.

4. a) $\sin x = -1$; $\mathbf{x = 270° + n\cdot 360°}$

b) $\cos 2x = \cos x$; $2x = x + n\cdot 360°$ tai $2x = -x + n\cdot 360°$; ($x = n\cdot 360°$) tai $\mathbf{x = n\cdot 120°}$

c) $2\sin x = 3\cos x \;\|:\cos x$; $2\tan x = 3$; $\tan x = 1\frac{1}{2}$; $\tan x = \tan 56{,}3°$; $\mathbf{x = 56{,}3° + n\cdot 180°}$

5. Voidaan valita kulman viereiseksi kateetiksi 3 ja hypotenuusaksi 5, jolloin vastainen kateetti on 4. Kosini on negatiivinen kyseisestä alueesta vain III neljänneksessä, jolloin tan x on positiivinen ja tan x = 4/3.

$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2\cdot(4/3)}{1 - 16/9} = \frac{8/3}{-7/9} = -\frac{24}{7} = \mathbf{-3\frac{3}{7}}$

9. Leikkauspisteessä on sama x- ja y-koordinaatti ; $\sin\frac{\pi}{6} = 1 - a\cdot\cos\frac{\pi}{6}$; $\frac{1}{2} = 1 - a\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$

$a\cdot\sqrt{3} = 1$; $\mathbf{a = \frac{\sqrt{3}}{3}}$ tällöin $\sin x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\cos x$

$\sqrt{1 - \cos^2 x} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\cos x \;\|(\;)^2$; $1 - \cos^2 x = 1 - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x + \frac{1}{3}\cos^2 x$

$\frac{4}{3}\cos^2 x = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x \;\|:\cos x$; $\cos x = 0$ tai $\frac{4}{3}\cos x = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos x = 0$ tai $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\mathbf{x = \frac{\pi}{2}}$, $\mathbf{x = \frac{3\pi}{2}}$, $\mathbf{x = \frac{\pi}{6}}$, $\mathbf{x = \frac{11\pi}{6}}$ (taulukkokirjasta)

94.5.4. Ratkaise yhtälö $2\cdot\sin x - 1 = 0$.

94.5.8. Ratkaise yhtälö $\sin x + \cos x = \frac{2}{3}$ kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

94.5.9. Laske lausekkeen $2\sin 2x - 3\cos x$ tarkka arvo, kun kulma x toteuttaa ehdon $2\sin x - 3\cos x = 0$.

4. $2\sin x - 1 = 0$; $\sin x = \frac{1}{2}$; $\sin x = \sin 30°$; $\mathbf{x = 30° + n\cdot 360°}$ tai $\mathbf{x = 150° + n\cdot 360°}$

8. $\sin x + \cos x = \frac{2}{3}$; $\sqrt{2}\cdot\sin(x + 45°) = \frac{2}{3}$; $\sin(x + 45°) = 0{,}4714$

$\sin(x + 45°) = \sin 28{,}1°$; $x + 45° = 28{,}1° + n\cdot 360°$ tai $x + 45° = 151{,}9° + n\cdot 360°$

$\mathbf{x = -16{,}9° + n\cdot 360°}$ tai $\mathbf{x = 107° + n\cdot 360°}$

9. 2sin x - 3cos x = 0 || : 2cos x ; tan x = 1½ , joten kulma x on I tai III neljänneksessä
suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 3 ja 2 , josta hypotenuusa on $\sqrt{13}$
sin x = $\pm\frac{3}{\sqrt{13}}$ ja cos x = $\pm\frac{2}{\sqrt{13}}$ + I:ssä ja - III:ssa neljänneksessä
2sin 2x - 3cos 2x = 2·2sin x · cos x - 3(2cos^2 x - 1) =
$4\cdot\left(\pm\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\cdot\left(\pm\frac{2}{\sqrt{13}}\right) - 3\left(2\cdot\left(\pm\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 - 1\right) = \frac{24}{13} - 3(\frac{8}{13} - 1) = \frac{24}{13} + \frac{15}{13} = \mathbf{3}$

Koetehtäviä vanhasta 10. kurssista

90.5.5. Merellä havaitaan pisteestä A lentokone idässä 25° korkeuskulmassa ja sama kone samanaikaisesti pisteestä B pohjoisessa 45° korkeuskulmassa. Havaintopisteiden A ja B välinen etäisyys on 2,5 km. Kuinka korkealla lentokone on? [1100 m]

90.6.1. Kuinka suuren kulman vektori 8**i** - 10**j** - 6**k** muodostaa y-akselin positiivisen suunnan kanssa? [135°]

90.6.2. Ovatko pisteet A(2,-4,2) , B(4,-2,3) ja C(6,0,4) samalla suoralla? [ovat]

90.6.3. Muodostavatko vektorit **u** = 3**i** - **j** + 2**k** , **v** = 4**i** + 2**j** - 6**k** ja **w** = **i** - 2**j** + 5**k** kolmiulotteisen vektoriavaruuden kannan? [eivät]

90.6.5. Kolmion ABC kahtena sivuna ovat vektorit **AB** = - 9**i** + 4**j** + 7**k** ja **AC** = - 6**i** + 8**j** + 8**k**. Määritä piste A, kun kolmion mediaanien leikkauspiste on M = (-5,8,2). [A = (0,4,-3)]

90.6.6. Tasangolla olevien pisteiden A ja B välinen etäisyys on 500 m ja pisteiden B ja C välinen etäisyys 800 m. Jana AC näkyy pisteestä B 120° kulmassa. Kuinka korkealle B:n yläpuolelle täytyy nousta, jotta AC näkyisi suorassa kulmassa? [447 m]

90.7.1. Kuinka pitkä on vektori **i** - **j** + t**k** silloin, kun se on kohtisuorassa vektoria 3**i** + 7**j** + 2**k** vastaan? [$\sqrt{6}$]

90.7.3. Määritä pisteiden A(16,-40,33) ja B(51,58,40) yhdysjanalta piste P, joka jakaa janan AB suhteessa 2:5. [(26,-12,35)]

90.7.4. Vektori **a** on neljä kertaa niin pitkä kuin vektori **b**. Niiden välinen kulma on 30° ja pistetulo $8\sqrt{3}$. Laske vektorin **a** pituus. [8]

90.7.6. Osoita, että vektorit **a** = **i** + 2**j** + 2**k** , **b** = 2**i** + **j** - 2**k** ja **c** = 2**i** - 2**j** + **k** ovat kolmiulotteisen avaruuden kantavektoreita. Lausu vektori **i** näiden kantavektorien avulla. [**i** = $\frac{1}{9}$ (**a** + 2**b** + 2**c**)]

90.7.7. Kolmion kahtena sivuna ovat samasta pisteestä alkavat vektorit 2x**i** + (3 - x)**j** + **k** ja 2**i** + **j** + 2**k**. Kuinka pitkä on pienimmillään pienin sivu? [$\frac{3\sqrt{5}}{5}$]

92.3.1. Tetraedrin OABC kärjestä O lähtevät särmät ovat **OA** = **a**, **OB** = **b** ja **OC** = **c**. Piste P on särmän OA ja Q särmän BC keskipiste. Määritä vektoreiden **a**, **b** ja **c** avulla vektorit a) **AC** b) **PB** ja **PQ**.

92.3.3. Millä vakion t arvoilla vektorien **a** = **i** - **j** + t**k** ja **b** = t**i**+ **j** + **k** välinen kulma on a) suora b) yli 60°.

92.3.4. Osoita, että vektorit 2**i** - **j** + **k** , 3**i** - 2**j** + 2**k** ja 5**i** + 3**j** - **k** muodostavat kolmiulotteisen vektoriavaruuden kannan.

92.3.5. Määritä janalta A(14,-21,31)B(-4,6,-5) pisteet P ja Q siten, että AP:PQ = 1:2 ja PQ:QB = 1:3.

92.3.6. Vektorit **a** + 2**b** ja 3**a** - **b** ovat kohtisuorassa. Laske vektorien **a** ja **b** välinen kulma, kun |**a**|=2 ja |**b**|=3.

92.3.7. Missä pisteessä origon kautta kulkeva vektorin **i** - 2**j** + **k** suuntainen suora leikkaa pisteiden A(1,-1,8)B(-2,-3,9) ja C(4,-2,6) kautta kulkevan tason?

1. a) **AC** = **AO** + **OC** = **- a + c**
b) **PB** = **PO** + **OB** = **-½ a + b**
c) **PQ** = **PO** + **OC**+ ½**CB** = **PO** + **OC** + ½(**CO** + **OB**) = -½ **a** + **c** + ½ (-**c** + **b**) = **½(-a + b + c)**

3. a) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$; $t - 1 + t = 0$; $2t = 1$; $\mathbf{t = \frac{1}{2}}$

b) Jos kulma on välillä]60° , 180°] on kulman kosini < cos 60°.

$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} < \cos 60°$; $\frac{t - 1 + t}{\sqrt{1 + 1 + t^2}\sqrt{t^2 + 1 + 1}} < \frac{1}{2}$; $4t - 2 < t^2 + 2$; $t^2 - 4t + 4 > 0$; $(t - 2)^2 > 0$; $\mathbf{t \neq 2}$

4.Tutkitaan, ovatko vektorit samassa tasossa, ts onko jokin lausuttavissa 2 muun avulla.

$5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k} = x(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) + y(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ $\begin{cases} 5 = 2x + 3y \\ 3 = -x - 2y \\ -1 = x + 2y \end{cases}$; $\begin{cases} 3 = -x - 2y \\ -1 = x + 2y \end{cases}$; $2 = 0$; joten ryhmällä ei ole ratkaisua

ja vektorit eivät ole samassa tasossa , joten ne muodostavat avaruuden kannan.

5. AP:PQ = 1:2 ja PQ:QB = 1:3 = 2:6, joten osien suhdeluvut ovat 1, 2 ja 6

$\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + 1/9 \cdot \mathbf{AB} = 14\mathbf{i} - 21\mathbf{j} + 31\mathbf{k} + 1/9(-18\mathbf{i} + 27\mathbf{j} - 36\mathbf{k})$

$= 12\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 27\mathbf{k}$; **P = (12,-18,27)**

$\mathbf{OQ} = \mathbf{OA} + 3/9 \cdot \mathbf{AB} = 14\mathbf{i} - 21\mathbf{j} + 31\mathbf{k} + 3/9(-18\mathbf{i} + 27\mathbf{j} - 36\mathbf{k}) = 8\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 19\mathbf{k}$ **Q = (8,-12,19)**.

6. $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$; $3\mathbf{a}^2 + 5\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\mathbf{b}^2 = 0$; $12 + 5\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 18 = 0$; $5\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 6$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 6/5$; $\cos\alpha = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} / |\mathbf{a}||\mathbf{b}| = (6/5) / (2\cdot 3) = 1/5$; α **= 78,5°**.

7. $\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + r\mathbf{AB} + s\mathbf{AC}$; $\mathbf{OP} \parallel \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $t(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 8\mathbf{k} + r(-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + s(3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$

$\begin{cases} t = 1 - 3r + 3s \\ -2t = -1 - 2r - s \\ t = 8 + r - 2s \end{cases}$; $\begin{cases} t + 3r - 3s = 1 \\ -2t + 2r + s = -1 \\ t - r + 2s = 8 \end{cases}$; $\begin{cases} -5t + 9r = -2 \\ 5t - 5r = 10 \end{cases}$

$20t = 80$; $t = 4$; $\mathbf{OP} = 4(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$; **P = (4,-8,4)**

93.3.1. Määritä luku x siten, että vektorit $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = x\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ovat kohtisuorassa. Kumpi vektoreista , **a** vai **b,** on tällöin pitempi?

93.3.2. Suorakulmaisen särmiön muotoisen huoneen lattia on 3 m x 4 m ja korkeus 2 m. Määritä samasta nurkasta lähtevien seinien lävistäjien välinen kulma.

93.3.3. Määritä luvut x, y ja z siten, että nelikulmio ABCD (kärjet tässä järjestyksessä) on suunnikas, kun A = (x,y,z) , B = (4,6,-2) , C = (3x,3z,y) ja D = (0,5,7).

93.3.4. Ovatko pisteet A(-1,3,4) , B(0,0,3) , C(-3,4,1) ja D(-11,13,-6) samassa tasossa?

93.3.5. Laske vektorin $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ pituus kun $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 6$ ja $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 7$.

93.3.6. Origosta siirrytään 6 yksikköä vektorin $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ suuntaan ja sitten niin paljon vektorin $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ suuntaan, että loppupisteen paikkavektori on vektorin $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ suuntainen. Mikä on loppupiste?

93.3.7. Pistemäinen kappale A lähtee origosta ja liikkuu x-akselia pitkin positiiviseen suuntaan nopeudella 1 cm/s. Samaan aikaan toinen pistemäinen kappale B lähtee pisteestä (40,10,0) vektorin $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ suuntaan nopeudella 3 cm/s. Koordinaatissa yksi pituusyksikkö on 1 cm. Kuinka suuri on kappaleiden A ja B välimatka silloin, kun ne ovat lähimpänä toisiaan?

1. $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow 2x + 3x - 20 = 0 \Leftrightarrow 5x = 20 \Leftrightarrow \mathbf{x = 4}$

$|\mathbf{a}| = \sqrt{4 + 16 + 25} = \sqrt{45}$; $|\mathbf{b}| = \sqrt{16 + 9 + 16} = \sqrt{41}$; V : **a** on pitempi

2. Olkoon lattian särmät x- ja y-akselin suuntaiset ja korkeussärmä z-akselin suuntainen. Yksikkö = 1 m. Tällöin seinälävistäjät ovat esim. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{0 + 0 + 4}{\sqrt{9 + 4} \cdot \sqrt{16 + 4}} = \frac{4}{\sqrt{260}}$; α **= 75,6°**

3. Suunnikas, jos vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset. Esim. **AD** = **BC**

$-x\mathbf{i} + (5 - y)\mathbf{j} + (7 - z)\mathbf{k} = (3x - 4)\mathbf{i} + (3z - 6)\mathbf{j} + (y + 2)\mathbf{k}$; $\begin{cases} 3x - 4 = -x \\ 3z - 6 = 5 - y \\ y + 2 = 7 - z \end{cases}$; $\begin{cases} 4x = 4 \\ y + 3z = 11 \ \|\cdot 1 \\ y + z = 5 \ \|\cdot(-1) \end{cases}$; $\begin{cases} \mathbf{x = 1} \\ \mathbf{y = 2} \\ \mathbf{z = 3} \end{cases}$

4. Ovat, jos löytyy x ja y siten, että $\mathbf{DA} = x\mathbf{DB} + y\mathbf{DC}$; $10\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 10\mathbf{k} = x(11\mathbf{i} - 13\mathbf{j} + 9\mathbf{k}) + y(8\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 7\mathbf{k})$;

$\begin{cases} 10 = 11x + 8y \ \| \cdot 9 \\ -10 = -13x - 9y \ \| \cdot 8 \\ 10 = 9x + 7y \end{cases}$; $\begin{cases} 10 = 11x + 8y \\ 10 = -5x \\ 10 = 9x + 7y \end{cases}$; $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \\ 10 = 9x + 7y \end{cases}$ sijoitetaan alimpaan 10 = -18 + 28 . V : **ovat**

5. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$; $49 = 25 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + 36$; $2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -12$; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -6$

$|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 4\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + 4\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 25 + 4\cdot(-6) + 4\cdot 36 = 145$; $\mathbf{|a + 2b| = \sqrt{145}}$.

6. $\mathbf{OP} = \mathbf{a}° + x\mathbf{b} = 6 \cdot \frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4 + 4}} + x(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) = (2 + x)\mathbf{i} + (4 - x)\mathbf{j} + (4 - x)\mathbf{k} \parallel 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

$\frac{2 + x}{5} = \frac{4 - x}{-2} = \frac{4 - x}{-2}$; $-2x - 4 = 20 - 5x$; $3x = 24$; $x = 8$; $\mathbf{OP} = 10\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$; **P = (10,-4,-4)**.

7. $\mathbf{OP_1}(t) = \mathbf{s_1}(t) = 1\cdot t\,\mathbf{i}$; $\mathbf{OP_2}(t) = \mathbf{s_2}(t) = 40\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 3t\cdot\frac{-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = (40 - 2t)\mathbf{i} + (10 - 2t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

$\mathbf{P_1P_2} = \mathbf{s_2} - \mathbf{s_1} = (40 - 3t)\mathbf{i} + (10 - 2t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $d(t) = |\mathbf{P_1P_2}| = \sqrt{(40 - 3t)^2 + (10 - 2t)^2 + t^2} = \sqrt{14t^2 - 280t + 1700}$
joka on pienin, kun juurrettava on pienin. Kun tämän kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli , on se pienimmillään huipussa eli kun sen derivaatta on = 0 ; $28t - 280 = 0$
$t = 10$, Tällöin on $d = \sqrt{1400 - 2800 + 1700} = \sqrt{300} = \mathbf{10\sqrt{3}}$ **(cm)** = **17,3 (cm)**.

95.1.2. Määritä vakio x siten, että vektorit $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = -x\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ovat a) yhtä pitkät b) kohtisuorassa toisiaan vastaan.

95.1.5. Onko origo pisteiden (1,2,-3), (3,-4,1) ja (7,-16,9) määräämässä tasossa?

95.1.6. Missä suhteessa xz-taso jakaa janan A(2,-3,1) B(-1,2,3) sekä mikä on janan ja tason leikkauspiste?

95.1.9. Olkoon $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 3$ ja $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{7}$. Laske $|\mathbf{b}|$ sekä vektoreiden **a** ja **b** välinen kulma.

2. a) $\sqrt{9 + 4x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 9 + 4}$; $4x^2 + 10 = x^2 + 13$; $3x^2 = 3$; $x^2 = 1$; $\mathbf{x = \pm 1}$

b) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$; $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, jos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$; $-3x - 6x + 2 = 0$; $-9x = -2$; $\mathbf{x = \frac{2}{9}}$

5. Tutkitaan ovatko vektorit **OA**, **OB** ja **OC** samassa tasossa, ts. onko olemassa x ja y, että
$\mathbf{OC} = x\mathbf{OA} + y\mathbf{OB} \Leftrightarrow 7\mathbf{i} - 16\mathbf{j} + 9\mathbf{k} = x(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + y(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k})$
$\begin{cases} x + 3y = 7 \;\|\cdot 2 \\ 2x - 4y = -16 \;\|\cdot(-1) \\ -3x + y = 9 \end{cases}$; $10y = 30$; $y = 3$; $x + 9 = 7$; $x = -2$
sijoitetaan saadut arvot kolmanteen yhtälöön $-3 \cdot (-2) + 3 = 9$ TOSI. V: **OVAT**

6. $\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + t\cdot\mathbf{AB} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k} + t(-3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = (2 - 3t)\mathbf{i} + (-3 + 5t)\mathbf{j} + (1 + 2t)\mathbf{k}$
P on xz-tasolla, jos y-koord. = 0 ts. $-3 + 5t = 0$; $t = 0,6$; $OP = 0,2\mathbf{i} + 2,2\mathbf{k}$ **P = (0,2;0;2,2)**
$\frac{AP}{BP} = \frac{\sqrt{1,8^2 + 3^2 + 1,2^2}}{\sqrt{1,2^2 + 2^2 + 0,8^2}} = \frac{\sqrt{13,68}}{\sqrt{6,08}} = \sqrt{\frac{13,68}{6,08}} = \sqrt{2,25} = 1,5 = \mathbf{3 : 2}$

9. $\begin{cases} |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 3 \\ |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{7} \end{cases}$; $\begin{cases} (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = 9 \\ (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = 7 \end{cases}$; $\begin{cases} \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}^2 = 9 \\ \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}^2 = 7 \end{cases}$; $\begin{cases} 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}^2 = 5 \\ -2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}^2 = 3 \end{cases}$

$2\mathbf{b}^2 = 8$; $\mathbf{b}^2 = 4$; $\mathbf{|b| = 2}$; $2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + 4 = 5$; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ½$; $\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = \frac{½}{2\cdot 2} = \frac{1}{8}$; $\boldsymbol{\alpha = 82,8°}$

95.2.3. Voidaanko vakio a määrittää siten, että vektorit $-\mathbf{i} + (a + 1)\mathbf{j} + (1 - a)\mathbf{k}$ ja $-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - a\mathbf{k}$ ovat yhdensuuntaisia?

95.2.5. Vektorit $\mathbf{AB} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$ ja $\mathbf{AC} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ovat kolmion ABC sivuina. Valitaan sivulta BC piste D siten, että se jakaa sivun BC suhteessa 1:3. Määritä D, kun piste A on (2,3,4).

95.2.7. Millä k:n arvoilla pisteet (1,0,3) , (-1,3,4) , (1,2,1) ja (k,2,5) ovat samassa tasossa?

3. Vektorit yhdensuuntaisia, jos kantavektorien kertoimien suhteet samat
$\frac{-1}{-2} = \frac{a + 1}{2} = \frac{1 - a}{-a}$; $-2 = -2a - 2$ JA $-2 + 2a = a$; $a = 0$ JA $a = 2$. V: **Ei mahdollista**.

5. Piste D jakaa janan BC suhteessa 1:3 , joten BD = ¼BC.
$\mathbf{OD} = \mathbf{OA} + \mathbf{AB} + ¼\mathbf{BC} = \mathbf{OA} + \mathbf{AB} + ¼(-\mathbf{AB} + \mathbf{AC}) = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) + (-3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}) + ¼(3\mathbf{i} - 4\mathbf{k} + 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$
$= 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} - 3\mathbf{i} + 4\mathbf{k} + 2\mathbf{i} - ½\mathbf{j} = \mathbf{i} + 2½\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$; D = **(1,2½,8)**

7. Pisteet A, B, C ja D ovat samassa tasossa, jos vektorit **AD**, **AB** ja **AC** ovat samassa tasossa.
On oltava luvut x ja y siten, että $\mathbf{AD} = x \cdot \mathbf{AB} + y \cdot \mathbf{AC}$; $(k - 1)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = x(-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) + y(2\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$
$\begin{cases} k - 1 = -2x \\ 2 = 3x + 2y \;\|\cdot 1 \\ 2 = x - 2y \;\|\cdot 1 \end{cases}$; $4x = 4$; $x = 1$, $y = -½$; $k - 1 = -2 \cdot 1$; $\mathbf{k = -1}$

Koetehtäviä kurssista MA4.

95.1.1. Kuution pohjaneliön kärkipisteet ovat A, B, C ja D sekä ylätason kärjet edellisten yläpuolella vastaavassa järjestyksessä A', B', C' ja D'. Olkoon vektorit **AB** = **a** , **AD** = **b** ja **AA'** = **c**. Esitä vektoreiden **a**, **b** ja **c** avulla vektorit a) **B'D'** b) **DB'** c) **DE**, kun E on neliön A'B'C'D' keskipiste.

95.1.2. Määritä tylpän kulman α trigonometristen funktioiden sin ja cos arvot, kun $\tan \alpha = -\frac{3}{2}$

95.1.3. Määritä kolmion alan ja piirin tarkat arvot, kun kaksi sivua ovat 5 ja 3 sekä niiden välinen kulma 30°.

95.1.4. Olkoot pisteet A(3,-3) ja B(6,1). Määritä a) vektori **AB** b) **AB**:n suuntainen yksikkövektori c) A:n ja B:n paikkavektoreiden välinen kulma.

95.1.5. Laske **a** · **b**, kun a) | **a** | = 7 , | **b** | = 6 ja $\angle$(**a**,**b**) = 120°
b) **a** = 2**i** + 3**j** - 4**k** ja **b** = 5**i** - 6**j** - 7**k** c) Laske x , kun **a** · **b** = 4 ja **a** = x**i** + 2**j** sekä **b** = (x - 1)**i** - **j** + 2**k**

95.1.6. Ratkaise yhtälöt a) $2\cos\frac{x}{2} = -\sqrt{2}$ b) $\sin 2x = \sin(x - \frac{\pi}{3})$

95.1.7. Määritä piste P, kun se jakaa janan A(2,4,-1) B(7,-1,9) a) sisä- b) ulkopuolisesti suhteessa 2:3.

95.1.8. Olkoot **u** = 2**a** - 3**b** ja **v** = **a** + **b**. Esitä
a) vektori 3**v** - 7**u** vektoreiden **a** ja **b** avulla b) vektori 3**a** - 7**b** vektoreiden **u** ja **v** avulla.

95.1.9. Olkoot **a** = 4**i** - 2**j**, **b** = - 3**i** + **j** ja **c** = x**i** + (x + 1)**j**. Onko sellaisia reaalilukuja x, joilla vektorit **a** + **c** ja **b** + **c** ovat samansuuntaiset?

95.1.10. Kolmion kulma on kaksinkertainen toiseen kulmaan verrattuna, mutta tämän isomman kulman vastainen sivu on vain 1,5-kertainen eo. pienemmän kulman vastaiseen sivuun verrattuna. Laske kolmion kulmat.

1.a) **B'D'** = **B'A'** + **A'D'** = - **a** + **b** b) **DB'** = **DA** + **AB** + **BB'** = - **b** + **a** + **c**
c) **DE** = **DD'** + ½**D'C'** + ½**D'A'** = **c** + ½**a** - ½**b**

2. Piirrä suorakulmainen kolmio, ja merkitse siihen kateeteiksi 3 ja 2. Hypotenuusa Pythagoraan lauseen mukaan $c^2 = 3^2 + 2^2 = 13$; $c = \sqrt{13}$; $\boldsymbol{\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}}$; $\boldsymbol{\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}}$

3. A = ½ · 5 · 3 · sin 30° = ½ · 15 · ½ = **3¾**
Kosinilause: $c^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos 30° = 25 + 9 - 30 \cdot ½\sqrt{3} = 34 - 15\sqrt{3}$; $c = \sqrt{34 - 15\sqrt{3}}$
$p = 3 + 5 + \sqrt{34 - 15\sqrt{3}} = \mathbf{8 + \sqrt{34 - 15\sqrt{3}}}$

4. a) **AB** = (6 - 3)**i** + (1 + 3)**j** = 3**i** + 4**j** b) $\mathbf{AB}° = \frac{\mathbf{AB}}{|\mathbf{AB}|} = \frac{3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}}{5} = 0{,}6\mathbf{i} + 0{,}8\mathbf{j}$
c) **OA** = 3**i** - 3**j** , **OB** = 6**i** + **j** ; $\cos\alpha = \frac{\mathbf{OA} \cdot \mathbf{OB}}{|\mathbf{OA}| \cdot |\mathbf{OB}|} = \frac{3 \cdot 6 - 3 \cdot 1}{\sqrt{9 + 9}\sqrt{36 + 1}} = \frac{15}{\sqrt{18}\sqrt{37}} \approx 0{,}581$; $\boldsymbol{\alpha = 54{,}5°}$

5. a) **a** · **b** = |**a**| · |**b**| · cos 120° = 7 · 6 · (-½) = - 21 b) **a** · **b** = 2 · 5 + 3 · (-6) + (-4) · (-7) = 10 - 18 + 28 = 20
c) **a** · **b** = 4 ; x(x - 1) + 2 · (-1) + 0 · 2 = 4 ; $x^2 - x - 6 = 0$; $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{3}$; **x = 3** tai **x = - 2**

6.a) $2\cos\frac{x}{2} = -\sqrt{2}$ || : 2 ; $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{x}{2} = \cos 135°$; $\frac{x}{2} = \pm 135° + n \cdot 360°$ ||·2 ; **x = ± 270° + n·720°** b)
$\sin 2x = \sin(x - \frac{\pi}{3})$; $2x = x - \frac{\pi}{3} + n2\pi$ tai $2x = \pi - (x - \frac{\pi}{3}) + n2\pi$; $\mathbf{x = -\frac{\pi}{3} + n2\pi}$ tai $2x = \pi - x + \frac{\pi}{3} + n2\pi$
$3x = \frac{4\pi}{3} + n2\pi$ || : 3 ; $\mathbf{x = \frac{4\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}}$

7.a) PA = (2) ja PB = (3) , joten AB = (5).
OP = **OA** + $\frac{2}{5}$ · **AB** = 2**i** + 4**j** - **k** + $\frac{2}{5}$(5**i** - 5**j** + 10**k**) = 2**i** + 4**j** - **k** + 2**i** - 2**j** + 4**k** = 4**i** + 2**j** + 3**k** ; **P = (4,2,3)**
b) PA = (2) ja PB = (3) , joten AB = (1). **OP** = **OA** + **AP** = **OA** + 2 · **BA**
= 2**i** + 4**j** - **k** + 2(-5**i** + 5**j** - 10**k**) = 2**i** + 4**j** - **k** - 10**i** + 10**j** - 20**k** = -8**i** + 14**j** - 21k ; **P = (- 8,14,- 21)**

8. a) 3**v** - 7**u** = 3(**a** + **b**) - 7(2**a** - 3**b**) = 3**a** + 3**b** - 14**a** + 21**b** = -11**a** + 24**b**
b) 3**a** - 7**b** = x**u** + y**v** = x(2**a** - 3**b**) + y(**a** + **b**) = 2x**a** - 3x**b** + y**a** + y**b** = (2x + y)**a** + (-3x + y)**b**
$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -3x + y = -7 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$; 5x = 10 ; x = 2 ; 2·2 + y = 3 ; y = -1 ; 3**a** - 7**b** = 2**u** - **v**

9. **a** + **c** = 4**i** - 2**j** + x**i** + (x + 1)**j** = (x + 4)**i** + (x - 1)**j** ; **b** + **c** = - 3**i** + **j** + x**i** + (x + 1)**j** = (x - 3)**i** + (x + 2)**j**
a + **c** || **b** + **c** ; $\frac{x+4}{x-3} = \frac{x-1}{x+2}$; (x + 4)(x + 2) = (x - 3)(x - 1) ; $x^2 + 4x + 2x + 8 = x^2 - 3x - x + 3$; 10x = -5 ; x = - ½ , jolloin suhde on $\frac{-½ + 4}{-½ - 3} < 0$ ja vektorit ovat vastakkaissuuntaiset. **V: ei**

10. Sinilause: $\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{1{,}5}{1}$; sin 2x = 1,5sin x ; 2sin x · cos x = 1,5 sin x ||:2sin x ; cos x = 0,75 tai sin x = 0 x = 41,4° (tai x = 0°) . Kulmat x = **41,4°** , 2x = **82,8°** ja kolmas = 180° - 41,4° - 82,8° = **55,8°**

95.2.1. Tetraedrin kärkipisteet ovat OABC. Olkoon **OA** = **a**, **OB** = **b** ja **OC** = **c**. Piste D on särmän AC keskipiste. Muodosta vektoreiden **a**, **b** ja **c** avulla vektorit a) **AB** b) **AC** c) **BD**.

95.2.2. Laske lausekkeen sin 2x tarkka arvo, kun tan x = $\frac{5}{12}$ ja x ∈ [π,2π].

95.2.3. Kolmion kaksi kulmaa ovat 40° ja 80° sekä niiden välisen sivun pituus 4. Laske kolmion pisin sivu sekä kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde.

95.2.4. Olkoon A(2,3), B(5,6) ja C(4,1). Laske kolmion ABC kulma C.

95.2.5. Olkoon **a** = x**i** + 2**j** ja **b** = 3**i** - 4**j**.
a) Laske **a · b** , kun x = 3
b) Laske x , kun **a · b** = 3

95.2.6. Ratkaise yhtälö a) sin 2x = - ½ b) cos (2x - 30°) = cos x

95.2.7. Piste P(2,1,3) jakaa janan AB suhteessa 2:3. Määritä piste B, kun A = (-4,3,1).

95.2.8. Olkoon **a** = **i** + 3**j** ja **b** = 2**i** - **j**. Mitkä ovat vektorin **u** = 7(**i** + **j**) koordinaatit kannassa (**a**,**b**)?

95.2.9. Olkoon **a** = x^2**i** + 2**j** ja **b** = x(2**i**+**j**). Määritä x, kun a) **a** = **b** b) **a** || **b** c) **a** ⊥ **b**

95.2.10. Maapallon säde on 6400 km. TV-satelliitti on geostationäärisellä radalla (= pysyy koko ajan maan pintaan nähden paikallaan eli saman paikan yläpuolella) päiväntasaajan yläpuolella 38000 km maan pinnalta, samalla pituuspiirillä kuin Veteli. Mihin suuntaan on veteliläisten suunnattava satelliittiantenninsa, jotta he saisivat mahdollisimman hyvän TV-kuvan? Veteli on 63,5° leveyspiirillä.

1. a) **AB** = **AO** + **OB** = **- a** + **b** b) **AC** = **AO** + **OC** = **- a** + **c**
c) **BD** = **BO** + **OA** + ½**AC** = **- b** + **a** + ½(**-a** + **c**) = **- b** + **a** - ½**a** + ½**c** = ½**a** - **b** + ½**c**

2. x ∈ [π,2π] JA tan x > 0 ⇒ x ∈ [π,1½π]. Kolmiosta, jonka kateetit 5 ja 12, saadaan hypot. = 13
sin 2x = 2sin x cos x = $2 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{120}{169}$

3. Kolmas kulma = 180° - 40° - 80° = 60°. Pisin sivu on suurinta kulmaa vastassa oleva sivu.
$\frac{x}{4} = \frac{\sin 80°}{\sin 60°}$; $x = 4 \cdot \frac{\sin 80°}{\sin 60°} = 4{,}55$; $2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin 60°} = \frac{4}{½\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$; $R = \frac{4}{\sqrt{3}}$

4. α = ∠(**CA**,**CB**) ; **CA** = -2**i** + 2**j** ; **CB** = **i** + 5**j** ; $\cos \alpha = \frac{\mathbf{CA} \cdot \mathbf{CB}}{|\mathbf{CA}| \cdot |\mathbf{CB}|} = \frac{-2 + 10}{\sqrt{4+4}\sqrt{1+25}} = 0{,}555$; α = 56,3°

5. a) **a** = 3**i** + 2**j** ; **b** = 3**i** - 4**j** , **a · b** = 3 · 3 + 2 · (-4) = 1
b) **a · b** = 3 , 3 · x + 2 · (-4) = 3 ; 3x - 8 = 3 ; 3x = 11 , x = $3\frac{2}{3}$

6. a) sin 2x = -½ ; sin 2x = sin (-30°) ; 2x = -30° + n·360° tai 2x = 180° - (- 30°) + n·360°
x = -15° + n·180° tai x = 105° + n·180°
b) cos (2x - 30°) = cos x ; 2x - 30° = x + n·360° tai 2x - 30° = -x + n·360°
x = 30° + n·360° tai x = 10° + n·120°

7. AP = 2 & BP = 3 ⇒ AB = 5 ⇒ AB = $\frac{5}{2}$ AP ; **OB** = **OA** + **AB** = **OA** + $\frac{5}{2}$ **AP** = -4**i** + 3**j** + **k** + $\frac{5}{2}$(6**i** - 2**j** + 2**k**) = -4**i** + 3**j** + **k** + 15**i** - 5**j** + 5**k** = 11**i** - 2**j** + 6**k** ⇒ B = (11,-2,6)

8. **u** = x**a** + y**b** ; 7**i** + 7**j** = x(**i** + 3**j**) + y(2**i** - **j**) ; 7**i** + 7**j** = x**i** + 3x**j** + 2y**i** - y**j** $\begin{cases} x + 2y = 7 \;\|\cdot 1 \\ 3x - y = 7 \;\|\cdot 2 \end{cases}$; 7x = 21 ; x = 3 ; 3 + 2y = 7 ; 2y = 4 ; y = 2 V: (3,2)
9. **a** = x^2**i** + 2**j** ; **b** = 2x**i** + x**j** a) a = b ; $x^2 = 2x$ ja 2 = x ; (x = 0 tai x = 2) ja x = 2 ; x = 2 b) a ∥ b ; $\frac{x^2}{2x} = \frac{2}{x}$; $x^3 = 4x$ ∥ : x ; $x^2 = 4$ tai x = 0 ; x = ± 2 (tai x = 0), (jos x = 0 on **b** nollavektori) c) **a** ⊥ **b** ; **a · b** = 0 ; $x^2 \cdot 2x + 2x = 0$; $2x^3 + 2x = 0$ ∥ : 2x ; $x^2 + 1 = 0$ tai 2x = 0 ; x = 0 V: ei milloin
10. Olkoon S = satelliitti ; K = Maan keskipiste ja V = Veteli Kolmiossa SKV on kulma SKV = 63,5° KS = 38000 + 6400 = 44400 ja VK = 6400 Kosinilauseella $SV^2 = 44400^2 + 6400^2 - 2\cdot 44400\cdot 6400\cdot \cos 63{,}5° = 1\,759\,000\,000$; SV = 41 900 Sinilauseella $\frac{\sin\alpha}{\sin 63{,}5°} = \frac{44400}{41900}$; sin α = 0,948 ; α = 71,5° tai 108,5° , joista tylppä kulma oikea. Koska tangentti kohtisuorassa sädettä vastaan, on satelliitti horisontin yläpuolella 108,5° - 90° = 18,5° V: Antenni suunnataan suoraan etelään 18,5° horisontista ylöspäin

95.3.1. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin pohjan kärkipisteet ovat A, B, C ja D sekä huippu E. Olkoon vektorit **AB** = **a** , **AD** = **b** ja **AE** = **c**. Olkoon K särmän CE keskipiste. Muodosta vektorien **a**, **b** ja **c** avulla vektorit a) **DE** b) **AC** c) **BK**

95.3.2. Olkoon pisteet A(3,-3) ja B(6,1). Määritä a) vektori **AB** b) **| AB |** c) **AB**:n suuntainen yksikkövektori.

95.3.3. Tylpälle kulmalle α pätee tan α = - 0,75. Määritä sin α , cos α ja tan (α - 45°)

95.3.4. Kolmion kaksi kulmaa ovat 56° ja 72° sekä jälkimmäisen vastainen sivu 8,3 cm. Laske muut sivut.

95.3.5. Sievennä lauseke $\sin(\frac{\pi}{6} - x) + \cos(\frac{\pi}{3} - x)$.

95.3.6. Mikä y-akselin piste on yhtä kaukana pisteistä (6,5,4) ja (2,3,4)?

95.3.7. Ratkaise yhtälö a) cos ½x = cos ½π b) $\cos 2x = 2\sin^2 x$

95.3.8. Mikä on se vektorin **c** = 5**i** + 6**j** suuntainen vektori, jonka toinen komponentti on vektorin **a** = 2**i** + 3**j** suuntainen ja toinen komponentti on **b** = 3**i** - 9**j** ?

95.3.9. Mikä on funktion a) sin 6x b) tan 5πx perusjakso?

95.3.10. Missä kohdassa z-akseli leikkaa pisteiden A(-1,2,3) , B(1,1,1) ja C(-2,3,4) määräämän tason?

1. a) **DE** = **DA** + **AE** = -**b** + **c** b) **AC** = **AB** + **BC** = **a** + **b** c) **BK** = **BC** + **CK** = **BC** + ½**CE** = **BC** + ½(**CD** + **DA** + **AE**) = **b** + ½(-**a** - **b** + **c**) = -½**a** + ½**b** + ½**c** = ½(-**a** + **b** + **c**)
2. a) **AB** = (6 - 3)**i** + [1 - (-3)]**j** = 3**i** + 4**j** b) **| AB |** = $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ c) $\mathbf{AB}^0 = \frac{\mathbf{AB}}{\|\mathbf{AB}\|} = \frac{3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}}{5} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$
3. Merkitään suorakulmaiseen kolmioon vastaiseksi kateetiksi 3 ja viereiseksi kateetiksi 4. Tällöin hypotenuusa on 5. Koska kulma on tylppä eli toisessa neljänneksessä on $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ ja $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ $\tan(\alpha - 45°) = \frac{\tan\alpha - \tan 45°}{1 + \tan\alpha \cdot \tan 45°} = \frac{-¾ - 1}{1 - ¾ \cdot 1} = -7$
4. Olkoon 56° kulman vastainen sivu = x. Sinilause: $\frac{x}{8{,}3} = \frac{\sin 56°}{\sin 72°}$; $x = \frac{\sin 56°}{\sin 72°} \cdot 8{,}3 = 7{,}2$ (cm) . Kolmas kulma = 180° - 56° - 72° = 52° Olkoon tämän vastainen sivu = y ; Sinilause: $\frac{y}{8{,}3} = \frac{\sin 52°}{\sin 72°}$; $y = \frac{\sin 52°}{\sin 72°} \cdot 8{,}3 = 6{,}9$ (cm)
5. $\sin(\frac{\pi}{6} - x) + \cos(\frac{\pi}{3} - x) = \sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos x - \cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin x + \cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin x$ $= \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos x$
6. Olkoon y-akselin piste (0,y,0) $\sqrt{(6-0)^2 + (y-5)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(2-0)^2 + (y-3)^2 + (4-0)^2}$ ∥ $(\;)^2$ $36 + y^2 - 10y + 25 + 16 = 4 + y^2 - 6y + 9 + 16$; 36 + 25 + 16 - 4 - 9 - 16 = 10y - 6y ; 48 = 4y ; y = 12 V: Piste on (0,12,0)

7. a) $\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{\pi}{2}$; $\frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \;\; \| \cdot 2$; $x = \pm\pi + n\cdot 4\pi$

b) $\cos 2x = 2\sin^2 x$; $\cos 2x + 1 - 2\sin^2 x - 1 = 0$; $\cos 2x + \cos 2x - 1 = 0$; $2\cos 2x = 1$; $\cos 2x = ½$
$\cos 2x = \cos 60°$; $2x = \pm 60° + n\cdot 360°$, $x = \pm 30° + n\cdot 180°$

8. x**c** = y**a** + **b** ; x(5**i** + 6**j**) = y(2**i** + 2**j**) + 3**i** - 9**j** ; 5x**i** + 6x**j** = 2y**i** + 3y**j** + 3**i** - 9**j**

$\begin{cases} 5x = 2y + 3 \;\; \| \cdot 3 \\ 6x = 3y - 9 \;\; \| \cdot (-2) \end{cases}$; $\begin{cases} 15x = 6y + 9 \\ -12x = -6y + 18 \end{cases}$, $3x = 27$; $x = 9$; x**c** = 9(5**i** + 6**j**) = 45**i** + 54**j**

9. a) sinifunktio saa saman arvon kun kulmilla eroa 360° . Jos kulma = 0° ; 6x = 0° ; x = 0° . Jos kulma on 360° ; 6x = 360° ; x = 60° eli funktio saa saman arvon, kun x:illä eroa 60° - 0° = 60°
b) Tangenttifunktio saa saman arvon kun kulmilla eroa π (rad) . Jos kulma = 0 ; $5\pi x = 0$; x = 0 . Jos kulma = π ; $5\pi x = \pi$; x = 0,2 eli x:illä on eroa 0,2 - 0 = 0,2

10. Olkoon z-akselin piste = (0,0,z) . **AP** on ABC-tasossa ⇒ **AP** on esitettävissä vektoreiden **AB** ja **AC** avulla ts. **AP** = x**AB** + y**AC** ; **OP** = **OA** + **AP** = -**i** + 2**j** + 3**k** + x(2**i** - **j** - 2**k**) + y(-**i** + **j** + **k**) = 0**i** + 0**j** + z**k**

-**i** + 2**j** + 3**k** + 2x**i** - x**j** - 2x**k** - y**i** + y**j** + y**k** = z**k** ; $\begin{cases} -1 + 2x - y = 0 \;\; \| \cdot 1 \\ 2 - x + y = 0 \;\; \| \cdot 1 \\ 3 - 2x + y = z \end{cases}$; $1 + x = 0$; $x = -1$

$-1 - 2 - y = 0$; $y = -3$; $z = 3 - 2\cdot(-1) - 3 = 2$ V: P = (0,0,2)

95.4.1. Olkoon kolmiossa ABC vektori **AB** = **a**. Kolmion ulkopuolella olevasta pisteestä O piirretyt vektorit olkoot **OB** = **b** ja **OC** = **c**. Määritä vektorit a) **OA** b) **BC** c) **AC** vektoreiden **a**, **b** ja **c** avulla.

95.4.2. Olkoon tan α = 0,75 , kun kulma α on terävä. Määritä a) sin α b) cos (90° + α)

95.4.3. Millä x:n arvoilla vektorit **a** = (x + 1)**i** + 2**j** ja **b** = 3**i** + x**j** ovat yhdensuuntaiset?

95.4.4. Kolmion sivut ovat 7, 8 ja 9. Laske kolmion suurin kulma 0,1° tarkkuudella.

95.4.5. Ratkaise yhtälöt a) 2sin α + 1 = 0 b) 2sin α + cos α = 0

95.4.6. Jaa vektori **c** = 3**i** + 4**j** vektorien **a** = 3**i** + 2**j** ja **b** = 2**i** + **j** suuntaisiin komponentteihin.

95.4.7. Kolmion kaksi sivua ovat 3,2 cm ja 3,7 cm sekä edellisen vastainen kulma 46°. Laske kolmion suurin kulma.

95.4.8. Määritä x, kun vektorit **a** = x**i** + 2**j** ja **b** = 3**i** - 4**j** ovat kohtisuorassa. Mikä on vektoreiden **a** ja **b - a** välinen kulma tällä x:n arvolla?

95.4.9. Määritä a ja b, kun funktion f(x) = a·sin bx perusjakso on 4π ja f(π/3) = 5

95.4.10. Kolmion kaksi kärkeä ovat pisteissä (1,1,1) ja (5,3,-1) sekä mediaanien leikkauspiste on (4,5,6). Määritä kolmion kolmas kärkipiste.

1. a) **OA** = **OB** + **BA** = **b** - **a** b) **BC** = **BO** + **OC** = -**b** + **c** c) **AC** = **AB** + **BO** + **OC** = **a** - **b** + **c**

2. tan α = 0,75 ; tan α = ¾ ⇒ Suorakulmaisen kolmion kateeteiksi voidaan valita 3 ja 4 ⇒ hypotenuusa = 5
a) $\sin\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$ b) $\cos(90° + \alpha) = \cos 90° \cos\alpha - \sin 90° \sin\alpha = -\sin\alpha = -0{,}6$

3. **a** = (x + 1)**i** + 2**j** || **b** = 3**i** + x**j** ⇔ $\frac{x+1}{3} = \frac{2}{x}$; $x^2 + x = 6$; $x^2 + x - 6 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$ x = 2 tai x = -3

4. Suurin kulma on suurinta sivua vastassa oleva kulma, olkoon se a.
$9^2 = 7^2 + 8^2 - 2\cdot 7\cdot 8\cdot\cos\alpha$; $112 \cdot \cos\alpha = 49 + 64 - 81$; $\cos\alpha = 0{,}286$; $\alpha = 73{,}4°$

5.a) 2sin α + 1 = 0 ; sin α = -½ ; sin α = sin (-30°)
α = -30° + n·360° tai α = 180° - (-30°) + n·360° = 210° + n·360°
b) 2sin α + cos α = 0 || : 2cos α ; tan α = -½ ; tan α = tan (-26,6°) ; α = -26,6° + n·180°

6. **c** = x**a** + y**b** ; 3**i** + 4**j** = x(3**i** + 2**j**) + y(2**i** + **j**) ; $\begin{cases} 3 = 3x + 2y \;\; \| \cdot(-1) \\ 4 = 2x + y \;\; \| \cdot 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 5 \\ y = -6 \end{cases}$; **c** = 5**a** - 6**b**

7. Sinilause: $\frac{\sin\alpha}{\sin 46°} = \frac{3{,}7}{3{,}2}$; $\sin\alpha = \frac{3{,}7}{3{,}2}\sin 46° = 0{,}831$; α = 56,3° tai α = 123,7° , jolloin kolmas kulma on β = 180° - 46° - 56,3° = 77,7° tai 180° - 46° - 123,7° = 10,3° V: 77,7° tai 123,7°

8. $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$; $3x - 8 = 0$; $x = \frac{8}{3}$; $\mathbf{a} = \frac{8}{3}\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \frac{1}{3}\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b} - \mathbf{a}|} = \frac{8/9 - 12}{\sqrt{64/9 + 4}\sqrt{1/9 + 36}}$; $\alpha = 123{,}7°$

9. Sinifunktion perusjakso on 2π. Sama arvo saadaan esim. kulmilla 0 ja 2π (rad). Funktion f jakso on 4π.
Sama arvo saadaan siis x:illä 0 ja 4π. $b \cdot 0 = 0$ ja $b \cdot 4\pi = 2\pi$; $b = ½$
$f(\pi/3) = 5$; $a \cdot \sin(½ \cdot \pi/3) = 5$; $a \cdot \sin \pi/6 = 5$; $a \cdot ½ = 5$; $a = 10$

10. Olkoon sivun AB keskipiste K : $x = ½(1 + 5) = 3$; $y = ½(1 + 3) = 2$; $z = ½(1 - 1) = 0$; $K = (3,2,-1)$
Keskijanojen leikkauspiste jakaa keskijanan suhteessa 1 : 2 ts. $KC = 3 \cdot KM$
$\mathbf{OC} = \mathbf{OK} + 3 \cdot \mathbf{KM} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = 6\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 18\mathbf{k}$; $C = (6,11,18)$

96.1.1. Kolmion ABC sivuina ovat vektorit **AB** = **a** ja **AC** = **b**. Piste P jakaa sivun AB suhteessa 2:3 ja piste Q sivun BC suhteessa 4:1. Muodosta vektoreiden **a** ja **b** avulla vektorit a) **CB** b) **PC** c) **PQ**.

96.1.2. Ratkaise yhtälö a) $\cos(3x) = ½$ b) $3\sin(x) = 4\cos(x)$

96.1.3. Olkoon A(2,5) ja B(5,1). Laske a) vektori **AB** b) **|AB|** c) mihin pisteeseen tullaan, kun pisteestä A siirrytään B:n suuntaan, B:hen nähden viisinkertaisen matkan päähän.

96.1.4. Laske sin(x), cos(x) ja sin(2x), kun $\tan(x) = \frac{8}{15}$ ja $x \in [\pi, 2\pi]$

96.1.5. Mikä on lausekkeen $3\sin(x) + 4$ suurin ja pienin arvo, kun kulma x a) voi olla mikä tahansa b) kuuluu välille $[0, 7\pi/6]$?

96.1.6. Olkoon (**a**,**b**) tason kanta. Osoita, että myös vektorit **u** = 2**a** + 3**b** ja **v** = 4**a** - 5**b** muodostavat saman tason kannan. Jaa vektori **c** = 14**a** - **b** vektoreiden **u** ja **v** suuntaisiin komponentteihin

96.1.7. Miten monta prosenttia on ympyrän sisään piirretyn säännöllisen 20-kulmion piiri ympyrän kehästä?

96.1.8. Olkoon **a** = t(2**i** - **j**) - 4**i** ja **b** = 2**i**. Määritä luku t, kun a) **a** || **b** b) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ c) |**a**| = |**b**|

96.1.9. Osoita oikeaksi kaava $\sin(\frac{\pi}{6} + x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$

96.1.10. Tasakylkisessä kolmiossa ABC on AC = BC = 6 ja AB = 8. Piste on sivun AC jatkeella siten, että CD = 3. Laske sivun DB pituus ja kolmion BCD pinta-ala (tarkat arvot).

1. a) $\mathbf{CB} = \mathbf{CA} + \mathbf{AB} = -\mathbf{b} + \mathbf{a}$ b) $\mathbf{PC} = \mathbf{PA} + \mathbf{AC} = -\frac{2}{5}\mathbf{a} + \mathbf{b}$

c) $\mathbf{PQ} = \frac{3}{5}\mathbf{AB} + \frac{4}{5}\mathbf{BC} = \frac{3}{5}\mathbf{a} + \frac{4}{5}(-\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{3}{5}\mathbf{a} - \frac{4}{5}\mathbf{a} + \frac{4}{5}\mathbf{b} = -\frac{1}{5}\mathbf{a} + \frac{4}{5}\mathbf{b}$

2. a) $\cos(3x) = ½$; $\cos(3x) = \cos(60°)$; $3x = \pm 60° + n \cdot 360°$; $x = \pm 20° + n \cdot 120°$
b) $3\sin(x) = 4\cos(x)$ ||:3cos(x) ; $\tan(x) = \frac{4}{3}$; $\tan(x) = \tan(53{,}1°)$; $x = 53{,}1° + n \cdot 180°$

3. a) $\mathbf{AB} = (5 - 2)\mathbf{i} + (1 - 5)\mathbf{j} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ b) $|\mathbf{AB}| = \sqrt{32 + 42} = \sqrt{25} = 5$
c) $\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + 5\mathbf{AB} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 5(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 15\mathbf{i} - 20\mathbf{j} = 17\mathbf{i} - 15\mathbf{j}$; $P = (17,-15)$

4. $\tan(x) = \frac{8}{15} \Rightarrow$ suorakulmaiseen kolmioon voidaan laittaa kateeteiksi 8 ja 15
$hyp^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$; hyp = 17 ; $\tan(x) > 0$ & $x \in [\pi, 2\pi] \Rightarrow$ kulma III nelj.
$\sin(x) = -\frac{8}{17}$; $\cos(x) = -\frac{15}{17}$; $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = 2(-\frac{8}{17})(-\frac{15}{17}) = \frac{240}{289}$

5. a) $S = 3 \cdot 1 + 4 = 7$; $p = 3 \cdot (-1) + 4 = 1$ b)
sini suurin kun kehäpisteen y korkeimmalla ja pienin, kun matalimmalla
$S = 3 \cdot 1 + 4 = 7$; $p = 3\sin(7\pi/6) + 4 = 3(-½) + 4 = 2½$

6. $\mathbf{u} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} \nparallel \mathbf{v} = 4\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$, koska $\frac{2}{4} \neq \frac{3}{-5} \Rightarrow (\mathbf{u},\mathbf{v})$ on kanta
$\mathbf{c} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$; $14\mathbf{a} - \mathbf{b} = x(2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) + y(4\mathbf{a} - 5\mathbf{b}) = 2x\mathbf{a} + 3x\mathbf{b} + 4y\mathbf{a} - 5y\mathbf{b}$
$\begin{cases} 14 = 2x + 4y \;||\cdot 5 \\ -1 = 3x - 5y \;||\cdot 4 \end{cases}$; $\begin{cases} 70 = 10x + 20y \\ -4 = 12x - 20y \end{cases}$; $66 = 3x$; $x = 3$
$4 = 6 + 4y$; $4y = 8$; $y = 2$ V: $\mathbf{c} = 3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$

7. Keskuskulma = 360°:20 = 18°. Olkoon säde = r ja sivu = s.
Kosinilause $\Rightarrow s^2 = r^2 + r^2 - 2r\cdot r\cdot\cos(18°) = 2r^2 - 2r^2\cdot\cos(18°) = 0,097887r^2$; $s = 0,31287r$
$p_{20} = 20\cdot 0,31287r = 6,2574r$; $p_O = 2\pi r$; $\frac{p_{20}}{p_O} = \frac{6,2574r}{2\pi r} = 0,996 = 99,6\%$

---

8. a) $\mathbf{a} = t(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) - 4\mathbf{i} = 2t\mathbf{i} - t\mathbf{j} - 4\mathbf{i} = (2t - 4)\mathbf{i} - t\mathbf{j}$; $\mathbf{b} = 2\mathbf{i}$, joka on vaakasuora , $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ eli
a on vaakasuora, jos **j**:n kerroin on 0 ts. t = 0
b) **a** on pystysuora, jos **i**:n kerroin on 0 ts. 2t - 4 = 0 ; t = 2
c) $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$; $\sqrt{(2t - 4)^2 + t^2} = 2$; $4t^2 - 16t + 16 + t^2 = 4$; $5t^2 - 16t + 12 = 0$
$t = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{10} = \frac{16 \pm 4}{10}$; t = 2 tai t = 1,2

---

9. $VP = \sin(\pi/6 + x) = \sin(\pi/6)\cos(x) + \cos(\pi/6)\sin(x) = ½\cos(x) + ½\sqrt{3}\sin(x)$
$OP = \cos(x - \pi/3) = \cos(\pi/3)\cos(x) + \sin(\pi/3)\sin(x) = ½\cos(x) + ½\sqrt{3}\sin(x) = VP$

---

10. Olk. CE kolmion ABC korkeusjana. $CE = \sqrt{36 - 16} = 2\sqrt{5}$ ΔACE + trig.: $\cos(\alpha) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
ΔABD + kosinilause: $DB^2 = 9^2 + 8^2 - 2\cdot 9\cdot 8\cdot\cos(\alpha) = 81 + 64 - 144\cdot\frac{2}{3} = 49$; DB = 7
$A_{ABC} = ½\cdot 6\cdot 8\cdot\sin(\alpha) = 24\cdot\frac{2\sqrt{5}}{3} = 8\sqrt{5}$; $A_{ABD} = ½\cdot 9\cdot 8\cdot\sin(\alpha) = 36\cdot\frac{2\sqrt{5}}{3} = 12\sqrt{5}$; $A_{BCD} = A_{ABD} - A_{ABC} = 4\sqrt{5}$

96.2.1. Olkoon $\mathbf{u} = -4\mathbf{i}$ ja $\mathbf{v} = 3\mathbf{j}$. Muodosta yksikkövektorit a) $\mathbf{u}^o$ b) $\mathbf{v}^o$ c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v})^o$.

96.2.2. Laske kolmion A(1,2)B(4,6)C(-4,14) sivujen pituudet ja keskipisteet.

96.2.3. Tylpälle kulmalle α on $\sin(\alpha) = \frac{5}{13}$. Laske $\cos(\alpha)$ ja $\tan(\alpha)$.

96.2.4. Olkoon ABCD suunnikas, jossa **AB** = **a** ja **AD** = **b**. Piste E jakaa sivun AB, F sivun BC ja G lävistäjän AC suhteessa 1:2. Esitä vektoreiden **a** ja **b** avulla vektorit a) **EF** b) **GF** c) **GD**.

96.2.5. Ratkaise yhtälö a) $\sin(x - 25°) = \cos(40°)$ b) $\cos(2\pi/3 + x) = \cos(2x - 4\pi/3)$

96.2.6. Määritä se pisteiden A(2,-3) ja B(-3,5) välisen janan piste P, joka jakaa janan AB suhteessa 3:5.

96.2.7. Montako prosenttia on ympyrän sisään piirretyn säännöllisen 12-kulmion ala koko ympyrän alasta?

96.2.8. Jaa vektori $\mathbf{v} = 13\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ vektorien $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ja $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ suuntaisiin komponentteihin.

96.2.9. Osoita oikeaksi kaava $\cos^2(x - \pi/6) - \sin^2(x - \pi/3) = ½\sqrt{3}\cdot\sin(2x)$

96.2.10. Kolmion sivun pituus on 4,2 m ja sen toisesta päätepisteestä piirretty keskijana 3,6 m sekä toisessa päätepisteessä olevan kolmion kulma on 50°. Laske kolmion muut sivut.

---

1. a) $\mathbf{u}^o = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{-4\mathbf{i}}{4} = -\mathbf{i}$ b) $\mathbf{v}^o = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{3\mathbf{j}}{3} = \mathbf{j}$ c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v})^o = \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{|\mathbf{u} + \mathbf{v}|} = \frac{-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}}{5} = -\frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$

---

2. $|AB| = \sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$; K_{AB} : $x = \frac{1+4}{2} = 2½$; $y = \frac{2+6}{2} = 4$; $K_{AB} = (2½,4)$
$|AC| = \sqrt{(1+4)^2+(14-2)^2} = \sqrt{25+144} = 13$; K_{AC} : $x = \frac{1-4}{2} = -1½$; $y = \frac{2+14}{2} = 8$; $K_{AC} = (-1½,8)$
$|BC| = \sqrt{(4+4)^2+(14-6)^2} = \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2}$; K_{BC} : $x = \frac{4-4}{2} = 0$; $y = \frac{6+14}{2} = 10$; $K_{BC} = (0,10)$

---

3. $\sin(\alpha) = \frac{5}{13} \Rightarrow$ suorakulmaiseen kolmioon sivut 5 (= kat.) ja 13 (= hyp.)
PYTH: $x^2 + 5^2 = 13^2$; $x^2 = 169 - 25 = 144$; x = 12 (= vier.kat.)
Tylppä kulma II neljänneksessä, josta merkit. $\cos(\alpha) = -\frac{12}{13}$; $\tan(\alpha) = -\frac{5}{12}$

---

4. a) $\mathbf{EF} = \mathbf{EB} + \mathbf{BF} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$ b) $\mathbf{GF} = \mathbf{GC} + \mathbf{CF} = \frac{2}{3}\mathbf{AC} + \frac{2}{3}\mathbf{CB} = \frac{2}{3}(\mathbf{AC} + \mathbf{CB}) = \frac{2}{3}\mathbf{AB} = \frac{2}{3}\mathbf{a}$ c) $\mathbf{GD} = \mathbf{GA} + \mathbf{AD}$
$= \frac{1}{3}\mathbf{CA} + \mathbf{b} = \frac{1}{3}(-\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{b} = -\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$

5. a) $\sin(x - 25°) = \cos(40°)$; $\sin(x - 25°) = \sin(50°)$ $x - 25° = 50° + n\cdot360°$ tai $x - 25° = 130° + n\cdot360°$; $x = 75° + n\cdot360°$ tai $x = 155° + n\cdot360°$ b) $\cos(\frac{2\pi}{3} + x) = \cos(2x - \frac{4\pi}{3})$; $\frac{2\pi}{3} + x = 2x - \frac{4\pi}{3} + n\cdot2\pi$ tai $\frac{2\pi}{3} + x = -2x + \frac{4\pi}{3} + n\cdot2\pi$ $-x = -2\pi + n\cdot2\pi$ tai $3x = \frac{2\pi}{3} + n\cdot2\pi$; $x = n\cdot2\pi$ tai $x = \frac{2\pi}{9} + n\cdot\frac{2\pi}{3}$
6. $\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + \frac{3}{8}\mathbf{AB} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \frac{3}{8}(-5\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \frac{15}{8}\mathbf{i} + 3\mathbf{j} = \frac{1}{8}\mathbf{i} \Rightarrow P = (\frac{1}{8},0)$
7. 12-kulmion yhden keskuskolmion keskuskulma = $\frac{360°}{12} = 30°$ $A_\Delta = ½\cdot r\cdot r\cdot\sin30° = ¼r^2$; $A_{12} = 12\cdot¼r^2 = 3r^2$; $A_O = \pi r^2$; $\frac{A_{12}}{A_O} = \frac{3r^2}{\pi r^2} = \frac{3}{\pi} \approx 0{,}955 = 95{,}5\%$
8. $\mathbf{v} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$; $13\mathbf{i} + 3\mathbf{j} = x(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) + y(-\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$; $13\mathbf{i} + 3\mathbf{j} = 3x\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} - y\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$ $\begin{cases} 13 = 3x - y \;\Vert\cdot3 \\ 3 = -2x + 3y \;\Vert\cdot1 \end{cases}$; $\begin{cases} 39 = 9x - 3y \\ 3 = -2x + 3y \end{cases}$; $42 = 7x$; $x = 6$; $13 = 18 - y$; $y = 5$ V: $\mathbf{v} = 6\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$
9. VP = $\cos^2(x - \pi/6) - \sin^2(x - \pi/3)$ $= [\cos(x)\cdot\cos(\pi/6) + \sin(x)\cdot\sin(\pi/6)]^2 - [\sin(x)\cdot\cos(\pi/3) - \cos(x)\cdot\sin(\pi/3)]^2$ $= [½\sqrt{3}\cdot\cos(x) + ½\cdot\sin(x)]^2 - [½\cdot\sin(x) - ½\sqrt{3}\cdot\cos(x)]^2$ $= [¾\cos^2(x) + ½\sqrt{3}\sin(x)\cdot\cos(x) + ¼\sin^2(x)] - [¼\cdot\sin^2(x) - ½\sqrt{3}\sin(x)\cdot\cos(x) + ¾\cos^2(x)]$ $= \sqrt{3}\sin(x)\cdot\cos(x) = ½\sqrt{3}\cdot2\sin(x)\cdot\cos(x) = ½\sqrt{3}\cdot\sin(2x) =$ OP
10. Olkoon kolmio ABC, jossa AD = 3,6 on keskijana, AC = 4,2 , $\angle C = 50°$ ja $\angle ADC = \alpha$. ΔADC + sinilause: $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(50°)} = \frac{4{,}2}{3{,}6}$; $\sin(\alpha) = 0{,}8937$; $\alpha = 63{,}3°$ {tai $\alpha = 116{,}7°$} $\Rightarrow \angle CAD = 180° - 50° - 63{,}3° = 66{,}7°$. {$\angle CAD = 180° - 50° - 116{,}7° = 13{,}3°$} Olkoon CD = x. ΔADC + sinilause: $\frac{x}{3{,}6} = \frac{\sin(66{,}7°)}{\sin(50°)}$; $x = 4{,}3 \Rightarrow BC = 2x =$ **8,6 (m)** {**2,2(m)**} ΔABC + kosinilause : $AB^2 = 8{,}6^2 + 4{,}2^2 - 2\cdot8{,}6\cdot4{,}2\cdot\cos(50°) = 45{,}5 \;\Vert \sqrt{(\;)}$; AB = **6,7 (m)** {**3,3(m)**}

97.1.1. Olkoon A = (2,3) ja B = (5,-1). Muodosta a) vektori **AB** b) **AB**:n suuntainen yksikkövektori c) **AB**:n kanssa vastakkaissuuntainen vektori, jonka pituus on 2.

97.1.2. Suunnikkaassa ABCD on **AB** = **a** ja **AD** = **b**. Piste P jakaa sivun AB suhteessa 2:3 ja piste Q sivun DC suhteessa 3:2. Muodosta **a**:n ja **b**:n avulla vektorit **QA** ja **PC**. Mitä voi tämän perusteella sanoa vektoreista **QA** ja **PC**, entä janoista QA ja PC?

97.1.3. Mikä y-akselin piste A(0,y) on pisteestä B(8,9) etäisyydellä 10? Mikä on silloin janan AB keskipiste?

97.1.4. Kulman $\alpha \in [90°,270°]$ tangentti on 8/15. Mikä on kulman α sinin ja kosinin tarkka arvo?

97.1.5. Ratkaise yhtälö a) $\cos(2x - 30°) = \cos(45° - x)$ b) $3 \cdot \sin\frac{x}{3} = 2$

97.1.6. Jaa vektori **c** = 5**i** + 9**j** vektoreiden **a** = 2**i** - 3**j** ja **b** = 3**i** + **j** suuntaisiin komponentteihin.

97.1.7. Ratkaise yhtälö $4\sin 2x = \cos 2x$.

97.1.8. Mikä suoran A(1,7)B(31,-8) piste jakaa janan AB a) sisäpuolisesti b) ulkopuolisesti suhteessa 1:4?

97.1.9. Kolmion kaksi sivua ovat 6 ja 9 sekä suurin kulma on 80°. Laske kolmion pienin kulma. Huomaa kaksi vaihtoehtoa.

97.1.10. Funktion kuvaaja on siniaallon muotoinen. Sillä on huippupiste (π/4,2) ja seuraava huippupiste oikealla on piste (5π/4,2) ja kuvaaja sivuaa x-akselia kohdassa x = 3π/4. Mikä voi olla funktion lauseke?

1. a) $\mathbf{AB} = (5 - 2)\mathbf{i} + (-1 - 3)\mathbf{j} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ b) $\mathbf{AB}^0 = \frac{\mathbf{AB}}{\lvert\mathbf{AB}\rvert} = \frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{5} = 0{,}6\mathbf{i} - 0{,}8\mathbf{j}$ c) $\mathbf{c} = -2 \cdot \mathbf{AB}^0 = -2(0{,}6\mathbf{i} - 0{,}8\mathbf{j}) = -1{,}2\mathbf{i} + 1{,}6\mathbf{j}$
2. $\mathbf{QA} = \mathbf{QD} + \mathbf{DA} = -\frac{3}{5}\mathbf{a} - \mathbf{b}$; $\mathbf{PC} = \mathbf{PB} + \mathbf{BC} = \frac{3}{5}\mathbf{a} + \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{QA} \uparrow\downarrow \mathbf{PC}$. QA || PC ja |QA| = |PC| eli janat yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset.

3. Olkoon A = (0,y), B = (8,9) . |AB| = 10 ; $\sqrt{(0-8)^2 + (y-9)^2} = 10$ || $(\ )^2$; $64 + (y-9)^2 = 100$ $(y-9)^2 = 36$; y - 9 = ±6 ; y = 9 ± 6 ; y = 15 tai y = 3 jolloin A = (0,15) tai (0,3)
Keskipiste on $(\frac{0+8}{2}, \frac{15+9}{2}) = (4,12)$ tai $(\frac{0+8}{2}, \frac{9+3}{2}) = (4,6)$

4. Piirretään suorakulmainen kolmio, jonka kateetit 8 ja 15. Olkoon hypotenuusa = x
$x^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$; x = 17. Tangentti positiivinen ja $\alpha \in [90°,270°] \Rightarrow$ III nelj.
$\sin\alpha = -8/17$ ja $\cos\alpha = -15/17$

5. a) cos (2x - 30°) = cos (45° - x) ; 2x - 30° = 45° - x + n·360° ⇔ 3x = 75° + n·360° || : 3 ⇔ x = 25° + n·120°
TAI 2x - 30° = -45° + x + n·360° ⇔ x = - 15° + n·360°
b) $3\cdot\sin\frac{x}{3} = 2$ || : 3 ; $\sin\frac{x}{3} = \frac{2}{3}$; $\sin\frac{x}{3} = \sin 41{,}8°$; $\frac{x}{3} = 41{,}8° + n\cdot360°$ tai $\frac{x}{3} = 138{,}2° + n\cdot360°$
⇔ x = 125,4° + n·1080° tai x = 414,6° + n·1080°

6. **c** = x**a** + y**b** ; 5**i** + 9**j** = x(2**i** - 3**j**) + y(3**i** + **j**) ; 5**i** + 9**j** = 2x**i** - 3x**j** + 3y**i** + y**j**
$\begin{cases} 5 = 2x + 3y \ \|\ \cdot(-1) \\ 9 = -3x + y \ \|\ \cdot 3 \end{cases}$; 22 = -11x ; x = -2 ; 5 = 2·(-2) + 3y ; 9 = 3y ; y = 3 ; V : **c** = -2**a** + 3**b**

7. 4sin 2x = cos 2x || : cos 3x ; 4tan 2x = 1 || : 4 ; tan 2x = ¼ ; tan 2x = tan 14°
2x = 14° + n·180° || : 2 ; x = 7° + n·90°

8. a) **OP** = **OA** + $\frac{1}{5}$**AB** = **i** + 7**j** + $\frac{1}{5}$(30**i** - 15**j**) = **i** + 7**j** + 6**i** - 3**j** = 7**i** + 4**j** ; P = (7, 4)
b) **OR** = **OA** - $\frac{1}{3}$**AB** = **i** + 7**j** - $\frac{1}{3}$(30**i** - 15**j**) = **i** + 7**j** - 10**i** + 5**j** = -9**i** + 12**j** ; R = (-9, 12)

9. JOKO suurin sivu 80° kulman vastainen sivu x, joka saadaan kosinilauseella
$x^2 = 6^2 + 9^2 - 2\cdot6\cdot9\cdot\cos 80° = 98{,}2$; x = 9,9. Pienin kulma on pienintä sivua 6 vastaava
Sinilauseella $\frac{\sin\alpha}{\sin 80°} = \frac{6}{9{,}9}$; $\sin\alpha = \frac{6}{9{,}9}\sin 80° = 0{,}596$; $\alpha = 36{,}6°$
TAI suurin sivu on 9 ja suurin kulma 80°, jolloin 6 vastainen kulma saadaan sinilauseella.
$\frac{\sin\alpha}{\sin 80°} = \frac{6}{9}$; $\sin\alpha = \frac{6}{9}\sin 80° = 0{,}656$; $\alpha = 41{,}0°$ ja kolmas kulma = 180° - 41,0° - 80° = 59° ⇒ pienin 41°

10. Huippujen x-koordinaattien ero = $\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi$ = jakso
⇒ funktio voisi olla muotoa f(x) = a·sin 2x + b
Kuvaaja sivuaa x-akselia ⇒ pienin arvo on 0. Arvot välillä 0 ≤ f(x) ≤ 2 ⇒ a = 1
f(¾π) = 0 ; sin 2·¾π + b = 0 ; sin ½π + b = 0 ; 1 + b = 0 ; b = -1 V: f(x) = sin 2x + 1

97.2.1. Olkoon A(1,2,3) ja B(4,8,5). a) Laske janan AB keskipiste. b) Laske janan AB pituus.

97.2.2. Ympyrän keskipiste on O sekä janat AB ja CD ovat ympyrän halkaisijoita. Piste P jakaa säteen AO suhteessa 1 : 2 ja piste Q säteen OB suhteessa 2 : 1. Olkoon vektorit **b** = **OB** ja **c** = **OC**. Muodosta vektorit **CP** ja **QD** vektoreiden **b** ja **c** avulla. Mitä voidaan väittää janoista CP ja QD saadun tuloksen perusteella?

97.2.3. Muodosta vektorit **AB** ja **BC**, kun A = (5,5,-1), B = (6,3,2) ja C = (9,-3,11). Ovatko pisteet A, B ja C samalla suoralla?

97.2.4. Kulma α on tylppä ja sen kosini on -1/3. Määritä kulman α sinin ja tangentin tarkat arvot.

97.2.5. Ratkaise yhtälöt a) sin (2x + 45°) = sin (30° - x) b) 2·cos ¼x = 1.

97.2.6. Olkoon vektorit **a** = 2**i** - 4**j** ja **b** = 3**i** + 5**j**. Määritä reaaliluku x siten, että vektorin **a** + x**b** pituus on 10.

97.2.7. Suunnikkaan kolme kärkipistettä ovat A(25,14), B(17,-11) ja C(-8,35). Määritä neljäs kärkipiste D. Huomaa kolme mahdollisuutta.

97.2.8. Onko mahdollista jakaa vektori **c** = **i** + **j** + **k** vektorien **a** = **i** + **j** ja **b** = **j** + **k** suuntaisiin komponentteihin? Mitä tulos tarkoittaa geometrisesti?

97.2.9. Ratkaise yhtälö $\frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \tan(\frac{1}{2}\pi - x)$.

97.2.10. Mies kulki suoraan pohjoiseen ja näki paikasta A oikealla puolella radiomaston 40° kulmassa kulkusuuntaansa nähden. Kuljettuaan 200 metriä hän näki maston paikasta B 70° kulmassa. Kuinka kaukana masto oli matkan AB keskikohdasta?

1. a) K: $x = \frac{1}{2}(1 + 4) = 2\frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}(2 + 8) = 5$; $z = \frac{1}{2}(3 + 5) = 4$; $K = (2\frac{1}{2},5,4)$
b) $|AB| = \sqrt{(4 - 1)^2 + (8 - 2)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7$

2. $\mathbf{CP} = \mathbf{CO} + \mathbf{AP} = \mathbf{CO} + \frac{2}{3}\mathbf{OA} = -\mathbf{c} - \frac{2}{3}\mathbf{b}$; $\mathbf{QD} = \mathbf{QO} + \mathbf{OD} = \frac{2}{3}\mathbf{BO} + \mathbf{OD} = -\frac{2}{3}\mathbf{b} - \mathbf{c}$
Ts. CP || QD ja |CP| = |QD| eli janat yhdensuuntaisia ja yhtä pitkiä.

3. $\mathbf{AB} = (6 - 5)\mathbf{i} + (3 - 5)\mathbf{j} + (2 + 1)\mathbf{k} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
$\mathbf{BC} = (9 - 6)\mathbf{i} + (-3 - 3)\mathbf{j} + (11 - 2)\mathbf{k} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$
$\frac{1}{3} = \frac{-2}{-6} = \frac{3}{9} \Rightarrow$ vektorit ovat yhdensuuntaisia ja pisteet A, B ja C ovat samalla suoralla

4. Olkoon toinen kateetti = x. $x^2 + 1^2 = 3^2$; $x^2 = 9 - 1$; $x = \sqrt{8}$, α on II neljänneksessä
$\sin \alpha = + \frac{\sqrt{8}}{3} = + \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ja $\tan \alpha = - \frac{\sqrt{8}}{1} = - \sqrt{8} = - 2\sqrt{2}$

5. a) $\sin (2x + 45°) = \sin (30° - x)$; $2x + 45° = 30° - x + n \cdot 360° \Leftrightarrow 3x = -15° + n \cdot 360°$ || : 3
$\Leftrightarrow x = - 5° + n \cdot 120°$ tai $2x + 45° = 180° - 30° + x + n \cdot 360° \Leftrightarrow x = 105° + n \cdot 360°$
b) $2\cos \frac{1}{4}x = 1$ || : 2 ; $\cos \frac{1}{4}x = \frac{1}{2}$; $\cos \frac{1}{4}x = \cos 60°$; $\frac{1}{4}x = \pm 60° + n \cdot 360°$ || · 4
$x = \pm 240° + n \cdot 1440°$

6. $\mathbf{a} + x\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + x(3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3x\mathbf{i} + 5x\mathbf{j} = (2 + 3x)\mathbf{i} + (-4 + 5x)\mathbf{j}$
Pituus = 10 ; $\sqrt{(2 + 3x)^2 + (-4 + 5x)^2} = 10$ || $(\ )^2$; $(2 + 3x)^2 + (-4 + 5x)^2 = 100$
$4 + 12x + 9x^2 + 16 - 40x + 25x^2 = 100$; $34x^2 - 28x - 80 = 0$; $17x^2 - 14x - 40 = 0$
$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 + 2720}}{34} = \frac{14 \pm \sqrt{2916}}{34} = \frac{14 \pm 54}{34}$; $x = \frac{68}{34} = 2$ tai $x = \frac{-40}{34} = -1\frac{3}{17}$

7. Jos suunnikas ABCD: $\mathbf{OD} = \mathbf{OA} + \mathbf{BC} = 25\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 25\mathbf{i} + 46\mathbf{j} = 60\mathbf{j}$; D = (0,60)
ABDC: $\mathbf{OD} = \mathbf{OB} + \mathbf{AC} = 17\mathbf{i} - 11\mathbf{j} - 33\mathbf{i} + 21\mathbf{j} = -16\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$; D = (-16,10)
ADBC: $\mathbf{OD} = \mathbf{OA} + \mathbf{CB} = 25\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 25\mathbf{i} - 46\mathbf{j} = 50\mathbf{i} - 32\mathbf{j}$; D = (50,-32)

8. $\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$; $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} = x(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + y(\mathbf{j} + \mathbf{k})$; $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} = x\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$
1 = x JA 1 = x + y JA 1 = y. Ensimmäinen ja viimeinen ehto edellyttää, että x = 1 ja y = 1, jolloin keskimmäinen ehto ei toteudu, koska $1 \neq 1 + 1$. V: Ei ole mahdollista
Geometrisesti: Vektori **c** ei ole vektoreiden **a** ja **b** määräämässä tasossa

9. $\frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \tan (\frac{1}{2}\pi - x)$; $\tan 2x = \tan (\frac{1}{2}\pi - x)$; $2x = \frac{1}{2}\pi - x + n \cdot \pi$; $3x = \frac{1}{2}\pi + n \cdot \pi$; $x = \frac{1}{6} \cdot \pi + \frac{n}{3} \cdot \pi$
MJ: $x \neq \frac{1}{2}\pi + n \cdot \pi$ ja $\frac{1}{2}\pi - x \neq \frac{1}{2}\pi + n \cdot \pi \Leftrightarrow x \neq n \cdot \pi$ ja $\tan x \neq \pm 1 \Leftrightarrow x \neq \pm\frac{1}{4}\pi + n \cdot \pi$
Kun n = 0, on $x = \pi/6$ joka kelpaa. Kun n = 1, on $x = \frac{1}{2}\pi$, joka ei kelpaa.
Kun n = 2, on $x = 5\pi/6$, joka kelpaa. Näin jakson aikana vain kaksi kulmista kelpaa.
V: $x = \pi/6 + n \cdot \pi$ tai $x = 5\pi/6 + n \cdot \pi$

10. $\angle ABM = 180° - 70° = 110°$. $\angle AMB = 180° - 110° - 40° = 30°$
ΔABM ja sinilause: $\frac{BM}{200} = \frac{\sin 40°}{\sin 30°}$; $BM = \frac{\sin 40°}{\sin 30°} \cdot 200$ m = 257,1 m
ΔKBM ja kosinilause: $KM^2 = 100^2 + 257{,}1^2 - 2 \cdot 100 \cdot 257{,}1 \cdot \cos 110° = 93696$; KM = 306 m

97.3.1. Olkoon $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Laske a) $|\mathbf{a}|$ b) $|\mathbf{b}|$ c) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

97.3.2. Ratkaise yhtälöt a) $\sin 2x = \sin 40°$ b) $\cos 3x = \frac{1}{2}$

97.3.3. Suuntaissärmiön yhdestä kärjestä lähtevät särmävektorit ovat **a**, **b** ja **c**. Muodosta a) yhteisestä alkupisteestä b) vektorin **a** kärjestä lähtevä avaruuslävistäjävektori. c) Mikä on vektori, joka menee vektorin **a** keskipisteestä vektorin **b** keskipisteeseen?

97.3.4. Kolmion kaksi sivua ovat pituudeltaan 4,6 cm ja 7,2 cm sekä niiden välinen kulma on 52°. Määritä kolmion kolmannen sivun pituus ja muut kaksi kulmaa.

97.3.5. Keksi kaksi erisuuntaista vektoria, jotka ovat kohtisuorassa vektoria $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ vastaan. Osoita, että nämä vektorit ovat erisuuntaisia.

97.3.6. Kulmalle $\alpha \in [90°,360°]$ on voimassa $\sin \alpha = \frac{8}{17}$. Määritä $\cos \alpha$ ja $\tan \alpha$.

97.3.7. Kolmion ABC kärki A on pisteessä (18,-17) ja tästä alkavat sivuvektorit ovat $\mathbf{AB} = 14\mathbf{i} + 23\mathbf{j}$ sekä $\mathbf{AC} = -10\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Määritä kärjet B ja C sekä sivulta BC piste, joka jakaa BC:n suhteessa 1:2.

97.3.8. Esitä cos 5x lausekkeena, jossa on trigonometrisena funktiona vain cos x : n eri potensseja. Mitä on cos 5x, kun cos x = ½?

97.3.9. Mikä on se vektorin 2**i** - 3**j** suuntainen vektori, joka komponentteihin jaettaessa saa toiseksi komponentiksi **i** + 2**j** ja toinen komponentti on vektorin **i** - **j** suuntainen?

97.3.10. Funktion f(x) = a·sin kx + b perusjakso on ½π sekä suurin arvo on 6 ja pienin -k. Määritä funktio.

1. a) **a** = 2**i** - **j** + 2**k** ; |**a**| = $\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$
b) **b** = 3**i** + 6**j** + 2**k** ; |**b**| = $\sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 36 + 4} = 7$
c) **a · b** = 2·3 + (-1)·6 + 2·2 = 6 - 6 + 4 = 4

2. a) sin 2x = sin 40° ; 2x = 40° + n·360° tai 2x = 180° - 40° + n·360°
x = 20° + n·180° tai x = 70° + n·180°
b) cos 3x = ½ ; cos 3x = cos 60° ; 3x = ±60° + n·360° ; x = ±20° + n·120°

3. Piirrä kuva ja katso siitä vastaus a) **a** + **b** + **c** b) -**a** + **b** + **c** c) -½**a** + ½**b**

4. Olkoon α = 52°, AB = 7,2 cm ja AC = 4,6 cm.
Kosinilause: $a^2 = 7{,}2^2 + 4{,}6^2 - 2·7{,}2·4{,}6·\cos 52° = 32{,}22$; a = 5,68 = 5,7(cm)
Sinilause: $\frac{\sin\beta}{\sin 52°} = \frac{4{,}6}{5{,}68}$; $\sin\beta = \frac{4{,}6}{5{,}68}·\sin 52°$; sin β = 0,638 ; β = 39,7° (tai β = 140,3°)
Kolmion kulmien summa: γ = 180° - 52° - 39,7° = 88,3°

5. Esim. 3**i** - 2**j**, koska (3**i** - 2**j**) **·** (2**i** + 3**j** - 2**k**) = 6 - 6 + 0 = 0
tai 3**i** + 2**j** + 6**k**, koska (3**i** + 2**j** + 6**k**) **·** (2**i** + 3**j** - 2**k**) = 6 + 6 - 12 = 0
3**i** - 2**j** erisuuntainen kuin 3**i** + 2**j** + 6**k**, koska $\frac{3}{3} \neq \frac{-2}{2} \neq \frac{0}{6}$

6. Piirrä suorakulmainen kolmio, missä α:n vastainen kateetti = 8 ja hypotenuusa = 17
Pyth: $8^2 + b^2 = 17^2$; $b^2 = 289 - 64 = 225$; b = 15
koska α ∈ [90°, 360°] ja sen sini positiivinen, niin α ∈ [90°,180°]
$\cos\alpha = \frac{15}{17}$ ja $\tan\alpha = \frac{8}{15}$

7. **OB** = **OA** + **AB** = 18**i** - 17**j** + 14**i** + 23**j** = 32**i** + 6**j** ; B = (32,6)
OC = **OA** + **AC** = 18**i** - 17**j** + (-10**i** + 2**j**) = 8**i** - 15**j** ; C = (8,-15)
OP = **OB** + $\frac{1}{3}$**BC** = 32**i** + 6**j** + $\frac{1}{3}$(-24**i** - 21**j**) = 32**i** + 6**j** - 8**i** - 7**j** = 24**i** - **j** ; P = (24,-1)

8. cos 5x = cos (3x + 2x) = cos 3x · cos 2x - sin 3x · sin 2x
$= (4\cos^3 x - 3\cos x)(2\cos^2 x - 1) - \sin x\,(4\cos^2 x - 1)·2\sin x·\cos x$
$= 8\cos^5 x - 4\cos^3 x - 6\cos^3 x + 3\cos x - 2\sin^2 x·(4\cos^3 x - \cos x)$
$= 8\cos^5 x - 10\cos^3 x + 3\cos x - 2(1 - \cos^2 x)(4\cos^3 x - \cos x)$
$= 8\cos^5 x - 10\cos^3 x + 3\cos x - 8\cos^3 x + 2\cos x + 8\cos^5 x - 2\cos^3 x$
$= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$
$\cos 5x = 16·(½)^5 - 20·(½)^3 + 5·½ = ½$

9. x(2**i** - 3**j**) = (**i** + 2**j**) + y(**i** - **j**) ; 2x**i** - 3y**j** = **i** + 2**j** + y**i** - y**j**
$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -3x + y = 2 \end{cases}$; -x = 3 ; x = -3 . Kysytty vektori on -3(2**i** - 3**j**) = -6**i** + 9**j**

10. f(x) = a · sin kx + b ; Perusjakso = ½ π ; $\frac{2\pi}{k}$ = ½π ; k = 4.
$\begin{cases} S = 6 \\ p = -4 \end{cases}$; $\begin{cases} a + b = 6 \\ -a + b = -4 \end{cases}$; 2b = 2 ; b = 1 ; a + 1 = 6 ; a = 5 Vast.: f(x) = 5 · sin 4x + 1

98.1.1. Piste P jakaa kolmion ABC sivun AB suhteessa 2 : 1 ja piste Q on sivun BC keskipiste. Esitä vektori **PQ** vektoreiden **AB** = **a** ja **AC** = **b** avulla.

98.1.2. Kolmion kanta on 47 mm ja kantakulmat 44° ja 32°. Laske muiden sivujen pituudet.

98.1.3. Ratkaise yhtälö a) cos 3x = -1 b) sin 3x - sin 2x = 0.

98.1.4. Kolmion sivujen pituudet ovat 5, 6 ja $\sqrt{11}$. Laske pienin kulma ja alan tarkka arvo.

98.1.5. Määritä cos 2x, kun tan x = -½ ja kulma x on välillä [π,2π]

98.1.6. Jaa vektori 12**i** - 3**j** kahteen komponenttiin, joista toinen on vektorin 6**i** + 9**j** ja toinen vektorin **i** - **j** suuntainen.

98.1.7. Pisteestä A(2,3,-5) siirrytään 12 yksikköä vektorin 2**i** - 2**j** + **k** suuntaan, jolloin tullaan pisteeseen B. Määritä piste B.

98.1.8. Ratkaise yhtälö $\cos^2 x = \sin 2x$.

98.1.9. Kolmion kärkipisteet ovat A(-1,2), B(2,3) ja C(4,-1). Laske kulman C suuruus.

98.1.10. Millä vakion k arvolla yhtälö $\cos(x - \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{2\pi}{3}) = k \cdot \sin x$ toteutuu kaikilla x:n arvoilla?

1. **PQ** = **PB** + **BQ** = 1/3**AB** + ½**BC** = 1/3**AB** + ½(**BA** + **AC**) = 1/3**a** + ½(-**a** + **b**) = -1/6**a** + ½**b**
2. $\angle C = 180° - 44° - 32° = 104°$. $\frac{b}{47} = \frac{\sin 32°}{\sin 104°}$; b = 26 (mm) ; $\frac{a}{47} = \frac{\sin 44°}{\sin 104°}$; a = 34(mm)
3. a) cos 3x = -1 ; 3x = 180° + n·360° ; x = 60° + n·120° b) sin 3x - sin 2x = 0 sin 3x = sin 2x ; 3x = 2x + n·360° tai 3x = 180° - 2x + n·360° ; x = n·360° tai x = 36° + n·72°
4. Pienin kulma on pienimmän sivun ($\sqrt{11}$) vastainen. Käytetään kosinilausetta. $(\sqrt{11})^2 = 5^2 + 6^2 - 2\cdot5\cdot6\cdot\cos a$; 11 = 25 + 36 - 60cos α ; cos α = 5/6 ; α = 33,6° $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\sin^2\alpha = 1 - 25/36 = 11/36$; $\sin\alpha = \sqrt{11}/6$ (+, koska kolmion kulma) $A = ½bc\sin\alpha = ½\cdot5\cdot6\cdot\sqrt{11}/6 = 2½\cdot\sqrt{11}$
5. tan x = -½. sin x ja cos x saadaan suorakulmaisesta kolmiosta, jossa vastainen kateetti on 1 ja viereinen kateetti 2, jolloin hypotenuusa on $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ Kulma on välillä [π,2π] ja tan negat. joten kulma x on IV neljänneksessä $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (2/\sqrt{5})^2 - (1/\sqrt{5})^2 = 4/5 - 1/5 = 3/5$
6. 12**i** - 3**j** = x(6**i** + 9**j**) + y(**i** - **j**) ; $\begin{cases} 12=6x+y \\ -3 = 9x - y\end{cases}$; 9 = 15x ; x = 0,6 ; 12 = 6·0,6 + y ; y = 8,4 V : 12**i** - 3**i** = 0,6(6**i** + 9**j**) + 8,4(**i** - **j**)
7. **OB** = **OA** + 12·$\mathbf{a}^0$ = 2**i** + 3**j** - 5**k** + 12·$\frac{2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4+4+1}}$ = 2**i** + 3**j** - 5**k** + 4·(2**i** - 2**j** + **k**) = 10**i** - 5**j** - **k** ; B = (10,-5,-1)
8. $\cos^2 x = \sin 2x$; $\cos^2 x = 2\sin x \cos x$ || : cos x ; cos x = 2sin x || : 2cos x tai cos x = 0 ½ = tan x tai cos x = 0 ; x = 26,6° + n·180° tai x = 90° + n·180°
9. **CA** = (-1 - 4)**i** + (2 + 1)**j** = -5**i** + 3**j** ; **CB** = (2 - 4)**i** + (3 + 1)**j** = -2**i** + 4**j** $\cos\gamma = \frac{\mathbf{CA}\cdot\mathbf{CB}}{\|\mathbf{CA}\|\cdot\|\mathbf{CB}\|} = \frac{10+12}{\sqrt{25+9}\sqrt{4+16}} = \frac{22}{\sqrt{34\cdot20}}$; γ = 32,5°
10. cos (x - π/3) + cos (x - 2π/3) = cos x · cos π/3 + sin x · sin π/3 + cos x · cos 2π/3 + sin x · sin 2π/3 = cos x · ½ + sin x · ½$\sqrt{3}$ + cos x · (-½) + sin x · ½$\sqrt{3}$= $\sqrt{3}$ · sin x $\equiv$ k · sin x , jolloin k = $\sqrt{3}$

98.2.1. Olkoon suunnikkaassa ABCD piste E lävistäjien leikkauspiste ja **AE** = **a** sekä **EB** = **b**. Muodosta vektorien **a** ja **b** avulla lauseke vektoreille a) **AB** b) **AC** c) **AD**.

98.2.2. Olkoon kolmiossa yksi kulma 62°, viereinen sivu 4,1 cm ja vastainen sivu 3,7 cm. Mitkä ovat kolmion kulmat?

98.2.3. Ratkaise yhtälö a) sin 4x = -1 b) cos 3x = cos 2x

98.2.4. Määritä luvulle p arvo niin, että vektorit **i** - 4**j** ja 5**i** + p**j** ovat a) yhdensuuntaisia b) kohtisuorassa.

98.2.5. Laske tarkka arvo lausekkeelle sin (x + π/3) kun tan x = ½ ja kulma x $\in$ [π,2π].

98.2.6. Säännöllisen viisikulmion sivu on 2,0 cm. Kuinka pitkiä ovat viisikulmion lävistäjät?

98.2.7. Laske kolmion A(1,2,3) B(4,3,2) C(0,1,-1) kulman C suuruus.

98.2.8. Ratkaise yhtälö a) $\sin^2 x = 3\cdot\cos^2 x$ b) $\sin 2x = 3\cdot\cos^2 x$

98.2.9. Voivatko vektorit **a** = **i** - 2**j**, **b** = **j** - 2**k** ja **c** = **k** - 2**i** olla kolmiulotteisen avaruuden kantavektoreita?

98.2.10. Pisteen A(6,-1,7) kautta kulkeva taso on kohtisuorassa origon ja pisteen B(1,2,2) kautta kulkevaa suoraa vastaan. Määritä tason ja suoran leikkauspiste.

1. a) **AB** = **AE** + **EB** = **a** + **b** b) **AC** = **AE** + **EC** = **a** + **a** = 2**a** c) **AD** = **AE** + **ED** = **a** - **b**
2. Olkoon viereisen sivu 4,1 cm vastainen kulma a. Tällöin sinilauseelle saadaan $\frac{\sin\alpha}{\sin 62°} = \frac{4,1}{3,7}$; $\sin\alpha = \frac{4,1}{3,7}\cdot\sin 62°$; sin α = 0,978 ; α = 78° tai α = 102° Kolmas kulma on 180° - 62° - 78° = 40° tai 180° - 62° - 102° = 16°

3. a) $\sin 4x = -1$; $4x = -90° + n\cdot 360°$; $x = -22{,}5° + n\cdot 90°$
b) $\cos 3x = \cos 2x$; $3x = 2x + n\cdot 360°$ tai $3x = -2x + n\cdot 360°$; $x = n\cdot 360°$ tai $x = n\cdot 72°$

4. a) $\frac{1}{5} = \frac{-4}{p}$; $p = -20$ b) $\mathbf{i} - 4\mathbf{j} \perp 5\mathbf{i} + p\mathbf{j} \Leftrightarrow (\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \cdot (5\mathbf{i} + p\mathbf{j}) = 0$; $5 - 4p = 0$; $p = 1\frac{1}{4}$

5. Olkoon suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat 1 ja 2, jolloin hypotenuusa on $\sqrt{5}$. Tässä pienimmän kulma x_1 tangentti on ½, $\sin x_1 = 1/\sqrt{5}$ ja $\cos x_1 = 2/\sqrt{5}$
Kulma x on III neljänneksessä, koska $\tan x > 0$. Tällöin $\sin x = -1/\sqrt{5}$ ja $\cos x = -2/\sqrt{5}$
$\sin(x + \pi/3) = \sin x \cdot \cos \pi/3 + \cos x \cdot \sin \pi/3 = -1/\sqrt{5} \cdot ½ + (-2/\sqrt{5}) \cdot ½\sqrt{3} = -\frac{1 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$

6. Viisikulmion kulmain summa on $(5 - 2)\cdot 180° = 540°$. Yksi kulma on nyt $540°:5 = 108°$
Kosinil.: $x^2 = 2^2 + 2^2 - 2\cdot 2\cdot 2\cdot \cos 108°$; $x^2 = 4 + 4 - 8\cdot\cos 108°$; $x^2 = 10{,}47$; $x = 3{,}24$ cm

7. $\mathbf{CA} = (1-0)\mathbf{i} + (2-1)\mathbf{j} + (3+1)\mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$; $\mathbf{CB} = (4-0)\mathbf{i} + (3-1)\mathbf{j} + (2+1)\mathbf{k} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
$\cos\alpha = \frac{\mathbf{CA} \cdot \mathbf{CB}}{|\mathbf{CA}| \cdot |\mathbf{CB}|} = \frac{4 + 2 + 12}{\sqrt{1 + 1 + 16}\sqrt{16 + 4 + 9}} = \frac{18}{\sqrt{18 \cdot 29}}$; $\alpha = 38°$

8. a) $\sin^2 x = 3\cdot\cos^2 x \,||\, : \cos^2 x$; $\tan^2 x = 3$; $\tan x = \pm\sqrt{3}$; $x = \pm 60° + n\cdot 180°$
b) $\sin 2x = 3\cdot\cos^2 x$; $2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 3\cdot\cos^2 x \,||\, : 2\cdot\cos x$; $\sin x = 1½\cos x$ tai $\cos x = 0$
$\tan x = 1½$ tai $\cos x = 0$; $x = 56{,}3°$ tai $x = 90° + n\cdot 180°$

9. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} \nparallel \mathbf{b} = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, koska $1:0 \neq -2:1 \neq 0:(-2)$, joten **a** ja **b** virittävät erään tason.
Tutkitaan onko vektori **c** vektoreiden **a** ja **b** määrittämässä tasossa, ts onko $\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$
$-2\mathbf{i} + \mathbf{k} = x(\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) + y(\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$, $-2\mathbf{i} + \mathbf{k} = x\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + y\mathbf{j} - 2y\mathbf{k}$; $-2 = x$ JA $0 = -2x + y$ JA $1 = -2y$;
$x = -2$ JA $y = -½$ JA $y = 2x$, mutta viimeinen ei toteudu, jos $x = -2$ ja $y = -½$ $(-½ \neq 2\cdot(-2))$
Siis ei ole sellaista x ja y, että $\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$, eli **c** ei ole samassa tasossa kuin **a** ja **b**
Täten **a**, **b** ja **c** ovat avaruuden kantavektoreita.

10. Olkoon O:n ja B:n kautta kulkevan suoran ja tason leikkauspiste C.
$\mathbf{OC} = x\cdot\mathbf{OB} = x(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = x\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$; $C = (x,2x,2x)$
$\mathbf{AC} = (x - 6)\mathbf{i} + (2x + 1)\mathbf{j} + (2x - 7)\mathbf{k} \perp \mathbf{OB} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; $\mathbf{AC} \cdot \mathbf{OB} = 0$
$(x - 6) + (2x + 1)\cdot 2 + (2x - 7)\cdot 2 = 0$; $x - 6 + 4x + 2 + 4x - 14 = 0$; $9x = 18$; $x = 2$ $C = (2,4,4)$

99.1.1. Olkoon $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Laske a) $6\mathbf{u} + 4\mathbf{v}$ b) $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$

99.1.2. Millä t:n arvolla vektorit $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - (t - 1)\mathbf{j}$ ja $\mathbf{b} = t\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

99.1.3. Piste P jakaa pisteiden A(4,5,1) ja B(-1,0,-9) välisen janan AB sisäpuolisesti suhteessa 3:2. Laske piste P ja sen etäisyys origosta.

99.1.4. Ratkaise yhtälö a) $\sin 3x = ½\sqrt{3}$ b) $\cos 3x = \cos(x + \pi)$

99.1.5. Mikä on lausekkeen a) $\tan(2x - \frac{\pi}{3})$ määrittelyjoukko b) $2\sin 3x + 4$ arvojoukko?

99.1.6. Määritä sin x ja cos x, kun $\tan x = ¾$ ja $x \in [\pi,2\pi]$.

99.1.7. Suorakulmion ABCD sivuvektoreina ovat $\mathbf{AB} = \mathbf{a}$ ja $\mathbf{AD} = \mathbf{b}$. Piste P on janan AD keskipiste ja piste Q jakaa sivun AB suhteessa 2:1.
a) Ilmoita vektoreiden **a** ja **b** avulla vektorit **PQ** ja **PC**.
b) Laske $\mathbf{PQ}\cdot\mathbf{PC}$, kun $|CD| = 3$ ja $|BC| = 2$.

99.1.8. Tasakylkisen kolmion kantakulman kosini on 0,6. Mikä on huippukulman kosini?

99.1.9. Määritä x ja y, kun pisteet (x,y,x+y), (2,3,-1) ja (4,-5,5) ovat samalla suoralla.

99.1.10. Laske vektorien $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ja $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ välinen kulma, kun $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{2}$ ja $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ½$.

1. a) $6\mathbf{u} + 4\mathbf{v} = 6(3\mathbf{i} - \mathbf{k}) + 4(\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 18\mathbf{i} - 6\mathbf{k} + 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k} = 22\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
b) $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = |3\mathbf{i} - \mathbf{k} - \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}| = |2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$

2. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - (t - 1)\mathbf{j} \perp \mathbf{b} = t\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k} \Leftrightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow 2t - 3(t - 1) + 0 = 0 \Leftrightarrow 2t - 3t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3$

3. $A = (4,5,1)$ $\mathbf{OA} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $B = (-1,0,-9)$, $\mathbf{OB} = -\mathbf{i} - 9\mathbf{k}$
$\mathbf{OP} = \frac{1}{5}(2\mathbf{OA} + 3\mathbf{OB}) = \frac{1}{5}[2(4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}) + 3(-\mathbf{i} - 9\mathbf{k})] = \frac{1}{5}(8\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 2\mathbf{k} - 3\mathbf{i} - 27\mathbf{k}) =$
$\frac{1}{5}(5\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 25\mathbf{k}) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$; $P = (1,2,-5)$; $OP = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30}$

4. a) $\sin 3x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\sin 3x = \sin 60°$; $3x = 60° + n \cdot 360°$ tai $3x = 120° + n \cdot 360°$
$x = 20° + n \cdot 120°$ tai $x = 40° + n \cdot 120°$
b) $\cos 3x = \cos(x + \pi)$; $3x = x + \pi + n2\pi$ tai $3x = -x - \pi + n2\pi$;
$2x = \pi + n2\pi$ tai $4x = -\pi + n2\pi$; $x = \frac{1}{2}\pi + n\pi$ tai $x = -\frac{1}{4}\pi + n \cdot \frac{1}{2}\pi$

5.a) $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ MJ: $2x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$; $2x \neq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + n\pi$; $2x \neq \frac{5\pi}{6} + n\pi$; $x \neq \frac{5\pi}{12} + n\frac{\pi}{2}$
b) $-1 \leq \sin 3x \leq 1 \;||\; \cdot 2$; $-2 \leq 2 \cdot \sin 3x \leq 2 \;||\; + 4$; $2 \leq 2\sin 3x + 4 \leq 6$; AJ = [2,6]

6. $x \in [\pi, 2\pi]$ ts. kulma on III tai IV neljänneksessä. tan x positiivinen → III neljännes
Piirretään suorakulmainen kolmio, jossa kulman vastainen kateetti on 3 ja viereinen kateetti on 4. Täten hypotenuusa on 5. $\sin x = -3/5 = -0{,}6$ ja $\cos x = -4/5 = -0{,}8$

7. P keskipiste → $\mathbf{AP} = \frac{1}{2}\mathbf{AD} = \frac{1}{2}\mathbf{b}$, Q jakaa AB:n 2:1 → $\mathbf{AQ} = 2/3\mathbf{AB} = 2/3\mathbf{a}$
a) $\mathbf{PQ} = -\frac{1}{2}\mathbf{b} + 2/3\mathbf{a}$, $\mathbf{PC} = \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{a}$
b) $\mathbf{PQ} \cdot \mathbf{PC} = (-\frac{1}{2}\mathbf{b} + 2/3\mathbf{a}) \cdot (\frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{a}) = -\frac{1}{4}\mathbf{b}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 1/3\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 2/3\mathbf{a}^2$ ($\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ → $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$)
$= -\frac{1}{4} \cdot 2^2 - 0 + 0 + 2/3 \cdot 3^2 = -1 + 6 = 5$

8. Olkoon kantakulma = α. Tällöin huippukulma on $180° - 2\alpha$. $\cos \alpha = 0{,}6$
$\cos(180° - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = -(2\cos^2 \alpha - 1) = 1 - 2\cos^2 \alpha = 1 - 2 \cdot 0{,}6^2 = 1 - 0{,}72 = 0{,}28$

9. A(x,y,x+y), B(2,3,-1), C(4,-5,5). $\mathbf{BA} = (x - 2)\mathbf{i} + (y - 3)\mathbf{j} + (x + y + 1)\mathbf{k}$, $\mathbf{BC} = 2\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
A, B ja C ovat samalla suoralla, jos vektorit **BA** || **BC**
$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-8} = \frac{x+y+1}{6} \;||\; \cdot 2$; $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-4} = \frac{x+y+1}{3}$
$\begin{cases} \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-4} \\ \frac{x-2}{1} = \frac{x+y+1}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} 4x - 8 = -y + 3 \\ 3x - 6 = x + y + 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x + y = 11 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$; $6x = 18$; $x = 3$; $12 + y = 11$; $y = -1$

10. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 4$; $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 2$
$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2 = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 2$; $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{2}$
$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = 1 - 2 = -1$
$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})}{|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a} - \mathbf{b}|} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$; $\alpha = 110{,}7°$

99.2.1. Olkoon $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - \mathbf{j} - 8\mathbf{k}$. Laske a) $|\mathbf{u}|$ b) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$ c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

99.2.2. Ratkaise yhtälö a) $\sin 2x = \frac{1}{3}$ b) $\cos 3x = \cos(x + 30°)$

99.2.3. a) Määritä vektorin $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ suuntainen yksikkövektori.
b) Mikä on vektorin **a** kanssa samansuuntainen vektori **b**, jonka pituus on 20?
c) Mikä on **b**:n loppupiste, jos alkupiste on (8,13)?

99.2.4. Olkoon $\sin x = \frac{8}{17}$ ja $x \in]\frac{1}{2}\pi, \pi[$. Määritä tarkat arvot cos x ja tan x.

99.2.5. Mikä arvo on x:llä, kun vektorit $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ ja $\mathbf{b} = 3(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + x\mathbf{j}$ ovat
a) yhdensuuntaisia
b) kohtisuorassa.

99.2.6. Sievennä lauseke $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$.

99.2.7. Kolmion kärkipisteet ovat A(2,-1,3) B(3,4,-2) ja C(0,2,4). Laske kolmion kulman C suuruus.

99.2.8. Määritä funktion $f(x) = 3 + 2 \cdot \sin x$ suurin ja pienin arvo, kun
a) $x \in R$ b) $x \in [0,\pi]$ c) $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$

99.2.9. Onko vektori $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektoreiden $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ määräämässä tasossa?

99.2.10. Tasakylkisen kolmion huippukulman tangentti on $2\sqrt{2}$. Laske kolmion kannan ja korkeuden suhde.

1. a) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. $|\mathbf{u}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$
b) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k} + 6\mathbf{i} - 8\mathbf{k} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = \sqrt{16 + 9 + 144} = \sqrt{169} = 13$
c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-2) \cdot 6 + 4 \cdot (-1) + (-4) \cdot (-8) = -12 - 4 + 32 = 16$

2. a) $\sin 2x = 1/3 \Leftrightarrow \sin 2x = \sin 19{,}5° \Leftrightarrow 2x = 19{,}5° + n\cdot 360°$ tai $2x = 180° - 19{,}5° + n\cdot 360°$
$\Leftrightarrow x = 9{,}7° + n\cdot 180°$ tai $x = 80{,}3° + n\cdot 180°$
b) $\cos 3x = \cos (x + 30°) \Leftrightarrow 3x = x + 30° + n\cdot 360°$ tai $3x = -x - 30° + n\cdot 360°$
$\Leftrightarrow 2x = 30° + n\cdot 360°$ tai $4x = -30° + n\cdot 360° \Leftrightarrow x = 15° + n\cdot 180°$ tai $x = -7{,}5° + n\cdot 90°$

3. a) $\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$

b) $\mathbf{b} = 20\mathbf{a}^0 = 20(\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}) = 12\mathbf{i} - 16\mathbf{j}$

c) $\mathbf{OB} = \mathbf{OA} + \mathbf{b} = 8\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + 12\mathbf{i} - 16\mathbf{j} = 20\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, B = (20,-3)

4. Piirr. suorakulmainen kolmio, jossa kulman vastainen kateetti = 8 ja hypotenuusa = 17.
Pyth. $\Rightarrow 8^2 + a^2 = 17^2$; $a^2 = 289 - 64 = 225$; $a = 15$
Kulma toisessa neljänneksessä, josta etumerkit $\cos x = -\frac{15}{17}$, $\tan x = -\frac{8}{15}$

5. a) $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 6\mathbf{j} \parallel \mathbf{b} = 3(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + x\mathbf{j} = 3\mathbf{i} + (3 + x)\mathbf{j} \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{6}{3 + x} \Leftrightarrow 3x + x^2 = 18$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 72}}{2} = \frac{-3 \pm 9}{2}$; x = 3 tai x = -6

b) $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ ja $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + (3 + x)\mathbf{j} \Leftrightarrow a \cdot b = 0 \Leftrightarrow 3x + 6(3 + x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 18 + 6x = 0 \Leftrightarrow 9x = -18 \Leftrightarrow x = -2$

6. $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$
$= \sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2\cdot 1 = 2$

7. A(2,-1,3) B(3,4,-2) ja C(0,2,4) , $\mathbf{CA} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ja $\mathbf{CB} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$
$\cos \gamma = \frac{\mathbf{CA} \cdot \mathbf{CB}}{|\mathbf{CA}|\cdot|\mathbf{CB}|} = \frac{6 - 6 + 6}{\sqrt{4 + 9 + 1}\sqrt{9 + 4 + 36}} = \frac{6}{\sqrt{14}\cdot 7}$; $\gamma = 76{,}8°$

8. a) kun $x \in R$, ovat $\sin x \in [-1,1]$.
Suurin $= 3 + 2\cdot\sin x\,|_{\sin x = 1} = 3 + 2\cdot 1 = 5$ ja pienin $= 3 + 2\cdot\sin x\,|_{\sin x = -1} = 3 + 2\cdot(-1) = 1$
b) kun $x \in [0,\pi]$, ovat $\sin x \in [0,1]$ Suurin $= 3 + 2\cdot 1 = 5$ ja pienin $= 3 + 2\cdot 0 = 3$
c) kun $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$, ovat $\sin x \in [½,1]$. Suurin $= 3 + 2\cdot 1 = 5$ ja pienin $= 3 + 2\cdot ½ = 4$

9. Vektori $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ on vektoreiden $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ määräämässä tasossa, jos on olemassa x ja y siten, että $\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} \Leftrightarrow 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} = x(4\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) + y(\mathbf{i} - \mathbf{j})$
$\begin{cases} 5 = 4x + y \\ -2 = -x - y \\ 1 = x \end{cases}$. Alimmasta x = 1. Keskimmäisestä –2 = -1 – y eli y = 1. Sijoittamalla ylimpään 5 = 4·1 + 1 on tosi. Siis oli sellaiset x ja y. V: C on a:n ja b:n määrittämässä tasossa.

10. Olkoon huippukulma 2α, jolloin kannalle piirretty korkeus puolittaa sen ja muodostaa suorakulmaisen kolmion.
$\tan 2\alpha = 2\sqrt{2}$; $\frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = 2\sqrt{2}$; $\tan\alpha = \sqrt{2} - \sqrt{2}\tan^2\alpha$. Olkoon $\tan\alpha = y$; $\sqrt{2}y^2 + y - \sqrt{2} = 0$; $y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{\sqrt{2}} = \frac{-1 \pm 3}{\sqrt{2}}$, josta $y = \tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Täten puolikaskolmiossa on kannan puolisko $= \sqrt{2}$ ja kanta $2\sqrt{2}$ ja korkeus = 1. Kanta : korkeus $= 2\sqrt{2} : 1 = 2\sqrt{2}$

00.1.1. Janan päätepisteet ovat A(2,1,3) ja B(4,-5,7). Laske janan a) pituus b) keskipiste.

00.1.2. Olkoot $\mathbf{OA} = \mathbf{a}$, $\mathbf{OB} = \mathbf{b}$ ja $\mathbf{OC} = \mathbf{c}$ sekä nelikulmio ABCD suunnikas. Esitä vektorien **a**, **b** ja **c** avulla vektorit a) **AB** b) **OD**.

00.1.3. Määritä reaaliluku x siten, että vektorit $\mathbf{a} = 21\mathbf{i} - 28\mathbf{j}$ ja $\mathbf{b} = 7\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ovat
a) yhdensuuntaiset b) kohtisuorassa.

00.1.4. Tiedetään, että kulma α on tylppä ja $\sin\alpha = \frac{1}{3}$. Määritä a) $\cos\alpha$ tarkka arvo b) kulman α likiarvo 0,001 rad tarkkuudella c) $\tan\alpha$ tarkka arvo.

00.1.5. Piste P jakaa janan AB suhteessa 3:1. Määritä pisteen P koordinaatit, kun A = (3,0,-1) ja B = (-5,4,11).

00.1.6. Ratkaise yhtälö $\cos x - \cos (45° - 2x) = 0$

00.1.7. Jaa vektori $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ vektorien $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ ja $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ suuntaisiin komponentteihin.

00.1.8. Mitkä välin [0,2π] kulmat toteuttavat yhtälön sin 2x = cos x?

00.1.9. Olkoot |**a**| = 3 , |**b**| = 4 ja vektorit **a** ja **a** - 3**b** kohtisuorassa toisiaan vastaan. Laske vektorien **a** ja **b** välinen kulma.

00.1.10. Osoita oikeaksi kaava cos (x - y) - cos (x + y) = 2sin x · sin y

1. A(2,1,3) ja B(4,-5,7) a) $\lvert AB\rvert = \sqrt{(4-2)^2 + (-5-1)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{4+36+16} = \sqrt{56}$ b) K: x = ½(2 + 4) = 3 ; y = ½(1 - 5) = -2 ; z = (3 + 7) = 5 ; K = (3,-2,5)
2. a) **AB** = -**OA** + **OB** = -**a** + **b** b) **OD** = **OC** + **CD** = **OC** - **AB** = **c** - (**b** - **a**) = **c** - **b** + **a**
3. a) **a** = 21**i** - 28**j** || **b** = 7**i** + x**j** ⇔ $\frac{21}{7} = \frac{-28}{x}$; 3x = -28 ; x = $-9\frac{1}{3}$ b) **a** ⊥ **b** ⇔ **a** · **b** = 0 ⇔ 21·7 + (-28)·x = 0 ; 28x = 147 ; 4x = 21 ; x = 5¼
4. Piirrä suorakulmainen kolmio, jossa kulman vastainen kateetti on 1 ja hypotenuusa 3. Olk. toinen kateetti = b. Pyth. ⇒ $b^2 + 1^2 = 3^2$; $b^2 + 1 = 9$; $b^2 = 8$; $b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ a) $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (- koska kulma tylppä) b) laskimesta α = 2,802 (rad) c) $\tan\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$
5. $\mathbf{OP} = \frac{1\cdot\mathbf{OA} + 3\cdot\mathbf{OB}}{1+3} = \frac{1\cdot(3\mathbf{i} - \mathbf{k}) + 3\cdot(-5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 11\mathbf{k})}{4} = \frac{3\mathbf{i} - \mathbf{k} - 15\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 33\mathbf{k}}{4} = \frac{-12\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 32\mathbf{k}}{4}$ = -3**i** + 3**j** + 8**k** ; P = (-3,3,8)
6 cos x - cos (45° - 2x) = 0 ; cos x = cos (45° - 2x) ; x = 45° - 2x + n·360° tai x = -45° + 2x + n·360° 3x = 45° + n·360° tai -x = - 45° + n·360° ; x = 15° + n·120° tai x = 45° + n·360°
7. **c** = x**a** + y**b** ; 5**i** - 6**j** = x(2**i** - 3**j**) + y(**i** - 2**j**) ; 5**i** - 6**j** = 2x**i** - 3x**j** + y**i** - 2y**j** $\begin{cases} 5 = 2x + y \;\Vert\cdot 2 \\ -6 = -3x - 2y \end{cases}$; 4 = x ; 5 = 8 + y ; y = -3 V: **c** = 4**a** - 3**b**
8. sin 2x = cos x ; 2sin x·cos x = cos x || : cos x ; 2sin x = 1 tai cos x = 0 sin x = ½ ; sin x = sin π/6 ⇔ x = π/6 tai x = π - π/6 = 5π/6 ; cos x = 0 x = ½π tai x = 1½π
9. . **a** ⊥ **a** - 3**b** ⇔ **a**·(**a** - 3**b**) = 0 ; $\mathbf{a}^2 - 3\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$; 9 - 3**a·b** = 0 ; **a·b** = 3 $\cos(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\cdot\lvert\mathbf{b}\rvert} = \frac{3}{3\cdot 4} = \frac{1}{4}$; ∠(**a**,**b**) = 75,5°
10. cos (x - y) - cos (x + y) = cos x·cos y + sin x·sin y - (cos x·cos y - sin x·sin y) = cos x·cos y + sin x·sin y - cos x·cos y + sin x·sin y = 2sin x·sin y

00.2.1. Olkoon **a** = 2**i** + 3**j** + 4**k** ja **b** = **i** - **j** + 2**k** . Laske a) pistetulo **a·b** b) vektorin **a** + **b** pituus.

00.2.2. Olkoon $\sin x = \frac{21}{29}$ ja kulma x ∈]½π,π[. Laske tarkat arvot lausekkeille cos x ja tan x.

00.2.3. Kolmiossa ABC piste P jakaa sivun AC suhteessa 3:1 ja piste R sivun BC samoin suhteessa 3:1. Esitä vektorien **AB** = **u** ja **AC** = **v** avulla vektorit a) **CB** b) **AR** c) **PR**.

00.2.4. Ratkaise yhtälö a) 2sin 2x = t , kun t = -1 b) Millä t:n arvoilla yhtälöllä 2sin 2x = t on ratkaisuja?

00.2.5. Laske vektorien **a** ja **c** = **a** - **b** välinen kulma, kun **a** = 3**i** - **j** ja **b** = **j** + 4**k**.

00.2.6. Vektorin **AB** pituus on 15 ja se on vastakkaissuuntainen vektorille 6**i** - 8**j**. Laske piste A, kun piste B = (1,7).

00.2.7. Mitkä ovat vektorin **c** = 3**i** - 4**j** koordinaatit kannassa (**a**,**b**), kun **a** = **i** + 2**j** ja **b** = 2**i** - **j**?

00.2.8. Sievennä lauseke $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2}{\cos^2 x}$

00.2.9. Osoita, että vektorit **AB** || **AC** eli pisteet A, B ja C ovat samalla suoralla, kun O on origo ja **OC** = 6**OB** - 5**OA**

00.2.10. Janan toinen päätepiste on origo, ja toinen päätepiste $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ on yksikköympyrän kehällä. Janaa kierretään origon ympäri positiiviseen suuntaan 30°. Mikä on nyt janan päätepiste?

1. a) **a** = 2**i** + 3**j** + 4**k** ja **b** = **i** - **j** + 2**k** , jolloin **a·b** = 2·1 + 3·(-1) + 4·2 = 2 - 3 + 8 = 7 b) **a** + **b** = 3**i** + 2**j** + 6**k** ; $\lvert\mathbf{a}+\mathbf{b}\rvert = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$

2. Piirrä suorakulmainen kolmio, jonka kulman vastainen kateetti on 21 ja hypotenuusa 29. Olkoon viereinen kateetti = b. Pyth $\Rightarrow b^2 + 21^2 = 29^2$; $b^2 + 441 = 841$; $b^2 = 400$; b = 20 Kulma tylppä $\Rightarrow$ cos x = - 20/29 ja tan x = - 21/20
3. a) **CB** = **CA** + **AB** = **-v** + **u** b) **AR** = **AC** + **CR** = **AC** + ¼**CB** = **v** + ¼(**u** - **v**) = ¼**u** + ¾**v** c) **PR** = **PC** + **CR** = ¼**AC** + ¼**CB** = ¼**v** + ¼(**u** - **v**) = ¼**v** + ¼**u** - ¼**v** = ¼**u**
4. a) sin 2x = -½ ; sin 2x = sin (-30°) ; 2x = -30° + n·360° tai 2x = 180° - (-30°) + n·360° x = -15° + n·180° tai x = 105° + n·180° b) 2 sin 2x = t ; sin 2x = ½t ; Koska sinin arvot ovat välillä [-1,1] ; $-1 \le ½t \le 1$; $-2 \le t \le 2$
5. Olkoon **c** = **a** - **b** = 3**i** - **j** - (**j** + 4**k**) = 3**i** - **j** - **j** - 4**k** = 3**i** - 2**j** - 4**k** ; **a** = 3**i** - **j** $\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\cdot\lvert\mathbf{c}\rvert} = \dfrac{9+2+0}{\sqrt{9+1}\sqrt{9+4+16}} = \dfrac{11}{\sqrt{10\cdot 29}}$; $\alpha = 49{,}8°$
6. $\lvert 6\mathbf{i} - 8\mathbf{j}\rvert = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$ **AB** = $-15\cdot(6\mathbf{i} - 8\mathbf{j})^0 = -15\cdot(6\mathbf{i} - 8\mathbf{j})/10 = -9\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$ **OA** = **OB** + **BA** = **i** + 7**j** - (-9**i** + 12**j**) = **i** + 7**j** + 9**i** - 12**j** = 10**i** - 5**j** : A = (10,-5)
7. **c** = x**a** + y**b** ; 3**i** - 4**j** = x(**i** + 2**j**) + y(2**i** - **j**) ; 3**i** - 4**j** = x**i** + 2x**j** + 2y**i** - y**j** $\begin{cases} 3 = x + 2y \\ -4 = 2x - y \quad \Vert\cdot 2 \end{cases}$ -5 = 5x ; x = -1 ; -4 = -2 - y ; y = 2 V: (-1,2)
8. $\dfrac{(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 x + 2\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x - (\sin^2 x - 2\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x)}{\cos 2x} =$ $\dfrac{\sin^2 x + 2\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x\cdot\cos x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{4\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x} = \dfrac{4\sin x}{\cos x} = 4\tan x.$
9. **AB** = **-OA** + **OB** = **OB** - **OA** **AC** = **-OA** + **OC** = **-OA** + 6**OB** - 5**OA** = 6**OB** - 6**OA** = 6(**OB** - **OA**) = 6**AB** Siis **AC** = 6**AB** $\Rightarrow$ **AC** || **AB**, joten kaikki pisteet ovat samalla suoralla.
10. Piste $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ on yksikköympyrän kehällä, joten se on erään kulman α kehäpiste. Tällöin $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ ja $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ Kysytty piste on kulman α + 30° kehäpiste. $y = \sin(\alpha + 30°) = \sin\alpha\cdot\cos 30° + \cos\alpha\cdot\sin 30° = \frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3}+3}{10}$ $x = \cos(\alpha + 30°) = \cos\alpha\cdot\cos 30° - \sin\alpha\cdot\sin 30° = \frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}-4}{10}$

01.1.1. Määritä funktion f suurin ja pienin arvo, kun määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko ja
a) f(x) = sin 2x b) f(x) = 2 sin x.

01.1.2. Merkitään suunnikkaan ABCD sivuvektoria **AB** = **a** ja **AD** = **b**. Piste P jakaa sivun CD suhteessa 3:1 ja piste Q jakaa sivun CB suhteessa 1:2. Ilmaise vektorit **AP**, **AQ** ja **QP** vektorien **a** ja **b** avulla.

01.1.3. Ratkaise yhtälöt a) sin 2x = sin 30° b) cos 2x = cos (x - 30°)

01.1.4. Suunnikkaan ABCD kärjet ovat A = (1,2), B = (3,-1) ja C = (6,3). Määritä kärjen *D* koordinaatit.

01.1.5. Määritä kulman *x* sinin ja kosinin tarkat arvot, kun tan x = - 1½ ja $x \in [\pi, 2\pi]$.

01.1.6. Olkoot vektorit **u** ja **v** erisuuntaiset. Jaa vektori 4**u** - 14**v** vektorien **u** + **v** ja **u** - **v** suuntaisiin komponentteihin.

01.1.7. Osoita, että $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$. Laske tämän perusteella lauseke sin 50°cos 40° toisessa esitysmuodossa.

01.1.8. Laske kolmion A(2,-1,3)B(-4,2,1)C(5,3,2) kulman B suuruus.

01.1.9. Ratkaise yhtälö $\cos^2 x = 1 + \sin x$.

01.1.10. Olkoot vektorit **a** ja **b** ovat yhtä pitkät ja niiden välinen kulma on 60°. Millä vakion t arvolla vektorit **u** = t**a** + **b** ja **v** = **a** + t**b** ovat a) vastakkaissuuntaiset b) kohtisuorassa?

1. a) Kun kulma saa kaikki arvot on $-1 \le \sin 2x \le 1$; $-1 \le f(x) \le 1$ b) $-1 \le \sin x \le 1$ ||· 2 ; $-2 \le 2\sin x \le 2$; $-2 \le f(x) \le 2$

2. P jakaa sivun CD suhteessa 3:1 $\Rightarrow$ CP = ¾ CD ja PD = ¼ CD
Q jakaa sivun CB suhteessa 1:2 $\Rightarrow$ CQ = 1/3 CB ja QB = 2/3 CB
$\mathbf{AP} = \mathbf{AD} + \mathbf{DP} = \mathbf{b} + \frac{1}{4}\mathbf{a}$, $\mathbf{AQ} = \mathbf{AB} + \mathbf{BQ} = \mathbf{a} + 2/3\mathbf{b}$, $\mathbf{QP} = \mathbf{QC} + \mathbf{CP} = 1/3\mathbf{b} - \frac{3}{4}\mathbf{a}$

3. a) $\sin 2x = \sin 30° \Leftrightarrow 2x = 30° + n\cdot360° \,||:2$ tai $2x = 150° + n\cdot360° \,||:2$
$\Leftrightarrow x = 15° + n\cdot180°$ tai $x = 75° + n\cdot180°$
b) $\cos 2x = \cos (x - 30°) \Leftrightarrow 2x = x - 30° + n\cdot360°$ tai $2x = -x + 30° + n\cdot360°$
$\Leftrightarrow x = -30° + n\cdot360°$ tai $3x = 30° + n\cdot360° \,||:3 \Leftrightarrow x = -30° + n\cdot360°$ tai $x = 10° + n\cdot120°$

4. $\mathbf{OD} = \mathbf{OA} + \mathbf{AD} = \mathbf{OA} + \mathbf{BC} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (6-3)\mathbf{i} + (3+1)\mathbf{j} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$; D = (4,6)

5. Piirretään suorakulmainen kolmio, jossa kulman vastainen kateetti = 3 ja viereinen = 2.
Hypotenuusa on tällöin $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$; $x \in [\pi,2\pi]$ ja $\tan x < 0 \Rightarrow x \in [1\frac{1}{2}\pi,2\pi]$
Täten $\sin x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$ ja $\cos x = +\frac{2}{\sqrt{13}}$

6. **u** ja **v** erisuuntaiset, joten ne ovat kantavektoreita
$4\mathbf{u} - 14\mathbf{v} = x(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + y(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = x\mathbf{u} + x\mathbf{v} + y\mathbf{u} - y\mathbf{v} = (x + y)\mathbf{u} + (x - y)\mathbf{v}$
$\begin{cases} 4 = x + y \;\; || \cdot1 \\ -14 = x - y \;|| \cdot1 \end{cases}$; $-10 = 2x$; $x = -5$; $4 = -5 + y$; $y = 9$; $4\mathbf{u} - 14\mathbf{v} = -5(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + 9(\mathbf{u} - \mathbf{v})$

7. $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta = 2\sin\alpha\cos\beta$
$2\sin 50°\cos 40° = \sin(50°+40°) + \sin(50°-40°) = 1+\sin 10°$; $\sin 50°\cos 40° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin 10°$

8. $\mathbf{BA} = (2+4)\mathbf{i} + (-1-2)\mathbf{j} + (3-1)\mathbf{k} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{BC} = (5+4)\mathbf{i} + (3-2)\mathbf{j} + (2-1)\mathbf{k} = 9\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
$\cos\beta = \frac{\mathbf{BA}\cdot\mathbf{BC}}{|\mathbf{BA}|\,|\mathbf{BC}|} = \frac{54 - 3 + 2}{\sqrt{36 + 9 + 4}\sqrt{81 + 1 + 1}} = \frac{53}{7\sqrt{83}} \approx 0{,}831$; $\beta \approx 33{,}8°$

9. $\cos^2 x = 1 + \sin x$; $1 - \sin^2 x = 1 + \sin x$; $-\sin^2 x = \sin x \;||:\sin x$; $-\sin x = 1$ tai $\sin x = 0$
$\sin x = -1$ tai $\sin x = 0$. Katsotaan yksikköympyrästä, $x = -90° + n\cdot360°$ tai $x = n\cdot180°$

10. **a** ja **b** erisuuntaiset $\Rightarrow$ **a** ja **b** ovat kantavektoreita, joille $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = s$ ja $\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 60°$
$\mathbf{u} = t\mathbf{a} + \mathbf{b} \;||\; \mathbf{v} = \mathbf{a} + t\mathbf{b} \Leftrightarrow \frac{t}{1} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t^2 = 1$; $t = \pm 1$. Suhde < 0, kun t = -1, jolloin $\mathbf{u} \uparrow\downarrow \mathbf{v}$
$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow (t\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} + t\mathbf{b}) = 0 \Leftrightarrow t\mathbf{a}^2 + t^2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + t\mathbf{b}^2 = 0$
$\Leftrightarrow ts^2 + (t^2 + 1)s\cdot s\cdot\cos 60° + ts^2 = 0 \;||:s^2 \Leftrightarrow t + (t^2 + 1)\cdot\frac{1}{2} + t = 0 \;||\cdot 2 \Leftrightarrow 2t + t^2 + 1 + 2t = 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t + 1 = 0$
$\Leftrightarrow t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$

01.2.1. Puolisuunnikkaan ABCD sivut AB ja CD ovat yhdensuuntaiset sekä $\mathbf{AB} = 2\cdot\mathbf{DC}$. Ilmaise vektorien $\mathbf{a} = \mathbf{AB}$ ja $\mathbf{b} = \mathbf{AD}$ avulla lävistäjävektorit **AC** ja **BD**.

01.2.2. Ratkaise yhtälöt a) $\sin 2x = \sin 40°$ b) $5\cos 4x = 3$

01.2.3. Määritä lausekkeiden sin x ja cos x arvo, kun $x \in [\frac{1}{2}\pi,\pi]$ ja $\tan x = -2\sqrt{2}$.

01.2.4. Olkoon vektori $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. Määritä **a**:n suuntainen yksikkövektori. Mihin pisteeseen tullaan, kun pisteestä A = (1,3) siirrytään 6 yksikköä vektorin **a** suuntaan?.

01.2.5. Ratkaise yhtälö $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$, kun $x \in [0,2\pi]$.

01.2.6. Esitä vektori $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ kantavektorien $\mathbf{e} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ ja $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ avulla

01.2.7. Määritä piste, joka jakaa janan A(1,2,3) B(4,-4,-3) sisäpuolisesti suhteessa 1:2.

01.2.8. Osoita $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

01.2.9. Laske vektorien $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ välinen kulma.

01.2.10. Määritä reaaliluku x, siten, että vektorit $\mathbf{a} = x(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + 4\mathbf{k}$ sekä $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + (5x + 1)(\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ ovat a) yhdensuuntaisia, b) kohtisuorassa.

1. $\mathbf{AB} = 2\cdot\mathbf{DC}$; $\mathbf{a} = 2\cdot\mathbf{DC}$; $\mathbf{DC} = \frac{1}{2}\mathbf{a}$; $\mathbf{AC} = \mathbf{AB} + \mathbf{DC} = \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{a}$; $\mathbf{BD} = \mathbf{BA} + \mathbf{AD} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}$

2. a) $\sin 2x = \sin 40°$; $2x = 40° + n\cdot360°$ tai $2x = 180° - 40° + n\cdot360°$; $x = 20° + n\cdot180°$ tai $x = 70° + n\cdot180°$
b) $5\cos 4x = 3$; $\cos 4x = 0{,}6$; $\cos 4x = \cos 53{,}1°$; $4x = \pm53{,}1° + n\cdot360°$; $x = \pm 13{,}3°+n\cdot90°$

3. Piirretään suorakulmaiseen kolmioon kulman x vastaiseksi kateetiksi $2\sqrt{2}$ ja viereiseksi kateetiksi 1. Hypotenuusa $c^2 = (2\sqrt{2})^2 + 1^2 = 8 + 1 = 9$; $c = 3$
Kulma x on toisessa neljänneksessä. $\sin x = +2\sqrt{2} : 3$ ja $\cos x = -1 : 3$

4. $\mathbf{a}^0 = \dfrac{\mathbf{a}}{|\,\mathbf{a}\,|} = \dfrac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{\sqrt{9 + 16}} = \dfrac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{5} = 0{,}6\mathbf{i} - 0{,}8\mathbf{j}$

$\mathbf{OX} = \mathbf{OA} + \mathbf{AX} = \mathbf{OA} + 6\mathbf{a}^0 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6(0{,}6\mathbf{i} - 0{,}8\mathbf{j}) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3{,}6\mathbf{i} - 4{,}8\mathbf{j} = 4{,}6\mathbf{i} - 1{,}8\mathbf{j}$; X = (4,6; -1,8)

5. $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$; $2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x = 0$; $2 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 0$

$2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$; $\sin x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \dfrac{3 \pm 5}{4}$; ($\sin x = 2$ tai) $\sin x = -½$

$\sin x = \sin -30°$; $x = -30° + n\cdot 360°$ tai $x = 210° + n\cdot 360°$

6. $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = x\mathbf{e} + y\mathbf{u}$; $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = x(\mathbf{i} - \mathbf{j}) + y(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$; $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = x\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 2y\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$

$\begin{cases} 3 = x + 2y \\ -4 = -x + 3y \end{cases}$; $-1 = 5y$; $y = -0{,}2$; $3 = x - 0{,}4$; $x = 3{,}4$ V: $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = 3{,}4\mathbf{e} - 0{,}2\mathbf{u}$

7. $\mathbf{OP} = \dfrac{2\mathbf{OA} + 1\mathbf{OB}}{2 + 1} = \dfrac{2(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + (4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k})}{3} = \dfrac{2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k} + 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}}{3} = \dfrac{6\mathbf{i} + 3\mathbf{k}}{3} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$; P = (2,0,1)

8. $\text{VP} = 1 + \tan^2 x = 1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \text{OP}$

9. $\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\,\mathbf{a}\,| \cdot |\,\mathbf{b}\,|} = \dfrac{2\cdot 3 + (-3)\cdot(-2) + (-4)\cdot 1}{\sqrt{4 + 9 + 16}\sqrt{9 + 4 + 1}} = \dfrac{6 + 6 - 4}{\sqrt{29}\sqrt{14}} = \dfrac{8}{\sqrt{29\cdot 14}} \approx 66{,}6°$

10. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$; $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + (5x + 1)\mathbf{j} + (10x + 2)\mathbf{k}$

a) $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \dfrac{x}{3} = \dfrac{2x}{5x + 1} = \dfrac{4}{10x + 2} \Leftrightarrow 5x^2 + x = 6x$ JA $20x^2 + 4x = 20x + 4$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 5x = 0$ JA $20x^2 - 16x - 4 = 0 \Leftrightarrow 5x(x - 1) = 0$ JA $x = \dfrac{16 \pm \sqrt{256 + 320}}{20}$

$\Leftrightarrow$ (x = 0 TAI x = 1) JA $x = \dfrac{16 \pm 24}{40} \Leftrightarrow$ (x = 0 TAI x = 1) JA (x = 1 TAI x = -0,2) $\Leftrightarrow x = 1$

b) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow x\cdot 3 + 2x(5x + 1) + 4(10x + 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 10x^2 + 2x + 40x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow 10x^2 + 45x + 8 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-45 \pm \sqrt{2025 - 320}}{20} = \dfrac{-45 \pm \sqrt{1705}}{20}$

02.1.1. Ratkaise seuraavat yhtälöt. a) $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $2\cos x = 1$ c) $\tan 2x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

02.1.2. Olkoot $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - t\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + t\mathbf{k}$. Millä vakion t arvoilla vektorien **a** ja **b** välinen kulma on suora.

02.1.3. Ratkaise yhtälö $\sin(x - 60°) = \sin 2x$.

02.1.4. Olkoon kolmion ABC sivuna **AB** = **a** ja **AC** = **b**. Piste D on sivun AB keskipiste ja piste E sivun BC suhteessa 1:3. Määritä vektorien **a** ja **b** avulla vektorit a) **CD** b) **AE** c) **ED**.

02.1.5. Määritä $\sin 2x$, kun $\tan x = -2$ ja $90° < x < 180°$.

02.1.6. Mihin pisteeseen tullaan, kun lähdetään pisteestä (1,2,-3) ja siirrytään 6 yksikköä vektorin $\mathbf{s} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ suuntaan?

02.1.7. Mitä arvoja funktio $f(x) = 2\sin x + 3$ saa, kun a) $x \in$ R b) $x \in [0, 7\pi/6]$

02.1.8. Suora s kulkee pisteiden A(-1, 0, 4) ja B(2, 1, 5) kautta ja suora t pisteiden C(2, 3, 1) ja D(0, 0, 1) kautta. Laske suorien s ja t välinen kulma.

02.1.9. Olkoot $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ja $v = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Jaa vektori $\mathbf{a} = -5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ vektorien **u** ja **v** suuntaisiin komponentteihin.

02.1.10. Osoita oikeaksi kaava $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$.

02.1.1. a) $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin x = \sin 60°$; $x = 60° + n\cdot 360°$ tai $x = 120° + n\cdot 360°$

b) $2\cos x = 1$; $\cos x = ½$; $\cos x = \cos 60°$; $x = \pm 60° + n\cdot 360°$

c) $\tan 2x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\tan 2x = \tan 30°$; $2x = 30° + n\cdot 180°$; $x = 15° + n\cdot 90°$

2. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - t\mathbf{k} \perp \mathbf{b} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + t\mathbf{k}$. ; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$; $2\cdot 5 + 1\cdot(-1) - t\cdot t = 0$; $9 = t^2$; $t = \pm 3$

3. $\sin(x - 60°) = \sin 2x$; $x - 60° = 2x + n\cdot 360°$ tai $x - 60° = 180° - 2x + n\cdot 360°$

$-x = 60° + n\cdot 360°$ tai $3x = 240° + n\cdot 360°$; $x = -60° + n\cdot 360°$ tai $x = 80° + n\cdot 120°$

4. **CD** = **CA** + **AD** = -**b** + ½**a** ; **AE** = **AB** + ¼**BC** = **a** + ¼(-**a** + **b**) = ¾**a** + ¼**b**
ED = **EA** + **AD** = -¾**a** - ¼**b** + ½**a** = -¼**a** - ¼**b**

5. Piirretään suorakulmainen kolmio, jonka terävä kulma on x, vastainen kateetti 2 ja viereinen kateetti = 1. Pythagoraan teoreemalla hypotenuusa = $\sqrt{5}$. Kulma x on II neljänneksessä, missä sin x + ja cos x -
$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{4}{5}$

6. $\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + 6\cdot\mathbf{s}^0 = \mathbf{OA} + 6\cdot\frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + 6\cdot\frac{2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{4+1+4}} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k} + 6\cdot\frac{2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{3}$
$= \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k} + 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k} = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$; P = (5,4, -7)

7. a) Kun $x \in R$ saa sin x arvot $-1 \le \sin x \le 1$ ||·2 ; $-2 \le 2\sin x \le 2$ || +3 ; $1 \le 2\sin x + 3 \le 5$
b) Kun $x \in [0, 7\pi/6]$, on kulman kehäpiste korkeimmillaan kun kulma on ½π ja matalimmillaan kun kulma on 7π/6. sin ½π = 1 ja sin 7π/6 = - ½ eli $-½ \le \sin x \le 1$ ||·2 ; $-1 \le 2\cdot\sin x \le 2$ || + 3 ; $2 \le 2\cdot\sin x + 3 \le 5$

8. Suoran s suuntavektori **s** = **AB** = (2 + 1)**i** + (1 - 0)**j** + (5 - 4)**k** = 3**i** + **j** + **k**
ja suoran t suuntavektori **t** = **CD** = (0 - 2)**i** + (0 - 3)**j** + (1 - 1)**k** = - 2**i** - 3**j**
$\cos\alpha = \frac{\mathbf{s}\cdot\mathbf{t}}{|\mathbf{s}|\cdot|\mathbf{t}|} = \frac{3\cdot(-2) + 1\cdot(-3) + 1\cdot 0}{\sqrt{9+1+1}\sqrt{4+9}} = \frac{-9}{\sqrt{11\cdot 13}} \approx -0{,}7526$; $\alpha = 138{,}8°$
Kun suorien välinen kulma on suurimmillaan 90° on kulma 180° - 138,8° = 41,2°

9. **a** = x**u** + y**v** ; -5**i** - 2**j** = x(2**i** + 3**j**) + y (-**i** + 4**j**) = (2x - y)**i** + (3x + 4y)**j**
$\begin{cases} 2x - y = -5 \ \|\cdot 4 \\ 3x + 4y = -2 \ \|\cdot 1 \end{cases}$ 11x = -22 ; x = -2 ; -4 - y = -5 ; y = 1 V: **a** = -2**u** + 1**v**

10. $\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{(2\sin x\cdot\cos x) : \cos^2 x}{(\cos^2 x - \sin^2 x) : \cos^2 x} = \frac{2\sin x : \cos x}{1 - \sin^2 x : \cos^2 x} = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

02.2.1. Määritä asteen tarkkuudella kaikki ratkaisut yhtälöille a) cos x = 0,52, b) sin x = 0,89.

02.2.2. Olkoon suunnikkaan ABCD sivuina vektorit **AB** = **a** ja **BC** = **b**. Olkoon sivun CD keskipiste E ja piste F jakaa sivun DA suhteessa 1:2. Muodosta vektoreiden **a** ja **b** avulla vektorit **BE** ja **CF**.

02.2.3. Olkoon f(x) = tan 4*x* - tan *x* a) Millä muuttujan *x* arvoilla f(x) on määritelty? b) Ratkaise yhtälö f(x) = 0.

02.2.4. Mikä on loppupiste, kun pisteestä (3,2,1) kuljetaan 12 yksikköä vektorin **a** = 2**i** - 2**j** - **k** suuntaan?

02.2.5. Laske sin(x+y), kun sin *x* = ¾ ja cos y = - ¼ , missä 90° < x < 180° ja 180° < y < 270°.

02.2.6. Onko piste A = (2, 8, 2) pisteiden B = (6, 6, 8) ja C = (14, 2, 20) määräämällä suoralla?

02.2.7. Ratkaise yhtälö ½sin 2x = tan x.

02.2.8. Olkoot **a** = 3**i** - 12**j** + 7**k** , **b** = 5**i** + s**j** + 3**k** , **c** = 2**i** + 4**j** + **k** ja **d** = **i** + 2**j** + t**k** , s, t ∈ R. Laske **b·c** ja **a·d**, kun tiedetään että vektorit **a** ja **b** ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa ja vektorit **c** ja **d** ovat yhdensuuntaiset.

02.2.9. Todista oikeaksi kaava : $\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\sin x\cdot\cos x}$

02.2.10. Olkoot **u** = 2**i** + 3**j** ja **v** = - **i** + 4**j** . Jaa vektori **a** = - 5**i** - 2**j** vektorien **u** ja **v** suuntaisiin komponentteihin. Kuinka suuri on komponenttien välinen kulma?

1. a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; sin x = sin 60° ; x = 60° + n·360° tai x = 120° + n·360°
b) 2cos x = 1 ; cos x = ½ ; cos x = cos 60° ; x = ± 60° + n·360°
c) $\tan 2x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; tan 2x = tan 30° ; 2x = 30° + n·180° ; x = 15° + n·90°

2. **a** = 2**i** + **j** - t**k** ⊥ **b** = 5**i** - **j** + t**k**. ; **a** · **b** = 0 ; 2·5 + 1·(-1) -t·t = 0 ; 9 = t^2 ; t = ± 3

3. sin (x - 60°) = sin 2x ; x - 60° = 2x + n·360° tai x - 60° = 180° - 2x + n·360°
-x = 60° + n·360° tai 3x = 240° + n·360° ; x = -60° + n·360° tai x = 80° + n·120°

4. **CD** = **CA** + **AD** = -**b** + ½**a** ; **AE** = **AB** + ¼**BC** = **a** + ¼(-**a** + **b**) = ¾**a** + ¼**b**
ED = **EA** + **AD** = -¾**a** - ¼**b** + ½**a** = -¼**a** - ¼**b**

5. Piirretään suorakulmainen kolmio, jonka terävä kulma on x, vastainen kateetti 2 ja viereinen kateetti = 1. Pythagoraan teoreemalla hypotenuusa = $\sqrt{5}$. Kulma x on II neljänneksessä.
$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{4}{5}$

6. $\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + 6\cdot\mathbf{s}^0 = \mathbf{OA} + 6\cdot\dfrac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + 6\cdot\dfrac{2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k} + 6\cdot\dfrac{2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{3}$
$= \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k} + 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k} = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$; P = (5,4, -7)

7. a) Kun $x \in R$ saa sin x arvot $-1 \le \sin x \le 1$ $||\cdot 2$; $-2 \le 2\sin x \le 2$ $||$ $+3$; $1 \le 2\sin x + 3 \le 5$
b) Kun $x \in [0,7\pi/6]$, on kulman kehäpiste korkeimmillaan kun kulma on $½\pi$ ja matalimmillaan kun kulma on $7\pi/6$. $\sin ½\pi = 1$ ja $\sin 7\pi/6 = -½$ eli $-½ \le \sin x \le 1$ $||\cdot 2$; $-1 \le 2\cdot\sin x \le 2$ $||$ $+ 3$; $2 \le 2\cdot\sin x + 3 \le 5$

8. Suoran s suuntavektori $\mathbf{s} = \mathbf{AB} = (2 + 1)\mathbf{i} + (1 - 0)\mathbf{j} + (5 - 4)\mathbf{k} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ja suoran t suuntavektori $\mathbf{t} = \mathbf{CD} =$
$(0 - 2)\mathbf{i} + (0 - 3)\mathbf{j} + (1 - 1)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; $\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{s}\cdot\mathbf{t}}{|\mathbf{s}|\cdot|\mathbf{t}|} = \dfrac{3\cdot(-2) + 1\cdot(-3) + 1\cdot 0}{\sqrt{9 + 1 + 1}\sqrt{4 + 9}} = \dfrac{-9}{\sqrt{11\cdot 13}} \approx -0{,}7526$; $\alpha = 138{,}8°$
Kun suorien välinen kulma on suurimmillaan 90° on kulma 180° - 138,8° = 41,2°

9. $\mathbf{a} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$; $-5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} = x(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) + y(-\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = (2x - y)\mathbf{i} + (3x + 4y)\mathbf{j}$
$\begin{cases} 2x - y = -5 \ ||\cdot 4 \\ 3x + 4y = -2 \ ||\cdot 1 \end{cases}$ $11x = -22$; $x = -2$; $-4 - y = -5$; $y = 1$ V: $\mathbf{a} = -2\mathbf{u} + 1\mathbf{v}$

10. $\tan 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = \dfrac{2\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \dfrac{(2\sin x\cdot\cos x):\cos^2 x}{(\cos^2 x - \sin^2 x):\cos^2 x} = \dfrac{2\sin x:\cos x}{1 - \sin^2 x:\cos^2 x} = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

02.3.1. Ratkaise yhtälöt a) sin 2x = ½ b) cos 3x = cos x

02.3.2. Olkoon kolmion ABC sivuina vektorit **AB** = **a** ja **AC** = **b**. Sivua AB on jatkettu siten, että AD = 3AB. Piste E on sivun AC keskipiste ja piste F jakaa sivun BC suhteessa 2:3. Määritä vektorien **a** ja **b** avulla vektorit a) **DC** b) **BE** c) **DF**.

02.3.3. Laske sin x ja cos x tarkat arvot, kun $\tan x = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ja -90° < x < 0°.

02.3.4. Laske kolmion ABC kulma B, kun A =(1,2,-3), B = (-3,1,-2) ja C = (2,3,1).

02.3.5. a) Missä funktio f(x) = tan 3x + tan x on määritelty? b) Mitä arvoja funktio f(x) = 12sin x + 13 saa?

02.3.6. Kolmion kahtena sivuna on vektorit $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Osoita, että kolmio on suorakulmainen.

02.3.7. Ratkaise yhtälö 3sin 2*x* – 4cos *x* = 0.

02.3.8. Olkoot vektorit **a** ja **b** erisuuntaiset. Jaa vektori 2**a** + 4**b** vektorien **a** + 3**b** ja **a** - **b** suuntaisiin komponentteihin.

02.3.9. Suunnikkaan ABCD kärjet ovat A(1, 0, 3), B(2, 1, -1) ja D(5, -1, 4).
a) Osoita, että nelikulmio on vinoneliö. b) Mikä on neljäs kärki C?

02.3.10. Todista kaava $\sqrt{2}\cos(x - \pi/4) = \sin x + \cos x$.
Selvitä kaavan avulla funktion f(x) = sin x + cos x suurin ja pienin arvo.

1. a) sin 2x = ½ ; sin 2x = sin 30° ; 2x = 30° + n·360° tai 2x = 150° + n·360°
x = 15° + n·180° tai x 75° + n·180°
b) cos 3x = cos x ; 3x = x + n·360° tai 3x = -x + n·360° ; 2x = n·360° tai 4x = n·360°
x = n·180° tai x ·90° ; x = n·90°

2. a) $\mathbf{DC} = \mathbf{DA} + \mathbf{AC} = -3\mathbf{a} + \mathbf{b}$ b) $\mathbf{BE} = \mathbf{BA} + \mathbf{AE} = -\mathbf{a} + ½\mathbf{b}$ c) $\mathbf{DF} = \mathbf{DB} + 2/5\cdot\mathbf{BC}$
$= -2\mathbf{a} + 2/5(\mathbf{BA} + \mathbf{AC}) = -2\mathbf{a} + 2/5(-\mathbf{a}+\mathbf{b}) = -2\mathbf{a} - 2/5\mathbf{a} + 2/5\mathbf{b} = 0{,}4\mathbf{b} - 2{,}4\mathbf{a}$

3. Piirretään suorakulmainen kolmio ja siihen kateetit $\sqrt{2}$ ja 3 . Hypotenuusa $c^2 = 2 + 9 = 11$; $c = \sqrt{11}$.
Kulma on neljännessä neljänneksessä $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$; $\cos x = +\dfrac{3}{\sqrt{11}}$

4. $\mathbf{BA} = (1 + 3)\mathbf{i} + (2 - 1)\mathbf{j} + (-3 + 2)\mathbf{k} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$; $\mathbf{BC} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$
$\cos\beta = \dfrac{\mathbf{BA}\cdot\mathbf{BC}}{|\mathbf{BA}|\cdot|\mathbf{BC}|} = \dfrac{20 + 2 - 3}{\sqrt{16 + 1 + 1}\sqrt{25+4+9}} = \dfrac{19}{\sqrt{18}\sqrt{38}}$; $\beta \approx 43{,}4°$

5. a) $3x \ne ½\pi + n\cdot\pi$ JA $x \ne ½\pi + n\cdot\pi$; $x \ne \pi/6 + n\cdot\pi/3$ JA $x \ne \pi/2 + n\cdot\pi$
b) $-1 \le \sin x \le 1$ $||\cdot 12$; $-12 \le 2\sin x \le 12$ $||$ $+ 13$: $1 \le 2\sin x + 13 \le 25$

6. Kolmas sivu $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 8\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$, jolloin
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 15 - 4 + 3 = 14 \ne 0$; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 40 + 12 = 52 \ne 0$; $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 24 + 4 = 28 \ne 0$
tai kolmas sivu on $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ jolloin
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 10 + 8 + 6 = 24 \ne 0$; $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 6 - 8 + 2 = 0$, joten $\mathbf{b} \perp \mathbf{c}$ joten kolmio suorakulmainen

7. $3\sin 2x = 4\cos x$; $3\cdot 2\sin x \cos x = 4\cos x$ ||:6cos x ; $\sin x = 2/3$ tai $\cos x = 0$
$\sin x = \sin 41{,}8°$; $x = 41{,}8° + n\cdot n360°$ tai $138{,}2° + n\cdot 360°$
$\cos x = 0$; $x = 90° + n\cdot 180°$ (esim. yksikköympyrästä)

8. **a** ja **b** erisuuntaisia , joten ne ovat tason kantavektoreita.
$2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} = x(\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) + y(\mathbf{a} - \mathbf{b})$; $2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} = (x + y)\mathbf{a} + (3x - y)\mathbf{b}$
$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$; $4x = 6$; $x = 1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2} + y = 2$; $y = \frac{1}{2}$ V: $2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} = 1\frac{1}{2}(\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) + \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$

9. $\mathbf{AB} = (2 - 1)\mathbf{i} + (1 - 0)\mathbf{j} + (-1 - 3)\mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $|\mathbf{AB}| = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18}$
$\mathbf{AD} = (5 - 1)\mathbf{i} + (-1 - 0)\mathbf{j} + (4 - 3)\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$; $|\mathbf{AD}| = \sqrt{16 + 1 + 1} = \sqrt{18}$
Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat aina yhtä pitkät. Edellä olevan perusteella myös vierekkäiset sivut ovat yhtä pitkät. Joten kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja suunnikas on siis vinoneliö.
$\mathbf{OC} = \mathbf{OD} + \mathbf{DC} = \mathbf{OD} + \mathbf{AB} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k} + \mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k} = 6\mathbf{i}$; C = (6,0,0)

10. $VP = \sqrt{2}\cos(x - \frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}(\cos x \cdot \cos\frac{1}{2}\pi + \sin x \cdot \sin\frac{1}{4}\pi)$
$= \sqrt{2}(\cos x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sin x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}) = \cos x \cdot\frac{1}{2}\cdot 2 + \sin x \cdot\frac{1}{2}\cdot 2 = \cos x + \sin x = OP$
Kosinifunktion arvot ovat välillä [-1,1]
$-1 \le \cos(x - \frac{1}{4}\pi) \le 1$ || $\cdot\sqrt{2}$; $-\sqrt{2} \le \sqrt{2}\cos(x - \frac{1}{4}\pi) \le \sqrt{2}$; $-\sqrt{2} \le \sin x + \cos x \le \sqrt{2}$; $-\sqrt{2} \le f(x) \le \sqrt{2}$.
Suurin arvo on $\sqrt{2}$ ja pienin arvo on $-\sqrt{2}$