PITKÄ

MATEMATIIKKA

KURSSI MA3

GEOMETRIA

Markku Männikkö
2003

Sisällysluettelo:

MA3. Geometria

1. Tasogeometria

1.1. Kulma

1. Piste
on geometrian perusolio. Kaikki geometrian kuviot voidaan ajatella koostuvan pisteistä.
Sillä ei ole ulottuvuutta mihinkään suuntaan

2. Suora
syntyy, kun piste liikkuu koko ajan samaan suuntaan

3. Mikä määrittää suoran?
Kaksi pistettä, sillä niiden kautta kulkee täsmälleen yksi suora.
Tai yksi piste ja suoran suunta.

4. Taso.
Syntyy, kun suora liikkuu koko ajan samaan suuntaan.

5. Mikä määrittää tason?
Kaksi erillistä yhdensuuntaista suoraa tai yksi suora ja yksi piste suoran ulkopuolelta tai kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla

6. Jana
on kahden pisteen välinen osa niiden kautta kulkevasta suorasta.

7. Janojen pituuksien vertailu keskenään
Laitetaan janat samalle suoralle ja niiden toiset päätepisteet päällekkäin.
Se jana on lyhempi, jonka toinen päätepiste on toisen janan alueella.

1.1.1. Suoralla ovat pisteet A, B ja C tässä järjestyksessä. Mitä voi sanoa janojen AB ja AC pituuksista?

8. Janojen pituuksien vertailu mitan avulla
Selvitetään, montako samanpituista janaa, mittaa, sisältyy (voidaan laittaa peräkkäin) kumpaankin janaan.
Pitempi on se jana, johon mahtui enemmän mittajanoja.

9. Puolisuora
on yhden pisteen rajoittama osa suoraa, johon kuuluu piste ja suoran toinen puoli.

10. Kulma
muodostuu kahden samasta pisteestä lähtevän puolisuoran rajoittamasta tasonosasta.

11. Kulman osien nimitykset
Puolisuorat ovat kulman kylkiä. Yhteinen piste on kulman kärkipiste. Tason osa on kulma-alue.

12. Kulmien vertailu keskenään
Laitetaan kulmat siten, että niiden kärjet ja toiset (oikeat) kyljet yhtyvät.
Se kulma on pienempi, jonka toinen (vasen) kylki on toisen kulma-alueessa.

2. Ympyrän keskipiste on K ja kehällä ovat pisteet A, B ja C tässä järjestyksessä myötäpäivään. Mikä on kulmien AKB ja AKC järjestys, kun ensin mainittu piste on a) vasemmalla b) oikealla kyljellä?

13. Kulmien suuruuksien vertailu mitan avulla
Selvitetään, montako samansuuruista kulmaa vierekkäin laitettuna sisältyy kumpaankin kulma-alueeseen.
Suurempi on se kulma, johon mahtui enemmän mittana olevia kulmia.

14. Kulman yksiköitä
Tavallisin on 1° aste. Muita graadi, radiaani, piiru.

15. Täysikulma, oikokulma, suorakulma
Täysikulmassa kulman kyljet ovat päällekkäin ja kulma-aluetta on koko taso. Kulman suuruus = 360°.
Oikokulmassa kulman kyljet ovat samalla suoralla ja kulma-aluetta on puoli taso. Kulman suuruus = 180°.
Suorakulmassa kulman kyljet ovat kohtisuorassa, kulma-alueeseen jää neljännestaso. Suuruus = 90°.

16. Terävä, tylppä, kovera, kupera kulma
Terävän kulman asteluku < 90°. Tylpässä kulmassa on 90° < asteluku < 180°.
Koveran kulman asteluku < 180° . Kuperassa kulmassa on 180° < asteluku < 360°.

17. Kahden kulman summan muodostaminen
Laitetaan toisen kulman oikea kylki ensimmäisen vasemman kyljen kanssa päällekkäin.
Summakulma muodostuu ensimmäisen oikeasta ja toisen vasemmasta kyljestä.

18. Eksplementti-, suplementti- ja komplementtikulmat
Kaksi kulmaa ovat eksplementtikulmia, jos niiden summa on 360°.
Kaksi kulmaa ovat suplementtikulmia, jos niiden summa on 180°.
Kaksi kulmaa ovat komplementtikulmia, jos niiden summa on 90°.

3. Mikä on kulman a) 60° b) 89° komplementtikulma, kulman c) 60° d) 125° suplementtikulma?
4. Mikä on se kulma, joka on kulman 30° komplementtikulman suplementtikulma?

19. Kahden suoran mahdolliset keskinäiset asemat
a) Suorat voivat olla yhdensuuntaisia ja yhtyä, jolloin niillä on äärettömästi yhteisiä pisteitä.
b) Tai suorat voivat olla yhdensuuntaisia ja erillään, jolloin niillä ei ole yhtään yhteistä pistettä.
c) Tai suorat voivat leikata yhdessä pisteessä.
d) Tai ristikkäisiä, jolloin niillä ei ole yhteisiä pisteitä, eivät ole yhdensuuntaisia vaan ovat erillisissä tasoissa.

20. Paralleeliaksiooma
Suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta voidaan piirtää yksi ja vain yksi suoran suuntainen suora.

21. Suoran ja tason mahdolliset keskinäiset asemat
a) Suora voi olla tasolla, jolloin kaikki suoran pisteet ovat yhteisiä pisteitä.
b) Tai suora voi olla tason suuntainen ja tason ulkopuolella, jolloin niillä ei ole yhtään yhteistä pistettä.
c) Tai suora voi leikata tason ollen , jolloin niillä on yksi yhteinen piste.

22. Kahden tason mahdolliset keskinäiset asemat
a) Tasot voivat yhtyä, jolloin kaikki pisteet ovat yhteisiä pisteitä.
b) Tai tasot voivat olla yhdensuuntaisia ja erillään, jolloin niillä ei ole yhteisiä pisteitä.
c) Tai tasot voivat leikata ollen erisuuntaisia, jolloin niiden yhteiset pisteet muodostavat suoran.

23. Vieruskulmat
Vieruskulmien toiset erinimiset kyljet yhtyvät ja toiset erinimiset kyljet ovat samalla suoralla

24. Vieruskulmien suuruudet
Vieruskulmien summa on 180° eli ne ovat suplementtikulmia

5. Mikä on 25° kulman vieruskulman suuruus?

25. Ristikulmat
Kun kaksi suoraa leikkaavat, ne kulmat, joissa sama suora on samannimisinä kylkenä, ovat ristikulmia

26. Ristikulmien suuruudet
Ristikulmat ovat yhtä suuret.

6. Miten suuria ovat 67° kulman vieruskulma, ristikulma ja ristikulman vieruskulma?

27. Samankohtaiset kulmat
syntyvät, kun suora leikkaa kahta muuta suoraa. Ne kulmat, joissa tämä leikkaava suora on samannimisenä kylkenä, ovat samankohtaisia.

28. Samankohtaiset kulmat, jos leikattavat suorat yhdensuuntaiset
Jos suora leikkaa kahta yhdensuuntaista suoraa, ovat samankohtaiset kulmat yhtä suuret.

7. Kolmion ABC kulma C on 47°. Sivulla AC olevasta pisteestä D on piirretty sivulle BC pisteeseen E jana siten, että DE || AB ja kulma CDE = 61°. Laske kolmion ABC kulmat A ja B.

29. Suorien suunta, jos samankohtaiset kulmat yhtä suuret
Jos suora leikkaa kahta muuta suoraa niin, että samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret, ovat nämä kaksi muuta suoraa yhdensuuntaisia.

8. Kolmion ABC kulma C = 58°. Sivulla AC olevasta pisteestä D on piirretty sivulle BC pisteeseen E jana siten, että kulma CDE = 75°. Onko DE || AB, kun kulma B = 47°?

30. Kaksi kulmaa ovat yhtä suuria, esim. silloin kun
1) niiden samannimiset kyljet ovat yhdensuuntaiset TAI
2) niiden samannimiset kyljet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan

31. Kahden suoran välinen kulma, jos suorat samassa tasossa
on suorien leikkauspisteeseen muodostuneista ristikulmista pienempi tai 90° (jos kaikki yhtä suuria)
Yhdensuuntaisten suorien välinen kulma on 0°.

32. Kahden suoran välinen kulma, jos suorat eri tasoissa
Siirretään toista suoraa suuntansa säilyttäen niin, että suorat leikkaavat.
Alkuperäisten suorien välinen kulma on näiden leikkaavien suorien välisen kulman suuruinen.

9. Suorakulmaisen särmiön pohja on ABCD ja tämän yläpuolella vastaavassa järjestyksessä EFGH. Mikä on suorien AB ja DG välinen kulma, kun |AB| = 5 ja |DG| = 6?

33. Suoran normaali
on suora, joka on kohtisuorassa annettua suoraa vastaan eli suorat muodostavat 90° kulman.

34. Tason normaali
on suora, joka on kohtisuorassa kaikkia leikkauspisteen kautta kulkevia tason suoria vastaan.

35. Millä ehdolla suora on tason normaali?
Jos suora on kohtisuorassa kahta erisuuntaista, leikkauspisteen kautta kulkevaa tason suoraa vastaan.

1.2. Kolmion kulmien summa

1. Kolmion kulmain summa
on 180°

1.2.1. Kolmion kaksi kulmaa ovat 31° ja 79°. Laske kolmannen kulman suuruus.
2. Kolmion kulma on 62° ja toisen vieruskulma on 79°. Laske kolmion muut kulmat.
3. Kolmion kulmat ovat x, 2x + 10° ja 3x – 40°. Laske näiden suuruudet.
4. Tasakylkisen kolmion huippukulma on 24° pienempi kuin kantakulma. Laske kolmion kulmat.
5. Tasakylkisen kolmion huippupulma on 50°. Mikä on kantakulmien puolittajien välinen kulma?
6. Kolmion kulma on 54°. Mikä on kahden muun kulman puolittajien välinen kulma?
7. Neliön sisällä on piste, joka on neliön sivun etäisyydellä kahdesta neliön kärkipisteestä. Miten suurissa kulmissa neliön sivut näkyvät tästä pisteestä?

2. Kolmion kahden kulman summa
on kolmannen kulman ulkokulman (vieruskulman) suuruinen

8. Janan AB päätepiste A on suoralla l, jonka pisteestä P jana näkyy 32° kulmassa. Suoran l pisteestä Q jana näkyy 47° kulmassa. Kuinka suuri on kulma PBQ, kun P ja Q ovat samalla puolella A:sta lähtevällä puolisuoralla?

3. Kolmion sivujen suuruudesta ja niitä vastassa olevien kulmien suuruudesta
Kolmiossa on suurempaa sivua vastassa oleva kulma suurempi kuin pienemmän sivun vastainen kulma.
Kolmiossa on suurempaa kulmaa vastassa oleva sivu pitempi kuin pienemmän kulman vastainen sivu.
Kolmiossa on yhtä suurien sivujen vastaiset kulmat yhtä suuret. Ja sama kääntäen.

4. Nelikulmion kulmien summa
on 360°

9. Nelikulmion kolme kulmaa on a) 60°, 70° ja 80° b) 40°, 50° ja 60° c) 50°, 60° ja 70°. Mikä on neljäs kulma? Onko tämä mahdollista?

5. n-kulmion kulmien summa
on (n - 2) · 180°

10. Mikä on a) viisikulmion b) kuusikulmion kulmien summa?
11. Kuinka suuri on säännöllisen 10-kulmion yhden kulman suuruus?

1.3. Monikulmio

1. Murtoviiva
koostuu peräkkäisistä janoista

2. Monikulmio
on kuvio, joka syntyy, kun murtoviiva on suljettu ilman, että se on leikannut itseään

3. Monikulmion kärki, sivu, piiri ja lävistäjä
Monikulmion sivu on jokin jana, josta murtoviiva syntyy.
Kärki on kahden sivun yhteinen päätepiste.
Piiri on kaikkien sivujen muodostama murtoviiva.
Lävistäjä on kahden ei-vierekkäisen kärjen välinen jana.

4. Monikulmion kulma ja ulkokulma
Monikulmion kulma on kärkipisteeseen muodostunut monikulmion sisäpuolinen kulma.
Kulman ulkokulma on kulman vieruskulma.

5. n-monikulmio
on monikulmio, jossa on n kappaletta sivuja.

6. Tasasivuinen monikulmio
on sellainen monikulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät.

7. Tasakulmainen monikulmio
on sellainen monikulmio, jonka kaikki kulmat ovat yhtä suuret.

8. Säännöllinen monikulmio
on sekä tasasivuinen että tasakulmainen.

9. Kupera ja kovera monikulmio
Monikulmio on kupera, jos sen kaikki kulmat ovat alle 180° ja kovera, jos siinä on yksikin kulma > 180°.

10. Kuperan ja koveran monikulmion ominaisuus.
Kun kuperan monikulmion sisältä valitaan mitkä tahansa kaksi pistettä, niin näiden pisteiden välinen jana on kokonaan monikulmion sisällä. Koverassa monikulmiossa löytyy janoja, jotka eivät ole kokonaan sisällä.

11. Kolmio on tasasivuinen
silloin, kun kaikki sivut ovat yhtä pitkät.

12. Tasasivuisen kolmion kulmat
ovat myös kaikki yhtä suuret eli asteluvultaan 60°

13. Kolmio on tasakylkinen
silloin, kun siinä on kaksi yhtä pitkää sivua eli kylkeä. Kolmas sivu on kantasivu.

14. Tasakylkisen kolmion kulmista.
Kylkien vastaiset kulmat eli kantakulmat ovat yhtä suuret. Kannan vastainen kulma on huippukulma.

15. Terävä- suora- tai tylppäkulmainen kolmio
Kolmio on teräväkulmainen, jos sen kaikki kulmat ovat teräviä (<90°).
Kolmio on suorakulmainen, jos siinä yksi kulma on suora ja tylppäkulmainen, jos yksi kulma on tylppä.

16. Korkeusjana ja keskijana
Kolmion korkeusjana on kärjen ja vastaiselle sivulle piirretyn normaalin kantapisteen välinen jana.
Kolmion keskijana eli mediaani on kolmion kärjen ja vastaisen sivun keskipisteen välinen jana.

17. Suunnikas
on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.

18. Puolisuunnikas
on nelikulmio, jonka toiset vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja toiset vastakkaiset sivut erisuuntaiset.

19. Neljäkäs
eli vinoneliö on nelikulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät.

20. Suorakulmio
on nelikulmio, jonka kaikki kulmat ovat suoria.

21. Neliö
on nelikulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja kaikki kulmat yhtä suuret (=90°)

22. Piirin laskeminen
Piiri saadaan laskemalla yhteen kaikkien monikulmion sivujen pituudet.

1.3.1. Nelikulmion ABCD kulmat B ja C ovat 90° sekä sivut AB = 6, BC = 8 ja CD = 12. Laske piiri.

23. Monikulmion alan mittaus käyttäen valittua pinta-alayksikköä
Lasketaan montako yksikön suuruista alaa mahtuu alueeseen.

2. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 40 ja 60. Pinta-alan mittana käytetään suorakulmaista kolmiota, jonka kateetit ovat 2 ja 3. Montako tällaista mittaa sisältyy isoon suorakulmaiseen kolmioon?

24. Metrijärjestelmän pinta-alayksiköt
1 mm^2, 1 cm^2, 1 dm^2, 1 m^2, 1 a, 1 ha, 1 km^2.

25. Metrijärjestelmän pinta-alayksikköjen muuttaminen toiseksi
Yhteen yksikköön kuuluu aina kaksi numeroa.
Kun yksikkö halutaan yhtä suuremmaksi yksiköksi, siirretään desimaalipilkkua 2 numeroa vasemmalle.
Kun yksikkö halutaan yhtä pienemmäksi yksiköksi, siirretään desimaalipilkkua 2 numeroa oikealle.

3. Muunna m^2:ksi a) 25,6 a b) 3,45 ha c) 8,4 km^2 d) 8,9 dm^2 e) 24,7 cm^2 f) 9,8 mm^2 .
4. Muunna cm^2:ksi a) 0,025 m^2 b) 6,8 dm^2 c) 0,35 mm^2 .

26. Menetelmä pinta-alan saamiseksi halutulla tarkkuudella
Peitetään alue neliöruudukolla, joka ala on tunnettu, esim. 1 m^2.
Lasketaan monta täyttä ruutua alueeseen kuuluu.
Arvioidaan montako ruutua voidaan muodostaa vajaista ruuduista.
Pinta-ala on näiden summan verran neliöruudun yksiköitä.

27. Suorakulmion ala
A = ah, missä a on kannan pituus ja h on korkeus.

5. Suorakulmion sivut ovat 1,5 dm ja 8 cm. Mikä on ala?
6. Suorakulmion ala on 57 cm^2 ja kanta 123 mm. Mikä on korkeus?

28. Neliön pinta-ala
$A = a^2$, missä a on neliön sivun pituus.

7. Mikä on neliön pinta-ala, kun sen sivu on 4,6 cm?
8. Mikä on neliön sivu, kun sen pinta-ala on 200 dm^2?

29. Suunnikkaan pinta-ala
$A = ah$, missä a on kanta ja h on korkeus.

9. Suunnikkaan sivut ovat 3,4 dm ja 28 cm sekä niiden välinen kulma 38°. Laske korkeudet ja ala.
10. Suunnikkaan muotoisen alueen ala on 2,45 a. Kuinka etäällä ovat 18,3 m pituiset sivut toisistaan?

30. Puolisuunnikkaan pinta-ala
$A = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$, missä a ja b ovat kantasivut (yhdensuuntaiset sivut) ja h on korkeus.

11. Laske puolisuunnikkaan ala, kun kantasivut ovat 85 cm ja 4,6 dm sekä korkeus 0,25 m.
12. Mikä on puolisuunnikkaan toinen kantasivu, kun toinen on 45 cm, korkeus 32 cm ja ala 12 dm^2?

31. Kolmion pinta-ala
$A = \frac{1}{2}ah$, missä a on kanta ja h on korkeus.

13. Laske kolmion ala, kun kanta on 24 cm, kantakulma 50° ja tämän viereinen kylki 18 cm.
14. Mikä on kolmion kanta, kun korkeus on 16 cm ja ala 2,4 dm^2?

32. Kolmion pinta-ala, kun tunnetaan kolmion sivut. (Heronin kaava)
$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$, missä $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$

15. Laske kolmion ala, kun sivut ovat a) 3, 4 ja 5 b) 5, 5 ja 6 c) 3, 6 ja 7

33. Koordinaatistossa tai geolaudalla olevan kolmion alan laskeminen
Ympäröidään kolmio suorakulmiolla ylimmän ja alimman pisteen kautta kulkevilla vaakasuorilla suorilla sekä oikean ja vasemmanpuoleisimman pisteen kautta kulkevilla pystysuorilla suorilla.
Kolmion ala on koko suorakulmion ala vähennettynä reunakolmioiden pinta-alalla.

16. Mikä on kolmion A(1,3) B(5,8) C(2,-1) pinta-ala?

34. Monikulmion alan laskeminen
Esimerkiksi jaetaan monikulmio kolmioihin ja lasketaan kolmioiden alat yhteen.

17. Mikä on nelikulmion A(-1,-2) B(5,4) C(4,6) D(1,7) pinta-ala?

35. Säännöllisten monikulmioiden alat
Säännöllisten 3-, 4-, 5-, 6-, 8-, 10- ja n-monikulmion ala, sisään ja ympäripiirrettyjen ympyröiden säteet saa taulukkokirjasta.

1.4. Suorakulmainen kolmio

1. Pythagoraan lause
Suorakulmaisessa kolmiossa $\text{kateetti}^2 + \text{kateetti}^2 = \text{hypotenuusa}^2$ eli $a^2 + b^2 = c^2$.

1.4.1. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 6 ja 8. Laske hypotenuusa.
2. Suorakulmaisen kolmion pisimmät sivut ovat 13 ja 12. Laske lyhin sivu.
3. Ympyrässä (r = 6 cm) on 5,2 cm pituinen jänne. Mikä on keskipisteen etäisyys jänteestä?
4. Nelikulmion kolme sivua ovat 3, 4 ja 5 sekä molemmat näiden väliset kulmat 90°. Laske a) neljäs sivu b) muut kulmat c) ala.
5. Neliön kärjistä leikataan pois kolmion muotoiset palat niin, että syntyy säännöllinen 8-kulmio. Mikä on 8-kulmion sivu, jos neliön sivu on a?
6. Kolmion sivut ovat 10, 17 ja 21. Suurimmalle sivulle piirretään korkeusjana. Laske niiden osien pituudet, joihin korkeusjanan kantapiste jakaa pisimmän sivun.
7. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat a ja b sekä h korkeusjana hypotenuusalle. Osoita: $a^{-2} + b^{-2} = h^{-2}$.

2. Tasakylkinen suorakulmainen kolmio
sivujen suhteet ovat $1 : 1 : \sqrt{2}$

8. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat yhtä pitkät. Mikä on hypotenuusa, kun kateetti on a) 3 b) a? Mikä on kateetti, kun hypotenuusa on c) 4 d) 2r?
9. Neliön lävistäjä on 8 cm. Mikä on neliön sivu?

3. Koululaisen kolmio
on kolmio, jonka kulmat ovat 30°, 60° ja 90°.
Kolmion sivujen suhteet ovat $1 : \sqrt{3} : 2$.

10. Koululaisen kolmion lyhyempi kateetti on a) 10 b) 5 c) a. Laske muut sivut.
11. Koululaisen kolmion pitempi kateetti on a) 12 b) 3 c) a. Laske muut sivut.
12. Koululaisen kolmion hypotenuusa on a) 14 b) 5 c) a. Laske muut sivut.

13. Suorakulmaisen kolmion kulma on 60°. Sen puolittajasta jää kolmion sisään osa, jonka pituus on 4. Laske kolmion sivut.
14. Tasakylkisen puolisuunnikkaan sivut ovat 2a, a, a ja a. Laske puolisuunnikkaan ala.
15. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on 4 ja toinen kateetti 2. Laske kolmion pienin korkeus.

1.5. Suorakulmaisen kolmion trigonometria

1. Trigonometriset funktiot sin, cos ja tan suorakulmaisessa kolmiossa

Kulman sini = $\frac{\text{kulman vastainen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}$, $\sin \alpha = \frac{a}{c}$

Kulman kosini = $\frac{\text{kulman viereinen katetti}}{\text{hypotenuusa}}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$

Kulman tangentti = $\frac{\text{kulman vastainen kateetti}}{\text{kulman viereinen kateetti}}$, $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

1.5.1. Suorakulmaisen kolmion ABC sivut AB = 5, AC = 4 ja BC = 3 sekä kulma C on suora. Mitä on a) $\sin \alpha$ b) $\cos \alpha$ c) $\tan \alpha$ d) $\sin \beta$ e) $\cos \beta$ f) $\tan \beta$.

2. Trigonometristen funktioiden arvot laskimesta.

Laita laskimeen aste-moodi. CANON: $\boxed{\text{DRG}}$ TI-85: $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{Degree}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$

CANON: $\boxed{\text{kulma}}$ $\boxed{\text{sin}}$

TI-85: $\boxed{\text{sin}}$ $\boxed{\text{kulma}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$

2. Laske a) sin 38° b) cos 84° c) tan 43° d) 2·sin 56° - 3·cos 62° e) $\frac{7{,}3 \cdot \sin 58°}{\sin 29°}$

3. Kulman arvo laskimella, kun trigonometrisen funktion arvo tunnetaan.

CANON: $\boxed{\text{arvo}}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{sin}}$

TI-85: $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{sin}}$ $\boxed{\text{arvo}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$

3. Määritä terävä kulma, kun a) $\sin \alpha = 0{,}823$ b) $\cos \alpha = 0{,}297$ c) $\tan \alpha = 2{,}76$.

4. Suorakulmaisen kolmion sivujen ja kulmien ratkaiseminen trigonometrian avulla
Piirrä kolmio ja merkitse siihen annettujen osien suuruudet ja kysyttyä osaa vaikka x:llä.
Mieti, millaisia sivuja nämä sivut ovat merkitylle kulmalle (vastainen, viereinen kateetti, hypotenuusa)
Mieti mikä trigonometrinen funktio näistä muodostuu ja tee sitä vastaava yhtälö.
Ratkaise tämä yhtälö.

4. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on 8,5 ja toinen terävä kulma 58°. Määritä muut sivut.
5. Suorakulmaisen kolmion terävä kulma on 56° ja sen yksi sivu 6. Laske kolmion muut sivut, kun annettu sivu on a) pienin b) keskimmäinen c) suurin kolmion sivuista.
6. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 28 ja 18. Laske kolmion terävät kulmat.
7. Tasakylkisen kolmion kanta 6 ja kylki 10. Laske huippukulma.
8. Tasakylkisen kolmion huippukulma on 108° ja kanta 48. Laske kylki.
9. Suorakulmion sivut ovat 13 ja 18. Laske lävistäjien välinen kulma.
10. Ympyrän säde on 6,4 cm. Mikä on 8,0 cm jännettä vastaava keskuskulma?
11. Lipputangon korkeus on 8,0 m ja sen varjo 11,5 m. Mikä on auringon korkeuskulma?
12. Torni näkyy eräästä kohdasta 15° korkeuskulmasta ja 200 m lähempää 25° korkeuskulmassa. Laske tornin korkeus, kun maasto tällä alueella on vaakasuora.

1.6. Vinokulmaisen kolmion trigonometria

1. Sinilause

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

2. Sinilause ja kolmion ympäripiirretyn ympyrän säde

$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$, missä R on kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde

1.6.1 Kolmion sivu on 8 cm ja vastainen kulma 60°. Mikä on kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde?

2. Tiedetään, että $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = k$. Todista, että tällöin $\frac{a + b + c}{x + y + z} = k$
3. Laske kolmion sivut, kun sen piiri on 47 cm sekä kaksi kulmaa ovat 43° ja 59°. (vihje: ed. tehtävä)

3. Millaisessa tilanteessa sinilausetta voi käyttää
Kun kolmiosta tunnetaan kolme osaa sivuista ja kulmista ja niissä on yksi ”sivu ja sen vastainen kulma” pari

4. Sinilauseen käyttö vinokulmaiseen kolmion ratkaisemisessa
Piirretään kolmio, tehdään yhtälö sinilauseesta ja ratkaistaan haluttu sivu tai kulma

4. Kolmion kaksi kulmaa ovat 48° ja 61° sekä edellisen vastainen sivu 7,5 cm. Ratkaise kolmion osat.
5. Kolmion kaksi sivua ovat 8 ja 13 sekä edellisen vastainen kulma a) 40° b) 30°. Laske kolmion kulmat.
6. Kolmion yksi sivu on 28,3 cm ja sen viereiset kulmat 49,5° ja 71,6°. Laske kolmion muut osat.
7. Kolmion kaksi kulmaa ovat 35° ja 47° sekä pienin sivu 5,1 cm. Laske kolmion pisin sivu.
8. Säännöllisessä 7-kulmiossa on kahden pituisia lävistäjiä. Laske pitempi, kun lyhempi on 8,3 cm.
9. Järven eri puolilla olevien kohteiden P ja Q etäisyyden selvittämiseksi mitattiin matka PR = 235 m seä kulmat QPR = 106,4° ja QRP = 67,8°. Laske etäisyys PQ.
10. Laiva kulkee suoraan vauhdilla 22,5 km/h. Eräänä hetkenä majakka näkyy kulkusuunnasta 42,8° etuoikealla. Tasan 20 minuuttia myöhemmin kulma on 63,2°. Mikä on tällöin laivan etäisyys majakasta?
11. Linkkimaston korkeuden selvittämiseksi mitattiin pisteistä A ja B maston korkeuskulmiksi 13,1° ja 17,2°. A ja B ovat samalla vaakatasolla ja maston kanssa samalla pystytasolla sekä niiden välinen etäisyys on 200 m. Laske maston korkeus.

5. Kolmion pinta-ala kahdesta sivusta ja niiden välisestä kulmasta
$A = ½ \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$, eli puolet kolmion kahden sivun ja niiden välisen kulman sinin tulosta.

12. Kolmion kulma on 118° sekä viereiset sivut 36,9 cm ja 25,3 cm. Laske kolmion ala.
13. Kolmion kaksi sivua ovat 6 ja 8 sekä ala 12. Laske näiden sivujen välinen kulma.
14. Suunnikkaan kaksi sivua ovat 4 ja 5. Laske suunnikkaan ala, kun yksi kulma on 67°.
15. Ympyrän säde on 1. Laske sisään piirretyn säännöllisen 1000-kulmion ala. Vertaa ympyrän alaan = π.

6. Kosinilause
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$, HUOM ! Kulma γ on sivujen a ja b välinen kulma ⇔ sivun c vastainen kulma.

7. Millaisessa tilanteessa kosinilausetta voi käyttää
A. kun tunnetaan kaksi sivua ja välinen kulma, jolloin saadaan kolmas sivu.
B. kun tunnetaan kolme sivua, jolloin voidaan laskea jokin kulma (suurin jos useampia mahdollisuuksia)

8. Kosinilauseen käyttö vinokulmaisen kolmion ratkaisemisessa
Piirretään kolmio, tehdään yhtälö kosinilauseesta ja ratkaistaan haluttu sivu tai kulma.

16. Kolmion kaksi sivua ovat 7 ja 2 sekä näiden välinen kulma 67,2°. Laske kolmas sivu ja muut kulmat.
17. Kolmion sivut ovat 3,5 ja 6. Laske kolmion pienin kulma.
18. Tasakylkisen kolmion huippukulma on 40° ja kylki 2. Laske kyljelle piirretyn keskijanan pituus.
19. Kolmion sivut ovat 5, 6 ja 7. Laske suurimman kulman puolittajan pituus.
20. Suunnikkaan sivut ovat 4 ja 5. Laske toinen lävistäjä, kun toinen lävistäjä on 6.
21. Kiekonheiton tulos mitataan optisesti heittosektorin ulkopuolella olevasta pisteestä A. Siihen asennettu laite mittaa putoamispaikan C etäisyyden AC = 54,51 m ja kulman CAB = 97,2°, missä B on heittoympyrän keskipiste. Laske heiton pituus, kun AB = 35,53 m ja heittoympyrän halkaisija 2,50 m.
22. Kolmion sivut ovat 5, 6 ja 7. Laske keskimmäiselle sivulle tulevan keskijanan pituuden tarkka arvo.
23. Kolmion sivut ovat 2, 3 ja 4. Laske kolmion alan tarkka arvo.

9. Heronin kaava kolmion alan laskemiseksi
$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$, missä p on kolmion piirin puolikas eli $p = ½(a + b + c)$

24. Kolmion sivut ovat 6, 8 ja 10. Laske kolmion ala. Tarkista toisella tavalla.
25. Kolmion sivut ovat 2, 3 ja 4. Laske kolmion ala. Vrt. tehtävä 1.6.23.

1.7. Ympyrä

1. Ympyräviivan pisteiden ehto
jokainen piste on yhtä kaukana eli säteen etäisyydellä ympyrän keskipisteestä.

2. Ura
on viiva, 1° jonka jokainen piste toteuttaa uraehdon ja 2° jokainen piste, joka toteuttaa uraehdon on viivalla.

3. Kehä ja ympyräalue
Kehä = ympyräviiva. Ympyräalue on kehä ja sen sisäpuolinen tasoalue.

4. Säde, halkaisija ja jänne
Säde on kehän pisteen ja keskipisteen välinen jana. Jänne on kahden kehän pisteen välinen jana. Halkaisija on jänne, joka kulkee keskipisteen kautta (on pisin ympyrän jänteistä, on pituudeltaan 2 kertaa säde)

5. Kaari, sektori, segmentti
Kaari on kahden kehällä olevan pisteen välinen osa ympyrän kehää.
Sektori on tasoalue, jota rajoittaa kaari ja kaaren päätepisteisiin piirretyt ympyrän säteet.
Segmentti on tasoalue, jota rajoittavat kaari ja kaaren päätepisteiden välinen jänne.

6. Kaarta vastaava keskuskulma
on kaaren päätepisteisiin piirrettyjen säteiden välisistä kulmista se, jonka kylkien välissä kaari on.

7. Tangentti ja sekantti
Tangentti (eli sivuaja) on suora, jolla on täsmälleen yksi yhteinen piste ympyrän kanssa.
Sekantti (eli leikkaaja) on suora, jolla on kaksi yhteistä pistettä ympyrän kanssa

8. Tangentti ja sivuamispisteessä oleva säde
Tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan. Tangentti voitaisiin määritellä suorana, joka kulkee säteen päätepisteen kautta ja kohtisuorassa tätä sädettä vastaan.

9. Kaksi ympyrää sivuaa toisiaan
Kun niillä on täsmälleen yksi yhteinen piste. Tähän pisteeseen piirretty tangentti on yhteinen kummallekin ympyrälle. Sivuamispiste ja ympyröiden leikkauspisteet ovat samalla suoralla.

10. Ympyröiden sisä- ja ulkopuolisesti toisiaan sivuaminen.
Ympyrät sivuavat toisiaan sisäpuolisesti, jos pienempi ympyrä on suuremman sisällä.
Ulkopuolisesti, jos kumpikin ympyrä on toisen ulkopuolella.

11. Monikulmion sisään piirretty ympyrä
sivuaa kaikkia monikulmion sivuja. Sivut ovat ympyrän tangentteja.

1.7.1. Neliön sivu on a. Mikä on neliön sisään piirretyn ympyrän säde?

12. Ympyrän sisään piirretty monikulmio
on sellainen, että monikulmion kaikki kärkipisteet ovat ympyrän kehällä.

2. Ympyrän säde on r. Mikä on ympyrän sisään piirretyn neliön sivu?
3. Ympyrän säde on r. Mikä on ympyrän sisään piirretyn tasasivuisen kolmion sivu?

13. Ympyrän kehän pituus
$p = 2\pi r$, missä r on ympyrän säde.

4. Ympyrän halkaisija on 4,2 cm. Mikä on piiri?
5. Ympyrän piiri on 100 cm. Mikä on säde?
6. Ympyrän, jonka säde on r, kehää kasvatetaan 1 m. Paljonko säde suurenee?

14. Ympyrän ala
$A = \pi r^2$, missä r on ympyrän säde.

7. Ympyrän halkaisija on 4,5 dm. Mikä on ala?
8. Ympyrän ala on 10 cm^2. Mikä on piiri?
9. Ympyrällä ja neliöllä on sama ala. Kuinka monta prosenttia on ympyrän kehä neliön piiristä?
10. Ympyrällä ja neliöllä on sama piiri. Kuinka monta prosenttia on ympyrän ala neliön alasta?
11. Urheilukentän etu- ja takasuora ovat 90 m sekä kaarteet 110 m. Mikä on kentän pinta-ala?

15. Kaaren pituus
$b = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$, missä α on kaaren asteluku ja r on ympyrän säde.

12. Ympyrän kaaren keskuskulma on 75° ja säde 12 cm. Mikä on kaaren pituus?
13. Ympyrän kaaren pituus on 18 cm ja säde 12 cm. Mikä on ympyrän kaaren asteluku?
14. Ympyrän säde on 6,3 cm ja siinä on 8,0 cm pituinen jänne. Miten pitkä on jännettä vastaava kaari?

16. Sektorin ala keskuskulmaa käyttäen
$A = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2$, missä α on keskuskulman asteluku ja r on ympyrän säde.

15. Ympyrän säde on 4,5 cm. Mikä on 60° sektorin pinta-ala?
16. Ympyrän säde on 1 ja sektorin pinta-ala on 2. Mikä on sektorin keskuskulma?

17. Sektorin ala kaaren pituutta käyttäen
A = ½br, missä b on sektorin kaaren pituus ja r on ympyrän säde.

17. Ympyrän säde on 6,0 cm ja erään sektorin kaaren pituus 10 cm. Mikä on sektorin pinta-ala?
18. Ympyrän säde on 10 ja sektorin ala on 15. Mikä on sektorin kaaren pituus?

18. Segmentin pinta-ala
on sektorin ala – keskuskolmion ala (, jos sektorin keskuskulma on < 180°)
on sektorin ala + keskuskolmion ala (, jos sektorin keskuskulma on > 180°)

19. Ympyrän säde on 4,2 cm. Laske segmentin ala, kun segmentin kaaren asteluku on a) 70° b) 230°.
20. Ympyrän segmentin jänne on puolet ympyrän halkaisijasta. Miten suuri osa on segmentin ala koko ympyrän pinta-alasta?
21. Kahdella ympyrällä on sama säde r ja keskipisteet toistensa kehillä. Mikä on yhteisen osan ala?

2. Yhtenevyys

2.1. Kolmioiden yhtenevyys

1. Kuvioiden yhtenevyys
Kuviot ovat yhteneviä, jos ne voidaan siirtää päällekkäin niin, että ne täysin yhtyvät.

2. Sivut ja kulmat, kun kuviot yhtenevät
Jos kuviot ovat yhtenevät, niin niiden vastinsivut ovat yhtä pitkät ja vastinkulmat yhtä suuret.

3. Yhtenevien monikulmioiden vastinosat
ovat yhtä suuret, esim. vastinsivut, -korkeudet, -keskijanat jne.

4. Milloin monikulmiot yhtenevät
jos niiden vastinsivut keskenään ja vastinkulmat keskenään ovat yhtä suuret.

5. Kolmioiden yhtenevyyslauseet sss, sks, ksk, kks ja sske.
Kolmioissa pitää olla kolme paria yhtä suuria vastinosia, joista ain. yksi sivupari, jotta ne olisivat yhteneviä.
(sks) = Jos kolmion kaksi sivua ja niiden välinen kulma ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät.
Muut vastaavia, paitsi
(sske) = Jos kolmion kaksi sivua ja toisen sivun vastainen kulma ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhteneviä edellyttäen, että toisten sivujen vastaiset kulmat ovat samanlaatuiset

6. Yhtenevyyskuvauksia
ovat esim. yhdensuuntaissiirto, kierto pisteen ympäri, peilaus pisteen tai suoran suhteen.
Näillä saatava uusi kuvio on alkuperäisen kanssa yhtenevä.

7. Kuvion yhdensuuntaissiirto
Siirretään kuvion jokaista pistettä yhtä pitkät matkat samaan suuntaan.

2.1.1. Piirrä kolmio ABC. Siirrä jokaista pistettä AB:n suuntaan AB:n pituuden verran.

8. Tason kierto jonkin pisteen ympäri
Kierretään jokaista pistettä kiinteä piste keskipisteenä samanasteinen kaari samaan kiertosuuntaan.

2. Piirrä kolmio ABC. Kierrä jokaista pistettä A:n ympäri vastapäivään kulman α verran.

9. Peilaus pisteessä
Peilataan jokainen piste annetussa pisteessä siten, että etsitään annetun pisteen toiselta puolelta sellainen piste, että peilauspiste on peilattavan pisteen ja peilikuvapisteen välisen janan keskipiste.

3. Piirrä kolmio ABC. Peilaa jokainen piste A:n suhteen.

10. Peilaus suorassa
Peilataan jokainen piste suorassa siten, että etsitään kuvion pisteen vastinpiste suoran toiselta puolelta niin, että suora on kuvion pisteen ja peilipisteen välisen janan keskinormaali.

4. Piirrä kolmio ABC. Peilaa kolmio kärjen C kautta kulkevan AB:n suuntaisen suoran suhteen.
5. Piirrä kolmio ABC. Peilaa ensin kolmio kärjen A suhteen ja sitten suoran AB suhteen. Millä yhtenevyyskuvauksella olisi päästy samaan tulokseen?

11. Yhteneväisyyskuvausten ominaisuuksia
1° Koko ja muoto säilyvät ts. kuviot ovat yhteneviä
2° Kiertojärjestys (pisteestä toiseen myötä- tai vastapäivään) säilyy siirrossa, kierrossa ja peilauksessa pisteen suhteen ja vaihtuu peilauksessa suoran suhteen

12. Yhtenevyyden määritelmä.
Kuviot ovat yhteneviä, jos on olemassa yksi tai useampia peräkkäisiä yhtenevyyskuvauksia, joilla kuvio voidaan kuvata toiseksi

2.2. Todistaminen yhtenevillä kolmioilla

1. Todistustehtävän rakenne
1° Oletus: kerrotaan jos-lauseessa tosiksi oletetut tiedot ja muut tehtävästä ilmenevät varmat asiat.
2° Väitös: kerrotaan todeksi väitetty tieto, joka on yleensä niin-lauseessa.
3° Todistus: Esitetään se päättely, joilla oletuksen tiedoista päädytään väitökseen. Uusi tieto perustellaan oletuksen tiedoin tai jonkin jo aiemmin todistetun tiedon perusteella.

2. Kahden janan tai kulman todistaminen yhtä suuriksi
Yritä saada ne vastinosiksi kahteen kolmioon (piirtämällä apujanoja, jos kolmioita ei vielä esiinny)
Todista kolmiot yhteneviksi. Osat ovat yhtä suuret yhtenevien kolmioiden vastinosina.

2.2.1. Osoita, että tasakylkisen kolmion kyljille piirretyt korkeusjanat ovat yhtä pitkät.
2. Osoita, että tasakylkisen kolmion kannalle piirretty keskijana on kohtisuorassa kantaa vastaan.
3. Osoita, että tasakylkisen kolmion kannalle piirretyn keskijanan mielivaltainen piste on yhtä etäällä molemmista kyljistä.
4. Tasakylkisen kolmion ABC kyljillä AC ja BC on pisteet D ja E siten, että ne ovat yhtä kaukana huipusta C. Osoita, että DB = EA.
5. Osoita, että jos kolmion jokin korkeusjana on myös kulmanpuolittaja, niin kolmio on tasakylkinen.
6. Suorakulmaisen kolmion kateeteille on kolmion ulkopuolelle piirretty tasasivuiset kolmiot, joiden sivut ovat vastaavan kateetin pituiset. Osoita, että tasasivuisten kolmioiden suorakulmaisen kolmion ulkopuolella olevat kärjet ovat yhtä kaukana hypotenuusan toisesta päätepisteestä.

2.3. Suunnikkaan ominaisuuksia

1. Suunnikkaan määritelmä
Suunnikas on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.

2. Suunnikkaan vastakkaiset kulmat
Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret.

2.3.1. Nelikulmion yksi pari vastakkaisia kulmia on 57°. Onko nelikulmio suunnikas?

3. Suunnikkaan vastakkaiset sivut
Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhtä suuret.

2. Nelikulmiossa on kaksi 3 cm ja kaksi 4 cm pitkää sivua. Onko nelikulmio suunnikas?

4. Suunnikkaan vierekkäiset kulmat
Suunnikkaan vierekkäiset kulmat ovat suplementtikulmia.

3. Suunnikkaan yksi kulma on 70°. Miten suuria ovat muut kulmat?

5. Suunnikkaan lävistäjien leikkauspiste
Suunnikkaan lävistäjien leikkauspiste puolittaa kummankin lävistäjän.

4. Nelikulmion yksi lävistäjä puolittaa toisen. Onko nelikulmio suunnikas?

6. Milloin nelikulmio on suunnikas?
1° Jos vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.
2° Jos kummatkin vastakkaiset sivuparit ovat yhtä pitkät.
3° Jos toinen vastakkainen sivupari ovat yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset.
4° Jos lävistäjät puolittavat toisensa.

5. Nelikulmion lävistäjät ovat yhtä pitkät. Onko nelikulmio suorakulmio, entä suunnikas?
6. Suunnikkaan lävistäjät ovat yhtä pitkät. Osoita, että suunnikas on suorakulmio.

7. Neljäkkään lävistäjät
ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan

7. Neljäkkään lävistäjät ovat 3 ja 4. Laske neljäkkään sivut.
8. Neljäkkään sivu on 13 ja toinen lävistäjä on 10. Mikä on toinen lävistäjä?

2.4. Janan keskinormaali

1. Keskinormaalin määritelmä
Janan keskinormaali on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

2. Keskinormaalin pisteiden ominaisuus
Janan keskinormaalin piste on yhtä kaukana janan päätepisteistä.

2.4.1. Olkoon P ja Q janan AB keskinormaalin pisteitä. Osoita, että kulmat PAQ ja PBQ ovat yhtä suuret.

3. Keskinormaali urana
Janan keskinormaali on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä kaukana janan päätepisteistä.

4. Janan keskinormaalin piirtäminen harpin ja viivaimen avulla.
Piirrä janan päätepisteisiin samansäteiset ympyrät, jotka leikkaavat toisensa.
Piirrä leikkauspisteiden kautta suora, joka on janan keskinormaali.

5. Suoran normaalin piirtäminen suoralla olevan pisteen kautta.
Erota suoralta pisteen molemmilta puolilta yhtä pitkät janat, jolloin annettu piste on tämän janan keskipiste.
Piirrä tälle janalle keskinormaali.

6. Suoran normaalin piirtäminen suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta.
Piirrä annettu piste keskipisteenä ympyrä, joka leikkaa suoran kahdessa pisteessä.
Piirrä näiden pisteiden välisen janan keskinormaali.

2.5. Kulman puolittaja

1. Kulman puolittajan pisteiden ominaisuus
Kulman puolittajan piste on yhtä kaukana kulman kyljistä.

2. Kulmanpuolittaja urana
Kulman puolittaja on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä kaukana kulman kyljistä.

3. Kulman puolittajan piirtäminen harpin ja viivaimen avulla.
Piirrä kulman kärki keskipisteenä ympyrä.
Piirrä kulman kylkien ja eo. ympyrän leikkauspisteisiin samansäteiset ympyrät, jotka leikkaavat toisensa.
Piirrä tämän leikkauspisteen ja kulman kärkipisteen kautta suora, joka on kulman puolittaja.

4. Kulman kolmijaon ratkaistavuus.
Kulmaa ei voi jakaa yleisesti kolmeen yhtä suureen osaan käyttäen apuna vain harppia ja viivainta.
Kulman voi jakaa kolmeen osaan, jos saa käyttää muita välineitä kuin harppia ja viivainta esim. Pascalin laitetta tai Feldbumin viivainta.

2.6. Kehäkulma ja keskuskulma

1. Kehäkulma
on kulma jonka kärki on ympyrän kehällä ja kylkinä on kaksi jännettä tai toisena kylkenä on jänne ja toisena kärkipisteeseen piirretty ympyrän tangentti.

2. Kehäkulmaa vastaava keskuskulma
on kulma, jonka keskipiste on ympyrän keskipiste ja jonka kylkien välissä on sama kaari.

3. Kehäkulman ja sitä vastaavan keskuskulman suuruus
Kehäkulman asteluku on puolet vastaavan keskuskulman asteluvusta.

2.6.1. Ympyrän kehäkulma on 27°. Mikä on vastaavan keskuskulman suuruus?
2. A, B ja C ovat ympyrän kehän pisteitä ja K on keskipiste. Kulma AKC on 86°. Kuinka suuri on $\angle$ABC, kun B on a) suuremmalla b) pienemmällä kaarella AC?
3. A, B ja C ovat ympyrän kehällä ja K keskipiste. $\angle$ACB on 78°. Kuinka suuri on $\angle$AKB, kun C on a) suuremmalla b) pienemmällä kaarella AB?

4. Keskuskulman ja kaaren asteluku
Keskuskulmalla ja sen kylkien välissä olevalla kaarella on sama asteluku.

4. Ympyrän kaaren asteluku on 82°. Mikä on vastaavan keskuskulman ja kehäkulman suuruus?
5. Tasakylkisen kolmion ABC huippukulma C = 56° ja kärjet ovat erään ympyrän kehällä. Kuinka suuria ovat kaaret AB, BC ja AC?
6. Kolmion ympäri on piirretty ympyrä. Kärkipisteiden välisten kaarien suhteet on 3:4:5. Laske kulmat.
7. Ympyrän kehällä on tasasivuisen kolmion ABC kärkipisteet ja piste P on kaarella AB. Kuinka suuri on a) kulma APC b) kulma APB?
8. 86° kaaren AB pisteeseen A on piirretty tangentti, jolla on piste P. Laske kulma PAB?
9. Tasakylkisen kolmion ABC ympäri on piirretty ympyrä. Kanta AB on 84° kaaren jänne ja K ympyrän keskipiste. Miten suuri on kulma CAK?

5. Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat
ovat keskenään yhtä suuret.

10. Ympyrän kehällä on järjestyksessä pisteet A, B, C ja D siten, että $\angle$ACB on 56°. Pisteeseen B on piirretty ympyrän tangentti BE. Laske kulma a) ADB b) ABE, kun D ja E ovat eri puolella suoraa BC.
11. Ympyrällä on jänteet AB || CD. Kaaren CD keskipiste on E. Laske $\angle$AEC, kun $\angle$BAD = 23°

6. Puoliympyrän sisältämä kehäkulma
on suora (90°)

12. Ympyrän säde on 13. Halkaisijan AB päätepisteestä A on piirretty 10 pituinen jänne AP. Laske PB.
13. Puoliympyrän säde on 5 ja halkaisijan päätepisteet A ja B. Kehällä on piste C siten, että AC = 6. Laske kolmion ABC ala.
14. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 6 ja 8. Kuinka suuri on kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde?
15. Paperille on piirretty ympyrä, mutta sen keskipistettä ei ole merkitty. Kuinka saat harppia ja viivainta käyttäen selville ympyrän keskipisteen?

7. Janan näkökulma jostakin pisteestä
on kulma, jonka kärki on tässä pisteessä ja jonka kyljet kulkevat janan päätepisteiden kautta niin, että janan on kulman kylkien välissä.

8. Viiva, josta jana näkyy aina samansuuruisessa kulmassa
on kaksi janan eri puolilla olevaa ympyrän kaarta, jonka jänteenä on ko. jana ja janan vastainen kehäkulma on annetun suuruinen.

9. Ympyrän sisällä oleva kahden jänteen välinen kulma
on puolet kulman ja sen ristikulman kylkien välissä olevien kaarien asteluvusta

16. Ympyrän jänteet AB ja CD leikkaavat pisteessä P. Kaarien AC ja BD suuruudet ovat 65° ja 43°. Laske kulman APC suuruus.
17. Ympyrän jänteet AB ja CD leikkaavat 62° kulmassa. Laske kaari AC, kun kaari BD on 47°.

10. Ympyrän ulkopuolella oleva kahden sekantin välinen kulma
on puolet kulman kylkien välissä olevien kaarien astelukujen erotuksesta

18. Kulman kyljet leikkaavat ympyrän siten, että kylkien välissä on 45° ja 89° kaaret. Laske kulma.
19. Ympyrän ulkopuolella olevasta pisteestä P on piirretty kaksi sekanttia PAB ja PCD. Kulma P = 34° ja kaari AC = 40°. Laske ∠ABC, ∠BCD ja kaari BD.
20. Ympyrän ulkopuolella olevasta pisteestä P on piirretty tangentti PA (A on sivuamispiste) ja sekantti PBC. ∠APB = 36° ja ∠PAB = 42°. Laske kaarien AB, BC ja CA asteluvut.

2.7. Ympyrän tangentti

1. Tangenttikulma
Tangenttikulman kärki on ympyrän ulkopuolella oleva piste ja kylkinä on tämän pisteen kautta piirretyt ympyrän tangentit.

2. Tangenttikulma ja sitä vastaava keskuskulma
ovat vastakkain olevia kulmia, joiden kyljet kulkevat tangenttien sivuamispisteiden kautta.

3. Tangenttikulman ja sitä vastaavan keskuskulman suuruudet
ovat toistensa suplementtikulmia (yhteensä 180°).

2.7.1. Tangenttikulma on 68°. Kuinka suuri on vastaava keskuskulma.
2. Tangenttikulman kylkien välissä on 110° ja 250° kaaret. Kuinka suuri on tangenttikulma?
3. Kuinka suuressa kulmassa maapallo näkyy 200 km korkeudella olevasta sukkulasta? r = 6370 km.
4. Miten suuri kaari asteina ja metreinä nähdään maapallosta (r = 6370 km) 50 m korkeasta mastosta?
5. Kuinka korkeasta tornista näkyy koko Veteli, kun Veteli on leveimmillään 40 km?

4. Tangenttikulman kyljet
ovat janat kulman kärjestä sivuamispisteeseen. Ne ovat keskenään yhtä pitkät.

6. Suorakulmaisen kolmion sivut ovat 3, 4 ja 5. Sen sisällä oleva ympyrä sivuaa kaikkia sivuja. Mikä on ympyrän säde?
7. Nelikulmion ABCD sivut ovat erään ympyrän tangentteja. Osoita, että AB + CD = BC + AD.

5. Tangenttikulman kärjen ja ympyrän keskipisteen yhdysjanan ominaisuus
Yhdysjana puolittaa tangenttikulman ja vastaavan keskuskulman.

3. Yhdenmuotoisuus

3.1. Yhdenmuotoisuus ja mittakaava

1. Vastinsivut ja vastinkulmat, kun kuviot yhdenmuotoisia
Vastinsivujen suhteet ovat samat $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ ja vastinkulmat ovat yhtä suuret.

2. Yhdenmuotoisten kuvioiden sivujen suhde toisin
$a_1 : b_1 = a_2 : b_2$ eli yhden kolmion sivujen suhde = toisen kolmion vastaavien sivujen suhde

3. Ympyräkuvioiden yhdenmuotoisuus
Ympyrät ovat aina yhdenmuotoisia.
Sektorit ja segmentit ovat yhdenmuotoisia, jos vastaavat keskuskulmat ovat yhdenmuotoiset.

4. Kappaleiden yhdenmuotoisuus
Kappaleet ovat yhdenmuotoisia, jos vastinkulmat ovat yhtä suuret ja vastinjanat verrannolliset.

5. Mittakaava
on vastinjanojen pituuksien suhde. Suhteen jälkimmäinen jäsen on alkuperäisempi (se mihin verrataan)

6. Mittakaavan laskeminen vastinpituuksista
Lasketaan vastinpituuksien suhde.

3.1.1. Talon pituus on 12 m ja piirustuksissa sama pituus on 30 cm. Mikä on piirustusten mittakaava?

7. Pituuksien laskeminen mittakaavasta
Tehdään yhtälö mittakaavasta ja ratkaistaan se.

2. Kartan mittakaava on 1 : 15 000. Kuinka pitkä on se matka luonnossa, joka kartalla on 8,4 cm?
3. Kartan mittakaava on 1 : 80 000. Kuinka leveä paperi tarvitaan, jotta siihen mahtuisi koko Veteli, joka on leveimmältä kohdaltaan 32 km?

8. Janojen pituuksien laskemista yhdenmuotoisista kuvioista
Merkitään kysyttyä janaa x:llä ja tehdään yhtälö siitä, että vastinjanojen suhde on sama.
Ratkaistaan x saadusta verrantoyhtälöstä.

4. Tasaiselle maalle pystytetyn lipputangon varjo on 18,0 m samalla hetkellä, kun 1,80 m pitkän kepin varjo on 2,70 m. Mikä on lipputangon korkeus?
5. Kolmiot ABC ja DEF ovat yhdenmuotoisia. AC = 5, DF = 8, DE = 6 ja BC on 4 pienempi kuin EF. Laske puuttuvien sivujen pituudet.
6. Standardimuotoisen paperiarkin muoto säilyy, kun se taitetaan kahtia lyhemmän sivun suuntaisesti. Laske tällaisen arkin a) sivujen suhde b) sivut, kun ala on 2^{-4} m^2 (A4-arkki)
7. Tasakylkisen kolmion kanta on 30 cm ja kyljelle piirretty korkeusjana 24 cm. Laske kolmion ala.
8. Kolmiossa ABC on kulma A kaksi kertaa niin suuri kuin kulma B. Osoita, että $a^2 = b^2 + bc$. Laske sivun a pituus, kun b = 8 ja c = 10.
9. Kolmion eräs kulma on 70°. Sen puolittaja erottaa kolmiosta tämän kanssa yhdenmuotoisen kolmion. Kuinka suuria ovat kolmioiden kulmat?
10. Puolisuunnikkaan lyhempi kantasivu on puolet pidemmästä. Missä suhteessa lävistäjät jakavat toisensa?
11. Suunnikkaan ABCD lävistäjällä AC on piste P siten, että AP:PC = 2:3. Missä suhteessa suora DP jakaa sivun AB?

9. Yhdenmuotoisuuskuvauksia
ovat mm. kaikki yhtenevyyskuvaukset ja venytys pisteen suhteen

10. Venytys pisteen suhteen
Kuvio venytetään jokin piste venytyskeskuksena siten, että jokainen piste siirretään pisteen ja venytyskeskuksen kautta kulkevalla suoralla yhtä moninkertaisen matkan päähän venytyskeskuksesta.

11. Venytyssuhde
Jos venytyssuhde > 1, joutuu jokainen piste kauemmas venytyskeskuksesta ja kuvio suurenee.
Jos venytyssuhde < 1, mutta > 0, tulee jokainen piste lähemmäs venytyskeskusta. Kuvio pienenee.
Jos venytyssuhde < 0, joutuu jokainen piste venytyskeskuksen toiselle puolelle venytyssuhteen itseisarvon kertaisen matkan päähän venytyskeskuksesta.

12. Kolmion kärjet ovat A(4,7), B(6,2) ja C(8,6). Venytä kolmiota origo keskuksena suhteessa a) 2 b) -½. Missä ovat uuden kolmion kärkipisteet?

12. Homotetia
tarkoittaa venytystä.

13. Venytetyn janan pituus
muuttuu samassa suhteessa kuin venytyssuhde.

14. Venyttämällä saadun kulman suuruus
pysyy samana.

15. Yhdenmuotoisen kuvion piirtäminen venytystä käyttäen
Piirretään ensin sellainen kuvio, joka täyttää yhtä ehtoa lukuunottamatta kaikki ehdot.
Venytetään kuviota niin, että viimeinenkin ehto toteutuu.

13. Piirrä kolmio, jonka hypotenuusa on annetun jana mittainen ja kateettien suhde 3:4.
14. Ympyrässä on kaksi sädettä. Piirrä jänne, jonka säteet jakavat kolmeen yhtä suureen osaan.

16. Tasokuvioiden yhdenmuotoisuuden määritelmä.
Tasokuviot ovat yhdenmuotoisia, jos on olemassa yhdenmuotoisuuskuvaus tai sarja yhdenmuotoisuuskuvauksia niin, että kuvio voidaan kuvata toiselle.

3.2. Kolmioiden yhdenmuotoisuuslause kk

1. Kahden kolmion yhdenmuotoisuusehto kk (, sks, sss, sske)
(kk) = Jos kolmion kaksi kulmaa ovat yhtä suuret kuin vastinkulmat toisessa kolmiossa, ovat kolmiot yhdenmuotoiset.
(sks) = Jos kolmion kahden sivun suhteet toisen kolmion vastinsivuihin ovat samat ja niiden väliset kulmat ovat yhtä suuret, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

2. Kaksi kulmaa suuruudeltaan, jos niiden samannimiset kyljet kohtisuorassa
Kulmat ovat yhtä suuret.

3. Kolmion sivun suuntainen suora
Erottaa kolmiosta pienemmän, alkuperäisen kolmion kanssa yhdenmuotoisen kolmion

3.2.1. Kolmio ABC on jaettu kahteen osaan AB:n suuntaisella janalla DE. Olkoon AB = 6,0 cm, DE 4,0 cm sekä AB:n ja DE:n välinen etäisyys 1,0 cm. Laske a) kolmion ABC korkeusjana b) kolmion DEC ala.
2. Kolmion sivun suuntainen suora erottaa kolmiosta puolisuunnikkaan, jonka kantasivut ovat 7 ja 10 sekä kyljet 3 ja 4. Laske kolmion sivut.
3. Piste P jakaa suunnikkaan ABCD sivun AB suhteessa 1:3. piste O on janan DP ja lävistäjän AC leikkauspiste. Laske AO:OC.
4. Tasakylkisen kolmion kanta on 12 ja kylki 20. Kolmiosta erotetaan kannan suuntaisella suoralla puolisuunnikas, jonka kolme lyhyempää sivua ovat yhtä pitkät. Laske näiden kolmen sivun pituus.
5. Kolmiossa ABC on AB = 4 ja AC = 6. Piirretään vinoneliö ADEF siten, että D on sivulla AB, E on sivulla BC ja F sivulla AC. Laske vinoneliön sivut.
6. Puolisuunnikkaan kantasivut ovat 4,0 cm ja 6,0 cm. Yksi sivu on kohtisuorassa kantasivuja vastaan. Laske lävistäjien leikkauspisteen etäisyys tästä sivusta.
7. Puolisuunnikkaan kantasivut ovat 6 ja 3. Missä suhteessa kantasivujen suuntainen suora jakaa erisuuntaiset sivut, kun suorasta puolisuunnikkaan sisään jäävän osan pituus on 4?

4. Nelikulmio (neliö, suorakulmio, vinoneliö, suunnikas, puolisuunnikas, …) kolmion sisällä
Tällöin muodostuu yhdenmuotoisia kolmioita, kun yksi sivuista on kolmion sivun suuntainen

8. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 4 ja 6. Sen sisään on piirretty neliö, jonka kaksi sivua on kateeteilla ja yksi kärki hypotenuusalla. Mikä on neliön sivu?
9. Tasakylkisen kolmion kanta on 8 ja kyljet 5. Kolmion sisään piirretään neliö, jonka yksi sivu on kannalla ja kaksi kärkeä kyljillä. Mikä on neliön sivu?
10. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 3 ja 4. Sen sisällä on suorakulmio, jonka kaksi sivuista on kateeteilla ja yksi kärki hypotenuusalla. Laske suorakulmion ala, kun sen sivujen suhde on 1:2.
11. Kolmion kanta on 4 ja korkeus 2. Sen sisään piirretään suorakulmio, jonka yksi sivu (pituus = x) on kolmion kannalla ja kaksi kärkeä muilla sivuilla. Lausu suorakulmion ala x:n avulla.
12. Suoran ympyräkartion pohjaympyrän säde on 30 ja korkeus 50. Sen sisään asetetaan suora ympyrälieriö siten, että toinen pohja on kartion pohjalla ja toisen pohjan kehä on kartion vaipalla. Mikä on lieriön pohjan säde, kun lieriön korkeus on 30.

5. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusalle piirretty korkeusjana
erottaa kaksi pienempää kolmiota, jotka ovat yhdenmuotoisia keskenään ja alkuperäisen kolmion kanssa

13. Suorakulmaisen kolmion ABC hypotenuusa on AB = 5. Laske AC, kun $CD \perp AB$ ja AD = 2.
14. Suorakulmaisen kolmion kateetti on 6 ja sen projektio hypotenuusalla 4. Laske hypotenuusa.
15. Suorakulmaisen kolmion kateetti on 15 ja toisen kateetin projektio hypotenuusalla on 16. Mikä on hypotenuusan pituus?
16. Laske suorakulmaisen kolmion kateetit, kun niiden hypotenuusalla olevat projektiot ovat 4 ja 5.
17. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on 13 ja sen vastainen korkeus 6. Missä mittakaavassa ovat yhdenmuotoisia ne kolmiot, joihin korkeusjana jakaa alkuperäisen kolmion?
18. Laske suorakulmaisen kolmion ABC sivut, kun hypotenuusalle piirretty korkeus CD = 3 ja AD = 2.
19. Suorakulmaisen kolmion ABC hypotenuusan piste E jakaa hypotenuusan osiin AE = 12 ja EB = 13. Pisteeseen E piirretty normaali leikkaa sivun AC pisteessä D. Laske nelikulmion EBCD ala, kun BC = 15.
20. Kaksi ympyrää, joiden säteet ovat 3 ja 4, leikkaavat toisensa kohtisuorasti (leikkauspisteisiin piirretyt tangentit ovat kohtisuorassa). Laske ympyröiden yhteisen jänteen pituus.

6. Ympyrän jänteiden leikatessa syntyy ristikkäin yhdenmuotoisia kolmioita, joiden kärkinä leikkauspiste ja jänteiden päätepisteet

21. Ympyrässä on kaksi jännettä. Ne leikkaavat toisensa siten, että toisen jänteen osat ovat 3 ja 6 sekä toisen 9 ja x. Laske x.
22. Ympyrän halkaisija on 11. Se jakaa erään jänteen osiin, joiden pituudet ovat 4 ja 6. Kuinka suuriin osiin tämä jänne jakaa halkaisijan?
23. Ympyrän säde on 4. Sen sisällä 1 etäisyydellä keskipisteestä oleva piste P. Pisteen P kautta piirretään sekantti, joka leikkaa ympyrän pisteissä A ja B. Laske tulo AP · PB.

7. Ympyrän tangentin ja sekantin leikatessa syntyy kaksi yhdenmuotoista kolmiota, joiden yhteisenä sivuna on tangenttikulman kylki ja kolmansina kärkipisteinä sekantin ja ympyrän leikkauspisteet.

24. Kulman P toinen kylki on tangentti PA ja toinen sekantti PBC. A, B ja C ovat kehän pisteitä. Laske BC, kun PA = 6 ja PB = 4.
25. Ympyrän säde on 4½ ja pisteen P etäisyys ympyrän kehästä on 3. Miten pitkä on AP, kun A on P:n kautta piirretyn tangentin sivuamispiste?

8. Ympyrän kahden sekantin leikatessa ympyrän ulkopuolella syntyy kaksi yhdenmuotoista kolmiota, joiden yhteisenä kulmana on sekanttien välinen kulma ja yhtenä vastinkulmaparina on sekanttien välisen pienemmän kaaren vastaiset kehäkulmat

26. Ympyrän ulkopuolelta olevasta pisteestä P on piirretty sekantti PAB ja toinen sekantti PCD. PA = 10 ja AB = 8 = PC. Laske jänteen CD pituus.
27. Piste P on ympyrän ulkopuolella etäisyydellä 5 ympyrän kehästä. P:stä on piirretty sekantti PCD siten, että PC = 6 ja CD = 2. Laske ympyrän säde.

9. Kolmion kahden sivun keskipisteen yhdysjana on kolmannen sivun suuntainen ja pituudeltaan puolet kolmannesta sivusta.

28. Kolmion ABC sivu AB = 6. Sivujen AC ja BC keskipisteet ovat D ja E. Kuinka pitkä on DE? Janojen DC ja EC keskipisteet ovat F ja G. Kuinka pitkä on jana FG?

10. Kolmion kannan suuntaisen suoran muista sivuista erottamat osat ovat verrannollisia niin, että vastinkohdilla olevien janojen suhde on sama.

29. Kolmion ABC sivu BC = 24. Piste D jakaa sivun AC suhteessa 1:5. D:n kautta on piirretty AB:n suuntainen suora. Miten suuriin osiin se jakaa sivun BC?
30. Puolisuunnikkaan kantasivujen suuntaiset suorat jakavat toisen kyljen suhteessa 1:2:3. Toisen kyljen pituus on 24. Miten suuret osat yhdensuuntaiset suorat erottavat tästä sivusta?

11. Janan geometrinen jakaminen tiettyyn määrään yhtä suuria osiin Piirrä janan toisen päätepisteen kautta suora. Erota tältä suoralta päätepisteestä alkaen peräkkäin yhtä pitkiä janoja yhtä monta kuin janan osia tarvitaan. Yhdistä viimeinen jakopiste janan toiseen päätepisteeseen. Piirrä muiden jakopisteiden kautta tämän viimeisen yhdysjanan suuntaisia suoria. Nämä suorat jakavat janan haluttuihin osiin.

31. Piirrä mielivaltainen jana sekä jaa se harppia ja viivainta käyttäen 5 yhtä suureen osaan.
32. Piirrä mielivaltainen janan ja jaa se harppia ja viivainta käyttäen osiin, joiden suhde on 1:2:3.

12. Varigonin suunnikaslause Kuperan nelikulmion peräkkäin otetut, sivujen keskipisteiden yhdysjanat muodostavat suunnikkaan, jonka ala on puolet alkuperäisen nelikulmion alasta

33. Kuperan nelikulmion ala on 48. Laske sivujen keskipisteiden yhdysjanojen muodostaman nelikulmion ala.
34. Kolmion kylkien keskipisteiden kautta on piirretty kannan korkeusjanan suuntaiset suorat, jotka yhdessä kannan ja keskipisteiden välisen janan kanssa muodostavat nelikulmion, jonka ala on 6. Mikä on alkuperäisen kolmion ala?

3.3. Kolmion kulman puolittajalause

1. Kolmion kulmanpuolittajalause. Kolmion kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa. Osa 1 : osa 2 = osa 1:n viereinen sivu : osa 2:n viereinen sivu

3.3.1. Kolmion sivut ovat 4, 6 ja 7. Millaisiin osiin suurimman kulman puolittaja jakaa suurimman sivun?

2. Kolmion kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun osiin, joiden pituudet ovat 6 ja 10. Laske viereiset sivut, kun kolmion piiri on 40.
3. Suorakulmaisen kolmion suoran kulman puolittaja jakaa hypotenuusan suhteessa 3:7. Laske kolmion terävät kulmat.
4. Tasakylkisen kolmion kanta on 7 ja kylki 9. Missä suhteessa kärjestä lukien kantakulmien puolittajat jakavat toisensa?
5. Kolmion ABC sivujen pituudet ovat AB = 9, BC = 7 ja AC = 5. Kulmien A ja C puolittajat leikkaavat toisensa pisteessä M. Kuinka suuri osa koko kolmion alasta on kolmion AMC ala?
6. Kolmion sivut ovat 6, 7 ja 8. Kuinka pitkä osa pienimmän kulman puolittajasta jää kolmion sisään?
7. Laske tarkat arvot tan 15° ja tan 22,5°.

2. Kolmion kulman vieruskulman puolittajalause
Kolmion kulman vieruskulman puolittaja jakaa vastaisen sivun ulkopuolisesti viereisten sivujen pituuksien suhteeseen

3.4. Yhdenmuotoisten kuvioiden alojen suhde

1. Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde
on mittakaava toiseen = k^2 = vastinsivujen pituuksien suhteen neliö.

3.4.1. Laske huoneiston pohjapiirroksen mittakaava, kun todellisuudessa 24 m^2 suuruisen huoneen pinta-ala on piirroksissa 6,0 cm^2?
2. Kartalla, jonka mittakaava on 1:50000, on erään palstan ala 8,0 cm^2. Mikä on ala luonnossa?
3. Kolmion kannan suuntainen suora jakaa toisen kyljen suhteessa 3:4. Missä suhteessa ala jakautuu?
4. Kolmion sivut ovat 4, 6 ja 8. Pisimmän sivun suuntainen suora jakaa kolmion alan suhteessa 1:3 kolmion kärjestä lukien. Mitkä ovat pikkukolmion sivujen pituudet?
5. Kolmion kannan suuntaiset suorat jakavat korkeuden kolmeen yhtä suureen osaan. Missä suhteessa ne jakavat kolmion alan?
6. Kolmion sisällä olevasta pisteestä on piirretty sivujen suuntaiset suorat. Muodostuu kolme kolmiota, joiden yhtenä kärkenä on ko. piste ja alat 4, 9 ja 16. Mikä on alkuperäisen kolmion ala?

3.5. Keskijanalause

1. Kolmion keskijanojen leikkauspiste
jakaa keskijanat suhteessa 1 : 2. Sivun puoleinen osa on kolmasosa koko keskijanasta.
Leikkauspiste on myös kolmion keskipiste, painopiste.

3.5.1. Tasakylkisen kolmion kanta on 16 ja korkeus 18. Laske kyljelle piirretyn mediaanin pituus.
2. Tasakylkisen kolmion ABC kyljelle on piirretty keskijana BD ja kannalle keskijana CE, jotka leikkaavat pisteessä K. KD = 2 ja KE = 3. Laske kolmion ABC sivujen pituudet.
3. Kolmion sivut ovat 3, 5 ja 6. Laske suurimmalle sivulle piirretyn keskijanan pituus.

2. Kolmion kulmien puolittajien leikkauspiste
on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste ja siis yhtä kaukana kaikista sivuista.

3. Kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste
on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ja siis yhtä kaukana kolmion kärjistä.

4. Kolmion sisään tai ympäri piirretyn ympyrän säteen laskeminen
käytä taulukkokirjan kaavoja s.27. tai yhdenmuotoisia kolmioita tai Pythagoraan lausetta tai kulmanpuolittajalausetta tai tangenttikulman kylkiä koskevaa lausetta tai trigonometriaa käyttäen.

4. Tasakylkisen kolmion kanta ja kylki ovat 6 ja 5. Laske kolmion sisään piirretyn ympyrän säde.
5. Kolmion sivut ovat 5, 6 ja 7. Laske kolmion sisään piirretyn ympyrän säde.
6. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 6 ja 8. Laske ympäri piirretyn ympyrän säde.
7. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on 8. Mikä on ympäri piirretyn ympyrän säde?
8. Tasakylkisen kolmion kanta on 10 ja sen vastainen korkeus 12. Laske ympäri piirretyn ympyrän säde.
9. Kolmion sivut ovat 5, 6 ja 7. Laske kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde.
10. Tasakylkisen kolmion kanta on 6 ja kylki 4. Laske kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden säteiden suhde.

4. Avaruusgeometria

4.1. Avaruuskuvioiden piirtäminen, projektiot ja leikkaukset

1. Pisteen projektio suoralla
on pisteen kautta kulkevan suoran normaalin ja suoran leikkauspiste.

2. Viivan projektio suoralla
on jana, joka muodostuu viivan kaikkien pisteiden projektioista tällä suoralla.

3. Pisteen projektio tasolla
on pisteen kautta kulkevan tason normaalin ja tason leikkauspiste.

4. Janan projektio tasolla
on jana, joka muodostuu annetun janan kaikkien pisteiden projektioista tasolla.

4.1.1. Jana muodostaa suoran kanssa 37° kulman. Laske janan projektion pituus, kun janan pituus on 8 cm.
2. Janan pituus on 7 ja sen projektio suoralla 5. Mikä on janan ja suoran välinen kulma?
3. Miten pitkä on jana, jonka projektio suoralla on 23 sekä janan ja suoran välinen kulma on 28°?

5. Kahden pisteen välinen etäisyys
on pisteiden välisen janan pituus.

6. Pisteen etäisyys suorasta
on pisteen ja pisteen suoralla olevan projektion välisen janan pituus.

7. Pisteen etäisyys tasosta
on pisteen ja pisteen tasolla olevan projektiopisteen välisen janan pituus.

4.2. Suoran ja tason, kahden tason välinen kulma

1. Suoran ja tason välinen kulma
on suoran ja suoran tasolla olevan projektiosuoran välinen kulma.

4.2.1. Suorakulmaisen särmiön särmien pituudet ovat 3, 6 ja 8 (korkeus, leveys ja pituus). Mikä on pohjatason ja a) sivutason lävistäjän b) päätytason lävistäjän c) avaruuslävistäjän välinen kulma?

2. Kahden tason välinen kulma
Valitse tasojen leikkaussuoralta piste, yleensä jonkin janan keskipiste.
Piirrä kumpaankin tasoon tämän pisteen kautta kulkevat leikkaussuoran normaalit.
Tasojen välinen kulma on näiden normaalien välinen kulma.

2. Suorakulmaisen särmiön pohja on ABCD ja katto EFGH. AB = 5, AD = 4 ja AE = 3. Mikä on tasojen ABCD ja DAFG välinen kulma?
3. Mikä on kuution pohjatason sekä pohjatason lävistäjän ja ylätasolla olevan kärjen kautta kulkevan tason välinen kulma?

3. Tasot toistensa normaalitasoja
jos tasojen välinen kulma on 90°.

4.3. Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde

1. Tilavuuden mittaaminen käyttäen valittua tilavuusyksikköä
Selvitetään, lasketaan tai arvioidaan montako tällaista tilavuusyksikköä mahtuu kappaleeseen.

4.3.1. Suorakulmaisen särmiön särmät ovat 20, 30 ja 40. Tilavuuden mittana on tiili, jonka särmät ovat 1, 1 ja 2. Montako tällaista mittaa sisältyy särmiöön?

2. Metrijärjestelmän tilavuusyksiköt
1 mm^3, 1 cm^3 , …

3. Metrijärjestelmän tilavuusyksiköiden muuttaminen toiseksi
Yhteen yksikköön kuuluu kolme numeroa.
Kun yksikkö halutaan yhtä suuremmaksi yksiköksi, siirretään desimaalipilkkua 3 numeroa vasemmalle.
Kun yksikkö halutaan yhtä pienemmäksi yksiköksi, siirretään desimaalipilkkua 3 numeroa oikealle.

2. Muunna dm^3:ksi a) 2,4 m^3 b) 32,7 cm^3 c) 123 mm^3 d) 8,4 l e) 7,6 dl.

4. Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde
on mittakaava kolmanteen = k^3.

3. Kahden pallon säteiden suhde on 1:3. Mikä on pallojen tilavuuksien suhde?
4. Kahden kuution tilavuuksien suhde on 1:8. Mikä on niiden a) sivujen b) alojen suhde?
5. Suoran ympyräkartion muotoinen jäätelötötterö leikataan pohjan suuntaisella tasolla kahtia, niin että osat ovat yhtä korkeat. Montako prosenttia tilavuudesta jää kartiomaiseen osaan?
6. Suoran ympyräkartion muotoinen jäätelötötterö leikataan pohjan suuntaisella tasolla kahtia. Miten korkeita on osien oltava, jotta niillä olisi sama tilavuus, kun koko korkeus on 10 cm?
7. Maapallon halkaisija on 12500 km ja massa $6{,}0\cdot10^{24}$ kg. Mikä on umpinaisen karttapallon massa, jos sen halkaisija on 20 cm ja sillä on sama tiheys kuin maapallolla?

5. Erilaisia avaruuskappaleita

5.1. Särmiö, lieriö, pyramidi, kartio. Tilavuudet

1. Monitahokas
on kolmiulotteinen kappale, jota rajoittavat pinnat ovat tason osia.

2. Tahko, särmä, kärki, avaruuslävistäjä
Tahko on monitahokkaan yhtenä pintana oleva tason osa, joka on monikulmio.
Särmä on tahkona olevan monikulmion yksi sivu, kahden tahkon yhteinen leikkausjana.
Kärki on särmän päätepiste.
Avaruuslävistäjä on kahden ei-vierekkäisen kärjen välinen jana.

3. Kupera ja kovera monitahokas
Monitahokas on kupera, jos mitkä tahansa kaksi sen pistettä yhdistetään janalla, niin tämä jana on kokonaan monitahokkaan sisällä.
Muuten monitahokas on kovera. Tämä voidaan sanoa myös niin, että monikulmiosta on koverrettu pala pois

4. Särmiö
on monitahokas, jonka pohjat ovat yhdensuuntaisia, yhteneviä monikulmioita ja sivutahot ovat suunnikkaita.

5. Särmiön pohjat, sivutahot, vaippa, pinta
Pohjat ovat yhdensuuntaisia, yhteneviä monikulmioita. Sivutahot ovat suunnikkaita.
Vaippa(pinta) muodostuu sivutahoista. Koko pinta muodostuu vaipasta ja pohjista.

6. Pohjasärmä, sivusärmä ja korkeus
Pohjasärmä on pohjamonikulmion jokin särmä (= sivuna oleva jana)
Sivusärmä on sivutahon sellainen särmä, joka yhdistää pohjat.
Korkeus on pohjien välinen etäisyys.

7. n-sivuinen särmiö
Särmiö on n-sivuinen, jos siinä on n kappaletta sivutahoja (pohja on n-sivuinen monikulmio)

8. Suuntaissärmiö
Suuntaissärmiön pohjatkin ovat suunnikkaita.

9. Suora ja vino särmiö
Särmiö on suora, jos sivusärmät ovat kohtisuorassa pohjia vastaan. (sivutahot suorakulmioita)
Muussa tapauksessa särmiö on vino.

10. Säännöllinen särmiö
Särmiö on säännöllinen, jos pohja on säännöllinen monikulmio.

11. Suorakulmainen särmiö ja kuutio
Suorakulmaisen särmiön kaikki tahot ovat suorakulmioita. Se on kuusitahokas.
Kuutiossa kaikki tahot ovat neliöitä. Kuutiokin on kuusitahokas.

12. Suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjän pituus.
$l = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$, missä a, b ja h ovat pituus, leveys ja korkeus.

5.1.1. Suorakulmaisen särmiön särmät ovat 3, 4 ja 12. Laske avaruuslävistäjän pituus.
2. Suorakulmaisen särmiön pohjasärmät ovat 4 ja 6. Laske korkeussärmä, kun avaruuslävistäjä on 8.
3. Mikä on kuution avaruuslävistäjän pituus, jos kuution sivu on a?
4. Mikä on pallon sisään piirretyn kuution sivu, kun pallon säde on r?

13. Kuution avaruuslävistäjä
$l = s\sqrt{3}$, missä s = kuution sivun pituus

5. Kuution sivu on 3 cm. Kuinka pitkä on kuution avaruuslävistäjä?
6. Kuution avaruuslävistäjän pituus on 4 cm. Mikä on kuution särmä?

14. Pyramidi
on monitahokas, jonka pohja on monikulmio ja sivutahot kolmioita, joilla on yhteinen kärkipiste.

15. Pyramidin pohja, sivutaho, vaippa, ala
Pohjataho on n-sivuinen monikulmio, jos pyramidi on n-sivuinen pyramidi. Sivutahot ovat kolmioita.
Vaippa muodostuu sivutahoina olevista kolmiopinnoista. Ala on vaipan ja pohjan aloista.

16. Pyramidin kärki, pohjasärmä, sivusärmä
Pyramidin kärki on sivutahoina olevien kolmioiden yhteinen piste.
Pohjasärmä on pohjana olevan monikulmion jokin sivu.
Sivusärmä on sivutahona olevan kolmion jokin kärjestä lähtevä särmä.

17. Pyramidin korkeus ja akseli sekä suora ja vino pyramidi
Pyramidin korkeus on kärkipisteen etäisyys pohjalle.
Pyramidin akseli on kärjen ja pohjan keskipisteen kautta kulkeva suora.
Pyramidi on suora, jos akseli on kohtisuorassa pohjaa vastaan, muuten vino.

18. Katkaistu pyramidi
Kun pyramidi leikataan pohjan suuntaisella tasolla ja yläosaan muodostunut pienempi pyramidi poistetaan, jäljelle jäänyt kappale on katkaistu pyramidi.

19. Lieriön tilavuus
$V = Ah$, missä A on pohjan pinta-ala ja h on korkeus.

7. Säännöllisen kolmisivuisen särmiön pohjasärmä on 6 cm ja korkeus 8 cm. Laske tilavuus.
8. Säännöllisen kuusisivuisen särmiön pohjasärmä on 6 ja sivusärmä 8 muodostaen pohjan kanssa 60° kulman. Laske tilavuus.
9. Ojan poikkileikkaus on tasakylkinen puolisuunnikas, jonka kantasivut ovat 20 cm ja 80 cm sekä kyljet 0,5 m. Oja on 50 m pitkä. Paljonko ojaan mahtuu vettä?
10. Talon katon räystäs on 10 m pitkä ja katto kerää vettä 30 m^2 alueelta. Räystäällä on vesikouru, jonka poikkileikkaus on puoliympyrä. Kourun alastuloputki pystyy poistamaan vettä 100 litraa minuutissa ja vettä sataa pahimmillaan 1 cm kerros minuutissa ja tätä voi kestää 10 minuutin ajan. Kuinka suuri pitäisi puoliympyrän halkaisija olla, jottei vesi menisi kourun yli?

20. Ympyrälieriön tilavuus
$V = \pi r^2 h$, missä r on pohjaympyrän säde ja h on korkeus.

11. Suoran ympyrälieriön leveys ja korkeus on 10 cm. Mikä on lieriön tilavuus?
12. Ympyrälieriön pohjan säde on 5,0 cm ja sivujana 8,0 cm. Lieriön akseli muodostaa pohjan kanssa 65° kulman. Mikä on lieriön tilavuus?
13. Suoran ympyrälieriömäisen putken pituus on 20 cm, ulkoläpimitta on 6 cm ja sisäläpimitta 5 cm. Laske putken tilavuus. Putken pinta maalataan joka kohdasta 1 mm kerroksella. Paljonko maalia kuluu?
14. Kuution sisällä on suurin mahdollinen ympyrälieriö. Montako prosenttia on kuution tilavuus lieriön tilavuutta suurempi?

15. Kuution ympärillä on pienin mahdollinen ympyrälieriö. Montako prosenttia on lieriön tilavuus suurempi kuin kuution tilavuus?
16 Paperiarkin pituus ja leveys ovat a ja b. Siitä voi tehdä kahdenlaisia suoran ympyrälieriön vaippoja. Mikä on näiden lieriöiden tilavuuksien suhde?

21. Suorakulmaisen särmiön tilavuus
$V = p \cdot l \cdot h$, missä p on pituus, l on leveys ja h on korkeus.

17. Suorakulmaisen särmiön särmät ovat 4 cm, 5 cm ja 6 cm. Mikä on tilavuus ja pinta-ala?
18. Neliön sivu on a. Se taivutetaan suoran säännöllisen nelisivuisen särmiön vaipaksi. Laske tilavuus.
19. Suorakulmaisessa särmiössä on 10 l täytettä 10 cm korkeudelle, kun yksi taso on vaakasuorassa, 8 cm kun toinen ja 5 cm korkeudelle, kun kolmas taso on vaakasuorassa. Mikä on särmiön tilavuus?

22. Kartion tilavuus
$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h$, missä A on pohjan ala ja h on korkeus.

20. Pyramidin pohja on tasakylkinen suorakulmainen kolmio, jonka korkeusjanan kantapiste osuu suoran kulman kärkeen. Laske tilavuus, kun korkeusjana ja pohjakolmion hypotenuusa ovat pituudeltaan 1.
21. Kappaleen pohja on suorakulmio, jonka sivut ovat 2 ja 5. Pienemmät sivut ovat sivutahoina olevien kolmioiden kannat ja suuremmat puolisuunnikkaan kantana. Muut särmät ovat 3. Laske kappaleen tilavuus.

23. Suoran ympyräkartion tilavuus
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$, missä r on pohjaympyrän säde ja h on korkeus.

22. Suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat 3 ja 4 pyörähtää ensin lyhemmän ja sitten pitemmän kateetin ympäri. Mikä on syntyvien kartioiden tilavuuksien suhde?
23. Suoran ympyräkartion pohjaympyrän säde on 5 ja sivujana 13. Laske kartion tilavuus.
24. Puoliympyrä, säde = r, kierretään suoran ympyräkartion vaipaksi. Laske kartion tilavuus.

5.2. Suora ympyrälieriö ja suora ympyräkartio. Vaippojen alat

1. Lieriöpinta
Lieriöpinta syntyy, kun suora kulkee suuntansa säilyttäen pitkin itseään leikkaamatonta suljettua käyrää.

2. Lieriö
syntyy kun lieriöpinta leikataan kahdella yhdensuuntaisella tasolla

3. Lieriön vaippa, pohja, korkeus
Lieriön pohjat ovat lieriöpinnan yhdensuuntaisista tasoista erottamat osat.
Lieriön vaippa on pohjien väliin jäävä osa lieriöpinnasta.
Lieriön korkeus on pohjien välinen etäisyys.

4. Ympyrälieriön sivujana ja akseli
Ympyrälieriön akseli on pohjaympyröiden keskipisteiden kautta kulkeva suora.
Ympyrälieriön sivujana on pohjien välinen jana, joka on akselin suuntainen.

5. Suora ja vino ympyrälieriö
Ympyrälieriö on suora, jos akseli on kohtisuorassa pohjaa vastaan, muuten vino.

6. Suoran ympyrälieriön vaippa
on auki levitettynä suorakulmio, jonka kanta on pohjaympyrän piiri ja korkeus sivujana.

7. Suoran lieriön vaipan ala
$A = p \cdot h$, missä p on pohjan piiri ja h on korkeus.

5.2.1. Suoran lieriön pohja on tasasivuinen kolmio, jonka sivu on 8. Lieriön korkeus on 5. Laske vaipan ala.

8. Suoran ympyrälieriön vaipan ala
$A = 2\pi rh$, missä r on pohjaympyrän säde ja h on korkeus.

2. Suoran ympyrälieriön leveys ja korkeus ovat 20 cm. Mikä on vaipan ala?
3. Suoran ympyrälieriön vaipan ala on 100 cm^2 ja korkeus 10 cm. Mikä on pohjan halkaisija?

9. Lieriön kokonaispinta-ala
on vaipan ala + pohjien alat
$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$, missä r on pohjaympyrän säde ja h on korkeus, jos kyseessä suora ympyrälieriö.

4. Suoran ympyrälieriön pohjan halkaisija on 12 cm ja korkeus 15 cm. Laske lieriön kokonaispinta-ala.
5. Paperiarkki on 21x29 cm. Se taivutetaan 2 tavalla suoran ympyrälieriön vaipaksi. Laske kokonaisalat kummassakin tapauksessa.
6. Suoran ympyrälieriön kokonaisala on 10π cm^2 ja korkeus 4 cm. Mikä on pohjaympyrän säde?
7. Suoran ympyrälieriön tilavuus on 1 litra ja korkeus 10 cm. Mikä on kokonaispinta-ala?
8. Suoran ympyrälieriön pohjan halkaisija ja korkeus ovat yhtä suuret. Montako prosenttia on vaipan ala koko pinta-alasta?
9. Suorakulmaisen särmiön särmien suhde on 1:2:3. Laske kokonaispinta-ala, kun tilavuus on V.
10. Suorakulmaisen särmiön särmien suhde on 1:2:3. Laske tilavuus, kun kokonaispinta-ala on A.

10. Kartiopinta
Kartiopinta syntyy, kun suora kulkee pitkin itseään leikkaamatonta suljettua käyrää, niin että kaikki suorat kulkevat myös käyrän tason ulkopuolella olevan kiinteän pisteen kautta.

11. Kartio
syntyy kun kartiopinta leikataan tasolla, joka ei kulje kartiopinnan kiinteän pisteen kautta.

12. Kartion huippu, vaippa, pohja, korkeus
Kartion huippu on se kiinteä piste, jonka kautta kartiopinnan synnyttävä suora kulkee.
Kartion pohja on kartiopinnan leikkaavasta tasosta erottama osa.
Kartion vaippa on huipun ja pohjan välinen osa kartiopintaa.
Kartion korkeus on huipun etäisyys pohjasta.

13. Ympyräkartion sivujana ja akseli
Ympyräkartion sivujana on huipun ja pohjaympyrän kehän pisteen välinen jana.
Ympyräkartion akseli on huipun ja pohjaympyrän keskipisteen kautta kulkeva suora.

14. Suora ja vino ympyräkartio
Ympyräkartio on suora, jos akseli on kohtisuorassa pohjaa vastaan, muuten vino.

15. Suoran ympyräkartion vaippa
on auki levitettynä ympyrän sektori, jonka säteenä on sivujana ja kaarena pohjaympyrän kehä.

16. Suoran ympyräkartion vaipan ala
$A = \pi rs$, missä r on pohjaympyrän säde ja s on sivujana

11. Mikä on suoran ympyräkartion vaipan ala, kun pohjan säde on 3 ja korkeus 4?
12. Suora ympyräkartio, jonka pohjan säde on 4 cm ja sivujana 5 cm, leikataan auki pitkin sivujanaa ja levitetään tasoon. Mikä on syntyvän ympyrän sektorin keskuskulma?
13. Ympyrän sektori, jonka keskuskulma on 70° ja säde 10 cm, on taivutettu suoran ympyräkartion vaipaksi. Mikä on vaipan ala ja kartion korkeus?
14. Ympyränsektori, jonka keskuskulma on 120° taivutetaan suoran ympyräkartion vaipaksi. Mikä on pohjan alan ja vaipan alan suhde?
15. Ympyrän sektori, jonka säde on 5 cm ja keskuskulma 110° taivutetaan suoran ympyräkartion vaipaksi. Laske kartion tilavuus.
16. Litran vetoisen suoran ympyräkartion pohjaympyrän halkaisija on 10 cm. Laske vaipan ala.

17. Pyramidin vaipan ala
on vaippana olevien kolmioiden alojen summa.

17. Pyramidin pohjana on tasakylkinen kolmio, jonka kylki on 4 cm ja kanta 6 cm. Pohjakolmion huipusta lähtevä sivusärmä on kohtisuorassa pohjaa vastaan ja pituudeltaan 5 cm. Laske vaipan ala.

18. Kartion kokonaispinta-ala
on vaipan ala + pohjan ala

18. Suoran ympyräkartion pohjan halkaisija on 12 ja korkeus 8. Laske kartion kokonaispinta-ala.
19. Säännöllisen 6-sivuisen pyramidin pohjasärmä on 6 cm ja sivusärmä 5 cm. Laske kokonaisala.
20. Laske suoran ympyräkartion koko ala, kun korkeus on 5 cm ja pohjaympyrän kehä on 12 cm.

21. Tetraedrin yhdestä kärjestä lähtevät särmät ovat kohtisuorassa. Laske kokonaisala, kun eo. särmien pituudet ovat 3 cm, 4 cm ja 5 cm.

5.3. Säännöllinen pyramidi

1. Pyramidin säännöllisyys
Pyramidin pohja on säännöllinen monikulmio ja pyramidin akseli on myös korkeusjana.

5.3.1. Säännöllisen 4-sivuisen pyramidin pohjasärmä on 4 cm ja sivusärmä 5 cm. Laske tilavuus.
2. Säännöllisen 6-sivuisen pyramidin pohjasärmä on 6 ja sivusärmä 10. Laske tilavuus.
3. Kuution sisällä on pyramidi siten, että huippu on kuution yhden tahon keskipisteessä ja muut kärjen vastakkaisen tahkon särmien keskipisteessä. Mikä on pyramidin ja kuution tilavuuksien suhde?

2. Pyramidin vaippa
muodostuu yhtenevistä tasakylkisistä kolmioista, joiden kanta on pohjasivu.
Sivukolmion korkeusjanaa nimitetään apoteemaksi.

4. Säännöllisen 4-sivuisen pyramidin pohjasärmä on 4 cm ja sivusärmä 5 cm. Laske vaipan ala.
5. Säännöllisen 4-sivuisen pyramidin pohjasärmä on 4 cm ja korkeus 5 cm. Laske vaipan ala.

5.4. Säännöllisiä monitahokkaita

1. Säännölliset monitahokkaat tetraedri, heksaedri, oktaedri, dodekaedri ja ikosaedri
Monitahokas on säännöllinen, jos sen kaikki tahot ovat yhteneviä, säännöllisiä monikulmioita.
Tetraedrissa on neljä tasasivuista kolmiota tahoina.
Heksaedrissä on kuusi neliötä tahoina. Heksaedri on kuutio.
Oktaedrissä on 8 tasasivuista kolmiota sivutahoina. Oktaedri on kuin kaksi vastakkain olevaa pyramidia.
Dodekaedrissä on 12 säännöllistä viisikulmiota tahoina.
Ikosaedrissä on 20 tasasivuista kolmiota sivutahoina.

2. Kaavat
Tetraedrin, heksaedrin, oktaedrin, dodekaedrin ja ikosaedrin
pinta-ala, tilavuus, sisään ja ympäri piirretyn pallon säde löytyy taulukkokirjasta

5.4.1. Säännöllisen tetraedrin särmä on 6 cm. Mikä on sen tilavuus.
2. Mehulle halutaan tehdä tetra, johon mahtuu 2 dl. Mikä on oltava särmän pituus?
3. Tetraedrin särmä on a. Mikä on a) tilavuus b) pohjan pinta-ala c) korkeus?
4. Montako prosenttia on säännöllisen dodekaedrin tilavuus sen ympäri piirretyn pallon tilavuudesta?

5.5. Pallo. Tilavuus ja ala.

1. Pallopinnan pisteiden ominaisuus
Pallopinnan muodostavat kaikki ne pisteet, jotka ovat keskipisteestä säteen etäisyydellä

2. Keskipiste, säde, halkaisija
Säde on pallopinnan pisteen ja keskipisteen välinen jana.
Halkaisija on pallon pinnan kahden pisteen välinen jana, jos keskipiste on tällä janalla.

3. Isoympyrä, pikkuympyrä, kalotti, tangenttitaso
Kun pallopinta leikataan keskipisteen kautta kulkevalla tasolla, muodostavat yhteiset pisteet isoympyrän.
Pikkuympyrä on jonkin muun kuin keskipisteen kautta kulkevan tason ja pallopinnan leikkausympyrä.
Kun pallopinta leikataan tasolla, muodostuu pallon osista kaksi kalottipintaa.
Tangenttitasolla ja ympyrällä on vain yksi yhteinen piste.

4. Pallon pinta-ala
$A = 4\pi r^2$, missä r on pallon säde.

5.5.1. Mikä on pallon pinta-ala, kun pallon säde on 10 cm?
2. Miten suuri säde on pallolla, jonka pinta-ala on 1 m^2?
3. Ilmapallon säde kasvaa 25%. Montako prosenttia kasvaa pallon pinta-ala?

5. Pallon tilavuus
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$, missä r on pallon säde.

4. Laske pallon tilavuus, kun pallon säde on 10 cm.
5. Ilmapallon halkaisija on 20 cm. Paljonko tilavuus kasvaa, jos halkaisijaksi tulisi 30 cm?
6. Mikä on pallon a) säde b) pinta-ala, kun sen tilavuus on 1 litra?
7. Mikä on pallon tilavuus, kun pallon pinta-ala on π?
8. Pallo on suoran ympyrälieriön sisällä niin, että pallopinta sivuaa lieriön vaippaa ja pohjia. Mikä on pallon ja lieriön tilavuuksien suhde?
9. Pallon säde kasvaa 25%. Paljonko kasvaa pallon tilavuus?

6. Pallosegmentin (kalotin tai vyöhykkeen) ala
$A = 2\pi rh$, missä h on kalotin tai vyöhykkeen korkeus.

10. Maapallon säde on n. 6360 km. Kuinka suuri on napapiirin (66,6°N) pohjoispuolella oleva ala?
11. Kuinka monta prosenttia maapallon pinta-alasta on 45° leveyspiirien välisellä alueella?
12. Taso leikkaa pallon halkaisijan suhteessa 2:3. Missä suhteessa taso jakaa pallon pinta-alan?

7. Pallosegmentin tilavuus.
$V = \pi h^2(r - h/3)$, missä h on kalotin korkeus

13. Pallojuuston halkaisija on 18 cm. Siitä leikataan 5 cm korkea pallosegmentti. Mikä on sen tilavuus?
14. Pallo leikataan tasolla niin, että leikkausympyrän halkaisija on yhtä suuri kuin pallon säde. Kuinka monta % segmentin tilavuus on koko pallon tilavuudesta?
15. Palloon, jonka säde on 10 cm, porataan lieriön muotoinen reikä, jonka halkaisija on 6 cm. Laske jäljelle jääneen kappaleen tilavuus.

8. Pallosektorin tilavuus
$V = 2/3 \cdot \pi r^2 h$, missä h on sektorin kalottiosan korkeus
Pallosektori voidaan ajatella syntyneen pallokalotista ja suorasta ympyräpohjaisesta keskuskartiosta

16. Hyrrä on pallosektorin muotoinen. Säde on 10 cm ja halkileikkauksen keskuskulma on 30°. Laske sektorin tilavuus.
17. Pallosektorin tilavuus on 25% pallon tilavuudesta. Montako % pallosektorin ala on pallon alasta?

Vastaukset harjoitustehtäviin.

1.1.1. $|AB| < |AC|$
2. a) $\angle AKC > \angle AKB$
b) $\angle AKC < \angle AKB$
3. a) 30° b) 1° c) 120° d) 55°
4. 120°
5. 155°
6. 113°, 67° ja 113°
7. 61° ja 72°
8. on
9. 33,6°

1.2.1. 70°
2. 101°, 17°
3. 35°, 80°, 65°
4. 68°, 68°, 44°
5. 65°
6. 63°
7. 60°, 75°, 150°, 75°
8. 15°
9. a) 150° b) 210° c) ei mahdollista
10. a) 540° b) 720°
11. 144°

1.3.1. 36
2. 400
3. a) $2560 m^2$ b) $34500 m^2$
c) $8400000 m^2$ d) $0{,}089 m^2$
e) $0{,}00247 m^2$ f) $0{,}0000098 m^2$
4. a) $250\ cm^2$ b) $680\ cm^2$
c) $0{,}0035 cm^2$
5. $1{,}2\ dm^2$
6. 4,6 cm
7. $21\ cm^2$
8. 1,4 m
9. 2,1 dm, 1,7 dm, $5{,}9\ dm^2$
10. 13,4 m
11. $16\ dm^2$
12. 30 cm
13. $1{,}7\ dm^2$
14. 30 cm
15. 10½
16. a) 6 b) 12 c) $4\sqrt{5}$
17. 23½

1.4.1. 10
2. 5
3. 5,4 cm
4. a) $2\sqrt{5}$ b) 63,4° ja 116,6° c) 16
5. $(\sqrt{2} - 1)a$
6. 6 ja 15
8. a) $3\sqrt{2}$ b) $a\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{2}$
d) $r\sqrt{2}$
9. 5,7 cm
10. a) $10\sqrt{3}$, 20 b) $5\sqrt{3}$, 10
c) $a\sqrt{3}$, 2a
11. a) $4\sqrt{3}$, $8\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ c)
$\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{2a}{\sqrt{3}}$
12. a) 7, $7\sqrt{3}$ b) 2½, $2½\sqrt{3}$
c) ½a, $½a\sqrt{3}$
13. $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$, 6
14. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$
15. $\sqrt{3}$

1.5.1. a) 3/5 b) 4/5 c) ¾ d) 4/5
e) 3/5 f) 4/3
2. a) 0,616 b) 0,105 c) 0,933
d) 0,250 e) 12,8
3. a) 55,4° b) 72,7° c) 70,1°
4. 7,2 ja 4,5
5. a) 8,9 ja 10,7 b) 4,0 ja 7,2 c) 5,0 ja 3,4
6. 32,7° ja 57,3°
7. 35°
8. 30
9. 71,7°
10. 77,4°
11. 34,8°
12. 126 m

1.6.1. $8/\sqrt{3}$
3. 12,7 cm, 16,0 cm, 18,3 cm
4. 71,6°, 8,8 cm, 9,5 cm
5. a) ei mahd. b) 54,3° ja 95,7° tai 125,7° ja 24,3°
6. 58,9°, 31,4 cm, 25,1 cm
7. 8,8 cm

8. 10,3 cm
9. 2150 m
10. 14,6 km
11. 190 m
12. 412 cm^2
13. 30° tai 150°
14. 18,4
15. 3,14157, $\pi \approx$ 3,14159
16. 6,5, 16,5° ja 96,3°
17. 29,9°
18. 1,39
19. 4,2
20. $\sqrt{46}$
21. 66,20 m
22. $\frac{1}{2}\sqrt{28}$
23. $\frac{3}{4}\sqrt{15}$
24. 24
25. $\frac{3}{4}\sqrt{15}$

1.7.1. ½a
2. $r\sqrt{2}$
3. $r\sqrt{3}$
4. 13 cm
5. 15,9 cm
6. 15,9 cm
7. 16 dm^2
8. 11 cm
9. 88,6%
10. 127,3%
11. 1 ha
12. 15,7 cm
13. 86°
14. 8,7 cm
15. 11 cm^2
16. 229°
17. 30 cm^2
18. 3
19. a) 2,5 cm^2 b) 42,2 cm^2
20. 2,9%
21. $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r^2$

2.3.1. ei välttämättä
2. ei välttämättä
3. 70°, 110°, 110°
4. ei välttämättä
5. ei välttämättä
7. 2½
8. 24

2.6.1. 54°
2. a) 43° b) 137°
3. a) 156° b) ei mahdollista
4. 82°, 41°
5. 112°, 124°, 124°
6. 45°, 60°, 75°
7. 60°, 120°
8. 43°
9. 21°
10. a) 56° b) 124°
11. 23°
12. 24
13. 24
14. 5
16. 54°
17. 77°
18. 22° tai 67°
19. 20°, 54°, 108°
20. 84°, 120°, 156°

2.7.1. 112°
2. 70°
3. 152°
4. 0,45°, 50 km
5. 31 m
6. 1

3.1.1. 1:40
2. 1260 m
3. 40 cm
4. 12 m
5. 3 ¾ , 6 2/3 ja 10 2/3
6. a) $\sqrt{2}$: 1
b) 21,0 cm x 29,7 cm
7. 3 dm^2
7. 12
9. 35°, 70°, 75°
10. 1:2
11. 2:1
12. a) (8,14), (12,4), (16,12) b) (-2,-3½), (-3,-1), (-4,-3)

3.2.1. a) 3 cm b) 4 cm^2
2. 7 ja 9 1/3
3. 1:4
4. 7½
5. 2,4
6. 2,4 cm
7. 1:2
8. 2,4
9. 2 2/11
10. 2,88 , 288/121
11 $2x - \frac{1}{2}x^2$
12. 12
13. $\sqrt{10}$
14. 9
15. 25
16. 6 ja $3\sqrt{5}$
17. 2:3
18. $\sqrt{13}$, $1\frac{1}{2}\sqrt{13}$, 6½
19. 96
20. 4,8
21. 2
22. 3 ja 8
23. 15
24. 5
25. 6
26. 14,5
27. 2,3
28. DE = 3, FG = 1½
29. 4 ja 20
30. 4, 8 ja 12
33. 24
34. 12

3.3.1. 2,8 ja 4,2
2. 9 ja 15
3. 23,2° ja 66,8°
4. 16:9
5. 5/21
6. $\frac{14\sqrt{6}}{5}$
7. a) $2 - \sqrt{3}$ b) $\sqrt{2} - 1$

3.4.1. 1:200
2. 2 km^2
3. 9:40 tai 16:33
4. 2, 3 ja 4
5. 1:3:5
6. 81

3.5.1. 15
2. $2\sqrt{7}$, $2\sqrt{22}$
3. $2\sqrt{2}$
4. 1½
5. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
6. 5
7. 4
8. 169/24
9. $\frac{35}{4\sqrt{6}}$
10. 3:8

4.1.1. 6,4 cm
2. 44,4°
3. 26

4.2.1.a) 20,6° b) 26,6° c) 16,7°
2. 31°
3. 54,7°

4.3.1. 12 000
2. a) 2400 dm^3 b) 0,0327 dm^3 c) 0,000123 dm^3 d) 8,4 dm^3 e) 0,76 dm^3
3. 1:27
4. a) 1:2 b) 1:4
5. 12,5%
6. 7,9 cm ja 2,1 cm
7. 25 kg

5.1.1. 13
2. $2\sqrt{3}$
3. $a\sqrt{3}$
4. $\frac{2r}{\sqrt{3}}$
5. 5,2 cm
6. 2,3 cm
7. 125 cm^2
8. 648
9. 10 m^3
10. 71 cm
11. 7,9 dl
12. 170 cm^3 , 36 cm^3
13. 690 cm^3
14. 27%

15. 57%
16. a : b
17. V = 120 cm^3 , A = 148 cm^2
18. a^3 / 16
19. 50 l
20. 1/12
21. $\frac{13\sqrt{7}}{3}$
22. 4 : 3
23. 100π
24. $\frac{\pi r^3\sqrt{3}}{24}$

5.2.1. 120
2. 12,6 dm^2
3. 3,2 cm
4. 7,9 dm^2
5. 6,8 dm^2 , 7,4 dm^2
6. 1 cm
7. 5,5 dm^2
8. 66,7%

9. $\frac{11}{3}\cdot\sqrt[3]{6V^2}$
10. $\frac{3}{11}\cdot\sqrt{\frac{A}{22}}$
11. 15π
12. 288°
13. 61 cm^2 , 9,8 cm
14. 1 : 3
15. 12 cm^3
16. 600 cm^2
17. 37 cm^2
18. 96π
19. 166 cm^2
20. 44 cm^2
21. 37,3 cm^2

5.3.1. 22 cm^3
2. 144$\sqrt{3}$
3. 1 : 6
4. 36,7 cm^2
5. 43,1 cm^2

5.4.1. 25 cm^3
2. 12 cm
3. a) $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ b) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$
4. 66%

5.5.1. 12,6 dm^2
2. 28 cm
3. 56%
4. 4,2 l
5. 10 l
6. a) 6,2 cm b) 4,8 cm^2
7. π / 6
8. 2 : 3
9. 95%
10. 21 milj. km^2
11. 71%
12. 2:3
13. 0,58 dm^3
14. 1,3%
15. 3,6 dm^3
16. 71 cm^3
17. 47%

Koetehtäviä aiemmilta vuosilta

90.1.6. Ympyrässä, jonka säde on 10, on segmentti, jonka korkeus on 2. Mikä on segmentin kaaren asteluku ja segmenttiä rajoittavan jänteen pituus? [73,7° , 12]

90.2.3. Jos kuution särmä olisi ollut 1 cm pitempi, olisi kuution tilavuus 217 cm^3 suurempi. Mikä on kuution sivu? [8 cm]

90.2.4. Suorakulmaisen kolmion ABC hypotenuusalle piirretty korkeusjana CD = 2. Kateetin CB projektio hypotenuusalla on BD = 1. Laske kolmion sivut. [$\sqrt{5}$, 2 $\sqrt{5}$, 5]

90.2.5. Tasakylkisen kolmion kanta on 10 ja kylki 13. Laske kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde. [7 $\frac{1}{24}$]

90.2.6. Tilan pinta-ala on 2 ha ja eräällä kartalla on sama ala 8 cm^2. Miten pitkä on se tie, jonka pituus kartalla on 15 cm? [750 m]

90.2.7. Suorakulmion lävistäjä on 6. Kärjistä lävistäjälle piirretyt korkeusjanat jakavat lävistäjän kolmeen yhtä suureen osaan. Laske suorakulmion ala. [12 $\sqrt{2}$]

90.3.5. Tasakylkisen kolmion kanta on 5,4 cm ja kylkeä vastaan piirretty korkeusjana 4,3 cm. Laske kyljen pituus. [4,5 cm]

90.4.2. Jos kuution toinen pohjasärmä olisi tehty 1 cm ja toinen 2 cm suuremmaksi, olisi kokonaispinta-alaksi tullut 52 cm^2. Mikä on kuution sivu? [2 cm]

90.4.3. Kolmioon ABC on piirretty jana CD siten, että AD = 9, BD = 7 ja $\angle$CDA = $\angle$ACB. Laske AC ja CB:CD. [12 , 4:3]

90.4.4. Tasakylkisen kolmion kanta on 30 ja kylki 39. Laske kolmion sisään piirretyn ympyrän säde. [10]

90.4.5. Lastenpuvun, jonka koko on 120, kangas maksaa 25 mk. Miten paljon maksaa samanmuotoisen, mutta kokoa a) 100 b) 150 olevan puvun kangas? [a) 17,35 mk b) 39,05 mk]

90.4.7. Suorakulmion ABCD sivu AB = 5 ja BC = 3. Piste P on lävistäjällä AC siten, että se on yhtä kaukana sivusta BC ja kärjestä D. Laske tämä etäisyys. [2 $\frac{7}{9}$]

90.5.6. Ympyrässä, jonka säde on 10, on segmentti, jonka korkeus on 2. Mikä on segmentin kaaren asteluku ja segmenttiä rajoittavan jänteen pituus? [73,7° , 12]

90.6.1. Kolmion kaksi kulmaa ovat 55° ja 43° sekä edellisen vastaisen sivun pituus 6,3 cm. Laske muut sivut. [5,2 cm ja 7,6 cm]

90.6.2. Vartija havaitsee tykkiveneen etelässä ja saa etäisyydeksi mittauslaitteellaan 15,6 km. 5 min kuluttua on veneen suunta 12° eteläsuunnasta länteen ja etäisyys 12,8 km. Mikä on veneen vauhti? [13,6 m/s]

90.7.2. Laske kolmion ABC pienin kulma B, kun A(2,3) , B(5,1) ja C(4,5). [42,3°]

90.7.5. Tasakylkisen kolmion kanta on 5,4 cm ja kylkeä vastaan piirretty korkeusjana 4,3 cm. Laske kyljen pituus. [4,5 cm]

90.8.1. Kolmion kahden sivun pituudet ovat 5 ja 7 sekä edellisen vastainen kulma 40°. Laske kolmion kulmat. [64° ja 76° tai 116° ja 24°]

90.8.6. Tutka ilmoittaa lentokoneen olevan suoraan etelässä 2400 m päässä tutkasta ja sen korkeuskulma on 23,5°. Toinen lentokone on suunnassa 35° etelästä länteen etäisyydellä 3000 m ja korkeuskulmassa 18,6°. Osoita, että koneet ovat yhtä korkealla. Mikä on niiden välinen etäisyys? [1630 m]

90.9.6. Tasangolla olevien pisteiden A ja B välinen etäisyys on 500 m ja pisteiden B ja C välinen etäisyys 800 m. Jana AC näkyy pisteestä B 120° kulmassa. Kuinka korkealle B:n yläpuolelle täytyy nousta, jotta AC näkyisi suorassa kulmassa? [447 m]

91.2.1. Suoran ympyräkartion pohjan säde on 3 cm ja korkeus 4 cm. Kuinka suuri on kartion tilavuus ja kokonaispinta-ala? [75 cm^2]

91.2.4. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat AB = 60 ja AC = 80. Hypotenuusan pisteen P kautta piirretään kateettien suuntaiset suorat, jotka leikkaavat kateetin AB pisteessä Q ja kateetin AC pisteessä R. Laske suorakulmion ARPQ pinta-ala, kun AQ:AR = 1:2. [1152]

91.2.5. Neliöllä ja ympyrällä on sama pinta-ala. Laske niiden piirien suhde. [2 : $\sqrt{\pi}$]

91.2.6. Tasakylkisessä puolisuunnikkaassa ovat kyljet pituudeltaan 13 ja kantasivut ovat 15 ja 25. Kuvio täydennetään kylkiä jatkamalla tasakylkiseksi kolmioksi. Laske tämän kolmion ala. [375]

91.3.2. Kolmion kärjet ovat A(-2,-3), B(-5,8) ja C(5,6). Määritä kulman B asteluku 0,1° tarkkuudella. [63,4°]

91.3.5. Pohjoiseen viettävän rinteen kaltevuuskulma vaakatasoon nähden on 28°. Kun aurinko paistaa etelästä, on 12 m korkean puun varjon pituus rinnettä pitkin mitattuna 16 m. Kuinka suuren kulman auringon säteet muodostavat vaakatason kanssa? [54,1°]

91.4.2. Suunnikkaan sivujen pituudet ovat 4 ja 7 sekä toinen lävistäjä 5. Määritä suunnikkaan a) kulmat 0,1° tarkkuudella b) toisen lävistäjän pituus. [a) 44,4° ja 135,6° b) 10,2]

91.4.3. Kolmion kaksi sivua ovat 4 ja 5 sekä jälkimmäisen vastainen kulma 50°. Laske kolmion suurin kulma. [92,2°]

91.4.7. Vene kulkee tasaisella vauhdilla eräästä salmesta suuntaan, joka on 8° länsisuunnasta lounaaseen. Salmi on eräästä majakasta 1200 m päässä majakasta kaakkoon. Majakka on 6 min myöhemmin suunnassa 10° pohjoisesta luoteeseen. Veneen nopeusmittari näyttää 9,2 solmua. Kuinka monen prosentin virhe on nopeusmittarissa, kun 1 solmu on 1852 m tunnissa? [147% liikaa]

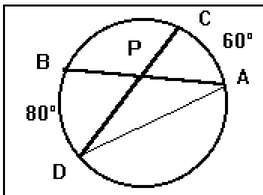
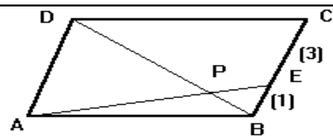
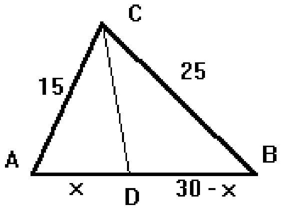
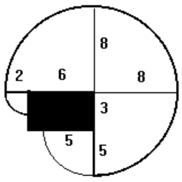
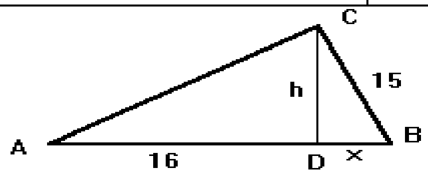
93.2.2. Ympyrässä on kaksi jännettä AB ja CD, jotka leikkaavat pisteessä P. Kaarien AC ja BD asteluvut ovat 60° ja 80°. Laske jänteiden välisen kulman suuruus.

93.2.3. Suunnikkaan ABCD sivulla BC oleva piste E jakaa sivun suhteessa 1 : 3. Missä suhteessa jana AE jakaa lävistäjän BD?

93.2.4. Kolmion sivujen pituudet ovat 15, 25 ja 30. Kuinka suuriin osiin suurimman kulman puolittaja jakaa leikkaamansa sivun? Laske kolmion sisään piirretyn ympyrän säde.

93.2.5. Niityllä on lato, jonka pohjan mitat ovat 6 m x 3 m. Ladon nurkkaan on kiinnitetty 8 m pitkä köysi, jonka toisessa päässä on pässi. Miten suurelta alalta pässi voi syödä ruohoa?

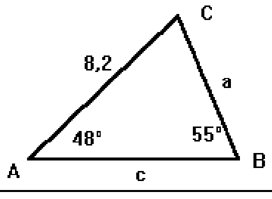
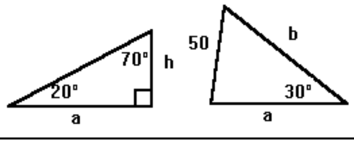
93.2.6. Suorakulmaisen kolmion ABC hypotenuusaa vastaan on piirretty korkeusjana CD. Kateetti BC = 15 ja jana AD = 16. Laske hypotenuusan pituus ja korkeus CD.

	2. Kaari AC = 60° $\Rightarrow$ keskuskulma = 60° $\Rightarrow$ $\angle D = 30°$ Kaari BD = 80° $\Rightarrow$ keskuskulma = 80° $\Rightarrow$ $\angle A = 40°$ $\angle APD = 180° - 30° - 40° = 110°$ Suorien (janojen) välinen kulma on terävä , siis $\angle APC = 180° - 110° =$ **70°**
	3. Δ ADP $\sim$ Δ EBP (kk) AD = BC AD:n suhdeluku on (4) BP:PD = BE:DA = 1:4
	4. $\frac{x}{30 - x} = \frac{15}{25}$; 25x = 450 - 15x ; 40x = 450 ; x = **11,25** DB = 30 - 11,25 = **18,75** $p = ½(15 + 25 + 30) = 35$; $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{35x20x10x5} = 50\sqrt{14}$ $r = \frac{A}{p} = \frac{50\sqrt{14}}{35} = \frac{\mathbf{10\sqrt{14}}}{\mathbf{7}} =$ **5,35**
	5. Alue koostuu 3 neljännesympyrästä, joiden säde on 8, yhdestä neljännesympyrästä, jonka säde on 2 ja yhdestä neljännesympyrästä, jonka säde on 5. $A = ¼\pi(8^2 + 8^2 + 8^2 + 2^2 + 5^2) = ¼\pi221 =$ **174 (m^2)**
	6. Kolmio ABC $\sim$ kolmio CBD ; $\frac{x}{15} = \frac{15}{16 + x}$; $x^2 + 16x - 225 = 0$ x = 9 (tai x = - 25) ; AB = 16 + 9 = **25**. Kolmio ADC ~ kolmio CDB ; $\frac{h}{9} = \frac{16}{h}$; $h^2 = 144$; **h = 12** .

93.3.1. Vaeltaja näki linkkitornin suoraan pohjoisessa ja käveltyään 400 m itään, oli torni 10° pohjoissuunnasta länteen. Miten kaukana torni oli ensimmäisellä hetkellä?

93.4.1. Kolmion kaksi kulmaa ovat 48° ja 55° sekä jälkimmäisen vastaisen sivun pituus on 8,2. Laske muiden sivujen ja kulmien arvot.

93.4.7. Kun auringon korkeuskulma on 20°, osuu erään puun latvan varjo erääseen pihalla olevaan kiveen. Kaksi tuntia myöhemmin (kun maa on kääntynyt 30°) osuu latvan varjo toiseen kiveen, joka on edellisestä 50 m päässä. Kuinka korkea on kyseinen puu?

	1. $\gamma = 180° - 48° - 55° =$ **77°** $\frac{a}{8,2} = \frac{\sin 48°}{\sin 55°}$; $a = \frac{\sin 48°}{\sin 55°} 8,2 =$ **7,4** $\frac{c}{8,2} = \frac{\sin 77°}{\sin 55°}$; $c = \frac{\sin 77°}{\sin 55°} 8,2 =$ **9,8** .
	7. $\frac{a}{h} = \tan 70°$; $a = h \cdot \tan 70°$; $b = h \cdot \tan 80°$; $a^2 + b^2 - 2ab\cos 30° = 50^2$ $h^2\tan^2 70° + h^2\tan^2 80° - 2h \tan 70° h \tan 80° \cos 30° = 2500$ $12{,}72h^2 = 2500$; $h^2 = 196{,}5$; **h = 14 (m)**

94.1.6. Laske lentokoneen lentokorkeus, kun se havaitaan paikasta A suoraan idässä 45° korkeuskulmassa ja paikasta B mitataan samalla hetkellä korkeuskulmaksi 25°. Havaintopaikka B on 3 km havaintopaikasta A länteen sen kanssa samalla tasangolla.

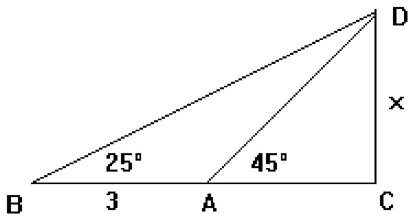
6. $\frac{x}{AC} = \tan 45° = 1 \Rightarrow AC = x$

Kolmiosta BCD saadaan trigonometrialla $\frac{x}{x+3} = \tan 25° \quad \| \cdot (x+3)$

$x = x \cdot \tan 25° + 3 \cdot \tan 25°$; $x - x \cdot \tan 25° = 3 \cdot \tan 25°$

$x(1 - \tan 25°) = 3 \cdot \tan 25°$; $0{,}5337x = 1{,}3989$; $x = 2{,}62$

V : korkeus on 2,6 km



94.2.1. Puolisuunnikkaan toinen kantasivu on 12 cm ja korkeus 5 cm. Miten pitkä on toinen kantasivu, kun puolisuunnikkaan pinta-ala on 40 cm^2 ?

94.2.3. Suoran ympyrälieriön muotoisen astian pohjan halkaisija on 20 cm ja korkeus 30 cm. Lieriötä täytetään eräällä nesteellä puolipallon muotoisella boolikauhalla, jonka halkaisija on 10 cm. Montako kauhallista tarvitaan?

94.2.5. Suomen lipun viralliset mittasuhteet ovat seuraavat: Lipun pituus on 18, leveys 11 ja ristin sakaroiden leveys 3 pituusyksikköä. Kuinka monta prosenttia lipun pinta-alasta on sinistä?

94.2.6. Kannan suuntaiset suorat jakavat tasakylkisen kolmion kyljen kolmeen yhtä suureen osaan. Keskimmäisenä olevan puolisuunnikkaan pinta-ala on 36 cm^2. Laske alkuperäisen kolmion pinta-ala.

94.2.7. Kaksi ympyrää, joiden säteet ovat 2 cm ja 6 cm, sivuavat toisiaan ulkopuolisesti. Ympyröille piirretään yhteinen tangentti, joka ei ole ympyröiden sivuamispisteessä, sekä keskipisteiden kautta kulkeva suora. Laske yhteisestä tangentista ympyröiden sivuamispisteiden väliin jäävän janan pituus.

1. $\frac{a+b}{2} \cdot h = A$; $\frac{12+x}{2} \cdot 5 = 40$; $(12+x) \cdot 5 = 80$; $12 + x = 16$; $x = 4$ V: **4 cm**

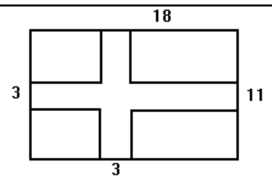
3. $V_L = A \cdot h = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 10^2 \cdot 30 = 9425$; $V_K = ½ \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = 262$

$V_L : V_K = 9425 : 262 = 36$ Vastaus: **36 kauhallista**

5. $A_{SIN} = 3 \cdot 18 + 3 \cdot 11 - 3 \cdot 3 = 78$ (vähennetään keskusneliön ala, joka on tullut lasketuksi kahteen kertaan)

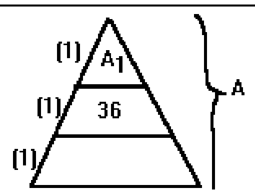
$A_{KOKO} = 11 \cdot 18 = 198$

$A_{SIN} : A_{KOKO} = 78 : 198 = 0{,}394 =$ **39,4%**



6. $\frac{A_1}{A_1 + 36} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$; $\frac{A_1}{A_1+36} = \frac{1}{4}$; $4A_1 = A_1 + 36$; $3A_1 = 36$; $A_1 = 12$

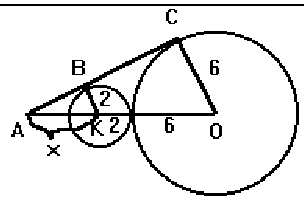
$\frac{A}{A_1} = \left(\frac{3}{1}\right)^2$; $A = 9 \cdot A_1 = 9 \cdot 12 =$ **108 cm^2**



7. Δ AKB ~ Δ AOC ; $\frac{x}{x+8} = \frac{2}{6}$; $6x = 2x + 16$; $4x = 16$; $x = 4$

$AB = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; $AC = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

$BC = AC - AB = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \mathbf{4\sqrt{3}}$

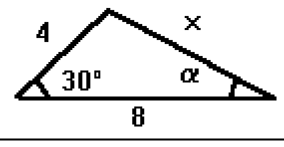


94.3.2. Kolmion kaksi sivua ovat pituudeltaan 4 ja 8 sekä niiden välinen kulma 30°. Laske kolmion kolmas sivu ja pienin kulma.

94.3.4. 1200 m pitkä suora metsäautotie on teräväkulmaisen kolmion muotoisen korjuukypsän metsäpalstan sivu. Kahtena muuna sivuna ovat suorat purot, jotka alittaessaan tien muodostavat sen kanssa 36° ja 62° kulmat. Paikallinen puutavarayhtiö Lahosaha Oy tarjoaa puustosta palstan omistajalle Kustaa Kuuselle 24 000 mk hehtaarilta. Mikä on tarjouksen arvo?

2. $x^2 = 16 + 64 - 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \cos 30°$; $x^2 = 24{,}6$; $\mathbf{x = 4{,}96}$

$\frac{\sin\alpha}{\sin 30°} = \frac{4}{4{,}96}$; $\sin\alpha = \frac{4}{4{,}96} \cdot \sin 30°$; $\sin\alpha = 0{,}403$; $\boldsymbol{\alpha = 24°}$

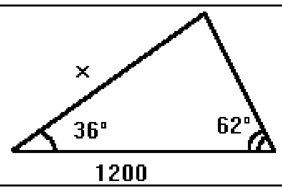


4. Kolmas kulma = 180° - (36° + 62°) = 82°

$\frac{x}{1200} = \frac{\sin 62°}{\sin 82°}$; $x = \frac{\sin 62°}{\sin 82°} \cdot 1200 = 1070$

$A = ½·1200·1070·\sin 36° = 377000\ m^2 = 37{,}7$ ha

Arvo = 37,7·24 000 mk = **900 000 mk**



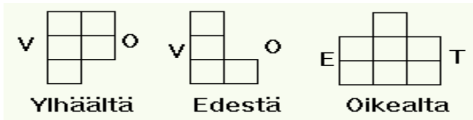
95.1.1. Piirrä paperille jana AB, piste C, suora l ja piste D. Peilaa jana AB ensin pisteen C suhteen ja saatu kuva suoran l suhteen sekä venytä näin saatu viimeinen kuva lopuksi piste D keskuksena suhteessa -½.

95.1.2. Suoran ympyräkartion pohjan säde on 4 ja korkeus 3. Laske tilavuus ja vaipan ala.

95.1.3. Suoran ympyräkartion tilavuus on 30 cm^3 ja korkeus 10 cm. Laske pohjan halkaisija.

95.1.9. Suoran ympyräkartion pohjan piiri on 50 m ja huippu näkyy 30° kulmassa 40 m päässä pohjaympyrän kehältä pohjan tasalta katsottuna. Laske kartion tilavuus.

95.1.4. Rakennuksen silhuetti on kuvattu tasossa eri suunnista. V = vasen, O = oikea, E = etuseinä , T = takaseinä. Piirrä kolmiulotteinen kuvio rakennuksesta etuoikealta katsottuna.



95.1.5. Kuinka kaukaa pitää katsoa suoran ympyrälieriön muotoista vesitornia, jos halutaan nähdä vähintään kolmasosa sen vaipasta? Pohjan halkaisija on 10 m ja korkeutta ei tarvitse huomioida.

95.1.6. Kolmion korkeusjana puolittaa huippukulman. Osoita, että kolmio on tasakylkinen.

95.1.7. Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä sivuaa sivua AB pisteessä D, sivua BC pisteessä E ja sivua AC pisteessä F. Kulma FDE on 49°. Laske kulman C suuruus.

95.1.8. Suorakulmaisessa kolmiossa ABC ovat kateetit BC = 8 ja AC = 6. Hypotenuusan keskipisteeseen D piirretty normaali leikkaa kateetin BC pisteessä E. Laske nelikulmion ACED piiri.

95.1.10. Kannan suuntaiset suorat erottavat kolmion yhdestä sivusta osat, joiden pituudet ovat 2 cm, 4 cm ja 6 cm. Keskelle syntyneen puolisuunnikkaan ala on 3,2 cm^2. Laske koko kolmion ala.

2. $V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 3 = \mathbf{16\pi}$; Akselileikkauskuviosta $s^2 = r^2 + h^2 = 4^2 + 3^2 = 25$; r = 5

$A = \pi rs = \pi \cdot 4 \cdot 5 = \mathbf{20\pi}$

3. $V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$; $30 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 10$; $r^2 = \frac{9}{\pi}$; r = 1,69 d = 2r = **3,4 (cm)**

9. $2\pi r = 50$; r = 7,96 ; Katsomiskohdasta keskipisteeseen on 40 m + 7,96 m = 47,96m

$\frac{h}{47{,}96} = \tan 30°$; h = 27,7 ; $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 7{,}962 \cdot 27.7 = \mathbf{1800\ m^3}$

5. Näkökulman kyljet ovat ympyrän tangentteja, jotka ovat kohtisuorassa sädettä vastaan. Kolmasosa pinnasta näkyvissä ⇒ keskuskulma = 120°. Puolikaskolmio on koululaisen kolmio ⇒ Keskipisteestä katsomispisteeseen = 2r = 10 m. V: **Väh. 5 m päästä seinästä**

6. Olkoon kolmio ABC, jossa CD on kulmanpuolittaja.
CD = CD (yhteinen) & ∠ADC = ∠BDC (= 90°) & ∠ ACD = ∠BCD (CD puolitti)
⇒ ΔADC ≅ ΔBDC (ksk) ⇒ AC = BC (yhtenevien kolmioiden vastinosina) ⇒ kolmio tasakylkinen.

7. Piirrä jänne FE. ∠ CFE = ∠ CEF = ∠ FDE = 49° , koska ne ovat samaa kaarta vastaavia kehäkulmia. Δ CEF ja kulmien summasta saadaan C = 180° - 49° - 49° = **82°**

8. Hypotenuusa AB on Pythagoraan teoreeman mukaan pituudeltaan 10.

Δ BDE ~ Δ BCA (kk = 90°ja ∠ B) $\frac{ED}{AC} = \frac{BD}{BC}$; $\frac{ED}{6} = \frac{5}{8}$; ED = 3¾ ; $\frac{BE}{AB} = \frac{BD}{BC}$; $\frac{BE}{10} = \frac{5}{8}$

BE = 6¼ ; CE = 8 - 6¼ = 1¾ ; Piiri = 5 + 6 + 3¾ + 1¾ = **16½**

10. Olkoon yläkolmion ala A_1. Yläkolmio ja keskikokoinen kolmio ovat yhdenmuotoiset.

Alojen suhde = k^2 ; $\frac{A_1}{A_1 + 3{,}2} = \left(\frac{2}{2+4}\right)^2$; $9A_1 = A_1 + 3{,}2$; $8A_1 = 3{,}2$; $A_1 = 0{,}4$

Yläkolmio ja koko kolmio yhdenmuotoiset ; $\frac{0{,}4}{A} = \left(\frac{2}{2+4+6}\right)^2$; $A = 36 \cdot 0{,}4 = \mathbf{14{,}4\ (cm^2)}$

95.2.1. Piirrä johonkin kohtaan paperille kolmio ja sen lähelle jokin suora. Peilaa kolmio suoran suhteen. Laita lähelle piste ja venytä saatu kolmio tämä piste keskuksena suhteessa -1,5.

95.2.2. Kolmiossa ABC on AB = 6 cm, AC = 8 cm ja BC = 7 cm sekä AB:n suuntainen leikkaaja DE = 5 cm (D on sivulla AC ja E sivulla BC). Kuinka pitkä on BE?

95.2.3. Puisen kuution pinta maalataan siniseksi. Kuutio sahataan niin pituus- leveys- kuin korkeussärmää vastaan kohtisuorasti kolmeen yhtä suureen osaan erottamatta paloja välillä toisistaan. a) Kuinka monta pikkukuutioa syntyy? Kuinka monessa pikkukuutiossa on b) kolme sinistä tahoa c) 2 sinistä tahoa d) yksi sininen taho e) ei yhtään sinistä tahoa?

95.2.4. Suorakulmaisen särmiön särmien suhde on 2 : 3 : 5 (ts. sivut esim. 2x, 3x ja 5x) ja kokonaispinta-ala on 248 cm^2. Laske särmiön tilavuus.

95.2.5. Suoran ympyräkartion pohjaympyrän säde on 4 ja vaipan ala 20π. Laske kartion tilavuus.

95.2.6. Tasasivuisen kolmion ABC sivulta AB otetaan piste B_1, sivulta BC piste C_1 ja sivulta CA piste A_1 siten, että $AB_1 = BC_1 = CA_1$. Todista, että kolmio $A_1B_1C_1$ on tasasivuinen.

95.2.7. Neljäkkään sivujen pituus on 2 m ja yksi kulma 60°. Kaksi vierekkäistä kärkeä keskipisteinä ja 1 m säteenä piirretään neljäkkään sisään kaksi ympyränsektoria. Kun nämä sektorit leikataan pois, mikä on jäljelle jääneen kuvion pinta-ala.

95.2.8. Ympyrän jänteet AB ja CD leikkaavat pisteessä P. Kaarien AC ja BD asteluvut ovat 50 ° ja 80°. Laske kulman APC suuruus.

95.2.9. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin pohjasärmä on 2 ja sivusärmä 3. a) Laske sivusärmän ja pohjan välinen kulma. b) Laske sivutahon ja pohjan välinen kulma.

95.2.10. Suoran ympyräkartion, jonka korkeus on sama kuin pohjaympyrän halkaisija, sisään asetetaan puolipallo siten, että sen tasopinta on kartion pohjalla ja pallopinta sivuaa kartion vaippaa. Laske puolipallon ja kartion tilavuuksien suhde.

2. $\Delta DEC \sim \Delta ABC$; $\frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB}$; $\frac{CE}{7} = \frac{5}{6}$; $CE = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}$; $BE = 7 - 5\frac{5}{6} = \mathbf{1\frac{1}{6}}$

3. a) 3·3·3 = **27** b) **8** c) **12** d) **6** e) **1**

4. $A = 2x\cdot3x\cdot2 + 2x\cdot5x\cdot2 + 3x\cdot5x\cdot2 = 62x^2$; A = 248 ; $62x^2 = 248$; $x^2 = 4$; x = 2
Sivut 2·2, 3·2 ja 5·2 eli 4, 6 ja 10 cm ; V = 4 cm · 6 cm · 10 cm = **240 cm^3**

5. $A = \pi rs$; $\pi\cdot4\cdot s = 20\pi$; s = 5 ; Keskuskolmiossa hypotenuusa = 5 ja toinen kateetti = 4
siis toinen kateetti eli korkeus = 3 ; $V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot4^2\cdot3 = \mathbf{16\pi}$

6. $AB_1 = BC_1 = CA_1$ (oletus) ; $B_1B = C_1C = A_1A$ (= sivu - yhtäsuuret janat) ; $\angle A = \angle B = \angle C$ (= 60°)
$\Delta AB_1A_1 \sim \Delta BC_1B_1 \sim \Delta CA_1C_1$ (sks) ; $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1$ (yhtenevien kolmioiden vastinosina)
$\Delta A_1B_1C_1$ on tasasivuinen (3 yhtä pitkää sivua)

7. Piirtämällä korkeusjana saadaan koululaisen kolmio $\Rightarrow h = \sqrt{3}$ $A_{KOKO} = 2\sqrt{3}$ Sektoreilla on sama säde ja keskuskulmat yhteensä 60° + 120° = 180° , joten sektoreiden yhteinen ala = ½π·12 = ½π ; $A = \mathbf{2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi}$

8. Yhdistetään pisteet A ja D. Syntyneet kehäkulmat ovat puolet vastaavasta keskuskulmasta eli puolet vastaavasta kaaresta. Kehäkulmat $\angle PAD$ = ½ · 80° = 40° ; $\angle PAD$ = ½·50° = 25°
Kun kolmion kahden kulman summa = kolmannen ulkokulma, on $\angle APC$ = 40° + 25° = **65°**

9. Olkoon pohjaneliö ABCD, pohjan keskipiste K ja huippu H sekä sivun BC keskipiste E.
Pohjan lävistäjä $AC = a\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow AK = \sqrt{2}$; ΔAKH + trig : $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $\mathbf{\alpha = 61{,}9°}$
ΔAKH + PYTH: $KH^2 = 9 - 2 = 7$; $KH = \sqrt{7}$; ΔDKH + trig : $\tan\beta = \frac{\sqrt{7}}{1}$; $\mathbf{\beta = 69{,}3°}$

10. Olkoon akselileikkauskuviossa K = pohjan keskipiste ; H = huippu ; A ja B pohjaympyrän päätepisteet ja C = puoliympyrän, jonka halkaisija on AB:llä, ja sivun AH sivuamispiste. Olkoon pohjaympyrän säde = R , jolloin korkeus KH = 2R. Ja olkoon puolipallon säde r. Koska tangentti on kohtisuorassa sädettä vastaan on $\angle KCH$ = 90°.
$AH^2 = R^2 + (2R)^2 = R^2 + 4R^2 = 5R^2$; $AH = R\sqrt{5}$; $\Delta KCH \sim \Delta AKH$ (kk) $\Rightarrow \frac{KC}{KA} = \frac{KH}{AH}$; $\frac{r}{R} = \frac{2R}{R\sqrt{5}} \Rightarrow r = \frac{2R}{\sqrt{5}}$

$V_{PP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (\frac{2R}{\sqrt{5}})^3 = \frac{16\pi}{15\sqrt{5}} \cdot R^3$; $V_K = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 2R = \frac{2\pi}{3} R^3$; $V_{PP} : V_K = \frac{16\pi}{15\sqrt{5}} \cdot R^3 : \frac{2\pi}{3} R^3 = \mathbf{\frac{8}{5\sqrt{5}}}$

95.3.1. Piirrä suorakulmainen kolmio ABC ja sen ulkopuolelle piste P. Venytä kolmioa ABC piste P keskuksena venytyssuhteen ollessa 0,5. Kierrä syntynyt kolmio 90° myötäpäivään piste P kiertokeskuksena.

95.3.2. Tasakylkisen kolmion ABC huippukulma C on 40°. Kulman A puolittaja leikkaa sivun BC pisteessä D. Laske kulman ADB suuruus.

95.3.3. Akvaarion pohja on suorakulmio, jonka pituus on 8,0 dm ja leveys 4,0 dm. Akvaariossa on 40,0 l vettä. a) Kuinka korkealla on veden pinta? b) Kuinka korkealla on veden pinta, jos akvaariossa on lisäksi litteä, upoksissa oleva kivi, jonka tilavuus on 8,0 l?

95.3.4. Mikä on tasakylkisen kolmion piiri, kun kantakulmat ovat 45° ja ala on 32 cm^2?

95.3.5. Ympyrän muotoisen lammen halkaisija on 40 m. Henkilö on 50 m päässä lammen rannasta. Mikä on lyhin matka kiertää lampi ja palata lähtöpisteeseen?

95.3.6. Pisteestä P piirretyt tangentit sivuavat ympyrää pisteissä A ja B. Piste Q on ympyrän kehällä siten, että QP puolittaa kulman APB. Osoita, että QA = QB. (tangenttikulman kylki-lausetta voi pitää tunnettuna)

95.3.7. Akvaarion pohja on suorakulmio, jonka pituus on 8,0 dm ja leveys 4,0 dm. Akvaariossa on 40,0 l vettä ja kuution muotoinen kivi, jonka tilavuus on 8,0 l. Kuinka korkealla on veden pinta?

95.3.8. Ympyrässä on jänne, jonka pituus on 9. Eräs ympyrän halkaisija jakaa sen osiin, joiden pituudet ovat 3 ja 6 sekä halkaisija jakautuu kahteen osaan, joista pienemmän pituus on 2. Laske on ympyrän halkaisija.

95.3.9. Suorakulmaisen särmiön pohja ABCD on neliö ja särmiön korkeus a on puolet pohjasärmistä. Laske A:sta lähtevän avaruuslävistäjän ja a) pohjatahon b) A:n kautta kulkevan sivutahon välinen kulma.

95.3.10. Kartio on katkaistu pohjan suuntaisella tasolla. Jäljelle jääneen alaosan korkeus on 4,7 cm. Alkuperäisen kartion korkeus oli 14 cm ja tilavuus 65 cm^3. Mikä on alaosan tilavuus?

2. $\angle A + \angle B + 40° = 180°$; $2 \cdot \angle A = 140°$; $\angle A = \angle B = 70°$; $\angle BAD = ½ \cdot 70° = 35°$ $\angle ADB + 35° + 70° = 180°$; $\angle ADB =$ **75°**
3.a) 8·4·h = 40 ||:32 ; h = 1,25 (dm) = **12,5 cm** b) 8·4·h = 48 ||:32 ; h = 1,5 (dm) = **15 cm**
4. Kantakulmat yhteensä 90° ; huippukulma on 90° , joten kolmio on suorakulmainen Kyljistä toinen voidaan katsoa olevan kanta ja toinen korkeus. ½x·x = 32 ; $x^2 = 64$; x = 8 Hypotenuusa = kylki · $\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$; piiri = $8 + 8 + 8\sqrt{2} = 16 + 8\sqrt{2} = \mathbf{8(2 + \sqrt{2})}$ **(cm)** ≈ 27,3 (cm)
5. Piirretään lähtöpisteestä P tangentit PA ja PB, missä A ja B ovat sivuamispisteitä. Olkoon K ympyrän keskipiste. PK = 50 + r = 50 + 20 = 70 ΔPAK + trig: $\cos \alpha = \frac{20}{70}$; $\alpha = 73,4° = \angle PKA$; ΔPAK + trig: $\sin 73,4° = \frac{AP}{70}$; AP = BP = 67,1 (m) Kaari lammen reunaa pitkin = $360° - 2\alpha = 360° - 146,8° = 213,2°$; Isompi kaari AB = $\frac{213,2}{360} \cdot 2\pi \cdot 20 = 74,4$ Matka = Kaari + 2 · tang. kulman kylkeä = 74,4 m + 2 · 67,1 m = 208,6 m ≈ **210 m**
6. Oletus: PA ja PB ovat tangenttikulman kylkiä. Q on kehäpiste ja QP puolittaa kulman A. Väitös: QA = QB Todistus: PA = PB (tangenttikulman kyljet ovat yhtä suuret) $\angle APQ = \angle BPQ$ (kulman puoliskot ovat yhtä suuret) QP = QP (yhteinen) $\Delta QAP \cong \Delta QBP$ (sks) QA = QB (yhtenevien kolmioiden vastinosina)
7. Kuution tilavuus = 8 l = 8 dm^3 ; $x^3 = 8\ dm^3$; x = 2 dm. Pohjan ala = $2^2\ dm^2 = 4\ dm^2$ Oletetaan, ettei kuutio peity kokonaan, ts. veden korkeus vähemmän kuin 2 dm. Vesi muodostaa reiällisen suoran särmiön, joiden tilavuus = pohjan ala x korkeus. Vettä peittyy alalle = pohjan ala - kuution ala = 8 dm · 4 dm - 4 dm^2 = 28 dm^2. Tilavuus = 40 dm^3 ; 28 dm^2 · h = 40 dm^3 || : 28 dm^2 ; h = 1,43 dm = **14,3 cm**

8. Olkoon AB jänne ja CD halkaisija sekä P niiden leikkauspiste. AP = 3 ; BP = 6 ; CP = 2 ja DP = d - 2 Kolmiot APC ja DPB ovat yhdenmuotoiset (kk), sillä $\angle$A = $\angle$D (samaa kaarta vastaavina kehäkulmina) sekä $\angle$APC = $\angle$DPB (ristikulmina) $\frac{PD}{AP} = \frac{PB}{PC}$; $\frac{d-2}{3} = \frac{6}{2}$; d - 2 = 9 ; **d = 11**
9. a) Olkoon C:n yläpuolella oleva kärki E. Kysytyn kulman kylkinä ovat AC ja AE. AC = AB $\cdot\sqrt{2} = 2a\sqrt{2}$; ΔACD + trig: $\tan\alpha = \frac{EC}{AC} = \frac{a}{2a\sqrt{2}}$; **α = 19,5°** b) Olkoon B:n yläpuolella oleva kärki F ; Kysytyn kulman kylkinä ovat AE ja AF. ΔABF + Pyth.: $AF^2 = (2a)^2 + a^2 = 5a^2$; $AF = a\sqrt{5}$ ΔAEF + Trig.: $\tan\beta = \frac{EF}{AF} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$; **β = 41,8°**
10. $h_{KOKO} = 14$; $h_{ALA} = 4,7$; $h_{YLÄ} = 9,3$ $\frac{V_{YLÄ}}{V_{KOKO}} = k^3$; $\frac{V_{YLÄ}}{65} = (\frac{9,3}{14})^3 = 0,293 \parallel \cdot 65$ $V_{YLÄ} = 19$; $V_{ALA} = V_{KOKO} - V_{YLÄ} = 65 - 19 =$ **46 (cm³)**

95.4.1. Piirrä a) kuutio b) nelisivuinen pyramidi c) vino ympyrälieriö d) kupera viisikulmio e) tasakylkinen suorakulmainen kolmio f) tasakylkinen puolisuunnikas.

95.4.2. Suorakulmaisen särmiön pituus, leveys ja korkeus ovat 6 cm, 4 cm ja 3 cm. Kahden kulmikkain olevan pituussärmän kautta on asetettu taso. Laske tämän tason ja pohjatason välinen kulma.

95.4.3. Kuution tilavuus on 2,00 dm^3. Laske sen kokonaisala.

95.4.4. Kolmion ABC kulmanpuolittaja BD erottaa kolmiosta tasakylkisen kolmion ABD. Kulman C suuruus on 30°. Mitkä arvot voivat olla kulmalla CDB?

95.4.5. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat yhtä pitkät. Laske ala, kun piiri on 3,41 m.

95.4.6. Ympyrässä on jänteet AB ja CD, jotka eivät leikkaa toisiaan. Jänteet AD ja BC leikkaavat pisteessä P siten, että AP = CP. Todista, että AB = CD.

95.4.7. Ympyrän sektori, jonka säde on 10 cm ja keskuskulma 120°, kierretään suoran ympyräkartion vaipaksi. Laske kartion tilavuus.

95.4.8. Pyöreä torni näkyy pisteestä P 60° kulmassa. Jos pisteestä P lähdetään kiertämään tornia lyhintä mahdollista reittiä, on matka tornin viereen tällä reitillä 8,0 m. Kuinka pitkä matka on kuljettava tornin vierustaa pitkin?

95.4.9. Ympyrän ulkopuolella on piste P, josta ympyrän lähimpään pisteeseen on 2 cm ja P:stä piirretyn tangentin sivuamispisteeseen 6 cm. Laske ympyrän säde.

95.4.10. Puolisuunnikkaan kantasivut ovat 6 ja 12. Kantasivun suuntaisesta suorasta erottuu puolisuunnikkaan sisään jana, jonka pituus on 8. Laske suuremman osan ala, kun pienemmän ala on 14.

2. Päätyseinälle syntyy suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat leveys ja korkeus eli 4 cm ja 3 cm. Kysytyn kulman muodostaa päädyn lävistäjä ja leveyssärmä. $\tan\alpha = \frac{3}{4}$; **α = 36,9°**
3. V = 2,00 ; $a^3 = 2,00 \parallel \sqrt[3]{\ }$; a = 1,26 ; $A = 6a^2 = 6\cdot 1,26^2 =$ **9,52 (dm²)**
4. 1° $\angle$A = $\angle$ADB = x $\Rightarrow$ $\angle$ABD = $\angle$CBD = 180° - 2x ; Kolmion kahden kulman summa on kolmannen vieruskulma $\Rightarrow$ 30° + 180° - 2x = x ; 3x = 210° ; x = 70° $\Rightarrow$ $\angle$CDB = **110°** 2° $\angle$A = $\angle$ABD = x = $\angle$CBD ; $\angle$ADB = 180° - 2x = 30° + x ; 3x = 150° ; x = 50° $\Rightarrow$ $\angle$CDB = **100°** 3° $\angle$ABD = $\angle$ADB = $\angle$CBD $\Rightarrow$ AC || BC koska samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret. Siis ei kolmioa.
5. Olkoon kateetit = a ; hypotenuusa = $a\sqrt{2}$; piiri = 3,41 m ; $2a + a\sqrt{2} = 3,41$; 2a + 1,41a = 3,41 3,41 a = 3,41 ; a = 1 ; A = ½·1·1 = ½
6. AP = CP (Oletus) ; $\angle$APB = $\angle$CPD (ristikulmina) $\angle$BAP = $\angle$DCP (samaa kaarta vastaavina kehäkulmina) ΔABP $\cong$ ΔCDP (ksk) AB = CD (yhtenevien kolmioiden vastinosina)

7. Sektorin kaari = $\frac{120°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 10 = \frac{20\pi}{3}$ = kartion pohjaympyrän piiri. $2\pi r = \frac{20\pi}{3}$; $r = \frac{10}{3}$. Akselileikkauskolmion puolikkaasta saadaan $h^2 + r^2 = s^2$; $h^2 + \frac{100}{9} = 10^2$; $h^2 = \frac{800}{9}$; $h = \frac{20\sqrt{2}}{3}$ $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{100}{9} \cdot \frac{20\sqrt{2}}{3} = \frac{2000\pi\sqrt{2}}{81}$ = **110 (cm³)**
8. Olkoon keskipiste K ja tangenttien sivuamispisteet A ja B. ∠APK = 30° ; ∠PAK = 90° ; AP = 8   Trigonometrialla $\frac{r}{8} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $r = \frac{8}{\sqrt{3}}$. ∠AKB = 180° - 60° , jolloin suurempi kaari AB = 240° ja sen pituus = $\frac{240}{360} \cdot 2\pi \cdot \frac{8}{\sqrt{3}}$ = **19,3 (m)**
9. Olkoon sivuamispiste A, lähinnä oleva piste B ja PB:n jatkeella oleva kehäpiste C , BC on halkaisija.   ΔPAB ~ ΔPCA (∠P = ∠P ja ∠PAB = ∠PCA samaa kaarta vastaavina kehäkulmina) $\frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PC}$; $\frac{2}{6} = \frac{6}{2 + 2r}$; 4 + 4r = 36 ; 4r = 32 ; **r = 8**.
10. Olkoon puolisuunnikas ABCD, jossa AB = 12 ja DC = 6. Leikkaaja olkoon EF = 8   Jatketaan kylkisivuja AD ja BC niin, että ne leikkaavat pisteessä K. Olkoon kolmion KDC ala = x.   ΔKDC ~ ΔKEF (kk) $\frac{x}{x + 14} = \left(\frac{6}{8}\right)^2$; $\frac{x}{x + 14} = \frac{9}{16}$, 16x = 9x + 126 ; 7x = 126 ; x = 18   ΔKEF ~ ΔKAB (kk) ; $\frac{32}{32 + A} = \left(\frac{8}{12}\right)^2$; $\frac{32}{32 + A} = \frac{4}{9}$; 128 + 4A = 288 , 4A = 160 ; **A = 40**

95.5.3. Määritä kolmion alan ja piirin tarkat arvot, kun kaksi sivua ovat 5 ja 3 sekä niiden välinen kulma 30°.

3. A = ½ · 5 · 3 · sin 30° = ½ · 15 · ½ = **3¾**   Kosinilause: $c^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos 30° = 25 + 9 - 30 \cdot ½\sqrt{3} = 34 - 15\sqrt{3}$; $c = \sqrt{34 - 15\sqrt{3}}$ $p = 3 + 5 + \sqrt{34 - 15\sqrt{3}} = \mathbf{8 + \sqrt{34 - 15\sqrt{3}}}$

95.6.3. Kolmion kaksi kulmaa ovat 40° ja 80° sekä niiden välisen sivun pituus 4. Laske kolmion pisin sivu sekä kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde.

95.6.10. Maapallon säde on 6400 km. TV-satelliitti on geostationäärisellä radalla (= pysyy koko ajan maan pintaan nähden paikallaan eli saman paikan yläpuolella) päiväntasaajan yläpuolella 38000 km maan pinnalta, samalla pituuspiirillä kuin Veteli. Mihin suuntaan on veteliläisten suunnattava satelliittiantenninsa, jotta he saisivat mahdollisimman hyvän TV-kuvan? Veteli on 63,5° leveyspiirillä.

3. Kolmas kulma = 180° - 40° - 80° = 60°. Pisin sivu on suurinta kulmaa vastassa oleva sivu. $\frac{x}{4} = \frac{\sin 80°}{\sin 60°}$; $x = 4 \cdot \frac{\sin 80°}{\sin 60°} = 4{,}55$; $2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{4}{\sin 60°} = \frac{4}{½\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$; $R = \frac{4}{\sqrt{3}}$
10. Olkoon S = satelliitti ; K = Maan keskipiste ja V = Veteli   Kolmiossa SKV on kulma SKV = 63,5° KS = 38000 + 6400 = 44400 ja VK = 6400   Kosinilauseella $SV^2 = 44400^2 + 6400^2 - 2 \cdot 44400 \cdot 6400 \cdot \cos 63{,}5°$ = 1 759 000 000 ; SV = 41 900   Sinilauseella $\frac{\sin\alpha}{\sin 63{,}5°} = \frac{44400}{41900}$; $\sin\alpha = 0{,}948$; α = 71,5° tai 108,5° , joista tylppä kulma oikea.   Koska tangentti kohtisuorassa sädettä vastaan, on satelliitti horisontin yläpuolella 108,5° - 90° = 18,5°   V: Antenni suunnataan suoraan etelään 18,5° horisontista ylöspäin

95.7.4. Kolmion kaksi kulmaa ovat 56° ja 72° sekä jälkimmäisen vastainen sivu 8,3 cm. Laske muut sivut.

4. Olkoon 56° kulman vastainen sivu = x. Sinilause: $\frac{x}{8{,}3} = \frac{\sin 56°}{\sin 72°}$; $x = \frac{\sin 56°}{\sin 72°} \cdot 8{,}3 = 7{,}2$ (cm) .   Kolmas kulma = 180° - 56° - 72° = 52°   Olkoon tämän vastainen sivu = y ; Sinilause: $\frac{y}{8{,}3} = \frac{\sin 52°}{\sin 72°}$; $y = \frac{\sin 52°}{\sin 72°} \cdot 8{,}3 = 6{,}9$ (cm)

95.8.4. Kolmion sivut ovat 7, 8 ja 9. Laske kolmion suurin kulma 0,1° tarkkuudella.

95.8.7. Kolmion kaksi sivua ovat 3,2 cm ja 3,7 cm sekä edellisen vastainen kulma 46°. Laske kolmion suurin kulma.

4. Suurin kulma on suurinta sivua vastassa oleva kulma, olkoon se a.
$9^2 = 7^2 + 8^2 - 2\cdot7\cdot8\cdot\cos\alpha$; $112\cdot\cos\alpha = 49 + 64 - 81$; $\cos\alpha = 0{,}286$; $\alpha = 73{,}4°$

7. Sinilause: $\frac{\sin\alpha}{\sin 46°} = \frac{3{,}7}{3{,}2}$; $\sin\alpha = \frac{3{,}7}{3{,}2}\sin 46° = 0{,}831$; $\alpha = 56{,}3°$ tai $\alpha = 123{,}7°$, jolloin kolmas kulma on $\beta = 180° - 46° - 56{,}3° = 77{,}7°$ tai $180° - 46° - 123{,}7° = 10{,}3°$ V: 77,7° tai 123,7°

96.1.1. Kolmion kulma on kaksinkertainen toiseen kulmaan verrattuna ja kolmas kulma on 30° suurempi kuin ensin mainittu. Laske kolmion kulmat.

96.1.2. Kolmion ABC sivuilla AC ja BC on pisteet D ja E siten, että DE || AB. Olkoon DE = 15, AD = 5, DC = 10 ja BE = 4. Laske a) CE b) AB c) kolmioiden DEC ja ABC alojen suhde.

96.1.3. Ympyrässä on kolme kaarta AB, BC ja CD, jotka ovat kaikki asteluvultaan 36°. Mitkä ovat kolmion ABD kulmien suuruudet.

96.1.4. Kartalta mitattuna lammen pituus on 4,2 cm ja ala 3,4 cm^2 . Kartan mittakaava on 1:20000. Määritä lammen todellinen pituus ja pinta-ala.

96.1.5. Tasakylkisen kolmin kanta ja kannalle piirretty korkeus on 4. Laske kolmion ympäri ja sisään piirretyn ympyrän säde.

96.1.6. Piirrä säännöllinen oktaedri. Mikä on oktaedrin avaruuslävistäjän ja sivutahkon välinen kulma?

96.1.7. Tylppäkulmaisessa kolmiossa ABC on kantakulma B = 100°, kylki AB = 5 ja huippukulma A = 25°. Laske kolmion korkeusjana ja muiden sivujen pituudet.

96.1.8. Suoran umpinaisen ympyrälieriön muotoisen esineen korkeus ja pohjaympyrän halkaisija ovat 4 cm. Siihen porataan pohjien läpi suoran ympyrälieriön muotoinen reikä siten, että jäljelle jääneen kappaleen tilavuus on puolet alkuperäisen lieriön tilavuudesta. Kuinka monta prosenttia ja mihin suuntaan esineen kokonaispinta-ala muuttuu?

96.1.9. Rakenteilla oleva tie ylittää 100 m pitkän tasaisen kostean alueen. Tällöin tehtävän perustuksen pystysuora poikkileikkaus on tasakylkinen puolisuunnikas, jonka kolme sivua ovat 8,0 m ja kylkien kaltevuuskulma 22°. Perustukseen tuleva maa-aines tuodaan kuormista, jotka kasvattavat perustusta keskimäärin 5 m^3. Kunakin työpäivänä pystytään käsittelemään 25 kuormaa. Kuinka monta vuorokautta perustuksen rakentamiseen kuluu?

96.1.10. Ympyrälle on piirretty sen ulkopuolisesta pisteestä P kaksi suoraa, joista toinen leikkaa ympyrän kehän ensin pisteessä A ja sitten pisteessä B. Toisen suoran leikkauspisteet ovat vastaavasti C ja D. Todista: Jos PA = PC, niin PB = PD.

1. Olkoon pienin kulma = x $\Rightarrow$ keskimmäinen kulma = 2x ja suurin kulma = 2x + 30°
$x + 2x + 2x + 30° = 180°$; $5x = 150°$; $x = 30°$ V: 30°, 60° ja 90°

2. Sivun suuntainen suora jakaa muut sivut verrannollisiin osiin $\Rightarrow \frac{CE}{4} = \frac{10}{5}$; CE = 8

Iso ja pikku kolmio yhdenmuotoisia $\Rightarrow \frac{AB}{15} = \frac{15}{10}$; 10AB = 225 ; AB = 22½

Alojen suhde = mittakaava toiseen $\Rightarrow \frac{A_{DEC}}{A_{ABC}} = (\frac{10}{15})^2 = \frac{4}{9}$

3. $\angle ADB = ½\angle AOB = ½\cdot$kaari AB $= ½\cdot36° = 18°$; $\angle DAB = ½\cdot$kaari BD $= ½\cdot72° = 36°$
$\angle ABD = 180° - 36° - 18° = 126°$

4. $\frac{4{,}2\text{ cm}}{p} = \frac{1}{20\,000}$; $p = 20\,000\cdot4{,}2\text{ cm} = 84\,000\text{ cm} = 840\text{ m}$
$\frac{3{,}4\text{ cm}^2}{A} = (\frac{1}{20\,000})^2$; $A = 400\,000\,000\cdot3{,}4\text{ cm}^2 = 1\,360\,000\,000\text{ cm}^2 = 13{,}6$ ha

5. Puolikaskolmiosta saadaan Pythagoraalla kylki ; $a^2 = 2^2 + 4^2 = 20$; $a = 2\sqrt{5}$
$R = \frac{abc}{4A} = \frac{2\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}\cdot4}{4\cdot½\cdot4\cdot4} = \frac{4\cdot5\cdot4}{32} = 2½$;$r = \frac{2A}{a+b+c} = \frac{2\cdot½\cdot4\cdot4}{4 + 4\sqrt{5}} = \frac{16}{4(1 + \sqrt{5})} = \frac{4(\sqrt{5} - 1)}{5 - 1} = \sqrt{5} - 1$

6. Olkoon oktaedrin huippupiste H, keskustason keskipiste K ja keskitason sivusärmän keskipiste A sekä särmien pituudet = a. Kolmio AKH on suorakulmainen ja siinä AK = ½a. HA = sivutahona olevan tasasivuisen kolmion korkeusjana, jolloin koululaisen kolmion mukaan HA = $\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{3}$. $\sin\alpha = \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a\sqrt{3} = 1 : \sqrt{3}$, $\alpha = 35{,}3°$
7. Olk. AD = h ; $\angle ABD = 180° - 100° = 80°$. ΔABD:stä $\frac{h}{5} = \sin 80°$; $h = 5\cdot\sin 80° = 4{,}9$ $\angle C = 180° - 100° - 25° = 55°$. ΔADC: $\frac{4{,}9}{AC} = \sin 55°$; $AC = \frac{4{,}9}{\sin 55°} = 6{,}0$ ΔACD: $\frac{4{,}9}{DC} = \tan 55°$; $DC = \frac{4{,}9}{\tan 55°} = 3{,}4$; ΔABD: $\frac{4{,}9}{BD} = \tan 80°$; $BD = \frac{4{,}9}{\tan 80°} = 0{,}87$ $BC = DC - DB = 3{,}43 - 0{,}87 = 2{,}6$
8. $A_{1VAIPPA} = 2\pi\cdot 2\cdot 4 = 16\pi$; $A_{1POHJAT} = 2\cdot\pi\cdot 2^2 = 8\pi$; $A_1 = 16\pi + 8\pi = 24\pi$ Olk. sisälieriön säde = r. $\pi r^2\cdot 4 = \frac{1}{2}\pi\cdot 2^2\cdot 4$; $r^2 = 2$; $r = \sqrt{2}$; $A_{2ULKOVAIPPA} = 2\pi\cdot 2\cdot 4 = 16\pi$ $A_{2SISÄVAIPPA} = 2\pi\sqrt{2}\cdot 4 = 8\sqrt{2}\pi$; $A_{2POHJAT} = 2[\pi\cdot 2^2 - \pi(\sqrt{2})^2] = 4\pi$; $A_2 = (20 + 8\sqrt{2})\pi$ $\frac{A_2}{A_1} = \frac{(20 + 8\sqrt{2})\pi}{24\pi} = \frac{5 + 2\sqrt{2}}{6} = 1{,}30$ V: lisääntyy 30%
9. Kappale on suora särmiö, jonka pohja on tasakylkinen puolisuunnikas ja korkeus on tien pituus. Kun piirretään lyhemmän kantasivun päätepisteestä korkeusjana, syntyy suorakulmainen kolmio,   josta $\frac{h}{8} = \sin 22°$; $h = 8\cdot\sin 22° = 3{,}00$ (m) $\frac{x}{8} = \cos 22°$; $x = 8\cdot\cos 22° = 7{,}42$ (m), jolloin pitempi kantasivu = 8 + 2x = 22,84 (m) $A = \frac{8 + 22{,}84}{2}\cdot 3{,}00 = 46{,}3\ (m^2)$; $V = Ah = 46{,}3\cdot 100 = 4630\ (m^3)$ $V_{PÄIVÄ} = 25\cdot 5\ m^3 = 125\ m^3$; Päiviä = $4630\ m^3 : 125\ m^3 = 37$
10. Piirretään kolmiot PAD ja PBC, jossa $\angle P = \angle P$ (yhteinen), PA = PC (oletus) , $\angle B = \angle D$ (samaa kaarta vastaavina kehäkulmina) $\Rightarrow \Delta PAD \cong \Delta PBC$ (kks) ; PB = PD (yhtenevien kolmioiden vastinsivuina)

96.2.1. Nelikulmion toinen kulma on kaksi kertaa niin suuri kuin ensimmäinen. Kolmas on 30° suurempi kuin toinen ja neljäs 60° suurempi kuin ensimmäinen. Laske nelikulmion kulmat. Onko nelikulmio suunnikas tai puolisuunnikas?

96.2.2. Tasakylkisen kolmion kanta on 6,4 cm ja huippukulma 42°. Laske kylki ja kantakulma.

96.2.3. Neliöpohjaisen suorakulmaisen särmiön tilavuus on 5,0 l ja korkeus 22 cm. Laske pohjaneliön sivu.

96.2.4. Matti mittasi kartalta kotitilansa koon ja sai tulokseksi 13,2 cm^2. Kartan mittakaava oli 1:20000. Mikä on kotitilan pinta-ala? Mikä olisi pinta-ala kartalla, jonka mittakaava on 1:50000?

96.2.5. Suorakulmion ABCD sivut ovat AB = 16 ja BC = 5. Kärjen A ulkopuolella, kulman A ristikulma-alueessa, on piste E, jonka etäisyys on suoralle AB = 10 ja suoralle AD = 8. Laske nelikulmion EBCD piiri.

96.2.6. Paperiarkin koko on 29,7 cm x 21,0 cm. Siitä tehdään suoran ympyrälieriön vaippa niin, että lyhemmät sivut menevät 1,0 cm päällekäin liimausta varten. Mikä on lieriön tilavuus?

96.2.7. Todista yhteneviä kolmioita käyttäen, että kulmanpuolittajan piste on yhtä kaukana kulman kyljistä.

96.2.8.Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on 10 ja hypotenuusalle piirretty korkeusjanan pituus on 4. Miten pitkiin osiin korkeusjanan kantapiste jakaa hypotenuusan?

96.2.9. Ympyrän ulkopuolisesta pisteestä P on ympyrälle piirretty kaksi sekanttia, jotka leikkaavat kehän pisteissä A ja B sekä C ja D (A ja C lähempänä P:tä). Pisteisiin B ja D on piirretty tangentit, jotka leikkaavat pisteessä Q. Kaaren AC asteluku on 40° ja kaaren BD 100°. Laske kulmien P ja Q suuruudet.

96.2.10. Tasakylkisen kolmion kanta on 48 cm ja kylki 40 cm. Laske kolmion kulmanpuolittajien leikkauspisteen ja keskinormaalien leikkauspisteen etäisyys toisistaan.

1. Olkoon 1. kulma = x, toinen = 2x, kolmas = 2x + 30°, neljäs = x + 60° Kulmain summa = 360° ; x + 2x + 2x + 30° + x + 60° = 360° ; 6x = 270° ; x = 45° Kulmat ovat 45°, 90°, 120° ja 105°. Koska mitkään eivät ole suplementtikulmia, ei nelikulmio voi olla suunnikas eikä puolisuunnikas
2. Piirretään korkeusjana kannalle ja tutkitaan puolikaskolmioa. Kantakulma = 180° - 90° - ½·42° = 69° . Olkoon kylki = x. $\cos 69° = \frac{3,2}{x}$; $x = \frac{3,2}{\cos 69°} = 8,9$ (cm)
3. $V = Ah$; $V = a^2 \cdot h$; $a^2 = \frac{V}{h} = \frac{5\ dm^3}{2,2\ dm} = 2,27\ dm^2$ || $\sqrt{(\,)}$; a = 1,5 dm = 15 cm
4. $\frac{13,2\ cm^2}{A} = (\frac{1}{20\ 000})^2$; $A = 400\ 000\ 000 \cdot 13,2\ cm^2 = 5\ 280\ 000\ 000\ cm^2 = 52,8$ ha $\frac{A}{52,8\ ha} = (\frac{1}{50\ 000})^2$; $A = \frac{5\ 280\ 000\ 000\ cm^2}{2\ 500\ 000\ 000} = 2,1\ cm^2$
5. Piirretään E:n kautta AB:n suuntainen suora, joka leikkaa CB:n jatkeen F:ssä ja E:n kautta AD:n suuntainen suora, joka leikkaa CD:n jatkeen pisteessä G. Kolmiosta EFB: $EB^2 = EF^2 + BF^2 = (16 + 8)^2 + 10^2 = 24^2 + 10^2 = 676$; EB = 26 Kolmiosta EGD: $ED^2 = EG^2 + GD^2 = (10 + 5)^2 + 8^2 = 15^2 + 8^2 = 289$; ED = 17 Piiri = EB + BC + CD + DE = 26 + 5 + 16 + 17 = 64
6. Pohjan piiri = 28,7 cm = $2\pi r$ || : 2π ; r = 4,57 cm $V = \pi r^2 h = \pi \cdot (4,57\ cm)^2 \cdot 21,0\ cm = 1380\ cm^3 = 1,38\ dm^3 = 1,38$ l
7. Olkoon A kulman kärkipiste, P kulmanpuolittajan piste, PB ja PC etäisyydet kyljille. $\angle BAP = \angle CAP$ (= kulman puoliskoja) ; $\angle ABP = \angle ACP$ (= 90°) ; AP = AP (yhteinen) $\Delta BAP \cong \Delta CAP$ (kks) ; PB = PC (yhtenevien kolmioiden vastinosina)
8. Olkoon hypotenuusa AB ja korkeusjana CD sekä AD = x jolloin DB = 10 - x. $\Delta ADC \sim \Delta CDB$ (kk) ; $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$; $\frac{x}{4} = \frac{4}{10 - x}$; $16 = 10x - x^2$; $x^2 - 10x + 16 = 0$ $x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2}$; x = 8 tai x = 2 V: Osat ovat 8 ja 2.
9. Yhdistetään A ja D. Olkoon keskipiste K. Kehäkulma $\angle BAD$ = ½ ·100° = 50° ja kehäkulma $\angle ADP$ = ½ ·40° = 20° Keskuskulma $\angle BKD$ = 100°, jolloin tangenttikulma $\angle BQD$ = 180° - 100° = 80° $\angle APD + \angle ADP = \angle BAD$; $\angle APD$ + 20° = 50° ; $\angle APD$ = 30°
10. Olkoon kolmion kanta AB ja korkeusjana CD. Koska CD on kulmanpuolittaja ja keskinormaali ovat sisään- ja ympäripiirrettyjen ympyröiden keskipisteet S ja K CD:llä. ΔADC + PYTH: $24^2 + CD^2 = 40^2$; $CD^2 = 1600 - 576 = 1024$; CD = 32. $CK = R = \frac{abc}{4A} = \frac{40 \cdot 40 \cdot 48}{4 \cdot ½ \cdot 48 \cdot 32} = 25. \Rightarrow DK = 32 - 25 = 7$ $DS = r = \frac{2A}{a + b + c} = \frac{2 \cdot ½ \cdot 48 \cdot 32}{40 + 40 + 48} = 12$; SK = DS - DK = 12 - 7 = 5(cm)

96.3.1. Vetelin ja Kaustisen kirkkojen etäisyys kartalla on 17,8 cm kun se luonnossa on 8,9 km. Mikä on kartan mittakaava? Kuinka suuri on 5,6 km^2 suuruisen järven pinta-ala kartalla?

96.3.2. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 3 ja 4. Kolmion sisällä on piste, jonka etäisyys molemmille kateeteille on 1. Laske tämän pisteen ja hypotenuusan kärkipisteiden muodostaman kolmion pinta-ala.

96.3.3. Ympyrässä leikkaa kaksi jännettä muodostaen 72° kulman. Kulman kylkien välissä on toisella puolella 56° kaari. Kuinka suuri on toisella puolella oleva kaari?

96.3.4. Ympyrän jännettä vastaavan kaaren asteluku on 80° ja ympyrän säde on 10. Laske a) jänteen pituus b) keskipisteen etäisyys jänteestä c) kaarta vastaavan sektorin ala sekä d) jänteen ja kaaren rajoittaman segmentin ala.

96.3.5. Todista yhteneviä kolmioita käyttäen: Jos kolmiossa on kaksi yhtä suurta kulmaa, niin niiden vastaiset sivut ovat yhtä pitkät. (eli kolmio on tasakylkinen)

96.3.6. Tasakylkisen kolmion ABC kanta AB = 8 ja kyljet = 5. Kannalla on piste D siten, että CD = BD. Laske janan AD pituus.

96.3.7. Kuutio, jonka sivun pituus on a, leikataan kolmen samasta kärjestä lähtevän särmän päätepisteiden kautta kulkevalla tasolla kahteen osaan. Laske pienemmän osan kokonaispinta-ala ja tilavuus.

96.3.8. Pietarin sijainti maapallolla on 60° N, 30° E. Alaskan Sewardin sijainti on 60° N, 150° W. Lyhin lentoreitti Pietarista Sewardiin kulkee siten isoympyrää pitkin pohjoisnavan kautta. Kuinka monta prosenttia se on lyhyempi kuin lentoreitti Pietarista suoraan länteen 60. leveyspiiriä pitkin Sewardiin?

96.3.9. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin korkeus on 8 cm ja tilavuus 96 cm^3. Laske pohja- ja sivusärmien pituudet.

96.3.10. Tasakylkisen kolmion kanta on 6 ja kolmion ympäripiirretyn ympyrän säde on $3\frac{1}{8}$. Mikä on kolmion korkeusjanan ja kyljen pituus?

1. $k = \frac{17{,}8\text{ cm}}{8{,}9\text{ km}} = \frac{17{,}8\text{ cm}}{890000\text{ cm}} = \frac{2}{100000} = \frac{1}{50000}$

$\frac{A}{5{,}6\text{ km}^2} = k^2$; $A = k^2 \cdot 5{,}6\text{ km}^2 = \frac{1}{2\,500\,000\,000} \cdot 56\,000\,000\,000\text{ cm}^2 = 22{,}4\text{ cm}^2$

2. Olkoon D piste, josta on kateeteille etäisyys 1. Yhdistetään D kolmion ABC kärkiin.

$A_{BAD} = A_{ABC} - A_{ACD} - A_{ACD} = \frac{3\cdot4}{2} - \frac{4\cdot1}{2} - \frac{3\cdot1}{2} = 6 - 2 - 1\tfrac{1}{2} = 2\tfrac{1}{2}$

3. Olkoon jänteiden AB ja CD leikkauspiste P, kaari AD = 56° ja $\angle BPC = 72°$. Yhdistetään A ja C. Kehäkulma on puolet keskuskulmasta ja kaaresta : $\angle ACD = \tfrac{1}{2}\cdot 56° = 28°$.
Kolmion (ACP) kahden kulman summa = kolmannen vieruskulma. $\angle PAC = x$.
$x + 28° = 72°$; $x = 44°$. Kaari BC = $2\cdot44° = 88°$

4. Olkoon jänne AB, keskipiste K ja jana KC $\perp$ AB sekä AC = x. Säteet AK = BK = 10

a) ΔAKC: $\frac{x}{10} = \sin 40°$; $x = 10 \cdot \sin 40° = 6{,}43$; $AB = 2x = 12{,}9$ b) $\frac{h}{10} = \cos 40°$; $h = 10 \cdot \cos 40° = 7{,}66$

c) $A_{SEKT} = \frac{80}{360} \cdot \pi \cdot 10^2 = 69{,}8$ d) $A_{KOLMIO} = \frac{7{,}66 \cdot 12{,}9}{2} = 49{,}4$; $A_{SEGM} = 69{,}8 - 49{,}4 = 20{,}4$

5. OL: Kolmiossa ABC on $\angle A = \angle B$ VÄ: AC = BC
TOD: Piirretään CD $\perp$ AB . 1° $\angle A = \angle B$ (OL) 2° $\angle ADC = \angle BDC$ (= 90°) 3° CD = CD (Yht)
4° $\Delta ADC \cong \Delta BDC$ (kks) 5° AC = BC (yhtenevien kolmioiden vastinosina)

6. $\Delta ABC \sim \Delta BCD$ (kk) = molemmat tasakylkisiä kolmioita, joilla yhtä suuret kantakulmat

$\frac{BD}{5} = \frac{5}{8}$; $BD = \frac{25}{8}$; $AD = 8 - BD = 8 - \frac{25}{8} = 4\frac{7}{8}$

7. Kappale on pyramidi, jonka korkeus = a ja pohjana on suorakulmainen kolmio, jonka kateetit = a. Kolme muuta sivua = s = $a\sqrt{2}$ (= neliön lävistäjä, kun sivu = a) ; $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot a}{2} \cdot a = \frac{1}{6} \cdot a^3$

$A = 3\cdot A_{SUORAK.KOLMIO} + A_{TASASIV.KOLMIO} = 3\frac{a\cdot a}{2} + \frac{s^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2}{2} + \frac{a^2\cdot2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}a^2$

8. Kaari isoympyrällä = 30° pohjoisnavalle + 30° Sewardiin = 60°. $s_{ISOYMP} = \frac{60}{360}\cdot 2\pi R = \frac{1}{3}\pi R$

Kaupunkien etäisyys maapallon akselista = r . $\frac{r}{R} = \cos 60°$; $r = \tfrac{1}{2}R$

$s_{LEV.PIIRI}$ = puoliympyrän kehä, kun säde on r = $\tfrac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\tfrac{1}{2}R = \tfrac{1}{2}\pi R$

$\frac{s_{ISOYMP}}{s_{LEV.PIIRI}} = \frac{1}{3}\pi R : \frac{1}{2}\pi R = \frac{2}{3} = 0{,}67 = 67\%$. V: Matka on 33% lyhyempi

9. $V = \frac{1}{3}Ah$; $96 = \frac{1}{3}a^2\cdot 8$; $a^2 = 36$; $a = 6$. Pohjan lävistäjä = $a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

Keskeltä kärkeen = $3\sqrt{2}$; $s^2 = 8^2 + (3\sqrt{2})^2 = 64 + 9\cdot2 = 82$; $s = \sqrt{82}$

10. Olk. kolmion korkeusjana = x. Kylki = $\sqrt{x^2 + 9}$R = $\frac{abc}{4A}$; $\frac{25}{8} = \frac{6\cdot\sqrt{x^2+9}\sqrt{x^2+9}}{4\cdot\frac{1}{2}\cdot 6x}$

$\frac{25}{8} = \frac{x^2 + 9}{2x}$; $8x^2 + 72 = 50x$; $4x^2 - 25x + 72 = 0$; $x = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{8} = \frac{25 \pm 7}{8}$

x = 4, jolloin kylki = $\sqrt{16 + 9} = 5$ tai $x = 2\tfrac{1}{4}$ ja kylki = $\sqrt{\frac{81}{36} + 9} = \sqrt{\frac{405}{36}} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

96.4.7. Miten monta prosenttia on ympyrän sisään piirretyn säännöllisen 20-kulmion piiri ympyrän kehästä?

96.4.10. Tasakylkisessä kolmiossa ABC on AC = BC = 6 ja AB = 8. Piste on sivun AC jatkeella siten, että CD = 3. Laske sivun DB pituus ja kolmion BCD pinta-ala (tarkat arvot).

7. Keskuskulma = 360°:20 = 18°. Olkoon säde = r ja sivu = s.
Kosinilause $\Rightarrow s^2 = r^2 + r^2 - 2r\cdot r\cdot\cos(18°) = 2r^2 - 2r^2\cdot\cos(18°) = 0{,}097887r^2$; $s = 0{,}31287r$
$p_{20} = 20\cdot 0{,}31287r = 6{,}2574r$; $p_O = 2\pi r$; $\frac{p_{20}}{p_O} = \frac{6{,}2574r}{2\pi r} = 0{,}996 = 99{,}6\%$

10. Olkoon CE kolmion ABC korkeusjana. $CE = \sqrt{36 - 16} = 2\sqrt{5}$ ΔACE + trig.: $\cos(\alpha) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
ΔABD + kosinilause: $DB^2 = 9^2 + 8^2 - 2\cdot 9\cdot 8\cdot\cos(\alpha) = 81 + 64 - 144\cdot\frac{2}{3} = 49$; $DB = 7$
$A_{ABC} = ½\cdot 6\cdot 8\cdot\sin(\alpha) = 24\cdot\frac{2\sqrt{5}}{3} = 8\sqrt{5}$ $A_{ABD} = ½\cdot 9\cdot 8\cdot\sin(\alpha) = 36\cdot\frac{2\sqrt{5}}{3} = 12\sqrt{5}$; $A_{BCD} = A_{ABD} - A_{ABC} = 4\sqrt{5}$

96.5.7. Kuinka monta prosenttia on ympyrän sisään piirretyn säännöllisen 12-kulmion ala koko ympyrän alasta?

96.5.10. Kolmion sivun pituus on 4,2 m ja sen toisesta päätepisteestä piirretty keskijana 3,6 m sekä toisessa päätepisteessä olevan kolmion kulma on 50°. Laske kolmion muut sivut.

7. 12-kulmion yhden keskuskolmion keskuskulma = $\frac{360°}{12} = 30°$
$A_\Delta = ½\cdot r\cdot r\cdot\sin 30° = ¼r^2$; $A_{12} = 12\cdot ¼r^2 = 3r^2$; $A_O = \pi r^2$; $\frac{A_{12}}{A_O} = \frac{3r^2}{\pi r^2} = \frac{3}{\pi} \approx 0{,}955 = 95{,}5\%$

10. Olkoon kolmio ABC, jossa AD = 3,6 on keskijana, AC = 4,2 , $\angle C = 50°$ ja $\angle ADC = \alpha$.
ΔADC + sinilause: $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(50°)} = \frac{4{,}2}{3{,}6}$; $\sin(\alpha) = 0{,}8937$; $\alpha = 63{,}3°$ {tai $\alpha = 116{,}7°$}
$\Rightarrow \angle CAD = 180° - 50° - 63{,}3° = 66{,}7°$. {$\angle CAD = 180° - 50° - 116{,}7° = 13{,}3°$}
Olkoon CD = x. ΔADC + sinilause: $\frac{x}{3{,}6} = \frac{\sin(66{,}7°)}{\sin(50°)}$; $x = 4{,}3 \Rightarrow BC = 2x = 8{,}6$ (m) {2,2(m)}
ΔABC + kosinil.: $AB^2 = 8{,}6^2 + 4{,}2^2 - 2\cdot 8{,}6\cdot 4{,}2\cdot\cos(50°) = 45{,}5 \parallel \sqrt{(\,)}$; AB = 6,7 (m) {3,3(m)}
V: 8,6 m ja 6,7 m { tai 2,2 m ja 3,3 m }

97.1.1. Kolmiossa ABC on AC = BC ja BD on kulman puolittaja. Laske kulman ADB asteluku, kun kulman C suuruus on 42°.

97.1.2. Talon ullakkotilan pääty on tasakylkinen suorakulmainen kolmio, jonka kateetin pituus on 4,0 m. Ullakon pituus on 10,0 m. Laske ullakon tilavuus.

97.1.3. Ympyrän kehällä on pisteet A, B, C ja D peräkkäin vastapäivään tässä järjestyksessä. Jänteiden AC ja BD leikkauspiste on E. Kulma BEC = 92° ja kaari BC on 98°. Laske jänteiden CA ja CD välinen kulma. Esitä lyhyesti perustelut.

97.1.4. Kartalla, jonka mittakaava on 1 : 20 000 on suorakulmion muotoinen metsäpalsta. Sen sivut kartalla ovat 3,4 cm ja 5,8 cm. Kuinka suuri on metsäpalsta todellisuudessa? Ilmoita pinta-ala hehtaareina.

97.1.5. Puolipallon muotoiseen maljaan mahtui 10 l vettä. Mikä on maljan läpimitta? Ilmoita tulos senttimetrin tarkkuudella.

97.1.6. Egyptissä vieraillut lukiolainen mittasi Suezin kanavan leveyden liikkuen vain toisella rannalla. Hän valitsi omalta puolelta rantaa pisteen A, joka oli vastapäätä vastarannalla olevan puun kanssa. Käveltyään rannan suuntaisesti 175 m tuli hän merkin B kohdalle ja jatkaen vielä 35 m, jonka jälkeen hän kääntyi kohtisuoraan rannalta poispäin. Kun hän oli kävellyt 44 m, oli hän samalla linjalla merkin B ja puun kanssa. Mikä oli kanavan leveys?

97.1.7. Laske kuutionavaruuslävistäjän ja a) viereisen särmän b) pohjatason välinen kulma.

97.1.8. Uima-altaan yläosa on ympyrän sektori, jonka keskuskulma on 240° ja säde 12,0 m. Reuna jatkuu ympyrän kaaren päätepisteisiin piirrettyjen tangenttien suuntaisena. Alaosa on taas ympyrän sektori, jonka kaari on 120° ja säde 7,0 m. Suora reunaosa on alemmankin sektorin kaaren päätepisteisiin piirretty tangentti. Laske altaan pinta-ala.

97.1.9. Suorakulmaisen kolmion sisään piirretty ympyrä sivuaa hypotenuusaa AB pisteessä P. Tämä piste jakaa hypotenuusan osiin, joiden pituudet ovat x ja y. Lausu kolmion pinta-ala x:n ja y:n avulla.

97.1.10. Todista: Jos piste P on yhtä kaukana janan AB päätepisteistä, niin se on janan keskinormaalilla.

1. Kolmio on tasakylkinen. $\angle A = \angle B = ½(180° - 42°) = 69°$. $\angle ABD = ½·69° = 34{,}5°$
$\angle ADB = 180° - 69° - 34{,}5° = 76{,}5°$

2. Ullakko on suora särmiö, jonka pohja on kolmio ja korkeus on ullakon pituus.
$V = A·h = ½ · 4{,}0\ m · 4{,}0\ m · 10\ m = 80\ m^3$

3. $\angle BAC = ½·98° = 49°$ kehäkulma on puolet keskuskulmasta ja vastaavasta kaaresta.
$\angle BEA = 180° - 92° = 88°$ ovat vieruskulmia
$\angle ABD = 180° - 88° - 49° = 43°$ kolmion kulmain summa on 180°
$\angle ACD = 43°$ Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret.

4. Ala kartalla = $3{,}4\ cm · 5{,}8\ cm = 19{,}7\ cm^2$; $19{,}7\ cm^2 : A = (1 : 20\ 000)^2 = 1 : 400\ 000\ 000$
$A = 400\ 000\ 000 · 19{,}7\ cm^2 = 7\ 880\ 000\ 000\ cm^2 = 78{,}8\ ha$ V: 79 ha.

5. $V = 10\ l$; $½ · 4/3 · \pi · r^3 = 10\ dm^3$ || : $2/3 · \pi$; $r^3 = 4{,}77\ dm^3$ || $\sqrt[3]{\ }$; $r = 1{,}68\ dm$
Halkaisija = $2 · 16{,}8\ cm = 34\ cm$

6. Olkoon viimeinen piste D. $\Delta PAB \sim \Delta DCB$ (kk) $\frac{AP}{44} = \frac{175}{35}$; $35AP = 7700$; $AP = 220$ (m)

7. a) Olkoon sivu = a, jolloin avaruuslävistäjä = $a\sqrt{3}$; $\cos \alpha = a : a\sqrt{3} = 1 : \sqrt{3}$; $\alpha = 54{,}7°$
b) Avaruuslävistäjän projektio pohjatasolla on pohjan lävistäjä = $a\sqrt{2}$
$\cos \beta = a\sqrt{2} : a\sqrt{3} = \sqrt{2/3}$; $\beta = 35{,}3°$

8. Piirretään keskipisteiden yhdysjana ja pienemmän ympyrän keskipisteestä tangentin suuntainen suora. Isomman ympyrän säteen kanssa muodostuu koululaisen kolmio, jonka lyhempi kateetti on 12 m - 7 m = 5 m, ja siis pitempi kateetti eli korkeus on $5\sqrt{3}$ m.
Koko ala muodostuu kahdesta sektorista ja kahdesta puolisuunnikkaasta.
$A = A_{ISO\ SEKTORI} + A_{PIKKUSEKTORI} + 2 · A_{PUOLISUUNNIKAS}$
$= \frac{240}{360} · \pi · 12^2 + \frac{120}{360} · \pi · 7^2 + 2 · \frac{12 + 7}{2} · 5\sqrt{3} = 301{,}6 + 51{,}3 + 164{,}5 = 520\ (m^2)$

9. Olkoon ympyrän keskipiste K sekä sivujen sivuamispisteet P, Q ja R sekä säde r.
Yhdistetään AK ja BK. AP = AQ = x ja BP = BR = y tangenttikulman kylkinä.
ABC:n ala koostuu neliöstä CQKR ja kolmioista AKQ = AKP sekä BKP = BKR.
$A = r^2 + 2·½rx + 2·½ry = r^2 + rx + ry$
Käytetään isoon kolmioon Pythagoraan teoreemaa $(x + r)^2 + (y + r)^2 = (x + y)^2$
$x^2 + 2rx + r^2 + y^2 + 2ry + r^2 = x^2 + 2xy + y^2$; $2r^2 + 2rx + 2ry = 2xy$ ||:2 ; $r^2 + rx + ry = xy$
Viimeisen yhtälön vasen puoli on sama kuin kolmion ala. Siis A = xy

10. OL: PA = PB VÄ: P on keskinormaalilla
TOD: Yhdistetään P janan AB keskipisteeseen K.
PA = PB (ol)
AK = BK (Keskipiste jakaa janan kahteen yhtä suureen osaan)
PK = PK (yhteinen sivu)
$\Delta AKP \cong \Delta BKP$ (sss)
$\angle AKP = \angle BKP$ (yhtenevien kolmioiden vastinosina)
= 90° (koska niiden summa on 180°)
Suora PK on keskinormaali ja siis P on keskinormaalilla.

97.2.1. Vastaa lyhyesti: a) 54° komplementtikulma on …? b) 81° vieruskulma on …? c) Jos tasakylkisen kolmion kantakulma on 71°, niin huippukulma on …? d) Jos ympyrän kehäkulma on 48°, niin vastaava keskuskulma on …? e) Jos ympyrän kaari on 80°, niin vastaava keskuskulma on …? f) Jos pisteestä ympyrälle piirretyt tangentit muodostavat 28° kulman, niin sivuamispisteisiin piirretyt säteet muodostavat … kulman.

97.2.2. Vinon ympyräkartion akselin ja pohjan välinen kulma on 60°, akselin pituus 72 cm sekä pohjan säde 25 cm. Laske kartion tilavuus.

97.2.3. Yhdenmuotoisten kolmioiden alat ovat $4{,}8\ m^2$ ja $1{,}2\ m^2$. Suuremman kolmion pisin sivu on 6,2 m. Mikä on pienemmän kolmion pisin sivu?

97.2.4. Torikauppiaan kappa on kuution muotoinen ja tilavuudeltaan 5 litraa. Laske kapan särmä. Miten paljon kappaan kuluu peltiä, kun se on yhdeltä sivulta auki?

97.2.5. Kaksi ympyrää leikkaa toisensa pisteissä A ja B. Pisteen A kautta on piirretty kaksi suoraa, joista toinen leikkaa ympyrät pisteissä C ja D sekä toinen pisteissä E ja F. C, D, E ja F eivät ole yhteistä jännettä AB vastaavalla kaarella. C ja E ovat samalla ympyrällä. Osoita lyhyesti perustellen, miksi kulmat CBE ja FBD ovat yhtä suuret.

97.2.6. Puolisuunnikkaan toinen kantasivu on kaksinkertainen toiseen kantasivuun verrattuna sekä korkeus 12 cm. Miten pitkät ovat kantasivut, kun puolisuunnikkaan ala on yhtä suuri kuin saman korkuisen neliön?

97.2.7. Tasakylkisen kolmion kanta on 10 m ja korkeus 12 m. Laske kolmion sisään piirretyn ympyrän säde.

97.2.8. Kolmelle ympyrällä on sama suora tangenttina. Kahden pienimmän ympyrän säteet ovat 2 ja 3. Keskikokoinen ympyrä sivuaa ulkopuolisesti kumpaakin muuta ympyrää. Laske suurimman ympyrän säde.

97.2.9. Kaksi yhdensuuntaista suoraa erottaa ympyrästä jänteet AB ja CD, jotka ovat samalla puolella keskipistettä. Kaari AB on 120° ja kaari CD 60°. Laske ympyrästä suorien väliin jäävän osan pinta-ala, kun ympyrän säde on 15 cm.

97.2.10. Todista: Jos piste on yhtä etäällä kulman kyljistä, niin se on kulman puolittajalla.

1. a) $\alpha = 90° - 54° = 36°$ b) $\alpha = 180° - 81° = 99°$ c) $\alpha = 180° - 2\cdot71° = 180° - 142° = 38°$
d) $\alpha = 2\cdot48° = 96°$ e) $\alpha = 80°$ f) $\alpha = 180° - 28° = 152°$

2. $h/a = \sin 60°$; $h = a \cdot \sin 60° = 72\text{ cm} \cdot \sin 60° = 63{,}2\text{ cm}$
$V = 1/3 \cdot \pi r^2 \cdot h = 1/3 \cdot \pi \cdot (25\text{ cm})^2 \cdot 63{,}2\text{ cm} = 41360\text{ cm}^3 = 41\text{ dm}^3$

3. $(x/6{,}2\text{ m})^2 = A_1/A_2$; $(x/6{,}2\text{ m})^2 = 1{,}2\text{ m}^2/4{,}8\text{ m}^2$; $(x/6{,}2\text{ m})^2 = ¼$; $x/6{,}2\text{ m} = ½$; $x = 3{,}1\text{ m}$

4. $a^3 = 5\text{ dm}^3 \;||\; \sqrt[3]{\;}$; $a = 1{,}71\text{ dm}$; $A = 5 \cdot (1{,}71\text{ dm})^2 = 14{,}6\text{ dm}^2$

5. $\angle CBE = \angle CAE$ (samaa kaarta vastaavina kehäkulmina) $= \angle FAD$ (ristikulmina) $= \angle FBD$ (samaa kaarta vastaavina kehäkulmina)

6. $½(a + 2a) \cdot 12 = 12\cdot12$; $½ \cdot 3a = 12$; $3a = 24$; $a = 8$. V: Kantasivut ovat 8 cm ja 16 cm.

7. Puolikaskolmiosta saadaan Pythagoraan lauseella $k^2 = 5^2 + 12^2 = 169$; $k = 13$
$r = \dfrac{2A}{a + b + c} = \dfrac{2 \cdot ½ \cdot 10 \cdot 12}{10 + 13 + 13}\text{ m} = 3\dfrac{1}{3}\text{ m}$

8. Olkoon ympyröiden keskipisteet P (pienimmän kp) K ja S. Piirretään P:stä ja K:sta tangentin suuntaiset suorat ja sivuamispisteisiin piirretyt tangentit. Nämä leikkaavat pisteissä A ja B. Olkoon suurimman ympyrän säde = x. $\Delta PKA \sim \Delta KSB$ (kk) $\dfrac{AK}{BS} = \dfrac{PK}{KS}$; $\dfrac{1}{x - 3} = \dfrac{5}{3 + x}$; $5x - 15 = 3 + x$; $4x = 18$; $x = 4½$

9. Piirretään jänteille korkeusjana, joka puolittaa jänteet AB ja CD pisteissä E ja F.
Keskuskolmioiden puoliskot AKE ja CKF ovat yhtä suuria ”koululaisen” kolmioita
$A = A_{\text{SEKTORI AKB}} - A_{\text{KOLMIO AKB}} - (A_{\text{SEKTORI CKD}} - A_{\text{KOLMIO CKD}})$
$= A_{\text{SEKTORI AKB}} - A_{\text{KOLMIO AKB}} - A_{\text{SEKTORI CKD}} + A_{\text{KOLMIO CKD}} = A_{\text{SEKTORI AKB}} - A_{\text{SEKTORI CKD}}$
$= \dfrac{120}{360} \cdot \pi r^2 - \dfrac{60}{360} \cdot \pi r^2 = \dfrac{60}{360} \cdot \pi r^2 = \dfrac{1}{6} \cdot \pi \cdot (15\text{ cm})^2 = 118\text{ cm}^2$

10. OL: Piste P on kulman K kyljistä yhtä kaukana ts. etäisyydet PA = PB
VÄ: PK puolittaa kulman K
TOD: PA = PB (oletus) & PK = PK (yhteinen) & $\angle KAP = \angle KBP$ (= 90°)
& Muut kulmat samanlaatuisia (= teräviä) koska kolmioon ei mahdu toista yli 90° kulmaa.
$\Delta KAP \cong \Delta KBP$ (sske) $\Rightarrow \angle AKP = \angle BKP$ (yhtenevien kolmioiden vastinosina)
TS. KP puolittaa kulman AKB

97.3.9. Kolmion kaksi sivua ovat 6 ja 9 sekä suurin kulma on 80°. Laske kolmion pienin kulma. Huomaa kaksi vaihtoehtoa.

9. JOKO suurin sivu 80° kulman vastainen sivu x, joka saadaan kosinilauseella
$x^2 = 6^2 + 9^2 - 2\cdot6\cdot9\cdot\cos 80° = 98{,}2$; $x = 9{,}9$. Pienin kulma on pienintä sivua 6 vastaava
Sinilauseella $\dfrac{\sin\alpha}{\sin 80°} = \dfrac{6}{9{,}9}$; $\sin\alpha = \dfrac{6}{9{,}9}\sin 80° = 0{,}596$; $\alpha = 36{,}6°$
TAI suurin sivu on 9 ja suurin kulma 80°, jolloin 6 vastainen kulma saadaan sinilauseella.
$\dfrac{\sin\alpha}{\sin 80°} = \dfrac{6}{9}$; $\sin\alpha = \dfrac{6}{9}\sin 80° = 0{,}656$; $\alpha = 41{,}0°$ ja kolmas kulma $= 180° - 41{,}0° - 80° = 59° \Rightarrow$ pienin 41°

97.4.10. Mies kulki suoraan pohjoiseen ja näki paikasta A oikealla puolella radiomaston 40° kulmassa kulkusuuntaansa nähden. Kuljettuaan 200 metriä hän näki maston paikasta B 70° kulmassa. Kuinka kaukana masto oli matkan AB keskikohdasta?

10. $\angle ABM = 180° - 70° = 110°$. $\angle AMB = 180° - 110° - 40° = 30°$ ΔABM ja sinilause: $\frac{BM}{200} = \frac{\sin 40°}{\sin 30°}$; $BM = \frac{\sin 40°}{\sin 30°} \cdot 200\text{ m} = 257{,}1\text{ m}$ ΔKBM ja kosinilause: $KM^2 = 100^2 + 257{,}1^2 - 2\cdot 100\cdot 257{,}1\cdot\cos 110° = 93696$; $KM = 306\text{ m}$

97.5.4. Kolmion kaksi sivua ovat pituudeltaan 4,6 cm ja 7,2 cm sekä niiden välinen kulma on 52°. Määritä kolmion kolmannen sivun pituus ja muut kaksi kulmaa.

4. Olkoon $\alpha = 52°$, AB = 7,2 cm ja AC = 4,6 cm.   Kosinilause: $a^2 = 7{,}2^2 + 4{,}6^2 - 2\cdot 7{,}2\cdot 4{,}6\cdot\cos 52° = 32{,}22$; $a = 5{,}68 = 5{,}7$(cm)   Sinilause: $\frac{\sin\beta}{\sin 52°} = \frac{4{,}6}{5{,}68}$; $\sin\beta = \frac{4{,}6}{5{,}68}\cdot\sin 52°$; $\sin\beta = 0{,}638$; $\beta = 39{,}7°$ (tai $\beta = 140{,}3°$)   Kolmion kulmien summa: $\gamma = 180° - 52° - 39{,}7° = 88{,}3°$

98.1.1. Suorakulmaisen kolmion terävä kulma on 34° ja hypotenuusa 8 cm. Laske kateetit.

98.1.2. Puolisuunnikkaan pinta-ala on 272 cm^2, korkeus 16 cm ja toinen yhdensuuntaisista sivuista 6 cm. Kuinka pitkä on toinen yhdensuuntaisista sivuista?

98.1.3. Henkilön silmät ovat 150 cm korkeudella. Hän seisoo 16 m päässä kerrostalosta ja 2 m päässä linja-auton pysäkkimerkistä, jolloin 3 m korkea merkki näyttää olevan samalla linjalla kerrostalon harjan kanssa. Laske kerrostalon korkeus.

98.1.4. Maastoesteiden takia pisteiden P ja Q välistä etäisyyttä ei voi mitata suoraan. Siksi valitaan apupiste R ja mitataan PR:n jatkeeksi jana RP´ = PR ja QR:n jatkeeksi RQ´= QR. Piirrä kuva. Osoita, että QP:n pituus on sama kuin Q´P´:n pituus.

98.1.5. Suorakulmaisen kolmion terävä kulma on 30° ja hypotenuusan vastainen korkeus 3. Laske tarkat arvot kolmion sivujen pituuksille.

98.1.6. Ympyrän ulkopuolella olevasta pisteestä A on piirretty ympyrälle tangentti, joka sivuaa ympyrää pisteessä P. PB on ympyrän halkaisija. Jana AB leikkaa kehän pisteessä C. Määritä kaarien PC, CB ja BP asteluvut, kun kulma PAC on 62°.

98.1.7. Tasakylkisen suorakulmaisen kolmion kateetti on a. Kolmiosta on leikattu pois suoran kulman kärki keskipisteenä piirretty ½a-säteinen neljännesympyrä. Mikä on jäljelle jääneen alueen pinta-ala? Tämä alue pyörähtää toisen kateetin ympäri. Laske syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus.

98.1.8. Yhdenmuotoisten vesiämpäreiden pohjien pinta-alojen suhde on 4 : 9. Isompaan ämpäriin mahtuu 17 litraa vettä. Mikä on pienemmän ämpärin vetoisuus?

98.1.9. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin pohjasärmä on 10 cm ja sivusärmä 13 cm. Laske a) pyramidin korkeus b) sivusärmän ja pohjan välinen kulma c) sivutahon ja pohjan välinen kulma.

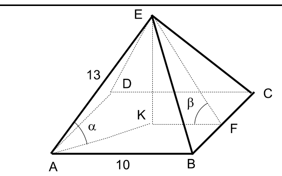
98.1.10. Kaksi ympyrää, joiden säteet ovat 1 ja 2 sivuavat toisiaan ulkopuolisesti. Niiden yhteiset tangentit rajaavat tasakylkisen kolmion. Kuinka pitkät ovat tämän kolmion sivut?

1. $\frac{a}{8\text{ cm}} = \sin 34°$; $a = \sin 34°\cdot 8\text{ cm} = 4{,}5\text{ cm}$; $\frac{b}{8\text{ cm}} = \cos 34°$; $b = \cos 34°\cdot 8\text{ cm} = 6{,}6\text{ cm}$
2. $\frac{a+6}{2}\cdot 16 = 272$ ‖ : 8 ; $a + 6 = 34$; $a = 28$ (cm)
3. $\frac{h - 1{,}5}{1{,}5} = \frac{16}{2}$; $h - 1{,}5 = 12$; $h = 13{,}5$ (m)
4. QR = RQ´ (mitattu) & PR = RP´ (mitattu) & $\angle PQR = \angle P'Q'R$ (ristikulmina) $\Rightarrow \Delta PQR \cong \Delta P'Q'R$ (sks) $\Rightarrow QP = Q'P'$ (yhtenevien kolmioiden vastinosina)
5. ΔACD koulul. kolmio $\Rightarrow AC = 2\cdot CD = 2\cdot 3 = 6$ ΔBCD koulul. kolmio $\Rightarrow BD = \frac{CD}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ ja $BC = 2\cdot BD = 2\sqrt{3}$ ΔABC koulul. kolmio $\Rightarrow AB = 2\cdot BC = 4\sqrt{3}$ V: Sivut 6, $2\sqrt{3}$ ja $4\sqrt{3}$
6. $\angle PCB = 90°$ (puoliympyrän sis. kehäkulmana) ; $\angle APC = 90° - 62° = 28°$ Kaari PC = 2·28° = 56° (kaari = keskuskulma = 2 x kehäkulma)   Kaari CB = 180° - 56° = 124° ja kaari BP = 180°

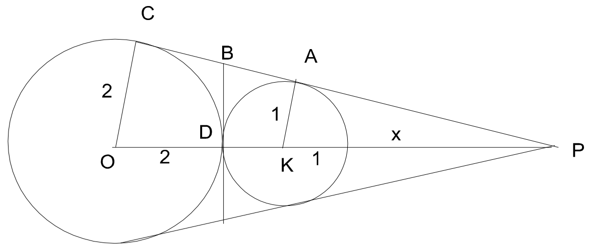
7. $A = A_{KOLMIO} - A_{NELJÄNNESYMPYRÄ} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a - \frac{1}{4} \cdot \pi(\frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{2}a^2 - 1/16 \cdot \pi a^2$
$V = V_{KARTIO} - V_{PUOLIPALLO} = 1/3 \cdot \pi a^2 \cdot a - \frac{1}{2} \cdot 4/3 \cdot \pi(\frac{1}{2}a)^3 = 1/3\, \pi a^3 - 1/12\, \pi a^3 = \frac{1}{4}\, \pi a^3$

8. $\frac{A_P}{A_I} = \frac{4}{9} = k^2$; $k = \frac{2}{3}$; $\frac{V_P}{17\text{ l}} = k^3 = \frac{8}{27}$; $V_P = \frac{8}{27} \cdot 17\text{ l} = 5{,}0\text{ l}$

9. a) pohjan lävistäjä $AC = \sqrt{2} \cdot AB = 10\sqrt{2}$; $AK = 5\sqrt{2}$
$h^2 + AK^2 = AE^2$; $h^2 + 25 \cdot 2 = 169$; $h^2 = 119$; $h = \sqrt{119}$
ΔAKE : $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{2}}{13}$; $\alpha = 57{,}0°$
ΔEKF : $\tan \beta = \frac{\sqrt{119}}{5}$; $\beta = 65{,}4°$



10. $\Delta AKP \sim \Delta COP$ $\frac{x+1}{x+4} = \frac{1}{2}$; $2x + 2 = x + 4$; $x = 2$
ΔAKP ; $AP^2 + 1^2 = 3^2$; $AP = \sqrt{8}$
$\Delta AKP \sim \Delta DBP$; $\frac{BD}{1} = \frac{4}{2\sqrt{2}}$; $BD = \sqrt{2} \Rightarrow$ sivu $= 2\sqrt{2}$
ΔBDP ; $BP^2 = (\sqrt{2})^2 + 4^2 = 2 + 16 = 18$; $BP = 3\sqrt{2}$
V: sivut $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ ja $2\sqrt{2}$



98.2.1. Suorakulmaisen kolmion kateetti on 5 cm ja viereinen kulma 35°. Laske toinen kateetti ja hypotenuusa.

98.2.2. Ympyrän sektorin keskuskulma on 60°. Laske sektorin a) kaari, kun säde on 10 cm b) säde, kun kaari on 10 cm.

98.2.3. Auringonpimennyksen aikaan kuu peittää juuri auringon eli molemmat näyttävät maasta katsottuna yhtä suurilta. Mikä on auringon halkaisija, kun aurinko on 150 000 000 km päässä maasta, kuu 400 000 km päässä ja kuun halkaisija on 3500 km?

98.2.4. Ympyrän kehän pisteeseen P on piirretty jänne PA ja tangentti PB. B on eräs tangentin piste samalla puolella sivuamispistettä kuin A. Kulma APB on 28°. Isomman kaaren AP keskipiste on C. Kuinka suuri on kulma CAP?

98.2.5. Tasakylkisen kolmion kantakulman puolittaja jakaa kantaa vastaan piirretyn korkeuden huipusta lukien suhteessa 3:2. Kuinka pitkä on kanta, kun kylki on 90 mm?

98.2.6. Suoran, umpinaisen ympyrälieriön pohjan säde on 3 ja kokonaispinta-ala 54π. Laske lieriön korkeus ja tilavuus.

98.2.7. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin pohjasärmä on 6 cm ja sivutahon korkeus 5 cm. Laske a) vaipan ala b) tilavuus c) sivu- ja pohjatahon välinen kulma.

98.2.8. Todista: Jos nelikulmion lävistäjät puolittavat toisensa, niin nelikulmio on suunnikas.

98.2.9. Yhdenmuotoisiin laseihin mahtuu nestettä isompaan 5 dl ja pienempään 2 dl. Isomman ulkopinnan ala on 2 dm^2. Kuinka suuri on pienemmän lasin ulkopinnan ala?

98.2.10. Neliön ABCD sisään on piirretty tasasivuinen kolmio siten, että yksi kärki on pisteessä A toinen sivulla BC ja kolmas sivulla CD. Laske kolmion sivun pituus, kun neliön sivu on 1.

1. Olkoon x kulman vastainen kateetti ja y hypotenuusa.
$\frac{x}{5} = \tan 35°$; $x = 5 \cdot \tan 35° = 3{,}5$ (cm) ; $\frac{5}{y} = \cos 35°$; $y = \frac{5}{\cos 35°} = 6{,}1$ (cm)

2. a) $b = \frac{60°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 10\text{ cm} = 10{,}5$ cm b) $10\text{ cm} = \frac{60°}{360°} \cdot 2\pi \cdot r$; $r = 9{,}5$ cm

3. Tasakylkiset kolmiot, joissa huippukulmana on kuun ja auringon näkökulmat (jotka yhtä suuret) ja kantoina kuun ja auringon halkaisijat, ovat yhdenmuotoisia
$\frac{d_A}{d_K} = \frac{et_A}{et_K}$; $d_A = \frac{150\,000\,000}{400\,000} \cdot 3500\text{ km} = 1\,300\,000\text{ km}$

4. Kulma BPA on kehäkulma, jolloin vastaava keskuskulma ja kaari AP = 2·28° = 56° Suurempi kaari ACP = 360° - 56° = 304°. C on keskipiste, joten kaari CP = ½ · 304° = 152° Kehäkulma CAP = ½ · 152° = 76°
5. Puolikaskolmiossa kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa $\frac{\text{kannan puolisko}}{\text{kylki}} = \frac{2}{3}$; $\frac{x}{90\text{ mm}} = \frac{2}{3}$; x = 60 mm. Kanta = 2· 60 mm = 120 mm
6. $A_{KOK} = 2 \cdot A_P + A_V = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 9 + 2 \cdot \pi \cdot 3h = 54\pi$; $18\pi + 6\pi h = 54\pi$ $6\pi h = 36\pi$; h = 6 ; $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 54\pi$
7. a) $A_V = 4 \cdot A_\Delta = 4 \cdot ½ \cdot 5 \cdot 6 = 60\ (cm^2)$ b) Kolmiosta ”kärki - pohjan keskipiste - pohjasärmän keskipiste” saadaan $h^2 + 3^2 = 5^2$; h = 4 . $V = 1/3 \cdot 6^2 \cdot 4 = 48\ (cm^3)$ c) samasta kolmiosta trigonometrialla cos α = 3/5 ; α = 53,1°
8. Olkoon nelikulmio ABCD ja lävistäjien leikkauspiste K OLETUS: AK = KC ja BK = KD VÄITÖS: ABCD on suunnikas TODISTUS: 1° AK = KC (oletus) 2° BK = KD (oletus) 3° $\angle$ AKB = $\angle$ CKD (ristikulmina) 4° Δ AKB $\cong$ Δ CKD (sks) 5° $\angle$ KAB = $\angle$ DCK (vastinosina) 6° AB || CD (samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret) 7° samoin kolmioista AKD ja CKB saadaan AD || BC 8° täten ABCD on suunnikas (määritelmä, vastakkaiset sivut yhdensuuntaiset)
9. $\frac{V_{ISO}}{V_{PIENI}} = \frac{5}{2} = k^3$; $k = \sqrt[3]{5/2} \approx 1{,}357$; $\frac{A_{ISO}}{A_{PIENI}} = k^2$; $A_{PIENI} = \frac{A_{ISO}}{k^2} = \frac{2\text{ dm}^2}{1{,}357^2} = 1{,}1\text{ dm}^2$
10. Olkoon neliö ABCD ja sisällä oleva tasasivuinen kolmio AEF, missä E on sivulla BC ja F sivulla CD. Olkoon lisäksi EF:n ja lävistäjän AC leikkauspiste K Olkoon EK = x $\Rightarrow$ KC = x ja EC = $x\sqrt{2}$ sekä AE = EF = 2x $\Rightarrow$ BE = 1 - $x\sqrt{2}$ Kolmiosta ABE saadaan Pythagoraan teoreeman mukaan $(2x)^2 = 1^2 + (1 - x\sqrt{2})^2$ $4x^2 = 1 + 1 - 2\sqrt{2} \cdot x + 2x^2$; $2x^2 + 2\sqrt{2} \cdot x - 2 = 0$; $x^2 + \sqrt{2} \cdot x - 1 = 0$ $x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2+4}}{2} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$. Sivu = 2x = $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

98.3.1. Tasakylkisen kolmion kantakulma on 50° ja kylki 6,5 cm. Laske kanta ja korkeus.

98.3.2. Kuution pinta-ala on 96 cm^2. Laske kuution a) särmä b) tilavuus c) avaruuslävistäjä.

98.3.3. Suorakulmaisen kolmion kateetti on 5 ja hypotenuusa 13. Pitemmällä kateetilla, 3 yksikön päässä suorankulman kärjestä on piste, josta on piirretty lyhemmän kateetin suuntainen suora. Kuinka suuri jana jää tästä suorasta kolmion sisään?

98.3.4. Jana AB on ympyrän halkaisija. Pisteeseen A on piirretty tangentti ja sillä oleva piste C on yhdistetty pisteeseen B. BC leikkaa ympyrän kehän pisteessä D. Perustele miksi kolmiot ABD ja ACD ovat yhdenmuotoisia.

98.3.5. Kolmion sivut ovat 4, 5 ja 6. Suuruudeltaan suurimmalle kulmalle piirretään puolittaja. a) Miten suuret osat kulmanpuolittaja erottaa vastaisesta sivusta? b) Missä suhteessa tämä kulmanpuolittaja jakaa kolmion alan?

98.3.6. Suoran ympyräkartion pohjan säde on 6 ja sivujana 10. Laske kartion a) vaipan ala b) tilavuus.

98.3.7. Todista: Jos nelikulmio on suunnikas, niin sen lävistäjät puolittavat toisensa.

98.3.8. Suorakulmaisen kolmion sisään piirretyn ympyrän sivuamispiste jakaa hypotenuusan osiin, joiden pituudet ovat 2 ja 8. Laske ympäri piirretyn ympyrän säde.

98.3.9. Neliön ABCD sisään on piirretty tasasivuinen kolmio EFG, jonka kärki E on sivun CD keskipiste ja pisteet F ja G ovat sivuilla AD ja BC. Laske nelikulmion ABGF ala, kun neliön ABCD sivun pituus on 2.

98.3.10. Yhdenmuotoisten astioiden tilavuudet ovat 1 ja 3 litraa. Ne on tehty yhtä paksusta pellistä. Laske suuremman massa, kun pienemmän massa on 0,40 kg.

1. $\frac{½a}{6{,}5} = \cos 50°$; a = 13·cos 50° = 8,4 (cm) ; $\frac{h}{6{,}5} = \sin 50°$; h = 6,5·sin 50° = 5,0 (cm)
2. a) $6a^2 = 96$; $a^2 = 16$; a = 4 (cm) b) $V = a^3 = 4^3 = 64\ (cm^3)$ c) $l = a\sqrt{3} = 4\sqrt{3} = 6{,}9$ (cm)

3. Kolmiot ovat yhdensuuntaiset ; $\frac{x}{5} = \frac{9}{12}$; 12x = 45 ; x = 3 ¾
4. $\angle CAD = \angle ABD$, koska ne ovat samaa kaarta AD vastaavia kehäkulmia $\angle CDA = \angle ADB$, koska puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora, jolloin myös sen vieruskulma on suora. $\Delta CAD \sim \Delta ABD$, koska niissä on kaksi paria yhtä suuria vastinkulmia.
5. Koska kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa, voidaan vastaisen sivun (6) osia merkitä pituudeltaan 4x ja 5x. 4x + 5x = 6 ; 9x = 6 ; x = 2/3 Osat ovat siis $4 \cdot 2/3 = 8/3$ ja $5 \cdot 2/3 = 10/3$ Osakolmioilla on kannat samalla sivulla (6), jolloin korkeudet ovat yhtä suuret. Tällöin alojen suhde on sama kuin kantojen pituuksien suhde eli 4:5
6. Akselileikkauskuvion puolikaskolmiosta voidaan Pythagoraan lauseella laskea korkeus $h^2 + 6^2 = 10^2$; $h^2 = 100 - 36$; $h^2 = 64$; h = 8 a) $A = \pi rs = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi$ b) $V = 1/3 \cdot \pi r^2 h = 1/3 \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi$
7. OL: ABCD on suunnikas ; VÄ: lävistäjät AC ja BD puolittavat toisensa TOD: Olkoon lävistäjien leikkauspiste E. AB = CD (suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät) $\angle AEB = \angle CED$ (ristikulmat ovat yhtä suuret) $\angle BAE = \angle DCE$ (kun suora leikkaa kahta yhdensuuntaista, ovat samankohtaiset kulmat yhtä suuret) $\Delta ABE \cong \Delta CDE$ (kks) AE = CE ja BE = ED (yhtenevien kolmioiden vastinosina)
8. Suorakulmaisen kolmion sivut ovat sisään piirretyn ympyrän tangenttikulman kylkiä. Tangenttikulman kyljet ovat yhtä pitkät, joten sivujen osat ovat 2 ja 8, 2 ja r sekä 8 ja r Pyth. $(2 + r)^2 + (8 + r)^2 = 10^2$; $4 + 4r + r^2 + 64 + 16r + r^2 = 100$; $2r^2 + 20r - 32 = 0$ $r = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 256}}{4} = \frac{-20 \pm \sqrt{16 \cdot 41}}{4} = \frac{-20 \pm 4\sqrt{41}}{4} = \sqrt{41} - 5$
9. FG = AB = 2. Olkoon FG:n keskipiste K. Δ FKE on koululaisen kolmio. EH = $\sqrt{3}$ AF = $2 - \sqrt{3}$. A = $2 \cdot (2 - \sqrt{3})$
10. $k^3 = \frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{1} = 3$; $k = \sqrt[3]{3}$. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{A_1 \cdot d}{A_2 \cdot d} = \frac{A_1}{A_2} = k^2 = (\sqrt[3]{3})^2 = \sqrt[3]{9}$; $m_1 = \sqrt[3]{9} \cdot 0{,}40$ kg = 0,83 kg

98.4.2. Kolmion kanta on 47 mm ja kantakulmat 44° ja 32°. Laske muiden sivujen pituudet.

98.4.4. Kolmion sivujen pituudet ovat 5, 6 ja $\sqrt{11}$. Laske pienin kulma ja alan tarkka arvo.

2. $\angle C = 180° - 44° - 32° = 104°$. $\frac{b}{47} = \frac{\sin 32°}{\sin 104°}$; b = 26 (mm) ; $\frac{a}{47} = \frac{\sin 44°}{\sin 104°}$; a = 34(mm)
4. Pienin kulma on pienimmän sivun ($\sqrt{11}$) vastainen. Käytetään kosinilausetta. $(\sqrt{11})^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos a$; $11 = 25 + 36 - 60\cos\alpha$; $\cos\alpha = 5/6$; $\alpha = 33{,}6°$ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\sin^2\alpha = 1 - 25/36 = 11/36$; $\sin\alpha = \sqrt{11} / 6$ (+, koska kolmion kulma) $A = ½bc\sin\alpha = ½ \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sqrt{11} / 6 = 2½ \cdot \sqrt{11}$

98.5.2. Kolmion yksi kulma on 62°, viereinen sivu 4,1cm ja vastainen sivu 3,7cm. Mitkä ovat kolmion kulmat?

98.5.6. Säännöllisen viisikulmion sivu on 2,0 cm. Kuinka pitkiä ovat viisikulmion lävistäjät?

2. Olkoon viereisen sivu 4,1 cm vastainen kulma a. Tällöin sinilauseelle saadaan $\frac{\sin\alpha}{\sin 62°} = \frac{4{,}1}{3{,}7}$; $\sin\alpha = \frac{4{,}1}{3{,}7} \cdot \sin 62°$; $\sin\alpha = 0{,}978$; $\alpha = 78°$ tai $\alpha = 102°$ Kolmas kulma on 180° - 62° - 78° = 40° tai 180° - 62° - 102° = 16°
6. Viisikulmion kulmain summa on $(5 - 2) \cdot 180° = 540°$. Yksi kulma on nyt 540°:5 = 108° Kosinil.: $x^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 108°$; $x^2 = 4 + 4 - 8 \cdot \cos 108°$; $x^2 = 10{,}47$; x = 3,24 cm

99.1.1. Kolmiossa ABC on kulma A = 42° ja kulma C = 118°. Sivulla AB on piste E ja sivulla BC piste D siten, että kulma DEB on 50°. Laske kulmat ABC ja CDE.

99.1.2. Tasakylkisen kolmion piiri on 15 cm. Sen kyljet ovat 1,5 cm pitemmät kuin kanta. Laske kolmion ala.

99.1.3. Ympyrän kehällä on pisteet A, B, C ja D vastapäivään tässä järjestyksessä. Piste P on jänteiden BD ja AC leikkauspiste. Kulma ADB = 48° ja kulma APB = 116°. Laske kulman DBC suuruus ja janan PB pituus, kun AP = 4 cm, PC = 3 cm ja PD = 5 cm.

99.1.4. Koululle aiotaan tehdä A2-kokoiselle (420 mm x 594 mm) arkille Suomen kartta. Koko korkeus käytetään hyväksi, mutta alareunaan jätetään 9 mm tyhjä tila tekijöiden nimille.
a) Mikä tulee kartan mittakaavaksi, kun Suomen suurin pituus on 1170 km?
b) Mikä on Päijänteen pinta-ala, kun se kartalla arvioidaan olevan 2,6 cm^2?

99.1.5. Kaksi matkapuhelinmastoa näkyy paikkaan, jonka etäisyys toisesta mastosta on 5,27 km ja toisesta 3,16 km. Tähtäyssuunnat muodostavat 72°50' suuruisen kulman. Kuinka etäällä mastot ovat toisistaan? Etäisyydet mitataan vaakasuorasti, eikä maaston mahdollisia korkeuseroja oteta huomioon.

99.1.6. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusalle piirretty korkeusjana jakaa hypotenuusan osiin, joiden pituudet ovat 2 ja 6. Kuinka pitkä on alkuperäisen kolmion pitempi kateetti?

99.1.7. Laivasta havaitaan yhtä aikaa kaksi majakkaa M ja P. Majakka M on 22° ja P 71° laivan kulkusuunnasta oikealle. Merikortin mukaan kulkusuunta muodostaa 35° kulman M:n ja P:n kautta kulkevan suoran kanssa, ja väli MP on 16 km. Kuinka kaukana M:stä laiva oli havaintohetkellä?

99.1.8. Todista: Jos piste yhtä etäällä kulman kyljistä, niin se on kulman puolittajalla.

99.1.9. Suorakulmion pituus on kaksinkertainen leveyteen verrattuna. Suorakulmiolla on sama piiri kuin eräällä ympyrällä. Mikä on suorakulmion ja ympyrän alojen suhde?

99.1.10. Pallo on piirretty säännöllisen kolmisivuisen särmiön sisään siten, että särmiön kaikki tahot sivuavat palloa. Kuinka monta prosenttia on pallon tilavuus särmiön tilavuudesta?

1. ΔABC: $42° + 118° + \beta = 180°$; $\beta = 20°$; ΔBDE: $\angle CDE = \beta + \angle DEB = 20° + 50° = 70°$
2. Olkoon kanta = x, jolloin kylki = x + 1,5. Piiri = 15 ; x + (x + 1,5) + (x + 1,5) = 15 ; 3x = 12 x = 4. Piirretään kannalle korkeusjana, joka puolittaa kannan. PYTH: $h^2 + 2^2 = 5{,}5^2$; $h^2 = 26{,}25$; $h \approx 5{,}12$; $A = ½\cdot4\cdot5{,}12 = 10{,}2$ (cm^2)
3. Kehäkulmat ADB ja ACD ovat yhtä suuret eli $\angle ACB = 48°$ Kolmion kahden kulman summa = kolmannen ulkokulma ΔBCP : $\beta + 48° = 116°$; $\beta = 68°$ $\Delta APD \sim \Delta BCP$ (kehäkulmat D = C sekä A = B). $\frac{PB}{PA} = \frac{PC}{PD}$; $\frac{x}{4} = \frac{3}{5}$; 5x = 12 ; x = 2,4 (cm)
4. a) $k = \frac{\text{matka kartalla}}{\text{matka luonnossa}} = \frac{594\text{ mm - 9 mm}}{1170\text{ km}} = \frac{585\text{ mm}}{1170\,000\,000\text{ mm}} = \frac{1}{2\,000\,000}$ b) $\frac{\text{ala kartalla}}{\text{ala luonnossa}} = k^2$; $\frac{2{,}6\text{ cm}^2}{x} = \frac{1}{(2\cdot10^6)^2}$; $x = 4\cdot10^{12}\cdot2{,}6\text{ cm}^2 = 10\,400\,000\,000\,000\text{ cm}^2 \approx 1000\text{ km}^2$
5. Kosinilauseella: $x^2 = 5{,}27^2 + 3{,}16^2 - 2\cdot5{,}27\cdot3{,}16\cdot\cos(72 + 50/60) = 28{,}8$; x = 5,28 (km)
6. Olkoon suorakulmainen kolmio ABC, missä hypotenuusalle piirretty korkeusjana on CD. $\Delta BCD \sim \Delta BAC$ (kk) ; $\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}$; $\frac{x}{8} = \frac{6}{x}$; $x^2 = 48$; $x = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$
7. Olkoon laivan kulkusuunnan ja majakoiden kautta kulkevan suoran leikkauspiste Q sekä laiva pisteessä L. $\angle LQM = 35°$, $\angle QLM = 22°$, $\angle MLP = 71° - 22° = 49°$, $\angle LMP = 22° + 35° = 57°$, $\angle LPM = 180° - 49° - 57° = 74°$ Sinilause: $\frac{x}{16\text{ km}} = \frac{\sin 74°}{\sin 49°}$; x = 20 km
8. OL: Pisteen P etäisyydet kulman A kyljistä ovat yhtä suuret eli PB = PC VÄ: Piste P on kulmanpuolittajalla eli $\angle PAB = \angle PAC$ TOD: PB = PC (oletus) $\angle B = \angle C$ (= 90°) AP = AP (yhteinen) $\angle PAB$ ja $\angle PAC$ ovat teräviä (kolmioissa on 90° kulma, joten niissä ei tylppiä kulmia) $\Delta PAB \cong \Delta PAC$ (sske) $\angle PAB = \angle PAC$ (yhtenevien kolmioiden vastinosina)
9. Olkoon suorakulmion sivut x ja 2x sekä ympyrän säde r. $x + 2x + x + 2x = 2\pi r$; $x = \pi r/3$ $A_{YMP} = \pi r^2$; $A_{SK} = x\cdot2x = 2x^2 = 2\pi^2r^2/9$; $A_{SK} : A_{YMP} = 2\pi^2r^2/9 : \pi r^2 = 2\pi/9 \approx 0{,}70$
10. Ylhäältä katsottuna näyttää kuin ympyrä sivuaisi tasasivuisen kolmion sivuja. Taulukkokirjan mukaan tasasivuisen kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on $r = a\sqrt{3} / 6$ Särmiön pohjan pinta-ala on $a^2\sqrt{3} / 4$ ja korkeus on $2r = a\sqrt{3} / 3$ $V_{PALLO} = 4/3\cdot\pi r^3 = 4/3\cdot\pi a^3\cdot3\sqrt{3} / 216 = \pi a^3\sqrt{3} / 54$; $V_{SÄRMIÖ} = a^2\sqrt{3} / 4 \cdot a\sqrt{3} / 3 = a^3 / 4$ $V_{PALLO} : V_{SÄRMIÖ} = \pi a^3\sqrt{3} / 54 : a^3 / 4 = 2\pi\sqrt{3} / 27 \approx 0{,}403 = 40{,}3\%$

99.2.1. Kolmion ABC kulma A on 64°. Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on K sekä sivuamispisteet kolmion sivuilla ovat D, E ja F, joista piste F on sivulla BC. Laske kulmat DKE ja DFE.

99.2.2. Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 4 cm ja 8 cm sekä pinta-ala 30 cm^2. Mikä on puolisuunnikkaan korkeus?

99.2.3. Kolmion kaksi kulmaa on 65° ja 48° sekä edellisen vastainen sivu 7,2 cm. Laske muiden sivujen pituudet.

99.2.4. Kolmiossa ABC on kulma A = 30°, kulma B = 45 ° ja sivu AC pituudeltaan 2. Laske sivujen AB ja BC pituudet tarkkana arvona.

99.2.5. Kolmion sivut ovat 4,5 cm, 6,2 cm ja 5,7 cm. Laske kolmion pienimmän kulman suuruus.

99.2.6. Suorakulmion pitempi sivu on 10. Kun suorakulmion toisesta päästä leikataan pois neliö, jonka sivun pituus on suorakulmion lyhemmän sivun suuruinen, on jäljelle jäänyt suorakulmio alkuperäisen suorakulmion kanssa yhdenmuotoinen. Laske neliön sivu.

99.2.7. Pariisin Eiffel-torni on 300 m korkea ja painaa 8000 tonnia. Turisti haluaa tilata yhden kilogramman painoisen tornin tarkan mallin samasta raudasta valmistettuna. Kuinka korkea mallista tulee?

99.2.8. Suorakulmion pituus on kaksinkertainen leveyteen verrattuna. Suorakulmiolla on sama ala kuin eräällä ympyrällä. Mikä on suorakulmion ja ympyrän piirien suhde?

99.2.9. Todista: Jos piste on yhtä kaukana janan päätepisteistä, niin se on janan keskinormaalilla.

99.2.10. Suora ympyrälieriö on suoran ympyräkartion sisällä siten, että kappaleiden pohjat ovat samassa tasossa ja lieriön kansi sivuaa kartion vaippaa. Kartion korkeus 9 cm, kartion pohjan halkaisija 24 cm ja lieriön pohjan halkaisija on 12 cm. Mikä osa kartion tilavuudesta jää lieriön ulkopuolelle?

---

1. KD ja KE ovat sivuamispisteisiin piirrettyjä säteitä, joten ∠ADK = ∠AEK = 90°
Nelikulmiosta ADKE saadaan 64° + 90° + ∠DKE + 90° = 360° ; ∠DKE = 116°
Kehäkulma on puolet keskuskulmasta, joten ∠DFE = ½·116° = 58°

2. $\frac{4+8}{2} \cdot h = 30$; $12h = 60$; $h = 5$ (cm)

3. Kolmas kulma on = 180° - 65° - 48° = 67°
$\frac{x}{7{,}2} = \frac{\sin 48°}{\sin 65°}$; x = 5,9 (cm) ; $\frac{y}{7{,}2} = \frac{\sin 67°}{\sin 65°}$; y = 7,3 (cm)

4. Olkoon korkeusjana CD. Kolmio ACD on koululaisen kolmio ⇒ CD = ½·AC = ½·2 = 1 ja AD = $\sqrt{3}$; Kolmio BCD on tasakylkinen suorakulmainen kolmio ⇒ DB = CD = 1 , BC = $\sqrt{2}$. AB = AD + DB = $\sqrt{3} + 1$

5. Pienin kulma on pienimmän sivun eli 4,5 cm sivun vastainen kulma. Kosinilauseella
$4{,}5^2 = 6{,}2^2 + 5{,}7^2 - 2 \cdot 6{,}2 \cdot 5{,}7 \cdot \cos\alpha$; $70{,}68 \cdot \cos\alpha = 50{,}58$; $\cos\alpha = 0{,}717$; $\alpha = 44{,}2°$

6. Olkoon neliön sivu = alkuperäisen suorakulmion lyhempi sivu = x. Uuden pienemmän suorakulmion lyhempi sivu = 10 - x ja pitempi sivu = 10.
$\frac{x}{10} = \frac{10 - x}{x}$; $x^2 = 10(10 - x)$; $x^2 + 10x - 100 = 0$; $x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 400}}{2} = \frac{-10 \pm 10\sqrt{5}}{2} = 5\sqrt{5} - 5 \approx 6{,}18$

7. Torni ja malli on tehty samasta materiaalista ⇒ massojen suhde = tilavuuksien suhde.
$\frac{1 \text{ kg}}{8\,000\,000 \text{ kg}} = \frac{V_M}{V} = \left(\frac{h}{300}\right)^3 \,||\, \sqrt[3]{}$; $\frac{h}{300} = 0{,}005$; h = 1,5 (m)

8. Olkoon suorakulmion sivut x ja 2x sekä ympyrän säde r.
$A_{SK} = x \cdot 2x = 2x^2$, $A_{YMP} = \pi r^2$; $2x^2 = \pi r^2 \,||\, \sqrt{}$; $x = \sqrt{½\pi}\, r$
$\frac{p_{SK}}{p_{YMP}} = \frac{6x}{2\pi r} = \frac{6\sqrt{½\pi}r}{2\pi r} = \frac{3\sqrt{½\pi}}{\sqrt{\pi^2}} = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \approx 1{,}197$

9. OL: Olkoon jana AB ja sen ulkopuolella piste P siten, että PA = PB
VÄ: Piste P on janan AB keskinormaalilla
TOD: Olkoon piste C janan AB keskipiste, ts. AC = BC (keskipiste jakaa janan kahtia)
PA = PB (oletus), PC = PC (yhteinen). ΔACP ≅ ΔBCP (sss). ∠ACP = ∠BCP (yhtenevien kolmioiden vastinosina). Kun ∠ACP + ∠BCP = 180°, on ∠ACP = ∠BCP = 90°. Täten PC kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan. P on keskinormaalilla

10. Olkoon kartion huippu H, sivujana HA, C pohjan keskipiste, K kannen keskipiste sekä B sivujanan ja kannen sivuamispiste. Olkoon HK = x, HC = 9, KB = 6 , CA = 12 $\Delta HKB \cong \Delta HCA$; $\frac{x}{9} = \frac{6}{12}$; x = 4½ ; $\frac{V_L}{V_K} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 4½}{1/3 \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 9} = \frac{3}{8}$ = 0,375 = 37,5%. Ulkopuolella 62,5%

00.1.1. Suorakulmaisen kolmion kaksi sivua ovat 4 ja 7. Kuinka pitkä voi kolmas sivu olla?

00.1.2. Tasakylkisen kolmion kylki on 7,5 cm ja kantakulma on 52°. Laske kolmion kanta, korkeus ja ala.

00.1.3. Puolisuunnikkaan ala on 12 cm^2 ja korkeus 4 cm. Laske kantasivujen pituudet, kun lyhyempi kantasivu on puolet pitemmästä kantasivusta.

00.1.4. Kolmiossa on 40° ja 110° kulmat. Kolmion pisin sivu on 15,0 cm. Laske muiden sivujen pituudet.

00.1.5. Ympyrän kaksi jännettä leikkaa toisensa. Leikkauspiste erottaa toisesta jänteestä 10 cm ja 60 cm pituiset osat ja samalla leikkauspiste jakaa toisen jänteen suhteessa 2:3. Kuinka pitkä on tämä toinen jänne?

00.1.6. Laske suorakulmaisen kolmion ABC kulman C puolittajasta kolmion sisään jäävän osan pituus, kun kateettien pituudet ovat AB = 8 ja BC = 15.

00.1.7. Todista, että vinoneliön lävistäjät puolittavat vinoneliön kulmat ja ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

00.1.8. Suoralla ympyrälieriöllä (säde r ja korkeus a) ja kuutiolla (särmä a) on sama korkeus ja tilavuus. Mikä on lieriön kokonaispinta-alan ja kuution kokonaispinta-alan suhde?

00.1.9. Suoran ympyräkartion muotoisen tornin yläosa maalattiin puoleen korkeuteen punaisella maalilla. Sitä kului 9,5 litraa. Purkin kyljessä luki, että maalin riittoisuus on 7 m^2/litra. Kuinka paljon alaosaan pitää varata valkoista maalia, jonka riittoisuus on 9 m^2/litra?

00.1.10. Pystysuorasta tornista, jonka korkeus merenpinnasta on 46,5 m, nähdään vene etelässä 4,55° vaakatason alapuolella ja toinen vene lounaassa 3,34° vaakatason alapuolella. Kuinka kaukana veneet ovat toisistaan?

1. Jos molemmat kateetteja, on hypotenuusa x : $x^2 = 4^2 + 7^2 = 16 + 49 = 65$; $x = \sqrt{65}$ Jos hypotenuusa on 7 sekä kateetit 4 ja x. $x^2 + 4^2 = 7^2$; $x^2 = 49 - 16 = 33$; $x = \sqrt{33}$
2. Piirretään kannalle korkeus h ja olkoon kannan puolikas = a. $\frac{h}{7,5}$ = sin 52° ; h = 7,5 · sin 52° = 5,9 (cm) $\frac{a}{7,5}$ = cos 52° ; a = 7,5 · cos 52° = 4,6 (cm) kanta = 2a = 9,2 cm. Ala = ½ · 9,2 cm · 5,9 cm = 27 cm^2
3. Olkoon kantasivut x ja 2x. Ala = 12 ; ½(x + 2x) · 4 = 12 ; 3x = 6 ; x = 2 V: 2 cm ja 4 cm.
4. Olkoon kolmio ABC, jonka kulma α = 40° ja β = 110°, jolloin pisin sivu on b = 15,0 cm Kulma γ = 180° - 40° - 110° = 30° $\frac{a}{15,0} = \frac{\sin 40°}{\sin 110°}$; $a = \frac{\sin 40°}{\sin 110°} \cdot 15,0 = 10,3$ (cm) $\frac{c}{15,0} = \frac{\sin 30°}{\sin 110°}$; $c = \frac{\sin 30°}{\sin 110°} \cdot 15,0 = 7,98$ (cm)
5. Olkoon jänteet AB ja CD, joiden leikkauspiste P. AP = 60, PB = 10, CP = 2x, PD = 3x. $\Delta APC \sim \Delta DPB$ ($\angle A = \angle D$ samaa kaarta vastaavina kehäkulmina, $\angle APC = \angle DPB$ ristikulmina) $\frac{CP}{PB} = \frac{AP}{PD}$; $\frac{2x}{10} = \frac{60}{3x}$; $6x^2 = 600$; $x^2 = 100$: x = 10. Jänne = 5x = 50 (cm)
6. Hypotenuusa AC : $AC^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$; x = 17 Kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa. Olkoon leikkauspiste P, BP = x ja PA = 8 - x $\frac{x}{8 - x} = \frac{15}{17}$; 17x = 15(8 - x) ; 17x = 120 - 15x ; 32x = 120 ; $x = \frac{15}{4}$ ΔBCP + Pyth. : $CP^2 = (\frac{15}{4})^2 + 15^2 = \frac{225}{16} + 225 = 225 \cdot (\frac{1}{16} + 1) = \frac{225}{16} \cdot 17$; $CP = \frac{15}{4}\sqrt{17}$
7. Oletus: ABCD vinoneliö (ts. kaikki sivut yhtä pitkiä, vinoneliö on myös suunnikas) Väitös: Lävistäjät puolittavat vinoneliön kulmat ja ovat kohtisuorassa. Todistus: AD = DC (oletus) DK = DK (yhteinen) K on lävistäjien leikkauspiste. AK = KC (suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa) $\Delta AKD \cong \Delta CKD$ (sss) $\angle ADK = \angle CDK$ (vastinosina) Vastaavasti todistetaan, että muutkin kulmat puolittuvat $\angle AKD = \angle CKD$ (vastinosina) = 90° (koska yhteensä 180°)

8. $V_K = V_L$; $a^3 = \pi r^2 a$ || : a ; $a^2 = \pi r^2$; $a = \sqrt{\pi}\, r$ $A_L = 2\pi r^2 + 2\pi r a = 2\pi r^2 + 2\pi r\sqrt{\pi}\, r = 2\pi r^2(1 + \sqrt{\pi})$ $A_K = 6a^2 = 6(\sqrt{\pi}\, r)^2 = 6\pi r^2$ $\frac{A_L}{A_K} = \frac{2\pi r^2(1+\sqrt{\pi})}{6\pi r^2} = \frac{(1+\sqrt{\pi})}{3} \approx 1{,}38$ eli lieriön ala on noin 38% suurempi kuin kuution ala
9. $A_{YLÄ} = 9{,}5\ l \cdot 7\ m^2/l = 66{,}5\ m^2$. Kartion yläosa on yhdenmuotoinen koko kartion kanssa. $\frac{A_{YLÄ}}{A_{KOKO}} = k^2 = (½)^2 = ¼$. $A_{KOKO} = 4 \cdot A_{YLÄ} = 4 \cdot 66{,}5\ m^2 = 266\ m^2$ $A_{ALAOSA} = 266\ m^2 - 66{,}5\ m^2 = 199{,}5\ m^2$. Maalia tarvitaan $199{,}5\ m^2$ / $9\ m^2/l = 22{,}2\ l \approx 23\ l$
10. Olkoon tornin huippu H, ja kantapiste K, etelän vene = E ja lounaan vene = L ΔEKH + trig. $\frac{46{,}5}{KA} = \tan 4{,}55°$; $KA = \frac{46{,}5}{\tan 4{,}55°} = 584$ (m) ΔLKH + trig. $\frac{46{,}5}{KL} = \tan 3{,}34°$; $KL = \frac{46{,}5}{\tan 3{,}34°} = 797$ (m) ΔKLE + kosinilause : $EL^2 = KE^2 + KL^2 - 2 \cdot KE \cdot KL \cdot \cos 45° = 584^2 + 797^2 - 2 \cdot 584 \cdot 797 \cdot \cos 45°$ $EL^2 = 318\ 000$ || $\sqrt{\ }$; EL = 564 (m) ≈ 560 m

01.1.1. Tasakylkisen kolmion kanta on 4 ja kyljet 7. Laske kolmion kanta- ja huippukulma.

01.1.2. Suorakulmaisilla kolmioilla ABC ja ACD ovat kulmat C ja D suoria sekä kolmannet kärjet samalla puolella yhteistä sivua AC. Sivut CD ja AB leikkaavat pisteessä E. Kulmat CEA = 120° ja BCD = 65°. Laske kolmion ABC kulmien suuruudet.

01.1.3. Kolmion kahden sivun pituudet ovat 10 ja 7. Laske kolmion kulmat, kun jälkimmäisen sivun vastainen kulma on 40°.

01.1.4. Suoran ympyrälieriön muotoiseen pakkaukseen mahtuu juuri ja juuri 5 kappaletta palloja, joiden halkaisija on 6,4 cm. Kuinka paljon pakkaukseen jää tyhjää tilaa?

01.1.5. Ympyrän kehällä on pisteet myötäpäivään järjestyksessä A, D, B ja C. Kaarien AC ja BD asteluvut ovat vastaavasti 70° ja 50°. Jänteet AB ja CD leikkaavat pisteessä P. Laske kolmioiden APD ja BCP kulmat. Laske janan AP pituus, kun PB = 6, PC = 8 ja PD = 3.

01.1.6. Suorakulmaisen särmiön korkeus on a ja pohjaneliön sivu 2a. Laske pohjatason ja avaruuslävistäjän välinen kulma.

01.1.7. Pystysuora lipputanko sijaitsee rinteessä, jonka kaltevuus on 8°. Kovalla tuulella lipputanko taittui 7 m:n korkeudelta ylämäkeen katkeamatta kuitenkaan kokonaan. Lipputangon kärki osui maahan 15 m:n päässä tangon juuresta. Kuinka pitkä oli katkeamaton lipputanko?

01.1.8. Suoran ympyräkartion pohjan halkaisija on 7,4 cm ja kartion korkeus on 5,6 cm. Kartion vaippa avataan ja levitetään tasoon. Laske näin muodostuvan sektorin keskuskulman suuruus.

01.1.9. Kaksi ympyrää sivuavat toisiaan ulkopuolisesti. Ympyröiden säteet ovat 3 ja 4. Ympyröille piirretyt kolme yhteistä tangenttia rajoittavat tasakylkisen kolmion. Laske kolmion kannalle piirretyn korkeusjanan ja kannan pituus.

01.1.10. Pisteet A ja B ovat janan CD keskinormaalilla samalla puolella janaa. Osoita, että kulmat ACB ja ADB ovat yhtä suuret. (Keskinormaalin uraominaisuuteen liittyvää tietoa saa pitää tunnettuna)

1. Kannalle piirretty korkeusjana puolittaa kannan. Puolikaskolmiosta saadaan kantakulma α trigonometrialla $\cos\alpha = 2/7$, josta $\alpha = 73{,}4°$. Huippukulma on $180° - 2 \cdot 73{,}4° = 33{,}2°$
2. $\angle ECA = \angle BCA - \angle BEC = 90° - 65° = 25°$ Kolmiosta ACE saadaan $\angle EAC = 180° - 120° - 25° = 35°$ Kolmiosta ABC saadaan $\angle ABC = 180° - 90° - 35° = 55°$
3. Olkoon suurin kulma α. Sinilauseella saadaan $\frac{\sin\alpha}{\sin 40°} = \frac{10}{7}$; $\sin\alpha = \frac{10}{7} \cdot \sin 40° = 0{,}918$ $\alpha = 66{,}7°$ tai $\alpha = 180° - 66{,}7° = 113{,}3°$. Kulma $\beta = 180° - 40° - 66{,}7° = 73{,}3°$ tai $\beta = 180° - 40° - 113{,}3° = 26{,}7°$. V: 66,7° ja 73.3° tai 113,3° ja 26,7°
4. Lieriön pohjaympyrän säde = 3,2 cm ja korkeus 5·6,4 cm = 32 cm $V_{LIERIÖ} = \pi r^2 h = \pi \cdot 3{,}2^2 \cdot 32\ cm^3 = 1029\ cm^3$ $V_{PALLOT} = 5 \cdot 4/3 \cdot \pi r^3 = 20/3 \cdot \pi \cdot 3{,}2^3\ cm^3 = 686\ cm^3$. Tyhjää = $1029\ cm^3 - 686\ cm^3 = 343 cm^3$

5. Kaaren BD vastaiset kehäkulmat $\angle A = \angle C = ½\cdot 50° = 25°$ Kaaren AC vastaiset kehäkulmat $\angle B = \angle D = ½\cdot 70° = 35°$ $\angle APD = \angle BPC = 180° - 25° - 35° = 120°$. Täten $\Delta APD \sim \Delta CPB$ (kk) $\frac{AP}{CP} = \frac{DP}{BP}$; $\frac{AP}{8} = \frac{3}{6}$; $AP = \frac{3}{6}\cdot 8 = 4$
6. Avaruuslävistäjä = $\sqrt{pit^2 + lev^2 + kork^2} = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2 + a^2} = \sqrt{4a^2 + 4a^2 + a^2} = \sqrt{9a^2} = 3a$ Suorakulmaisesta kolmiosta, jossa on avaruuslävistäjä, sen toisesta päästä lähtevä korkeus ja toisesta päästä lähtevä pohjan lävistäjä saadaan $\sin\alpha = a/3a = 1/3$; $\alpha = 19{,}5°$
7. Olkoon lipputangon kantapiste K, taittumiskohta T ja lipputangon pää P. Kolmiossa KLP on KT = 7 m, KP = 15 m ja $\angle PKT = 90° - 8° = 82°$ Kosinilauseella $TP^2 = 7^2 + 15^2 - 2\cdot 7\cdot 15\cdot\cos 82° = 244{,}8$; $TP = \sqrt{244{,}8} = 15{,}6$ (m) Lipputangon pituus = 7 m + 15,6 m = 22,6 m
8. Pohjan piiri = $2\pi r = 2\cdot\pi\cdot 3{,}7$ cm = 23,48 cm = sektorin kaari Halkileikkauskolmion puolikkaasta $s^2 = r^2 + h^2 = 3{,}7^2 + 5{,}6^2 = 45{,}05$; $s = \sqrt{45{,}05} = 6{,}71$ = sektorin säde. $\frac{\alpha}{360°}\cdot 2\pi\cdot 6{,}71 = 23{,}48$; $\frac{\alpha}{360°} = 0{,}5568$; $\alpha = 0{,}5568\cdot 360° = 200°$
9. Olkoon ympyröiden keskipisteet A ja B sekä sivuamispiste S. Yksi tangentti sivutkoon ympyröitä pisteissä C ja D sekä AB suoran pisteessä K. S:ään piirretyn tangentin ja AB tangentin leikkauspiste olkoon E $\Delta KAC \sim \Delta KBD$ (kk) ; $\frac{KA}{KA + 7} = \frac{3}{4}$; 4KA = 3KA + 21 ; KA = 21. Korkeus KS = 21 + 3 = 24. ΔKAC + Pyth: $KC^2 + 3^2 = 21^2$; $KC^2 = 441 - 9 = 432 = 144\cdot 3$; $KC = 12\sqrt{3}$ $\Delta KAC \sim \Delta KES$; $\frac{SE}{3} = \frac{24}{12\sqrt{3}}$; $SE = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$, joten kanta = $2\cdot SE = 4\sqrt{3}$
10. OL: Pisteet A ja B ovat janan CD keskinormaalilla VÄ: $\angle ACB = \angle ADB$ TOD: AC = AD (keskinormaalin piste on yhtä kaukana janan päätepisteistä) BC = BD (keskinormaalin piste on yhtä kaukana janan päätepisteistä) AB = AB (yhteinen) $\Delta ACB \cong \Delta ADB$ (sss) $\angle ACB = \angle ADB$ (yhtenevien kolmioiden vastinosina)

01.2.1. Kolmiossa on kulmat 70°, 70° ja 40°. Laske sivujen pituudet. kun lyhimmän sivun pituus on 3,0 cm.

01.2.2. Jäätelökauhalla saa jäätelöpallon, jonka säde on 3,0 cm. Tötterö on suoran ympyräkartion muotoinen, pohjaympyrän säde on 2,5 cm ja korkeus 10,0 cm. Laske jäätelön ja tötterön tilavuudet. Kuinka monta prosenttia jäätelöstä mahtuisi tötteröön, jos jäätelö sulaisi?

01.2.3. Omakotitalon tontin pinta-ala on 1600 m^2. Mikä on tontin ala kartalla, jonka mittakaava on 1 : 100?

01.2.4. Todista, että tasakylkisen kolmion huipusta piirretty korkeusjana puolittaa vastaisen sivun.

01.2.5. Kolmiossa on kulmat 47° ja 79° sekä näiden välinen sivu 5,6 cm. Laske muiden sivujen pituudet.

01.2.6. Suorakulmaisen särmiön pohja on neliö. Särmiön korkeuden suhde pohjasärmän pituuteen on 1:4. Laske avaruuslävistäjän ja pohjan välinen kulma.

01.2.7. Kolmion sivut ovat 4,3 cm, 5,2 cm ja 7,1 cm. Laske kolmion suurin kulma ja pinta-ala.

01.2.8. Tasakylkiseen kolmioon, jonka kanta on 8,0 cm ja kyljet 10,0 cm on piirretty neliö siten, että neliön yksi sivu on kannalla ja kaksi muuta kärkeä eri kyljillä. Laske neliön sivu.

01.2.9. Jalkalampun varjostin on katkaistun ympyräkartion muotoinen. Kuinka paljon kangasta varjostimen tekemiseen tarvitaan, kun pohjien halkaisijat ovat 10 cm ja 40 cm sekä varjostimen sivujana 50 cm?

01.2.10. Pekan mökki sijaitsee 1,2 km Pentin mökistä pohjoiseen. Eräänä päivänä mökillä ollessaan Pentti huomasi kurkien lentävän pohjoisella taivaalla 30°:n korkeudella. Samaan aikaan Pekka huomasi pohjoisessa lentävät kurjet 70°:n korkeudella. Kuinka korkealla kurjet lensivät?

1. Kolmio on tasakylkinen, jonka kanta on 3 cm. Piirretään kannalle korkeusjana, joka puolittaa kannan. Olkoon kyljet = x. Puolikaskolmiosta perustrigonometrialla saadaan $1{,}5 : x = \cos 70°$; $x = 1{,}5 : \cos 70° = 4{,}4$ (cm)

2. $V_{PALLO} = 4/3 \cdot \pi r^3 = 4/3 \cdot \pi \cdot (3{,}0\text{ cm})^3 = 113\text{ cm}^3$. $V_{KARTIO} = 1/3 \cdot \pi r^2 h = 1/3 \cdot \pi \cdot (2.5\text{ cm})^2 \cdot 10\text{ cm} = 65{,}4\text{ cm}^3$ $V_{KARTIO} : V_{PALLO} = 65{,}4\text{ cm}^3 : 113\text{ cm}^3 = 0{,}579 = 57{,}9\%$
3. $A_{KARTTA} : 1600\text{ m}^2 = k^2 = (1 : 100)^2 = 1:10000$; $A_{KARTTA} = 1600\text{ m}^2 \cdot 1:10000 = 0{,}16\text{ m}^2$
4. OL: Olkoon kolmiossa ABC AC = BC ja AB:llä piste D siten, että CD $\perp$ AB. VÄ: AD = BD. TOD: CD = CD (yhteinen) , $\angle ADC = \angle BDC$ (= 90° oletus) , AC = BC (oletus) $\angle A$ ja $\angle B$ teräviä (kolmioissa jo 90° kulma) $\Delta ADC \cong \Delta BDC$ (sske) , AD = BD (vastinosina)
5. Kolmas kulma on α = 180° - 79° - 47° = 54° Sinilauseella x : 5,6 cm = sin 79° : sin 54° , josta x = 5,6 cm · sin 79° : sin 54° = 6,8 cm y : 5,6 cm = sin 47° : sin 54° ; y = 5,6 cm · sin 47° : sin 54° = 5,1 cm
6. Olkoon korkeus = a jolloin pohjaneliön sivu = 4a. Pohjaneliön lävistäjä = $4a\sqrt{2}$ $\tan \alpha = a : 4a\sqrt{2} = 1 : 4\sqrt{2}$, josta α = 10,0°
7. Suurin kulma on suurinta sivua vastassa oleva kulma. Kosinilauseella saadaan $7{,}1^2 = 4{,}3^2 + 5{,}2^2 - 2\cdot 4{,}3\cdot 5{,}2\cdot\cos\alpha$; $44{,}72\cdot\cos\alpha = -4{,}88$; $\cos\alpha = -0{,}109$; $\alpha = 96{,}3°$ A = ½·4,3·5,2·sin 96,3° = 11,1 (cm^2)
8. Kolmion korkeus $h^2 + 4^2 = 10^2$; $h^2 = 100 - 16$; $h = \sqrt{84}$ Neliön yläpuolelle jäävä kolmio on yhdenmuotoinen alkuperäisen kolmion kanssa $\frac{x}{8} = \frac{\sqrt{84} - x}{\sqrt{84}}$; $x\sqrt{84} = 8\sqrt{84} - 8x$; $x(8 + \sqrt{84}) = 8\sqrt{84}$; $x = \frac{8\sqrt{84}}{8 + \sqrt{84}} \approx 4{,}3$ cm
9. Halkileikkauskuviona olevan puolisuunnikkaan kylkiä jatketaan jotta saadaan kolmio. Olkoon yläpuolella olevan pikkukolmion kylki = x, jolloin yhdenmuotoisista kolmioista $\frac{x}{x + 50} = \frac{5}{20}$; 20x = 5x + 250 ; 15x = 250 ; x = 16,67 Varjostimen vaipan ala = koko kartion vaipan ala - yläkartion vaipan ala $A = \pi\cdot 20\cdot 66{,}67 - \pi\cdot 5\cdot 16{,}67 = 3900$ (cm^2)
10. Olkoon Pentti paikassa A, Pekka paikassa B ja kurjet paikassa C. Olkoon BC = x Tällöin AB = 1,2 km, $\angle A$ = 30° ja $\angle B$ = 180° - 70° = 110°. $\angle C$ = 180° - 30° - 110° = 40° Sinilause : $\frac{x}{1{,}2\text{ km}} = \frac{\sin 30°}{\sin 40°}$; $x = \frac{\sin 30°}{\sin 40°} \cdot 1{,}2\text{ km} = 933$ m Piirretään C:stä korkeus, jolloin perustrigonometrialla $\frac{h}{933\text{m}} = \sin 70°$; h = 933m ·sin 70° = 880 m

02.1.1. Laske ympyräsektorin keskuskulma, kun säde on 1,0 m ja ala 1,0 m^2.

02.1.2. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on $\sqrt{7}$ ja toisen kateetin pituus $\sqrt{3}$ .Laske a) kolmion ala, b) pienin kulma.

02.1.3. Kolmion kulman suuruus on 63^o ja viereisten sivujen pituudet ovat 5,0 cm ja 8,0 cm. Laske kolmannen sivun pituus.

02.1.4. a) Mitä tiedetään yhdenmuotoisissa kappaleissa toisiaan vastaavien viivojen pituuksien suhteista? Entä alojen ja tilavuuksien suhteista?
b) Yhdenmuotoisissa kappaleissa tilavuuksien suhde on 8 : 27. Mikä on näiden kappaleiden pinta-alojen suhde?

02.1.5. Kolmion kaksi sivua ovat pituudeltaan 3,8 cm ja 5,7 cm sekä näistä pienemmän sivun vastainen kulma 32°. Laske kolmion muut kulmat.

02.1.6. Vesitornin säiliö on kärjellään olevan suoran ympyräkartion muotoinen. Sen korkeus on 13 m ja reunaympyrän halkaisija 26 m. Säiliötä aletaan täyttää juoksuttamalla sinne vettä tasaisella nopeudella 2,0 m^3/s. Kuinka kauan kestää täyttää säiliö puoleen korkeuteensa?

02.1.7. Neliön piiri pitenee 20 %. Kuinka monta prosenttia kasvaa ala?

02.1.8. Ympyrä kulkee neliön kahden kärjen kautta ja sivuaa yhtä neliön sivua. Laske neliön sivun ja ympyrän säteen suhde.

02.1.9. Suorakulmion muotoisen tontin erisuuntaisten sivujen pituudet ovat 30 m ja 40 m. Tontin yhdessä nurkassa olevaa merkkipaalua siirretään 1,0 m tontin lävistäjän suunnassa ulospäin. Kuinka paljon tontin ala tällöin kasvaa?

02.1.10. Todista, että jos nelikulmion lävistäjät puolittavat toisensa, niin sen vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät. (eli nelikulmio on suunnikas)

1. A = 1 m^2 ; $\frac{\alpha}{360°}\cdot\pi\cdot 1^2 = 1$; $\alpha = \frac{360°}{\pi} \approx 114{,}6°$
2. a) Pythagoras: $(\sqrt{3})^2 + b^2 = (\sqrt{7})^2$; $3 + b^2 = 7$; $b^2 = 4$; b = 2. A = $\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ b) Lyhin sivu = $\sqrt{3}$, pienin kulma α, jolle $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\alpha \approx 40{,}9°$
3. Kosinilauseella $x^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot5\cdot8\cdot\cos 63° = 52{,}68$; x = 7,3 (cm)
4. a) Jos pituuksien suhde eli mittakaava on $p_1{:}p_2 = k$, niin alojen suhde on $A_1{:}A_2 = k^2$ ja tilavuuksien suhde on $V_1{:}V_2 = k^3$. b) $V_1{:}V_2 = 8{:}27 = k^3$; $k = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3} \Rightarrow A_1{:}A_2 = k^2 = (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$
5. Sinilause : $\frac{\sin\alpha}{\sin 32°} = \frac{5{,}7}{3{,}8}$; $\sin\alpha = \frac{5{,}7}{3{,}8}\cdot\sin 32° = 0{,}795$; $\alpha = 52{,}6°$ tai 127,4° $\beta = 180° - 32° - 52{,}6° = 95{,}4°$ tai $\beta = 180° - 32° - 127{,}4° = 20{,}6°$ V: 52,6° ja 95,4° tai 127,4° ja 20,6°
6. Koko tilavuus $V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 13^2\cdot 13 = 2300$ (m^3). Veden täyttämä osa on yhdenmuotoinen koko säiliön kanssa, k = ½, joten tilavuuksien suhde $k^3 = 1/8$. Veden tilavuus on V = 1/8·2300 m^3 = 287,6 m^3 . Aikaa kuluu 287,6 m^3 : 2 m^3/s = 144s = 2 min 24 s.
7. Alkuperäinen piiri = 100a, jolloin sivu = 25a ja ala = $(25a)^2 = 625a^2$. Uusi piiri = 120a, jolloin sivu x = 30a ja ala = $(30a)^2 = 900a^2$. Vertailu: $\frac{900a^2}{625a^2} = 1{,}44$, eli kasvua on 44 %.
8. Olkoon nelikulmio ABCD ja ympyrän keskipiste K. Kehä kulkee pisteen C ja D kautta ja sivuaa AB:tä pisteessä E . EK leikkaa CD:n pisteessä F. Olkoon sivu = a ja säde = r Kolmio KCF + Pyth: $(½a)^2 + (a - r)^2 = r^2$. $¼a^2 + a^2 - 2ar + r^2 = r^2$; $5/4a^2 = 2ar$ || : $2a^2$; a:r = 8:5
9. Lisäyskolmioiden korkeudet ovat yhdenmuotoisuuden perusteella 3*x* ja 4*x*. Pythagoraan mukaan hypotenuusa on 5x = 1(m), josta x = 0,2 (m). Pinta-alan lisäys on kaikkiaan $\frac{30\cdot 4x}{2} + \frac{40\cdot 3x}{2} = 120x = 120\cdot 0{,}2 = 24$ (m^2).
10. OL: Nelikulmion ABCE lävistäjien leikkauspiste on K ja AK = KC ja BK = KD VÄ: ABCD on suunnikas TOD.: AK = KC (ol) & BK = KD (ol) & ∠AKD = ∠BKC (ristikulmina) ΔAKD ≅ ΔBKC (sks) . ∠DAK = ∠BCK (vastinosina) AD || BC (samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret) Samoin AB || CD. ABCD on suunnikas (vastakkaiset sivut yhdensuuntaiset)

02.2.1. Suoran ympyrälieriön pohjan halkaisija on 15 cm ja korkeus 10 cm. Laske tilavuus ja kokonaispinta-ala.

02.2.2. Ympyrän sektorin keskuskulma on 120° ja pinta-ala on 1,0 m^2. Mikä on ympyrän säde?

02.2.3. Ympyrän sektorissa, jonka keskuskulma on 90°, on kaarella piste P, josta on piirretty jänteet sektorin kaaren päätepisteisiin. Kuinka suuri on jänteiden välinen kulma?

02.2.4. Suorakulmaisessa kolmiossa ABC ovat kateetit AC = 4 ja BC = 3. Kateetilla AC on piste D siten, että AD = BD. Miten pitkä on AD?

02.2.5. Kolmion sivut ovat 3,4 m, 4,7 m ja 6,8 m. Laske kolmion suurin kulma.

02.2.6. Rannalla on kaksi kiveä A ja B, jotka ovat 28 m päässä toisistaan. Joen toisella puolella on rantakivi C, joka muodostaa kulmat ABC = 85° ja BAC = 78°. Kuinka leveä on joki?

02.2.7. Kulman A kyljillä on pisteet B ja C siten, että AB = AC. AB:llä on piste D ja AC:llä piste E siten, että AD = AE. Osoita, että kulmat ABE ja ACD ovat yhtä suuret.

02.2.8. Tasakylkisen kolmion sivut ovat 10, 10 ja 12. Piste on yhtä kaukana kaikista kyljistä. Kuinka pitkä on tämä etäisyys?

02.2.9. Opettaja on Suojalan tornissa 15 m korkeudella. Pihalla on 40 m päässä 3,0 m korkea roska-auto. Voiko opettaja havaita 1,70 m pitkän oppilaan 4,0 m roska-auton takana?

02.2.10. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin pohjasärmä on 6,0 cm ja sivusärmä 8,0 cm. Laske pyramidin a) pohjatahon ja sivusärmän b) pohjatahon ja sivutahon välinen kulma.

1. Kolmio on tasakylkinen, jonka kanta on 3 cm. Piirretään kannalle korkeusjana, joka puolittaa kannan. Olkoon kyljet = x. Puolikaskolmiosta perustrigonometrialla saadaan $1,5 : x = \cos 70^\circ$; $x = 1,5 : \cos 70^\circ = 4,4$ (cm)
2. $V_{PALLO} = 4/3 \cdot \pi r^3 = 4/3 \cdot \pi \cdot (3,0\text{ cm})^3 = 113\text{ cm}^3$. $V_{KARTIO} = 1/3 \cdot \pi r^2 h = 1/3 \cdot \pi \cdot (2.5\text{ cm})^2 \cdot 10\text{ cm} = 65,4\text{ cm}^3$ $V_{KARTIO} : V_{PALLO} = 65,4\text{ cm}^3 : 113\text{ cm}^3 = 0,579 = 57,9\%$
3. $A_{KARTTA} : 1600\text{ m}^2 = k^2 = (1 : 100)^2 = 1:10000$; $A_{KARTTA} = 1600\text{ m}^2 \cdot 1:10000 = 0,16\text{ m}^2$
4. OL: Olkoon kolmiossa ABC AC = BC ja AB:llä piste D siten, että $CD \perp AB$. VÄ: AD = BD. TOD: CD = CD (yhteinen) , $\angle ADC = \angle BDC$ (= 90° oletus) , AC = BC (oletus) $\angle A$ ja $\angle B$ teräviä (kolmioissa jo 90° kulma) $\Delta ADC \cong \Delta BDC$ (sske) , AD = BD (vastinosina)
5. Kolmas kulma on $\alpha = 180^\circ - 79^\circ - 47^\circ = 54^\circ$ Sinilauseella $x : 5,6\text{ cm} = \sin 79^\circ : \sin 54^\circ$, josta $x = 5,6\text{ cm} \cdot \sin 79^\circ : \sin 54^\circ = 6,8$ cm $y : 5,6\text{ cm} = \sin 47^\circ : \sin 54^\circ$; $y = 5,6\text{ cm} \cdot \sin 47^\circ : \sin 54^\circ = 5,1$ cm
6. Olkoon korkeus = a jolloin pohjaneliön sivu = 4a. Pohjaneliön lävistäjä = $4a\sqrt{2}$ $\tan \alpha = a : 4a\sqrt{2} = 1 : 4\sqrt{2}$, josta $\alpha = 10,0^\circ$
7. Suurin kulma on suurinta sivua vastassa oleva kulma. Kosinilauseella saadaan $7,1^2 = 4,3^2 + 5,2^2 - 2 \cdot 4,3 \cdot 5,2 \cdot \cos \alpha$; $44,72 \cdot \cos \alpha = -4,88$; $\cos \alpha = -0,109$; $\alpha = 96,3^\circ$ $A = ½ \cdot 4,3 \cdot 5,2 \cdot \sin 96,3^\circ = 11,1\ (\text{cm}^2)$
8. Kolmion korkeus $h^2 + 4^2 = 10^2$; $h^2 = 100 - 16$; $h = \sqrt{84}$ Neliön yläpuolelle jäävä kolmio on yhdenmuotoinen alkuperäisen kolmion kanssa $\frac{x}{8} = \frac{\sqrt{84} - x}{\sqrt{84}}$; $x\sqrt{84} = 8\sqrt{84} - 8x$; $x(8 + \sqrt{84}) = 8\sqrt{84}$; $x = \frac{8\sqrt{84}}{8 + \sqrt{84}} \approx 4,3$ cm
9. Halkileikkauskuviona olevan puolisuunnikkaan kylkiä jatketaan jotta saadaan kolmio. Olkoon yläpuolella olevan pikkukolmion kylki = x, jolloin yhdenmuotoisista kolmioista $\frac{x}{x + 50} = \frac{5}{20}$; $20x = 5x + 250$; $15x = 250$; $x = 16,67$ Varjostimen vaipan ala = koko kartion vaipan ala - yläkartion vaipan ala $A = \pi \cdot 20 \cdot 66,67 - \pi \cdot 5 \cdot 16,67 = 3900\ (\text{cm}^2)$
10. Olkoon Pentti paikassa A, Pekka paikassa B ja kurjet paikassa C. Olkoon BC = x Tällöin AB = 1,2 km, $\angle A = 30^\circ$ ja $\angle B = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$. $\angle C = 180^\circ - 30^\circ - 110^\circ = 40^\circ$ Sinilause : $\frac{x}{1,2\text{ km}} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 40^\circ}$; $x = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 40^\circ} \cdot 1,2\text{ km} = 933$ m Piirretään C:stä korkeus, jolloin trigonometrialla $\frac{h}{933\text{m}} = \sin 70^\circ$; $h = 933\text{m} \cdot \sin 70^\circ = 880$ m

02.3.1. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 7 ja toisen kateetin pituus 3. Laske a) kolmion ala, b) pienin kulma.

02.3.2. Suoran ympyräkartion pohjaympyrän säde on 2 cm ja korkeus 3 cm. Laske kartion tilavuus ja vaipan pinta-ala.

02.3.3. Suunnikkaan ABCD sivulla BC oleva piste E puolittaa sivun BC. Missä suhteessa jana AE jakaa lävistäjän BD?

02.3.4. Suunnistaja lähtee 780 m pitkälle rastivälille. Juostuaan 500 m hän huomaa suunnan olleen 12° väärä. Kuinka pitkä matka on seuraavalle rastille?

02.3.5. Todista, että janan keskinormaalin piste on yhtä kaukana janan kummastakin päätepisteestä.

02.3.6. Kolmion kaksi sivua ovat pituudeltaan 3,2 cm ja 4,5 cm. Näistä lyhemmän vastainen kulma on 32°. Miten pitkä voi kolmas sivu olla?

02.3.7. Tasakylkisen kolmion kylkiä vastaan piirretyt keskijanat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Laske kantakulman suuruus 0,1° tarkkuudella.

02.3.8. Ympyräsektorin keskuskulman suuruus on 60^o. Mikä on sektorin kaarta ja säteitä sivuavan ympyrän säde r, jos sektorin säde on R?

02.3.9. Pallon ympäri on asetettu suora katkaistu ympyräkartio, jonka pohjien säteet ovat 4,0 cm ja 8,0 cm. Laske pallon säde.

02.3.10. Kolme *r*-säteistä tennispalloa on pöydällä siten, että kukin koskettaa kahta muuta. Näiden päälle asetetaan neljäs samankokoinen pallo. Laske ”pallopyramidin” korkeus.

1. Olkoon toinen kateetti = x. $x^2 + 3^2 = 7^2$; $x^2 + 9 = 49$; $x^2 = 40$; $x = 2\sqrt{10}$ $A = ½\cdot 3\cdot 2\sqrt{10} = 3\sqrt{10}$; $\tan\alpha = 3:7$; $\alpha = 23{,}2°$
2. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(2\text{ cm})^2\cdot 3\text{ cm} = 12{,}6\text{ cm}^3 \approx 13\text{ cm}^3$ Olkoon sivujana = s. $s^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$; $s = \sqrt{13} \approx 3{,}6$ (cm) $A = \pi rs = \pi\cdot 2\text{ cm}\cdot 3{,}6\text{ cm} = 22{,}7\text{ cm}^2 \approx 23\text{ cm}^2$
3. Olkoon janojen AE ja BD leikkauspiste. $\Delta ADF \sim \Delta EBF$ (kk) sillä $\angle AFD = \angle EFB$ (ristikulmina) ja $\angle ADF = \angle EBF$ (samankohtaisina kulmina) $\frac{BF}{FD} = \frac{BE}{AD} = \frac{1}{2}$ koska BE = ½BC = ½AD
4. Kosinilauseella $x^2 = 500^2 + 780^2 - 2\cdot 500\cdot 780\cdot\cos 12° = 95445$; $x = \sqrt{95445} = 310$ (m)
5. OL: P on janan AB keskinormaalin piste. VÄ: AP = BP TOD:. Olkoon janan AB keskipiste K. AK = BK (K oli keskipiste) KP = KP (yhteinen)' $\angle AKP = \angle BKP$ (= 90°) $\Delta AKP \cong \Delta BKP$ (sks) AP = BP (yhtenevien kolmioiden vastinosina)
6. Olkoon 4,5 cm pituisen sivun vastainen kulma α. Sinilauseella saadaan $\frac{\sin\alpha}{\sin 32°} = \frac{4{,}5}{3{,}2}$; $\sin\alpha = \frac{4{,}5\cdot\sin 32°}{3{,}2} = 0{,}7452$; $\alpha = 48{,}2°$ tai $\alpha = 131{,}8°$ Tällöin kolmas kulma $\beta = 180° - 32° - 48{,}2° = 99{,}8°$ tai $\beta = 180° - 32° - 131{,}8° = 16{,}2°$ Tällöin kolmas sivu b saadaan sinilauseella $\frac{b}{3{,}2} = \frac{\sin 99{,}8°}{\sin 32°}$; $b = \frac{3{,}2\sin 99{,}8°}{\sin 32°} = 5{,}95$ tai $\frac{b}{3{,}2} = \frac{\sin 16{,}2°}{\sin 32°}$; $b = \frac{3{,}2\sin 16{,}2°}{\sin 32°} = 1{,}68$ Vastaus: Kolmas sivu voi olla 6,0 cm tai 1,7 cm.
7. Olkoon kanta AB sekä keskijanat AD ja BE, jotka leikkaavat pisteessä K. Keskijanat ovat yhtä pitkät ja jakavat toisensa suhteessa 1:2. Kolmio AKE on suorakulmainen EK:AK = 1:2 = $\tan\alpha$; $\alpha = 26{,}6°$, missä $\alpha = \angle EAK$ Kolmio ABK on tasakylkinen ja kulma K = 90° , joten $\angle KAB = 45°$ Kantakulma = $\angle EAK + \angle KAB = 26{,}6° + 45° = 71{,}6°$
8. Olkoon sektorin kaaren päätepisteet A ja B sekä säteiden leikkauspiste K. Olkoon sisään piirretyn ympyrän keskipiste C ja KC:n jatke leikkaa kaaren AB pisteessä D. Sisään piirretty ympyrä sivuaa sädettä KA pisteessä E. $\angle EKC = 30°$, koska KC puolittaa $\angle AKB$. ΔKEC on koululaisen kolmio (säde CE $\perp$ tangentti KA ja $\angle EKC = 30°$) CE = r = CD ja KC = 2·CE = 2r. KC + CD = KD ; 2r + r = R ; 3r = R ; $r = \frac{R}{3}$
9. Olkoon poikkileikkauskuviona oleva puolisuunnikas ABCD, missä AB on suuremman pohjaympyrän halkaisija = 16 cm ja CD = 8 cm. Sisällä oleva ympyrä sivutkoon BC:tä pisteessä E. Tangenttikulman kyljet ovat yhtä pitkät, joten CE = ½CD = 4 cm ja BE = ½AB = 8 cm. Täten BC = 12 cm. Piirretään C:stä kohtisuora AB:lle olkoon tämä CF. BF= ½AB - ½CD = 4,0 cm. $CF^2 + 4^2 = 12^2$; $CF^2 = 144 - 16 = 128$; $CF = 8\sqrt{2}$ cm $2r = 8\sqrt{2}$ cm ; $r = 4\sqrt{2}$ cm $\approx 5{,}7$ cm
10. Kaikkien 4 pallon keskipisteet muodostavat säännöllisen tetraedrin, jonka sivu = r. Taulukkokirjasta saadaan tasasivuisen kolmion alaksi $\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$ ja tetraedrin tilavuudeksi $V = \frac{Ah}{3} = \frac{r^2\sqrt{3}h}{4\cdot 3} = \frac{r^3\sqrt{2}}{12}$; $h = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Koko korkeus = r + h + r = $r(2 + \sqrt{\frac{2}{3}})$