PITKÄ

MATEMATIIKKA

KURSSI MA2

FUNKTIOT JA YHTÄLÖT 2

Markku Männikkö
2003

Sisällysluettelo:

MA2. Funktiot ja yhtälöt 2.

1. Toisen asteen polynomifunktio

1.1. Kuvaajan piirtäminen

1. Yhtälön $y = ax^2 + bx + c$ kuvaajan piirtäminen Tee lukuparitaulukko. Anna x:lle muutama arvo. Laske yhtälöstä vastaavat y:t. Merkitse lukuparit pisteinä koordinaatistoon. Piirrä kauniisti kaareutuva kuvaaja paraabelille.

1.1.1. Piirrä a) $y = x^2$ b) $y = 2x^2$ c) $y = 3x^2$ d) $y = ½x^2$ e) $y = x^2/3$ f) $y = -x^2$ g) $y = -2x^2$ h) $y = -3x^2$.
2. Piirrä a) $y = x^2 + 1$ b) $y = 2x^2 + 3$ c) $y = 3x^2 - 4$ d) $y = 5 - x^2$ e) $y = 3 - 2x^2$.
3. Piirrä a) $y = x^2 - x$ b) $y = x^2 - 2x$ c) $y = x^2 - 3x$ d) $y = x^2 - 4x$ e) $y = 6x - x^2$ f) $y = ½x - x^2$.
4. Piirrä a) $y = x^2 - 2x - 1$ b) $y = x^2 - 2x + 2$ c) $y = x^2 - 2x + 3$ d) $y = -x^2 + 4x + 1$ e) $y = -2x^2 - 4x + 1$

1.2. Kuvaajaan liittyvät nimitykset

1. Paraabelin huippu on paraabelin alin tai ylin piste

1.2.1 - 4. Mitkä ovat E1 - 4:n paraabelien huiput.

2. Paraabelin akseli eli symmetria-akseli on huipun kautta kulkeva pystysuora suora.

5 - 8. Mitkä ovat paraabelien E1 - 4 paraabelien akselit

3. Huipun määritys taulukkokirjaa käyttäen Taulukkokirjan s. 41 on kaava huipun laskemiseksi. $x = -\frac{b}{2a}$. Kun x on saatu, y-koordinaatti saadaan helpoimmin sijoittamalla x paraabelin yhtälöön.

9. Laske paraabelin a) $y = x^2 - 6x + 5$ b) $y = 2x^2 - 4x + 5$ c) $y = -3x^2 + 12x - 10$ huippu.

4. Huipun määritys pystysuoraan siirrettyä, origon kautta kulkevaa paraabelia $y = ax^2 + bx$ hyväksi käyttäen Katsotaan ne x:t, joissa paraabeli leikkaa x-akselin Niiden puolivälissä (x:ien keskiarvo) on tämän ja alkuperäisen paraabelin $y=ax^2+bx+c$ huipun x-koordinaatti. Huipun y-koordinaatti saadaan sitten sijoittamalla huipun x paraabelin yhtälöön.

5. Paraabelin/toisen asteen polynomin pienin/suurin arvo on paraabelin huipun y-koordinaatti. Pienin arvo on silloin, kun paraabeli aukeaa ylöspäin.

10. Mikä on funktion a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ b) $f(x) = 2x^2 + x + 1$ c) $f(x) = 3x^2 - 4x$ pienin arvo?

1.3. Aukeamissuunta ja nollakohdat

1. Kertoimen a vaikutus paraabelin kuvaajaan Jos $a > 0$, niin paraabeli aukeaa ylöspäin ja jos $a < 0$, niin paraabeli aukeaa alaspäin Jos $\lvert a \rvert$ on suuri, on paraabeli kapea ja jos $\lvert a \rvert$ on pieni, on paraabeli leveä

1.3.1. Mikä on sen paraabelin yhtälö, joka on yhtä kapea kuin $y = 2x^2 + 3x$, joka aukeaa alaspäin ja jonka huippu on origossa?

2. Kertoimen c vaikutus paraabelin kuvaajaan c:n kasvaessa paraabeli nousee ylöspäin, paraabelin muoto säilyy ja huippu pysyy samalla pystysuoralla

2. Mikä on sen paraabelin yhtälö, joka saadaan nostamalla jokaista paraabelin a) $y = 2x^2$ b) $y = x^2 - 3x + 4$ pistettä ylöspäin 3 ruutua?

3. Paraabelin nollakohdat kuvaajasta ovat kuvaajan ja x-akselin leikkauspisteen x-koordinaatti.

3. Mitkä ovat paraabelin a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = -2x^2 + 3x - 1$ c) $y = x^2 - 2x + 1$ d) $y = x^2 + 2$ nollakohdat?

4. Nollakohtien mahdolliset lukumäärät Nollakohtia voi olla 0, 1 tai 2 riippuen siitä, kohtaako paraabeli x-akselia lainkaan, sivuaako vai leikkaako.

5. Paraabelin nollakohdat laskemalla.
Merkitse $y = 0$ ja ratkaise yhtälö.

2. Toisen asteen yhtälö ja epäyhtälö

2.1. Peruskäsitteitä

1. Yleinen normaalimuoto
$ax^2 + bx + c = 0$

2. Vaillinainen yhtälö
Kun $b = 0$, on yhtälö $ax^2 + c = 0$ tai $c = 0$, jolloin yhtälö on $ax^2 + bx = 0$

3. Ratkaisu
on se x:n arvo, joka tekee yhtälön todeksi. Ratkaisua nimitetään joskus yhtälön juureksi.

4. Reaalisten ratkaisujen lukumäärä
voi olla 0, 1 tai 2.

2.2. Toisen asteen yhtälön ratkaiseminen graafisesti

1. Yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisu graafisesti yhden kuvaajan avulla
Siirretään yhtälön kaikki termit ensin vasemmalle puolelle yhtälöä, jotta saadaan normaalimuotoinen yhtälö
Merkitään $y = ax^2 + bx + c$
Piirretään tämän yhtälön kuvaaja.
Ratkaisuja ovat ne x:t, joissa paraabeli leikkaa x-akselin.

2.2.1. Ratkaise graafisesti yhtälö a) $x^2 - 3x - 4$ b) $2x^2 - 3x = 5$ c) $3{,}1x^2 - 4{,}2x + 0{,}3 = 0$

2. Yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisu graafisesti kahden kuvaajan avulla
Siirrä termejä niin, että yhtälö tulee muotoon $ax^2 = bx + c$
Piirrä molempien puolien kuvaajat $y = ax^2$ ja $y = bx + c$
Yhtälön ratkaisut ovat kuvaajien leikkauspisteiden x-koordinaatit.

2. Ratkaise graafisesti yhtälö a) $x^2 = 2x + 3$ b) $2x^2 = 7 - 5x$ c) $x^2 = 1{,}3x + 4{,}1$

2.3. Kompleksiluvut.

1. Imaginaariyksikkö i
Yhtälölle $x^2 = -1$ voidaan ajatella ratkaisu, joka on kuviteltu luku, imaginaariluku i.
Täten $i^2 = -1$ tai $\sqrt{-1} = i$

2. Neliöjuuri negatiivisesta luvusta
$\sqrt{-a} = \sqrt{-1 \cdot a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a} = i\sqrt{a}$

2.3.1. Esitä i:tä käyttäen a) $\sqrt{-4}$ b) $\sqrt{-16}$ c) $\sqrt{-100}$ d) $\sqrt{-2}$ e) $\sqrt{-12}$

3. Kompleksiluvut
Kompleksiluku $z = a + bi$, missä $a, b \in R$
$a = Re(z)$ = kompleksiluvun reaaliosa ja $b = Im(z)$ = kompleksiluvun imaginaariosa.

2. Mitkä ovat kompleksiluvun reaali- ja imaginaariosat a) $2 + i$ b) $3 - 4i$ c) $5i$ d) -6?

4. Kompleksiluvun esitys reaalilukuparina
Kompleksiluku voidaan esittää lukuparina $(a,b) = a + bi$. (Laskimissa tämä esitysmuoto)

3. Esitä lukuparina kompleksiluku a) $3 - 6i$ b) $1 + 2i$ c) $7i$ d) 5
4. Esitä binomimuodossa kompleksiluku a) $(2,3)$ b) $(-4,5)$ c) $(8,0)$ d) $(0,-3)$

5. Laskut kompleksiluvuilla
Yhteen-, vähennys-, kertolaskut ja potenssiin korotus kuten polynomeilla, huomioidaan vain, että $i^2 = -1$.

5. Laske a) $(2 + 3i) - (6 - 4i)$ b) $(3 - i)(2 + i)$ c) $(2 + i)^2$ c) $(1 - i)^3$

2.4. Toisen asteen yhtälön ratkaiseminen algebrallisesti

1. Tulo = 0 yhtälön ratkaiseminen.
Merkitse jokainen tulon tekijä = 0 ja ratkaise näin saadut yhtälöt.

2.4.1. a) $(x - 1)(x + 2) = 0$ b) $(2x - 3)(4x + 5) = 0$ c) $(5 - x)(2x + 6)(3x - 12)(5x + 100) = 0$

2. $ax^2 + bx = 0$ yhtälön ratkaiseminen
Ota x yhteiseksi tekijäksi, saat yhtälön $x(ax + b) = 0$
Merkitse kumpikin tulon tekijä = 0 eli $x = 0$ tai $ax + b = 0$ ja ratkaistaan nämä, jolloin $x = 0$ tai $x = -b/a$.

2. a) $x^2 - 3x = 0$ b) $2x^2 - 5x = 0$ c) $x - 2x^2 = 0$ d) $-3x^2 - 6x = 0$
3. a) $x^2 - 0{,}17x = 0$ b) $2{,}5x^2 + 3{,}2x = 0$ c) $0{,}12x^2 - 0{,}018x = 0$ d) $8{,}1x - 2{,}4x^2 = 0$
4. a) $ax^2 - 2bx = 0$ b) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{10}x = 0$ c) $10^8x^2 - 2x = 0$ d) $2{,}4\cdot10^9x^2 - 4{,}2\cdot10^{-3}x = 0$

3. $ax^2 + c = 0$ yhtälön ratkaiseminen
Selvitä ensin x^2:n lauseke (siirrä c oikealle ja jaa a:lla) $x^2 = -c/a$
Ota neliöjuuri molemmilta puolilta ja laita vakion eteen ± merkki. $x = \pm\sqrt{-c/a}$

5. a) $x^2 - 49 = 0$ b) $x^2 - 5 = 0$ c) $2x^2 - 8 = 0$ d) $x^2 + 9 = 0$ e) $4x^2 - 1 = 0$ f) $8x^2 - 1 = 0$.
6. a) $1{,}2x^2 - 0{,}027 = 0$ b) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{32} = 0$ c) $a^2x^2 - 9b^2 = 0$
7. a) $(x^2 - 4)(2x - 6) = 0$ b) $(x^2 - 9)(x^2 - 8x) = 0$.

4. Neliö = vakio eli $[\,f(x)\,]^2 = a$ yhtälöiden ratkaiseminen
Ota ensin neliöjuuri molemmista puolista. Laita oikealle ± merkki.
Ratkaise sitten x kummastakin yhtälöstä $f(x) = +\sqrt{a}$ ja $f(x) = -\sqrt{a}$

8. a) $(x - 1)^2 = 9$ b) $(2x - 3)^2 = 25$ c) $(3x - 4)^2 = x^2$ d) $(2x - 1)^2 = (x - 2)^2$

5. Ratkaisukaavan syntymisen idea
Sievennetään yhtälöä niin, että toiselle puolelle saadaan neliö, jossa x ja toiselle puolelle vakio.
Eli päästään yhtälöön $[f(x)]^2$ = vakio, joka ratkaistaan.

9. Ratkaise täydentämällä oikea puoli neliöksi a) $x^2 - 2x = 3$ b) $x^2 - 4x = 5$ c) $2x^2 - 4x = 2{,}5$

6. Ratkaisukaavan johtaminen
Katso kirja.

10. Johda yhtälön $x^2 + 2px + q = 0$ ratkaisukaava.

7. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava
$ax^2 + bx + c = 0$, josta $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

11. a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ c) $8x^2 - 2x - 1 = 0$ d) $4x^2 - 4x - 15 = 0$ e) $2x^2 + 7x - 15 = 0$
12. a) $x^2 - x - 1 = 0$ b) $2x^2 - 3x - 4 = 0$ c) $3x^2 + 2x - 2 = 0$ d) $5x^2 + 7x + 1 = 0$
13. a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ b) $x^2 + 10x + 25 = 0$ c) $x^2 + 2x + 5 = 0$ d) $5x^2 - 6x + 2 = 0$
14. a) $x^2 - 3{,}3x + 2{,}52 = 0$ b) $x^2 - 0{,}34x + 0{,}0273 = 0$ c) $0{,}15x^2 - 0{,}435x + 0{,}0018 = 0$
15. a) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{2} = 0$ b) $\frac{1}{6}x^2 - \frac{7}{12}x + \frac{1}{2} = 0$ c) $\frac{1}{24}x^2 - \frac{7}{24}x + \frac{1}{4} = 0$
16. a) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$ b) $x^2 + \sqrt{3}x - 6 = 0$ c) $2x^2 - \sqrt{5}x - 5 = 0$
17. a) $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$ b) $2x^2 + 5ax - 12a^2 = 0$ c) $x^2 - (a + 3)x + 3a = 0$ d) $2x^2 - (2u + 1)x + u = 0$
18. a) $x^2 + 13x - 1440 = 0$ b) $2x^2 + 25x - 3750 = 0$ c) $35x^2 - 1227x + 70 = 0$

8. II asteen yhtälöiden ratkaiseminen.
Sievennä yhtälö normaalimuotoon ja käytä ratkaisukaavaa. (Erikoistilanteita, jos yhtälö vaillinainen)

19. a) $x(5 - x) = 6$ b) $x(2x - 1) = (x + 1)^2 + 3$ c) $(x + 2)^2 = 8x + 1$
20. a) $\frac{5x - 2}{2} = \frac{3x + 2}{x}$ b) $\frac{x^2}{2} = \frac{3x - 2}{2} + 1$ c) $\frac{x^2 + 1}{6} = \frac{x}{3} + 1$ d) $(x^2 + x + 1)^2 = (2x + 1)^2$
21. Ratkaise a) $(x^2 - 3)^2 = (x - 3)^2$ b) $(x - 1)^2 + 4 = 0$
22. Mikä arvo on a:lla, kun $x = 1$ on yhtälön $x^2 + (a - 1)x + a^2 = 0$ ratkaisu. Mikä on toinen ratkaisu?
23. Osoita, että kompleksiluku $3 - i$ on yhtälön $x^2 - 6x + 10 = 0$ ratkaisu.
24. Ratkaise a) $|\,x^2 - 3\,| = 1$ b) $|\,x^2 - 6\,| = x$ c) $|\,2x\,| = x^2 - 3$
25. Missä pisteessä paraabeli a) $y = x^2 - 3x - 4$ b) $y = 2x^2 - 3x - 5$ leikkaa x-akselin?
26. Laske yhtälön $\pi x^2 + (\pi - 1)x - \sqrt{2} = 0$ ratkaisujen likiarvot 3 numeron tarkkuudella.

9. II asteen yhtälön ratkaiseminen laskimella TI-85
Laita yhtälö normaalimuotoon $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ (laskimessa kertoimet ovat $a_2, a_1\ ja\ a_0$)
$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{POLY}}$ $\boxed{\text{order = 2}}$ ja syötä kertoimet $a_2, a_1\ ja\ a_0$
$\boxed{\text{F5 = SOLVE}}$, jolloin saat ratkaisut. Lukuparitulos (a,b) tarkoittaa kompleksilukua a + bi

2.5. Sovelluksia

1. Sanallisia tehtäviä, joita ratkaistaan II asteen yhtälön ratkaisukaavaa käyttäen
Lue tehtävä ja piirrä mahdollisesti kuvio auttamaan tehtävän hahmottamista.
Merkitse jotakin (yleensä kysyttyä) suuretta x:llä.Tai x on jokin aputuntematon, jonka avulla löytyy ratkaisu.
Lausu muut esiintyvät ja tarvittavat suureet x:n ja annettujen lukujen avulla.
Tee jostakin tiedosta yhtälö ja ratkaise se.
Pohdi ratkaisun mielekkyyttä ja anna vastaus.

2.5.1. Luvun ja sen käänteisluvun summa on $2\frac{1}{12}$. Mikä on luku?
2. Luvun ja sen neliön summa on 90. Mikä on kyseinen luku?
3. Millä x:n arvolla a) f(x) = 0 b) f(x) = 7 c) f(x) = - 5 d) f(x) = -9, kun $f(x) = x^2 - 6x$?
4. Millä x:n arvolla funktiot $f(x) = 2x^2 + 3x$ ja $g(x) = 3x^2 + 6x + 2$ saavat yhtä suuret arvot
5. Millä x:n arvoilla lausekkeiden 3x - 2 ja 2x - 3 arvot ovat käänteislukuja?
6. Kahden peräkkäisen kokonaisluvun neliöiden summa on 10225. Mitkä nämä luvut ovat?
7. Kahden peräkkäisen parittoman luvun neliöiden summa on 202. Mitkä ovat luvut?
8. Kaksinumeroisen luonnollisen luvun eteen laitetaan numerot 5 ja 7, jolloin saatu luku on alkuperäisen luvun neliö. Mikä tämä luku on?
9. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 8 ja 9 pienemmät kuin hypotenuusa. Laske sivujen pituudet.
10. Köyden pituus on 100 m. Sillä aidataan 600 m^2 suorakulmion muotoinen alue. Miten pitkiä ovat sivut?
11. Oppilaat ovat maalanneet koulun seinään 2 m x 5 m suuren graffitin. Heillä on vielä yksi spraypurkki, josta riittää maalia 3m^2:lle. Sillä maalataan joka puolelle yhtä suuret reunukset. Kuinka leveä reunus on?
12. Matti aikoo ostaa viikkorahoillaan tietokonepelin, joka maksaa 360 mk. Hän laski, että jos hän saisi 12 mk enemmän viikossa, hän saisi pelin viikkoa aikaisemmin. Mikä on Matin viikkorahan suuruus?
13. Murtoluvun osoittaja on 4 pienempi kuin nimittäjä. Kun osoittaja pienenee kolmella ja nimittäjä suurenee kolmella, saadaan murtoluku, joka on puolet alkuperäisestä. Mikä on alkuperäinen murtoluku?
14. Seurueen bussimatkan hinta 3600 mk jaettiin tasan matkustajien kesken. Matkalta jäi 4 pois, jolloin jokainen lähtijä joutui maksamaan 10 mk enemmän. Montako matkustajaa lähti matkalle?
15. Missä lukujärjestelmässä a) 6 x 7 = 52 b) 4 x 5 = 14?
16. Kivi pudotetaan kaivoon. Kivi putoaa t sekunnissa $4{,}9t^2$ metriä ja äänen nopeus on 340 m/s. Kuinka syvä on kaivo, kun molskahdus kuuluu 5,2 s kiven irrottamisesta?

2. Funktion nollakohdan laskeminen
Nollakohdalla tarkoitetaan sitä x:ää, jolla funktion arvoksi tulee nolla.
Merkitse funktion lauseke nollaksi tekemällä yhtälö f(x) = 0, ja ratkaise sitten tämä yhtälö.

17. Laske funktion a) $f(x) = x^2 - 6x - 7$ b) $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$ nollakohdat.
18. Olkoon $f(x) = x^2 - x + a$. Ratkaise yhtälö f(2x) = f(x - 1).

3. Paloittain määritellyn funktion nollakohdan algebrallinen laskeminen
Merkitse jokainen lauseke = 0 ja ratkaise ne yhtälöt
Katso, onko saatu x sillä alueella, missä ko. funktion lauseketta voi käyttää.

19. Laske funktion a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, \text{ kun } x < 2 \\ 2x^2 - 5x - 3, \text{ kun } x \geq 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6, \text{ kun } x < 1 \\ 2x^2 + 3x - 14, \text{ kun } x \geq 1 \end{cases}$ nollakohdat.

2.6. Diskriminantti ja toisen asteen yhtälön ratkaisujen lukumäärä

1. Toisen asteen yhtälön diskriminantti
$D = b^2 - 4ac$ eli ratkaisukaavassa neliöjuuren alla oleva lauseke.

2.6.1. Laske yhtälön a) $x^2 + 3x - 4 = 0$ b) $3x^2 - 4x + 5 = 0$ c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ diskriminantti.

2. Toisen asteen yhtälön ratkaisujen lukumäärä diskriminantin avulla
Jos D > 0, on yhtälöllä kaksi erisuurta reaalista ratkaisua.
Jos D = 0, on yhtälöllä yksi kaksinkertainen reaalinen ratkaisu.
Jos D < 0, ei yhtälöllä ole yhtään reaalista ratkaisua (tosin on 2 kompleksilukua, jotka ovat liittolukuja)

2. Montako ratkaisua on yhtälöllä a) $2x^2 - 3x - 4 = 0$ b) $0{,}25x^2 + x + 1 = 0$ c) $3x^2 - 4x + 2 = 0$?
3. Osoita, että funktio $f(x) = 5x - x^2$ ei saa arvoa $\sqrt{40}$.
4. Osoita, että yhtälön $x^2 - 2ax + 2ab - b^2 = 0$ ratkaisut ovat aina reaaliset. Millä a:n ja b:n arvoilla yhtälöllä on kaksinkertainen ratkaisu?

3. Kirjainkertoimien ratkaiseminen, jotta yhtälöllä tietty määrä ratkaisuja
Tehdään (epä)yhtälö D > 0, D = 0 tai D < 0, riippuen siitä pitikö ratkaisuja olla 2, 1 vai 0, joka ratkaistaan.

5. Millä a:n arvoilla yhtälöllä $x^2 - 4x + a = 0$ on a) kaksi b) yksi c) nolla reaalista ratkaisua?
6. Määritä a, kun yhtälöllä $x^2 + (a - 1)x + 9 = 0$ on yksi reaalinen ratkaisu? Mikä tämä ratkaisu on?
7. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $ax^2 + 2x + 3 = 0$ on reaalinen ratkaisu?
8. Mikä on suurin a:n kokonaislukuarvo, jolla yhtälön $x^2 - 7x + a = 0$ ratkaisut ovat reaaliset?
9. Määritä a, kun yhtälöllä $ax^2 - (2a + 1)x + 2 = 0$ on a) kaksinkertainen ratkaisu b) yksi reaalinen ratkaisu.

*2.7. Ratkaisujen summa ja tulo

*1. Ratkaisujen summa $x_1 + x_2$
$= -\frac{b}{a}$

*2. Ratkaisujen tulo $x_1 \cdot x_2$
$= \frac{c}{a}$

2.7.1. Mikä on ratkaisujen summa ja tulo a) $x^2 + 3x - 4 = 0$ b) $2x^2 - 6x + 3 = 0$ c) $-3x^2 - 2x + 1 = 0$?
2. Mikä on yhtälön $6x^2 + x - 4 = 0$ ratkaisujen keskiarvo?
3. Osoita, että yhtälön $3x^2 - 8x + 3 = 0$ ratkaisut ovat toistensa käänteislukuja.
4. Yhtälöllä $ax^2 - 4ax + c$ on kaksinkertainen ratkaisu. Mikä se on?
5. Yhtälön $30x^2 + 7x - 1 = 0$ toinen ratkaisu on 1/10. Mikä on toinen ratkaisu?

*3. Toisen asteen yhtälön ratkaisujen tarkistaminen niiden summaa ja tuloa käyttäen
Kun olet ratkaissut yhtälön, laske ratkaisujen summa ja tulo.
Vertaa niitä - b/a : han ja c/a :han. Jos summa ja tulo täsmää, olet ratkaissut yhtälön oikein.

6. Ratkaise yhtälö a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $2x^2 - 7x + 6 = 0$ c) $6x^2 + x - 2 = 0$ ja tarkista

*4. Toisen asteen yhtälön muodostaminen, kun tunnetaan sen ratkaisujen summa ja tulo
Tee yhtälöt: $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2$ ja $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$
Valitse a = 1 ja ratkaise tämän jälkeen eo. yhtälöistä b ja c.
Laita yleisen normaalimuodon yhtälöön $ax^2 + bx + c = 0$ a:n, b:n ja c:n paikalle saadut luvut.

7. Määritä jokin toisen asteen yhtälö, jonka ratkaisut ovat a) 3 ja 4 b) 5 ja ½ c) 6 ja 6 d) ½ ja 1/3.
8. Muodosta jokin toisen asteen yhtälö, jonka ratkaisut ovat a) kaksi kertaa niin suuret b) kaksi suuremmat kuin yhtälön $x^2 - 5x - 6 = 0$ ratkaisut.

*5. Toinen ratkaisu, kun toinen $d + \sqrt{e}$ ja kertoimet rationaalisia
Tällöin toinen ratkaisu on $d - \sqrt{e}$

9. Määritä kokonaislukukertoiminen toisen asteen yhtälö, jonka yksi ratkaisu on $2 + \sqrt{3}$.

*6. x_1:n ja x_2:n symmetrisen lausekkeen arvon laskeminen ilman että ratkaisee yhtälöä
Sievennä lauseketta niin, että siinä esiintyy x_1 ja x_2 vain muodossa $(x_1 + x_2)$ ja $(x_1 \cdot x_2)$
Korvaa $(x_1 + x_2)$ ja $(x_1 \cdot x_2)$ yhtälöstä saatavilla luvuilla - b/a ja c/a.
Laske näin saadun lausekkeen arvo.

10. Määritä yhtälöä ratkaisematta lausekkeiden a) $x_1 + x_2$ b) $x_1 \cdot x_2$ c) $3x_1 + 3x_2$ d) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ e) $x_1^2 + x_2^2$ arvot, kun x_1 ja x_2 ovat yhtälön $2x^2 + 3x - 20 = 0$ ratkaisut.
11. Laske lausekkeen $2^r \cdot 2^s + (2^r)^{3s}$ arvo, kun r ja s ovat yhtälön $x^2 - 10x + 3 = 0$ ratkaisut.

2.8. Toisen asteen polynomin jakaminen tekijöihin

1. Polynomin $ax^2 + bx + c$ tekijät $= a(x - x_1)(x - x_2)$

2. Toisen asteen polynomin jakaminen tekijöihinsä Ratkaise nollakohdat x_1 ja x_2 sekä käytä eo. tekijöihinjakosääntöä.

2.8.1. Jaa ensimmäisen asteen tekijöihin a) $x^2 - 5x - 6$ b) $3x^2 - 4x - 4$ c) $3 + 2x - 5x^2$
2. Jaa tekijöihin a) $2a^2 - 9a - 5$ b) $3c^2 - 7c - 10$ c) $x^2 - 4ax - 5a^2$ d) $4a^2 + 4ab - 3b^2$
3. Jaa osoittaja ja nimittäjä tekijöihinsä ja supista $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{2x^2 - 5x + 2}$

3. Toisen asteen yhtälön muodostaminen, kun tunnetaan ratkaisut Yksi yhtälö on $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

4. Muodosta jokin toisen asteen polynomi, jonka nollakohdat ovat a) 13 ja 11 b) 8 ja - 5 c) 2½ ja 3½.
5. Muodosta toisen asteen polynomi P(x), jonka nollakohdat ovat 2 ja -3 ja P(3) = 12.
6. Muodosta jokin toisen asteen yhtälö, jonka ratkaisut ovat $1 + \sqrt{3}$ ja $1 - \sqrt{3}$
7. Muodosta II asteen yhtälö, jonka ratkaisut ovat 1/3 ja -1/4 sekä I asteen termin kerroin on 2.

4. Toisen asteen yhtälön ratkaisun, toisen asteen polynomin nollakohdan, tekijän ja jaollisuuden yhteys Luvut x_1 ja x_2 ovat yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisut ⇔ x_1 ja x_2 ovat polynomin $P(x) = ax^2 + bx + c$ nollakohdat ⇔ $(x - x_1)$ ja $(x - x_2)$ ovat polynomin $P(x) = ax^2 + bx + c$ tekijöitä ⇔ Polynomi $P(x) = ax^2 + bx + c$ on jaollinen I asteen polynomeilla $(x - x_1)$ ja $(x - x_2)$

8. Määritä a, kun polynomin $x^2 + ax - 6$ tekijänä on a) x - 1 b) x + 2 c) 2x - 1.
9. Määritä a, kun polynomi $a^2x^2 - 2x + a$ on jaollinen polynomilla x - 1.

2.9. Toisen asteen epäyhtälön ratkaiseminen

1. Ratkaisutapa nollakohtia ja kuvaajaa käyttäen Laita epäyhtälö normaalimuotoon $ax^2 + bx + c > 0$ (tai < 0 tms.) Ratkaise nollakohdat Piirrä paraabeli. (Tarkista aukeamissuunta ja x-akselin leikkauspisteiden määrä) Anna vastaus.

2.9.1. a) $x^2 < 4$ b) $x^2 > 4$ c) $x^2 < - 4$ d) $x^2 > - 4$ e) $x^2 \geq 4$
2. a) $x^2 - 3x < 0$ b) $2x^2 + 3x > 0$ c) $5x^2 + x \leq 0$
3. a) $x^2 - x - 6 > 0$ b) $2x^2 + x < 6$ c) $x^2 + 9 < 10x$
4. a) $x^2 - 4x + 4 > 0$ b) $x^2 + 9 < 6x$ c) $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ d) $x^2 - 8x + 16 \geq 0$
5. a) $(2x - 1)^2 > 1$ b) $x(x - 1)>2(x - 1)$ c) $2x^2 + x < x^2 + 3x + 15$

2.10. Probleemoja, jotka johtavat toisen asteen epäyhtälöön

1. Menettely Kuten vastaavassa I asteen yhtälöissä ja epäyhtälöissä sekä II asteen yhtälöiden kohdassa 2.5.1.

2.10.1. Millä x:n reaaliarvoilla on määritelty $\sqrt{3 - x - 2x^2}$?
2. Millä x:n arvoilla funktio $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ saa pienempiä arvoja kuin 4?
3. Millä vakion a arvoilla yhtälön $x^2 - 3ax + 2a = 0$ ratkaisut ovat reaaliset?
4. Mikä on pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön $4n^2 - 60n - 7431 > 0$
5. Suorakulmion piiri on 56 m ja ala vähintään 160 m^2. Miten suuri voi sivun pituus olla?
6. Olkoon $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x \text{ , kun } x \geq 1 \\ 2x^2 - 5x + 2 \text{ , kun } x < 1 \end{cases}$. Millä x:n arvoilla f(x) > 0
7. Millä a:n arvoilla funktion $f(x) = x^2 + 6ax + a$ kaikki arvot ovat positiivisia?
8. Rantaan tehdään suorakulmion muotoinen aitaus, jonka kolmeen maalla olevaan sivuun voi käyttää 50 m köyttä. Pitkäkö voi kohtisuoraan rantaan menevä sivu olla, kun aitauksen ala on oltava vähintään 300 m^2?

3. Korkeamman asteen polynomifunktio

3.1. Polynomifunktion kuvaaja

1. Kolmannen asteen polynomifunktion kuvaajan muoto Kuvaajassa on kaksi mutkaa, yksi kaksinkertainen ”mutka”, tai ei yhtään mutkaa (eli monotoninen)

3.1.1. Piirrä funktion a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = x^3 - x$ c) $f(x) = -x^3$ d) $f(x) = -x^3 + 4x$ kuvaaja

2. Kertoimen a vaikutus yhtälön $y = ax^3 + ...$ kuvaajaan Jos $a > 0$, menee kuvaaja vasemmalla äärettömän alas ja oikealla äärettömän ylös. Jos $a < 0$, menee kuvaava vasemmalla äärettömän ylös ja oikealla äärettömän alas.

2. Millaisia arvoja on funktiolla $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$, kun x on a) suuri b) pieni ?
3. Millaisia arvoja on funktiolla $f(x) = -3x^3 + 4x^2 - 5$, kun x on a) suuri b) pieni?

3. Neljännen asteen polynomifunktion kuvaajan muoto Kuvaajassa on kolme mutkaa tai yksi varsinainen ja yksi kaksinkertainen tai yksi mutka.

4. Piirrä funktion a) $f(x) = x^4$ b) $f(x) = x^4 - 4x^2$ c) $f(x) = x^4 - 2x^3$ kuvaaja

4. Kertoimen a vaikutus yhtälön $y = ax^4 + ...$ kuvaajaan Jos $a > 0$, menee kuvaaja oikealla ja vasemmalla äärettömän ylös. Jos $a < 0$, menee kuvaaja oikealla ja vasemmalla äärettömän alas.

5. Millaisia arvoja on funktiolla $f(x) = 3x^4 + 5x - 6$ kun x on a) suuri b) pieni?
6. Millaisia arvoja on funktiolla $f(x) = -5x^4 + 10000x^3 - 200$, kun x on a) suuri b) pieni?

4. Polynomien jaollisuus

4.1. Jakolaskualgoritmi

1. Polynomin jakaminen monomilla Polynomin jokainen termi jaetaan tällä monomilla.

4.1.1. Jaa a) $\frac{6x^2 - 4x}{2x}$ b) $\frac{3x^3 - 6x^2 + 9x}{3x}$

2. Jakoyhtälö, kun jako menee tasan $\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) \Leftrightarrow P(x) = D(x) \cdot Q(x)$ ts. jaettava = jakaja · osamäärä

2. Kirjoita jakoyhtälö jakolaskulle $\frac{8x^3 - 12x^2 + 16x}{2x}$.

3. Jakoyhtälö, kun jako ei mene tasan $\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x)$ jää $R(x) \Leftrightarrow P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$ ts. jaettava = jakaja · osamäärä + jakojäännös.

3. Kirjoita jakoyhtälö jakolaskulle $\frac{12x^3 - 30x^2 + 18x}{6x^2}$

*4. Polynomin jakaminen ensimmäistä astetta olevalla polynomilla (x - a) synteettisesti Merkitse vierekkäin ensimmäisen asteen polynomin nollakohta (a) ja jaettavan polynomin kertoimet. Jätä yksi tyhjä rivi tuloille. Laita kolmannelle riville korkeimman asteen termin kertoimen alle sama kertoimena oleva luku Laita toiselle riville toiseksi korkeimman asteen termin kertoimen alle tulo eo. kerroin · nollakohta (a). Laske toisen sarakkeen luvut yhteen kolmannelle riville niiden lukujen alapuolelle. Kerro tällä luvulla nollakohta ja laita tulo toiselle riville seuraavalle sarakkeelle. Laske kolmannen sarakkeen luvut yhteen niiden alapuolelle jne. Osamääräpolynomin kertoimet saadaan alimmalta riviltä. x^{n-1}:n kerroin on ensimmäinen luku, toiseksi viimeinen luku on vakiotermi ja viimeinen luku on jakojäännös. Jos jakajan I asteen termin kerroin ei ollut 1, niin jaa osamäärä vielä tällä kertoimella.

4. Jaa synteettisesti a) $(x^3 - 4x^2 + 7x - 4) : (x - 1)$ b) $(3x^3 - 11x^2 + 13x - 6) : (x - 2)$
5. Jaa a) $(2x^3 + 9x^2 + 5x - 10) : (x + 3)$ b) $(2x^4 + 8x^3 - 5x^2 - 24x - 12) : (x + 4)$
6. Jaa a) $(6x^3 - 2x^2 - 32x + 24) : (2x - 4)$ b) $(8x^3 - 32x + 21) : (2x - 3)$

5. Polynomin jakaminen polynomilla jakokulmassa
Laita jaettava ja jakaja jakokulmaan muuttujakirjaimen alenevien potenssien järjestyksessä
Jaa jaettavan korkein termi jakajan korkeimmalla termillä. Tulos on osamäärän ensimmäinen termi.
Kerro tällä termillä koko jakaja ja laita tulo jaettavan alle vastaavien termien alapuolelle.
Vaihda tämän tulon kaikkien termien etumerkit ja laske allekkain olevat polynomit yhteen.
Jaa saadun summan korkein termi jakajan korkeimmalla termillä
Tämä on osamäärän toinen termi.
Kerro, vaihda merkki, laske yhteen, jaa jne. Lopeta jako kun kirjaimia alkaa tulla nimittäjään.

7. Jaa a) $(2x^3 - 3x^2 - 13x - 6) : (2x + 3)$ b) $(2x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 12x + 9) : (2x^2 + 3)$
8. Jaa a) $(6x^4 - 17x^3 + 25x^2 - 19x + 5) : (2x^2 - 3x + 1)$ b) $(8x^4 + 8x^2 + 50) : (4x^2 + 8x + 10)$
9. Jaa a) $(6x^3 - 5x^2 - 33x + 30) : (3x - 7)$ b) $(10x^3 + 9x^2 - 120x - 210) : (2x + 5)$
10. Jaa a) $(x^3 - 4ax^2 - a^2x + 4a^3) : (x - a)$ b) $(x^3 - 7a^2x + 6a^3) : (x - 2a)$
11. Mikä on jakojäännös $(x^3 - 4x^2 + 5x + a) : (x - 3)$? Millä a:n arvolla jakojäännös on nolla?

4.2. Polynomin jakaminen tekijöihin

1. Yhteinen tekijä toiseksi tekijäksi ja toinen tekijä jakamalla
Katso ensin, mikä on termien suurin yhteinen numerotekijä ja ota se yhteisen tekijän numero-osaksi.
Ota yht. tekijään jokaista kirjainta, jota on kaikissa termeissä, kirjaimen pienimmän eksponentin verran.
Toisen tekijän saat jakamalla alkuperäinen polynomi tällä yhteisellä tekijällä.

4.2.1. Jaa tekijöihin a) $6x^2 - 8x$ b) $5x^3 - 10x^2$ c) $4a^2b + 6ab^2$ d) $6a^3b - 21a^2b^2$ e) $2x^3 - 4x^2 + 6x$

2. Ryhmittely niin, että sulkulauseketekijä saadaan yhteiseksi tekijäksi
Jaa polynomi esimerkiksi kahden termin ryhmiin.
Ota näistä yhteinen tekijä.
Toivotaan, että sama sulkulauseke on tekijänä kaikissa tuloissa.
Otetaan tämä sulkulauseke yhteiseksi tekijäksi, toinen tekijä sulkeisiin ottamalla tämä sulkulauseke pois.

2. Jaa tekijöihin a) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ b) $2x^3 - 6x^2 - 6x + 18$ c) $x^5 - 5x^3 - 3x^2 + 15$

3. Polynomi muotoa neliö - neliö
= (1. neliön kantaluku + 2. neliön kantaluku)(1. neliön kantaluku - 2. neliön kantaluku)
eli $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ eli neliöiden kantalukujen summa kerrottuna kantalukujen erotuksella

3. Jaa tekijöihin a) $x^2 - 49$ b) $4x^2 - 25$ c) $2x^2 - 50$ d) $3x^2 - 12y^2$ e) $x^4 - 16a^4$ f) $x^8 - 256$

4. Polynomi muotoa neliö + neliö + kantalukujen kaksinkertainen tulo
= (1. neliön kantaluku + 2. neliön kantaluku)^2
eli $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$

4. Jaa tekijöihin a) $x^2 + 6x + 9$ b) $x^2 + 10x + 25$ c) $x^3 + 20x^2 + 100x$ d) $2ax^2 + 16\,ax + 32a$

5. Polynomi muotoa neliö + neliö - kantalukujen kaksinkertainen tulo
= (1. neliön kantaluku - 2. neliön kantaluku)^2
eli $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$

5. Jaa tekijöihin a) $x^2 - 2x + 1$ b) $x^2 - 4ax + 4a^2$ c) $5x^2 - 40ax + 80a^2$ d) $x^4 - 8x^2 + 16$

6. Polynomi on toisen asteen polynomi
Laske nollakohdat, jolloin tekijät: II asteen termin kerroin · (muuttuja - nk1) · (muuttuja - nk2)
eli $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

6. Jaa tekijöihin a) $x^2 - 4x - 5$ b) $2x^2 - 5x - 3$ c) $3x^2 + x - 14$ d) $5x^2 - 16x + 12$ e) $x^2 - 5ax + 6a^2$

4.3. Polynomien jaollisuuden, tekijöiden ja nollakohtien yhteys

1. Jakojäännöslause, kun polynomi jaetaan ensimmäisen asteen polynomilla
Kun polynomi P(x) jaetaan polynomilla (x - a) on jakojäännös P(a) eli polynomin arvo jakajan nk:ssa.

4.3.1. Laske jakojäännös, kun polynomi $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 6$ jaetaan binomilla a) $x - 1$ b) $x + 1$ c) $2x - 1$.
2. Mikä on jakojäännös, kun $x^{100} + 2x^{50} - x^{11} + 1$ jaetaan binomilla a) $x^2 - 1$ b) $x^3 - x$?

2. Yhteys sanontojen ”polynomin nollakohta”, ”tekijä”, ”jaollisuus” ja ”yhtälön ratkaisu” välillä
P(x):n nollakohta on x = a
⇔ P(a) = 0
⇔ (x - a) on P(x):n tekijä
⇔ P(x) on jaollinen (x - a):lla
⇔ x = a on yhtälön P(x) = 0 yksi ratkaisu.

3. Onko polynomi $x^3 - x + 6$ jaollinen polynomilla a) $x - 1$ b) $x + 2$ c) $x - 3$?
4. Osoita, että $x^3 - x^2 - 2x + 2$ on jaollinen polynomilla a) $x - 1$ b) $x + \sqrt{2}$.
5. Onko polynomi $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ jaollinen polynomilla a) $x - 2$ b) $x^2 - 4$
6. Onko a) $x + 1$ b) $x - 1$ c) $x - \sqrt{2}$ polynomin $3x^3 + x^2 - 6x - 2$ tekijä?
7. Osoita, että $x + 2$ on polynomin $x^5 + 32$ tekijä.
8. Osoita, että polynomin $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3$ tekijänä on $x^2 - 1$.

3. Kirjainvakioiden arvon määrittämisiä jaollisuus, tekijä, nollakohta, ratkaisu-lausetta käyttäen
Jaollisuus tai tekijä tiedosta saadaan yhtälö P(a) = 0, josta kirjaimen arvo ratkaistaan.

9. Mikä on a, kun polynomi $2x^3 - x^2 - 13x + a$ on jaollinen binomilla $x - 3$?
10. Mikä on a, kun polynomin $x^3 - ax^2 + 2x + a$ tekijänä on $x + 2$?
11. Määritä k:lle sellainen arvo, että jakolasku $(x^3 + 2x^2 + kx) : (x - 3)$ menee tasan.
12. Mikä on c, kun jakolaskun $(x^3 - x^2 - x + c) : (x - 2)$ jakojäännös on 3?
13. Määritä a ja b, kun $x^4 - ax^3 - bx^2 + x - 6$ on jaollinen trinomilla $x^2 + x - 6$ (joka = $(x + 3)(x - 2)$)?
14. Polynomin $x^3 - 2x^2 - 3x + a$ nollakohta on 2. Mitkä ovat polynomin tekijät?

4. Polynomin jakaminen tekijöihin tuntemalla sen nollakohdat
Tekijöitä ovat (x - nk):t ja korkeimman asteen termin kerroin

15. Mitkä ovat polynomin $x^3 - x^2 - 4x + 4$ tekijät, kun sen yksi nollakohta on x = 1?

5. Polynomin muodostaminen, kun tunnetaan sen nollakohdat
Yksi sellainen polynomi on $(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$

16. Muodosta jokin III asteen polynomi, jonka nollakohdat ovat 1, 2 ja 3.
17. Muodosta kaikki III asteen polynomit, jonka nollakohdat ovat 1, -2 ja -3.
18. Määritä se 4. asteen polynomi, jolla on tekijä $x^2 + 1$ ja nollakohdat x = 1 ja x = -2.

6. Moninkertaiset nollakohdat
Polynomin tekijänä on $(x - a)^n$ ⇔ x = a on polynomin n-kertainen nollakohta

19. Anna jokin III asteen polynomi, jonka 2-kertainen nollakohta on 2 ja yksinkertainen nollakohta on 1.
20. Osoita, että x = 1 on polynomin $x^3 - x^2 - x + 1$ kaksinkertainen nollakohta.
21. Millä vakion a arvoilla polynomilla $(x^2 - 1)(ax - 2)$ on kaksinkertainen nollakohta?
22. Millä vakion a arvoilla polynomi $x^3 + 4x^2 + ax$ voidaan jakaa 1. Asteen tekijöihin?
23. Osoita, että polynomilla $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ on kolminkertainen nollakohta.
24. Polynomilla $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8x - 8$ on 2-kertainen nollakohta x = -2. Jaa polynomi tekijöihin.

5. Korkeamman asteen yhtälöt ja epäyhtälöt

5.1. Tulon nollasääntöön perustuva ratkaisu

1. Tulo = 0 yhtälöt
Merkitse kaikki tulon tekijät = 0 ja ratkaise näin saadut yhtälöt

5.1.1. a) $(x - 2)(x^2 - 9) = 0$ b) $(x^2 - 3x - 4)(2x^2 - 3x + 1) = 0$ c) $(x^2 + 5x + 6)(3x^2 - 2x - 4) = 0$.

2. Tulo = 0 yhtälö huomaamalla yhteinen tekijä
Siirretään kaikki termit vasemmalle puolelle.
Kun huomataan yhteinen tekijä, jaetaan vasen puoli tekijöihinsä.
Ratkaistaan näin saatu tulo = 0 yhtälö merkitsemällä kaikki tekijät = 0.

2. a) $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ b) $x^4 - 6x^3 + 5x^2 = 0$ c) $x^3 + x(x - 2) = 0$ d) $(x - 2)x^2 - 9(x - 2) = 0$

3. Tulo = 0 yhtälö sopivalla ryhmittelyllä
Siirretään kaikki termit vasemmalle puolelle yhtälöä.
Kun termit jaetaan kahden ryhmiin ja otetaan niistä yhteinen tekijä, saadaan sama sulkulauseke yhteiseksi tekijäksi ja toinen tekijä saadaan jakamalla.
Ratkaistaan näin saatu tulo = 0 yhtälö.

3. a) $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$ b) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ c) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

4. Yhtälön molemmilla puolilla yhteinen tekijä.
Jaa yhtälön molemmat puolet tekijöihin.
Huomataan, että molemmilla puolilla on tekijänä sama sulkulauseke.
Jaa yhtälön molemmat puolet tällä yhteisellä tekijällä.
Tee kaksi yhtälöä 1° jakamalla saatu ja 2° yhteinen tekijä = 0. (Kaavana : $ab = ac \Leftrightarrow b = c$ TAI $a = 0$)
Ratkaise nämä yhtälöt.

4. a) $(x + 2)^3 = 4(x + 2)$ b) $(x + 2)^2(2x + 1) = 2x + 1$ c) $x^3 - 2x^2 = 3x - 6$

5.2. Epäyhtälön ratkaisu tulon merkkisäännön avulla

1. Tulo > 0 epäyhtälön ratkaiseminen taulukoimalla tekijöiden merkit
Merkitse kaikki tekijät = 0 ja ratkaise ne.
Piirrä kaikkien tekijöiden kuvaajat (muoto ja x-akselin leikkauspisteet), josta näet merkit
Tee lukusuorataulukko, johon merkitse ensimmäiselle riville 1. tekijän merkit, toiselle 2. tekijän jne.
Päättele alimmalla rivillä mikä on kullakin välillä tulon merkki.
Anna vastaukseksi ne välit, joilla tulo on positiivinen (jos tulo > 0)

5.2.1. a) $(x^2 - x)(x + 1) > 0$ b) $(4 - 3x)(x^2 + 2x + 3) < 0$ c) $(2 - x)(x^2 - 3x - 4) > 0$ d) $(x^2 + 4x)(x^2 - 5x) > 0$

5.3. Epäyhtälön ratkaisu nollakohtien ja kuvaajan avulla

1. Polynomi > 0 epäyhtälön ratkaiseminen käyttäen hyväksi polynomifunktion kuvaajaa ja nollakohtia
Sievennä yhtälö niin, että kaikki termit ovat vasemmalla puolella, ja oikealla puolella on 0.
Merkitse > merkin tilalle = merkki ja ratkaise saatu yhtälö
Hahmottele vasemman puolen määrittelemän polynomifunktion kulku (muoto ja nollakohdat)
Anna vastaukseksi ne väli, joilla funktion kuvaaja on x-akselin yläpuolella (jos ey:ssä > merkki)

5.3.1. a) $3x^3 < 2x^2 + x$ b) $x^3 - 6x^2 + 7x > 0$ c) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 \leq 0$ d) $x^3 + x^2 \leq x + 1$ e) $x^3 - 4x^2 > 4x - 16$

5.4. Lisämenetelmiä korkeamman asteen yhtälöiden ratkaisuun.

1. Yksi ratkaisu annettu tai huomataan helposti. Siitä saadaan yksi tekijä
Jos huomattu tai annettu ratkaisu on $x = a$, on tekijänä $(x - a)$
Siirrä kaikki termit vasemmalle puolelle.
Jakamalla vasen puoli yhteisellä tekijällä saat toisen tekijän.
Näin saat yhtälön tulo = 0, joka ratkaistaan.

5.4.1. Ratkaise yhtälö $x^3 + x^2 - 7x - 3 = 0$, kun sen yksi ratkaisu on -3.
2. Yhtälön $3x^3 - 5x^2 - 4x + a = 0$ yksi ratkaisu on $x = 2$. Määritä a ja muut ratkaisut.
3. Yhtälöllä $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 3 = 0$ on ratkaisuina $x = \pm\sqrt{3}$. Mitkä ovat muut ratkaisut?

2. Yksi ratkaisu löytyy kokonaislukuehdokkaiden joukosta
LAUSE: Jos yhtälöllä $x^n + \ldots + c = 0$ (, missä kertoimet ovat kokonaislukuja ja korkeimman asteen termin kerroin on 1,) on kokonaislukuratkaisu, niin tämä ratkaisu on luvun c tekijä.

4. Mitkä kokonaisluvut voivat olla yhtälön a) $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = 0$ b) $x^4 - 7x^2 - 6x + 12 = 0$ ratkaisuja?
5. Ratkaise a) $x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$ b) $x^3 - 7x^2 + 11x + 3 = 0$ c) $x^3 -7x^2 + 7x + 15 < 0$.
6. Millä vakion a kokonaislukuarvoilla yhtälöllä $x^3 + ax - 3 = 0$ on kokonaislukuratkaisu?

3. Yksi ratkaisu löytyy rationaalisten ehdokkaiden joukosta.
LAUSE: Jos yhtälöllä $a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ (, missä kertoimet a_k ovat kokonaislukuja,) on rationaalinen ratkaisu, niin sen osoittaja on luvun a_0 tekijä ja nimittäjä luvun a_n tekijä

7. Mitkä rationaaliluvut voivat olla yhtälön a) $2x^3 - 3x^2 - 4x + 5 = 0$ b) $3x^3 - x - 2 = 0$ ratkaisuja?
8. Ratkaise yhtälö a) $2x^3 - x^2 - 6x + 3 = 0$ b) $15x^3 - 5x^2 - 3x + 1 = 0$ c) $2x^3 + x^2 - 4x - 2 = 0$.
9. Osoita, että yhtälöllä $2x^3 + 7x - 2 = 0$ ei ole rationaalista ratkaisua.
10. Määritä vakio a siten, että yhtälöllä $x^3 - 8 = a(x - 2)$ on kaksinkertainen ratkaisu.
11. Osoita, että jos a on yhtälön $x^3 - 3x - 1 = 0$ ratkaisu, niin $2 - a^2$ on saman yhtälön ratkaisu.
12. Suorakulmaisen särmiön samasta kärjestä lähtevien särmien pituuksien suhde on 2:3:4. Särmiön tilavuus on 2 m^3 suurempi kuin sen kuution tilavuus, jonka särminä on särmiön pienin särmä. Laske särmät.
13. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin korkeus on 1 dm suurempi kuin pohjasärmä. Laske pohjasärmä, kun pyramidin tilavuus on 12 dm^3.
14. Kokonaislukukertoimisella yhtälöllä $4x^3 + ax + 1 = 0$ on aito murtoluku ratkaisuna. Määritä a:n arvo.

4. Yhtälön ratkaiseminen graafisesti
Laita yhtälö muotoon VP = 0. Piirrä kuvaaja : y = VP, ja katso x-akselin leikkauspisteet.

15. Ratkaise graafisesti a) $x^3 - 2x - 1 = 0$ b) $x^4 = x + 3$

5. Korkeamman asteen yhtälön ratkaiseminen laskimella TI-85
Laita yhtälö normaalimuotoon $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ (laskimessa kertoimet ovat $a_3,\ a_2,\ a_1\ ja\, a_0$)

$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{POLY}}$ $\boxed{\text{order = 3}}$ ja syötä kertoimet $a_3,\ a_2,\ a_1\ ja\, a_0$

$\boxed{\text{F5 = SOLVE}}$, jolloin saat ratkaisut. Lukuparitulos (a,b) tarkoittaa kompleksilukua a + bi

5.5. Toisen asteen yhtälöön sijoituksella palautuvat yhtälöt ja epäyhtälöt

1. Yhtälössä esiintyy vain parillisia potensseja
Esitä kaikki parilliset potenssit käyttäen lauseketta x^2. Tällöin esim. $x^4 = (x^2)^2$, $x^6 = (x^2)^3$ jne.
Merkitse $x^2 = y$, joka on aputuntematon, ja korvaa kaikki x^2:t y:llä.
Ratkaise näin saadusta yhtälöstä y.
Merkitse näihin ratkaisuihin y:n paikalle takaisin x^2 ja ratkaise x.

5.5.1. a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ b) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ c) $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$ d) $x^4 + 6x^2 - 40 = 0$
2. a) $x^5 + 4x^3 - 32x = 0$ b) $4x^6 + 11x^4 - 3x^2 = 0$ c) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

2. Epäyhtälössä esiintyy vain parillisia potenssejä
Muokkaa epäyhtälöä käyttäen joka kohdassa x^2 termiä, korvaa x^2 y:llä ja ratkaise y-epäyhtälö.
Muodosta y-ratkaisu ja korvaa siinä y takaisin x^2:lla.
Ratkaise näin saatu x-epäyhtälö.

3. a) $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$ b) $x^4 - 5x^2 - 6 < 0$ c) $x^4 - 17x^2 + 16 > 0$

3. Esiintyy tismalleen samanlaisia x:n lausekkeita
Merkitse tätä lauseketta y:llä ja korvaa sillä lauseke joka kohdassa.
Ratkaise näin saatu y-yhtälö.
Korvaa ratkaisussa y takaisin tällä lausekkeella.
Ratkaise x näin saadu(i)sta yhtälö(i)stä

4. a) $(x^2 - 1)^2 - 11(x^2 - 1) + 24 = 0$ b) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$

4: Huomataan x:t esiintyvät potenssissa.
Muodosta potenssi huomaamalla neliö, Pascalin kolmion kertoimet tms. Ratkaise kantaluku, josta sitten x.

5. a) $x^2 + 6x + 9 = 1$ b) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 27$ c) $x^3 - 3x^2 + 3x – 3 = 0$ d) $x^3 - 9x^2 + 27x - 28 = 0$
e) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 15 = 0$ f) $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 12 = 0$

6. Murtofunktio

6.1. Murtofunktio, arvo, määrittelyjoukko, nollakohdat.

1. Murtofunktion arvon laskeminen
Sijoitetaan muuttujan arvo ko. muuttujakirjaimen paikalle ja lasketaan lausekkeen arvo.

6.1.1. Laske a) f(1) b) f(-2) c) f(3) , kun $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x - 2}$

2. Murtofunktion määrittelyjoukko
Määrittelyjoukkoon kuuluvat kaikki ne muuttujan arvot, joilla nimittäjä ≠ 0.

2. Mikä on funktion määrittelyjoukko, kun a) $f(x) = \dfrac{x}{x - 3}$ b) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 - 4}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{2x^2 + x} + \dfrac{3x}{x^2 - 9}$

3. Murtofunktion nollakohdat
ovat ne muuttujan arvot, joilla osoittaja = 0 (ja nimittäjä ≠ 0)

3. Mitkä ovat funktion nollakohdat, kun a) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 + 1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x}{2x - 5}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{5x - 6}$?

6.2. Murtolausekkeiden peruslaskutoimitukset ja sieventäminen

1. Supistaminen
on sitä, että osoittaja ja nimittäjä jaetaan samalla luvulla tai lausekkeella.
Jaa osoittaja ja nimittäjä ensin tekijöihinsä ja supista sitten kummankin yhteisellä tekijällä.

6.2.1. Supista a) $\frac{30x^4y^5}{36x^6y^3}$ b) $\frac{x^2 + x}{x}$ c) $\frac{x^2 + x}{2x + 2}$ d) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$ e) $\frac{4x^4 + 6x^3}{2x^2}$ f) $\frac{2x - x^2}{4 - 2x}$ g) $\frac{x - x^3}{x^2 - 1}$

2. Supista a) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$ b) $\frac{x^2 + 2x + 1}{3x + 3}$ c) $\frac{25 - 4x^2}{25 + 20x + 4x^2}$ d) $\frac{x^3 - 16x}{x^2 + 8x + 16}$ e) $\frac{(2x - y)(x + 3)}{(2 - x)(y - 2x)}$

3. Supista a) $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 2x - 8}$ b) $\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 3x - 10}$ c) $\frac{3x^2 - x - 2}{3x^2 + 8x + 4}$ d) $\frac{6x^2 + x - 2}{6x^2 - 5x - 6}$

4. Millä a:n arvolla lauseke a) $\frac{x^2 + x + a}{(x - 1)(x - 2)}$ b) $\frac{x^2 - 3x + a}{x^2 + 3x - 4}$ voidaan supistaa?

5. Laske lausekkeen a) $\frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 2}$ b) $\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{5x^2 - 15x}$ arvo, kun x = ½.

2. Laventaminen
on sitä, että osoittaja ja nimittäjä kerrotaan samalla luvulla tai lausekkeella

6. Lavenna lauseke a) $\frac{2}{x}$ b) $\frac{x - 1}{x + 2}$ c) $\frac{x - 3}{2}$ niin , että nimittäjä on $2x^2 + 4x$

3. Laventaminen samannimisiksi
Jaa kaikki nimittäjät tekijöihinsä.
Lavenna kaikkia murtolausekkeita niin, että jokaisen nimittäjäksi tulee nimittäjien (pienin) yhteinen jaettava.

7. Lavenna samannimisiksi a) $\frac{5}{x}$ ja $\frac{x}{2}$ b) $\frac{2x}{x - 1}$ ja $\frac{3}{x}$ c) $\frac{x}{x - 1}$ ja $\frac{x}{x^2 - 1}$ d) $\frac{2}{x^3 - x}$, $\frac{3}{x^2 - 1}$ ja $\frac{x}{x^2 + x}$

4. Murtolausekkeiden kertominen
Kuten murtolukuja, eli osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät kerrotaan keskenään.
Kannattaa ennen kertomista jakaa osoittajat ja nimittäjät tekijöihinsä jotta olisi heti helppo supistaa.

8. a) $\frac{3x^2}{4} \cdot \frac{16y}{12x^3}$ b) $\frac{x^2}{x^2 - 1} \cdot \frac{x - 1}{x}$ c) $\frac{x^2 - x}{x - 2} \cdot \frac{3x - 6}{x}$ d) $\frac{ab - b^2}{4a^2 - b^2} \cdot \frac{2a^2 + ab}{b - a}$ e) $\frac{4x}{x - 4} \cdot \frac{x^2 - 8x + 16}{8x^2}$

5. Murtolausekkeiden jakaminen
Kuten murtolukuja, eli kerro jaettava jakajan käänteisluvulla.
Jaa tässäkin tapauksessa osoittajat ja nimittäjät tekijöihinsä, kerro jakajan käänteisluvulla ja supista.

9. a) $\frac{a}{4c} : \frac{a^2}{12c^2}$ b) $\frac{6a^2b}{a^2 - b^2} : \frac{3ab}{a - b}$ c) $\frac{xy^2 - x}{y^2} : \frac{xy + x}{y}$ d) $\frac{x^2 + x}{2} : (x + 1)$ e) $\frac{x^2 + x}{2} : x + 1$

6. Yhteen- ja vähennyslaskut
Jaa nimittäjät tekijöihinsä
Tee murtolausekkeet samannimisiksi laventamalla sellaisella nimittäjässä olevalla tekijällä joka puuttuu ko. nimittäjästä
Summassa tulee nimittäjäksi yhteinen nimittäjä ja osoittajaksi osoittajien summa.

10. a) $\frac{x}{8} + \frac{3x}{4}$ b) $\frac{3}{2x} + \frac{2}{3x}$ c) $\frac{1 - x}{3} - \frac{x + 2}{6}$ d) $\frac{3 - 4x}{5} - \frac{6 - 9x}{10}$ e) $\frac{x - 1}{x^2} - \frac{x - 3}{3x^2}$

11. a) $\frac{x + 1}{x - 2} - \frac{x + 4}{2x - 4}$ b) $\frac{2}{x - 2} - \frac{x}{x^2 - 4}$ c) $\frac{a}{a - 1} - \frac{2a}{a^2 - 1}$ d) $\frac{a + 3}{a^2 - 1} - \frac{a + 1}{a^2 - a}$ e) $\frac{4x + 1}{x - 1} + \frac{x + 4}{1 - x}$ f) $\frac{2x^2 - 7}{x - 2} - \frac{3 - x^2}{2 - x}$

12. a) $\frac{a + b}{a^2 - ab} - \frac{4b}{a^2 - b^2}$ b) $\frac{3a - 2}{a^2 - a} - \frac{a}{a - 1} - \frac{1}{a}$ c) $(a - \frac{1}{a}) \cdot \frac{a}{a + 1}$ d) $(1 - \frac{1}{a^2}) : (a + 2 + \frac{1}{a})$

7. Mutkikkaamman lausekkeen arvon laskeminen tietyillä muuttujakirjaimien arvoilla
Sievennä lauseke ensin yksinkertaisimpaan muotoonsa suorittamalla laskut ja supistamiset.
Sijoita muuttujakirjaimen arvot vasta sievennettyyn lausekkeeseen.

13. Laske lausekkeen $\frac{x + 2}{x - 1} - \frac{5x + 1}{x^2 - 1}$ arvo, kun $x = -\frac{2}{3}$.

14. Sievennä lauseke $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$ ja laske sen arvo, kun a = 1½ ja $b = \frac{2}{3}$.

6.3. Murtofunktion kuvaaja, asymptootit

1. Pystysuora asymptootti

on suora, jota käyrä lähestyessään menee + ∞ : een tai - ∞ : een eli äärettömän korkealle tai matalalle.
Pystysuora asymptootti on sen x:n arvon kohdalla, jolla nimittäjä tulee = 0 eli yhtälö x = nim:n nk (≠ OS:n nk)

6.3.1. Mitkä ovat funktioiden a) $f(x) = \frac{2x}{x - 2}$ b) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - x}$ pystysuorat asymptootit?

2. Aukkokohta murtofunktion kuvaajassa
syntyy kuvaajaan sellaiseen kohtaan, jossa funktiolla ei ole arvoa (nim = 0) ja ei ole asymptoottia.

2. Millä kohdalla funktiolla $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - x}$ on aukko ja mikä on pystysuora asymptootti?

6.4. Murtoyhtälö ja murtoepäyhtälö

1. Määrittelyjoukon huomioonottaminen.
Murtoyhtälöt eivät ole järkeviä, jos siinä esiintyvillä lausekkeilla ei ole arvoa.
Täten ne x:t, joilla nimittäjä = 0 , eivät voi olla yhtälön ratkaisuja.
Määrittelyjoukko on niiden x:ien joukko, joilla nim ≠ 0.

6.4.1. Mikä on yhtälön a) $\frac{2}{x - 1} = \frac{x - 2}{x}$ b) $\frac{3x}{x^2 - 1} = \frac{2}{x - 2}$ määrittelyjoukko?

2. Murtoyhtälön ratkaisumenetelmä
on kutakuinkin sama kuin ensimmäisen asteen yhtälöitä ratkaistaessa eli
Selvitä yhtälön määrittelyjoukko (nim ≠ 0)
Poista nimittäjät kertomalla yhtälön molemmat puolet nimittäjien pyj:llä.
Sievennä yhtälö normaalimuotoon.
Ratkaise tämä yhtälö.
Tarkista kuuluuko saadut x:t määrittelyjoukkoon.

2. a) $\frac{x^2}{x - 1} + 3 = \frac{x}{x - 1}$ b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{x^2 - x}$ c) $x + \frac{6 - 4x}{x - 1} = \frac{2}{x - 1}$

3. Murtoepäyhtälön ratkaiseminen algebrallisesti
Sievennä epäyhtälö ensin muotoon $\frac{OS}{NIM} > 0$ eli vasemmalla puolella yksi murtolauseke ja oikealla 0.
Tätä varten on siirrettävä termit vasemmalle puolella, lavennettava samannimisiksi ja laskettava yhteen.
Laske osoittajan ja nimittäjän nollakohdat.
Piirrä osoittajan ja nimittäjän kuvaajat, jotta saat niiden merkit.
Tee lukusuorataulukko.
Laita sen ylimmälle riville osoittajan merkit, seuraavalle nimittäjän merkit.
Päättele näistä ja laita alimmalle riville murtolausekkeen merkit (+ / + = + , + / - = - jne)
Pohdi kuuluuko rajat mukaan. Nimittäjän nollakohdat ei koskaan. Osoittajan kyllä, jos EY ≥ 0 tms.
Anna vastaus.

3. a) $\frac{x - 1}{x - 2} < 0$ b) $\frac{x}{x^2 - 4} > 0$ c) $\frac{3x^2 - 75}{2x + 6} < 0$ d) $\frac{x^2 - 3x - 4}{5x - x^2} > 0$

4. a) $\frac{4}{x} > x$ b) $\frac{3}{x} < x - 2$ c) $\frac{8x - 1}{3 - 2x} > 2$

5. a) $\frac{x^2 - 25}{3x - 15} \geq 0$ b) $\frac{9x^2 + 1}{x} \leq 6$ c) $\frac{3}{x + 1} - \frac{1}{x - 1} \leq \frac{x^2 - 7}{x^2 - 1}$

6. Mitä arvoja c voi saada, jos epäyhtälö $\frac{x^2 - x + c}{x^2 - 4x + c} > 0$ toteutuu kaikilla x:n reaalilukuarvoilla?

4. Epäyhtälön ratkaiseminen kuvaajaa avuksi käyttäen
Sievennä epäyhtälö muotoon LAUSEKE > 0.
Laske epäyhtälön nollakohdat (lauseke = 0) ja määrittelemättömyyskohdat (nim = 0)
Laske kaikilla näiden x:n arvojen jakamilla alueilla lausekkeen arvo käyttäen jotakin alueen x:ää.
Jos arvo > 0, on kuvaaja tällä alueella x-akselin yläpuolella.
Hahmota lausekefunktion kuvaaja näiden tietojen avulla. (Kuvaajan saa toki graafisella laskimella)
Anna vastaus piirretyn kuvaajan perusteella.

7. Määritä funktion $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 3}$ nollakohdat ja määrittelyjoukko, hahmota kuvaaja ja päättele sen perusteella millä x:n arvoilla funktio saa negatiivisia arvoja.

7. Yleinen juuri- ja potenssifunktio

7.1. Yleinen juuri

1. Yhtälön $y = x^n$ (n pariton) kuvaaja
on koko ajan kasvava, kulkee origon kautta, kulkee origossa hetken vaakasuoraan.

7.1.1. Piirrä funktioiden a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = x^5$ kuvaajat

2. Yhtälön $x^n = a$ ratkaisu graafisesti
Piirrä käyrä $y = x^n$ ja suora $y = a$. Ratkaisu on leikkauspisteen x-koordinaatti.

2. Ratkaise graafisesti yhtälö a) $x^3 = 3$ b) $x^3 = -2$ c) $x^3 = 5$.

3. $\sqrt[n]{a}$ määritelmä , kun n on pariton
on yhtälön $x^n = a$ ratkaisu.

4. Yhtälön $x^n = a$ ratkaisu algebrallisesti, kun n on pariton
on $x = \sqrt[n]{a}$

3. Ratkaise a) $x^3 = 8$ b) $x^3 = 7$ c) $x^3 = -1$ d) $x^3 = - 27$ e) $x^5 = 6$ f) $x^7 = 8$.

5. $\sqrt[n]{a}$ laskeminen miettimällä, kun n on pariton
Mieti mikä luku korotettuna potenssiin n antaa tulokseksi luvun a.

4. Määritä a) $\sqrt[3]{8}$ b) $\sqrt[3]{-27}$ c) $\sqrt[3]{- 125}$ d) $\sqrt[5]{32}$ e) $\sqrt[5]{-3125}$ f) $\sqrt[7]{128}$

6. $\sqrt[n]{a}$ laskeminen laskimella, kun n on pariton.
Canon F-800P: $\boxed{a}$ $\boxed{INV}$ $\boxed{a^x}$ $\boxed{n}$ $\boxed{=}$ → $\boxed{arvo}$

TI-85: $\boxed{n}$ $\boxed{CATALOG}$ (tai $\boxed{MATH}$ $\boxed{MISC}$) $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$ $\boxed{a}$ $\boxed{ENTER}$

5. Laske likiarvo a) $\sqrt[3]{4}$ b) $\sqrt[5]{2}$ c) $\sqrt[7]{77}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}$ e) $(2\sqrt[3]{4} + 5) : 6\sqrt[7]{8}$

7. Funktion $f(x) = \sqrt[n]{x}$ määrittelyjoukko, kun n on pariton
on koko R

8. Funktion $f(x) = \sqrt[n]{x}$ kuvaaja, kun n on pariton
on koko ajan kasvava, kulkee origon kautta, kulkee origossa pystysuoraan.

6. Piirrä funktion a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ b) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x - 2}$ d) $f(x) = \sqrt[3]{x} - 2$ kuvaaja.

7. Ratkaise graafisesti $\sqrt[3]{x - 2} = \sqrt[3]{3 - x}$

9. Yhtälön $y = x^n$ (n parillinen) kuvaaja
kulkee origon kautta ja origossa vaakasuoraan, y-akselin vasemmalla puolella laskeva, oikealla kasvava

8. Piirrä funktioiden a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^4$ c) $f(x) = x^6$ kuvaajat.

10. Yhtälön $x^n = a$ ratkaiseminen graafisesti
Piirrä käyrä $y = x^n$ ja suora $y = a$.
Ratkaisut ovat näiden leikkauspisteiden x-koordinaatit.

9. Ratkaise graafisesti a) $x^2 = 3$ b) $x^4 = 5$ c) $x^4 = ½$ d) $x^4 = -2$.

11. $\sqrt[n]{a}$ määritelmä, kun n on parillinen
$\sqrt[n]{a}$ on = luku x, joss 1° $x^n = a$ ja 2° $x \geq 0$.

12. Yhtälön $x^n = a$ ratkaisu algebrallisesti, kun n on parillinen

$x = \pm\sqrt[n]{a}$, kun $a \geq 0$ (kun $a < 0$, ei yhtälöllä ole reaalisia ratkaisuja)

10. Ratkaise a) $x^2 = 5$ b) $x^4 = 16$ c) $x^4 = 5$ d) $x^6 = 7$ e) $x^8 = 0$ f) $x^{10} = -1$

13. $\sqrt[n]{a}$ laskeminen miettimällä (n on parillinen)
Mieti mikä ”ei-negatiivinen” luku korotettuna potenssiin n antaa tulokseksi luvun a

11. Määritä a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[4]{81}$ c) $\sqrt[6]{64}$ d) $\sqrt[10]{1024}$ e) $\sqrt[8]{1}$ f) $\sqrt[6]{0}$ g) $\sqrt[12]{-1}$

14. $\sqrt[n]{a}$ laskeminen laskimella

Canon F-800P: $\boxed{a}$ $\boxed{INV}$ $\boxed{a^x}$ $\boxed{n}$ $\boxed{=}$ $\rightarrow$ $\boxed{arvo}$

TI-85: $\boxed{n}$ $\boxed{CATALOG}$ (tai $\boxed{MATH}$ $\boxed{MISC}$) $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$ $\boxed{a}$ $\boxed{ENTER}$

12. Laske a) $\sqrt[4]{5}$ b) $\sqrt[6]{7}$ c) $\sqrt[8]{9}$ d) $\sqrt[4]{3}$ e) $(\sqrt[4]{3} + 2\sqrt[6]{2}) : (3 + \sqrt[4]{5})$

15. Funktion $f(x) = \sqrt[n]{x}$ määrittelyjoukko (n on parillinen)
$x \geq 0$ eli juurrettava ≥ 0.

13. Mikä on funktion a) $f(x) = \sqrt[4]{x - 2}$ b) $f(x) = \sqrt[6]{3 - 4x}$ c) $f(x) = \sqrt[8]{4 - x^2}$ määrittelyjoukko?

16. Funktion $f(x) = \sqrt[n]{x}$ kuvaaja (n on parillinen)
Lähtee origosta, pystysuoraan, koko ajan kasvaen, mutta aina vain loivemmin mitä kauemmas mennään.

14. Piirrä funktion a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ c) $f(x) = \sqrt[6]{x}$ d) $f(x) = \sqrt[4]{x + 4}$ e) $f(x) = \sqrt[4]{x} + 4$ kuvaaja.

15. Ratkaise graafisesti epäyhtälö $\sqrt[4]{x - 1} - ½ > 0$

7.2. Juuren laskusääntöjä

1. Juuri samankorkuisesta potenssista $\sqrt[n]{a^n}$
$= a$. Jos n parillinen $= |\, a\, |$.

7.2.1. Laske a) $\sqrt[3]{a^3}$ b) $\sqrt[4]{x^4}$

2. Juuri potenssista $\sqrt[n]{a^{kn}}$, jonka eksponentti on indeksin monikerta
$= a^k$. Jos n parillinen $= |\, a^k\, |$. ts. juurrettavan eksponentti jaetaan juuren indeksillä

2. Laske a) $\sqrt[3]{a^6}$ b) $\sqrt[4]{x^{12}}$ c) $\sqrt[5]{c^{100}}$

3. Juuri tulosta $\sqrt[n]{a \cdot b}$

$= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. Jos n parillinen, on oltava a ja $b \geq 0$

3. Laske a) $\sqrt[4]{81x^4}$ b) $\sqrt[3]{8a^6}$ c) $\sqrt[4]{16x^4y^8}$ d) $\sqrt[3]{x^4}$ e) $\sqrt[5]{x^5y^6}$

4. Juuri osamäärästä $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

$= \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$. Jos n parillinen, on oltava $a \geq 0$ ja $b > 0$

4. Sievennä a) $\sqrt[3]{\dfrac{x^3}{8}}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{64x^6}{27y^9}}$ c) $\sqrt[4]{5\dfrac{1}{16}}$

5. Kahden samanindeksisen juuren tulo $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
$= \sqrt[n]{a \cdot b}$

5. Sievennä a) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$ b) $\sqrt[3]{2x^5} \cdot \sqrt[3]{4x^4}$

6. Kahden samanindeksisen juuren osamäärä $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$
$= \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$

6. Sievennä a) $\sqrt[5]{2} : \sqrt[5]{64}$ b) $\sqrt[4]{32x^{15}} : \sqrt[4]{2x^3}$

7. Juuren samankorkuinen potenssi $(\sqrt[n]{x})^n$
$= x$

7. Sievennä a) $(\sqrt[3]{4})^3$ b) $(\sqrt[4]{5})^4$ c) $(\sqrt[4]{5})^5$ d) $(\sqrt[4]{5})^8$ e) $(\sqrt[5]{3x^2})^{10}$

8. Luvun osoittaminen juuren arvoksi.
Osoitetaan, että juuren arvo täyttää juuren määritelmän eli
1° juuren arvo korotettuna indeksin osoittamaan potenssiin on juurrettava
ja jos juuri parillinen 2° juuren arvo on oltava positiivinen.

8. Onko a) $\sqrt[3]{15\sqrt{3} - 26} = \sqrt{3} - 2$ b) $\sqrt[4]{17 - 12\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}$ c) $\sqrt[4]{3 - \sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$

7.3. Sanallisia tehtäviä

1. Sanoista potenssiyhtälö, joka ratkaistava
Tee yhtälö kuten kaikissa muissakin sanallisissa probleemoissa ja ratkaise se.

7.3.1. Harald Hirmuisella oli 2 kultarahaa lähtiessään ryöstöretkelle. Kun hän voudin jälkeen meni kreivin luo ja Harald päätti olla tasapuolinen ja tehdä omaisuutensa yhtä moninkertaiseksi kuin voudin jälkeen. Samaa periaatetta noudatettiin vielä herttuan ja kuninkaan luona, jonka jälkeen rahaa oli 300 kultarahaa. Mikä oli Haraldin moninkertaistamisvero?

2. Sama prosentuaalinen muutos monta kertaa
Olkoon alkuarvo = A, sama muutosprosentti = p ja muutoskertoja n kappaletta.
Loppuarvo $A_n = A \cdot \alpha^n$, missä $\alpha = 1 + p/100$

2. Koululaisten tupakanpolttoa halutaan vähentää 20% viidessä vuodessa. Miten suuri on vuotuisen vähenemisprosentin oltava, jos sen halutaan olla sama joka vuosi?
3. Työttömyys halutaan puolittaa neljässä vuodessa. Mikä on oltava vuotuinen vähenemisprosentti?
4. Yritys haluaa kasvattaa liikevaihtonsa 5 vuodessa kuusinkertaiseksi. Miten suuri vuotuinen kasvuprosentti on tavoitteena?

8. Yleinen potenssi

8.1. Murtopotenssi $a^{1/n}$

1. Murtopotenssin $a^{1/n}$ määritelmä
$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, $a \geq 0$, mistä seuraa, ettei ole merkitystä sillä, onko n parillinen vai pariton.

2. Ehto murtopotenssin kantaluvulle
Kantaluku ≥ 0

3. Murtopotenssin $a^{1/n}$ arvon laskeminen miettimällä
Mieti, mikä luku korotettuna potenssiin n antaa tulokseksi luvun a.

8.1.1. Laske a) $4^{½}$ b) $8^{1/3}$ c) $81^{1/4}$ d) $32^{1/5}$ e) $\left(\frac{1}{64}\right)^{1/6}$ f) $\left(\frac{16}{81}\right)^{1/4}$ g) $(-8)^{1/3}$ h) $(-16)^{1/4}$

4. Murtopotenssin $a^{1/n}$ arvon laskeminen laskimella
Canon F-800P : $\boxed{a}$ $\boxed{a^x}$ $\boxed{\text{sulku alkaa}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{/}$ $\boxed{n}$ $\boxed{\text{sulku päättyy}}$ $\boxed{=}$ → $\boxed{\text{arvo}}$
TI-85 : $\boxed{a}$ $\boxed{\wedge}$ $\boxed{\text{sulku alkaa}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{/}$ $\boxed{n}$ $\boxed{\text{sulku päättyy}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ → $\boxed{\text{arvo}}$

2. Laske a) $5^{1/6}$ b) $3^{1/4}$ c) $25{,}1^{1/7}$ d) $0{,}654^{1/5}$

5. Määritelmä potenssille $a^{-1/n}$
$$a^{-1/n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{1/n} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

3. Laske a) $25^{-½}$ b) $8^{-1/3}$ c) $(\frac{1}{81})^{-1/4}$ d) $\left(\frac{64}{27}\right)^{-1/3}$

6. Juuren $\sqrt[n]{a}$ muuttaminen potenssiksi
$= a^{1/n}$ eli laita juurrettava kantaluvuksi ja eksponentiksi 1 / juuren indeksi

4. Esitä murtopotenssina a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{a}$ c) $\sqrt[4]{3x}$ d) $\sqrt[x]{2}$

7. Murtofunktion kuvaaja $y = x^{1/n}$
Lähtee origosta, pystysuoraan ylöspäin, kasvaa, mutta kasvu pienenee mitä kauemmas oikealle mennään.

5. Piirrä yhtälön a) $y = x^{½}$ b) $y = x^{1/3}$ c) $y = x^{1/4}$ kuvaaja

8. Murtofunktion $f(x) = x^{1/n}$ ja vastaavan juurifunktion $g(x) = \sqrt[n]{x}$ kuvaaja, kun n parillinen
Ovat ihan samoja

9. Murtofunktion $f(x) = x^{1/n}$ ja vastaavan juurifunktion $g(x) = \sqrt[n]{x}$ kuvaaja, kun n pariton
Ovat y-akselin oikealla puolella ihan samat.
Murtopotenssin kuvaaja ei jatku vasemmalle.
Juurifunktion kuvaaja vasemmalla oleva osa on origon suhteen symmetrinen kuva oikeasta puolesta

8.2. Murtopotenssi $a^{m/n}$

1. Määritelmä murtopotenssille $a^{m/n}$
$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}\text{, kun } a \geq 0$$

2. Murtopotenssin $a^{m/n}$ arvon laskeminen miettimällä
Mieti ensin mitä on $a^{1/n}$ ja korota sitten tämä luku potenssiin m.

8.2.1. Laske a) $8^{2/3}$ b) $81^{3/4}$ c) $(2¼)^{1½}$ d) $(2\frac{10}{27})^{2/3}$

3. Murtopotenssin arvon laskeminen laskimella
Canon F-800P : $\boxed{a}$ $\boxed{a^x}$ $\boxed{\text{sulku alkaa}}$ $\boxed{m}$ $\boxed{/}$ $\boxed{n}$ $\boxed{\text{sulku päättyy}}$ $\boxed{=}$ → $\boxed{\text{arvo}}$
TI-85 : $\boxed{a}$ $\boxed{\wedge}$ $\boxed{\text{sulku alkaa}}$ $\boxed{m}$ $\boxed{/}$ $\boxed{n}$ $\boxed{\text{sulku päättyy}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ → $\boxed{\text{arvo}}$

2. Laske a) $5{,}23^{4/5}$ b) $0{,}426^{7/3}$ c) $728{,}4^{7/10}$

4. Murtopotenssin arvon laskeminen, kun eksponentti on negatiivinen murtoluku, $a^{-m/n}$
$$a^{-m/n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{m/n} = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right)^m\text{, missä } a > 0$$

3. Laske a) $4^{-3/2}$ b) $27^{-4/3}$ c) $\left(\frac{64}{125}\right)^{-2/3}$

8.3. Irrationaalipotenssi

1. Määritelmä potenssille a^x missä x on irrationaaliluku
a^x on se luku mitä potenssit $a^{m/n}$ tulevat aina vain lähemmäksi, kun m/n:t tulevat lähemmäksi lukua x.

2. Irrationaalipotenssin laskeminen laskimella
Lasketaan kuten muutkin potenssit.

8.3.1. Laske a) 2^{π} b) $3^{\sin 10°}$ c) $5{,}2^{3{,}15}$

8.4. Potenssien laskusäännöt

1. Yleistä laskusäännöistä murtopotensseilla
ovat aivan samat kuin ne säännöt potensseilla, kun eksponentti on kokonaisluku

8.4.1. Sievennä a) $2^{½} \cdot 2^{¾} \cdot 2^{¾}$ b) $a^{½} \cdot a^{½}$ c) $12^{1½} : 3^{1½}$ d) $(2^{4/3})^{-3/2}$

2. Laskut juurilla
Jos juurilla on eri indeksi, muutetaan juuret ensin murtopotensseiksi.
Lasketaan laskut käyttäen potenssiopin sääntöjä.
Muutetaan vastaus takaisin juureksi.

2. Sievennä a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}$ b) $\sqrt[3]{4} : \sqrt[4]{8}$ c) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x}$

3. Mikä luvuista $\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{3}$ vai $\sqrt[4]{4}$ on suurin?

8.5. Potenssifunktiomalli

1. Mallin muodostaminen
Jos y riippuu x:stä potenssifunktiomallin mukaisesti, on $y = c \cdot x^a$, missä a ja c ovat vakioita.

8.5.1. Metsämiesten mukaan jänisten lukumäärä metsässä noudattaa potenssifunktiomallia $y = c \cdot x^a$,missä y on jänisten lukumäärä, x metsän pinta-ala sekä c ja a metsätyypille ominaisia vakioita. Montako jänistä on metsässä, jonka pinta-ala on 150 ha, kun c = 1,4 ja a = 1,025?

2. Valmiin mallin käyttäminen laskuissa
Kun potenssifunktiomalli $y = c \cdot x^a$ on valmiiksi annettu, lasketaan haluttu asia yhtälöopin keinoin.

2. Jänisten määrä metsässä noudattaa potenssifunktiomallia kuten edellä. Kun 100 ha metsässä on 290 jänistä ja 200 ha metsässä 610 jänistä, niin montako jänistä on 400 ha metsässä?

9. Yhtälön tai epäyhtälön korottaminen potenssiin

9.1. Yhtälön ja epäyhtälön korottaminen toiseen potenssiin

1. Yhtäpitävyys neliöönkorotuksessa
Yhtäpitävyys säilyy, jos molemmat puolet ovat ei-negatiivisia.
$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ ja $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$, kun a , b ≥ 0.

9.1.1. Osoita, että $½(a + b) \geq \sqrt{ab}$, kun a ja b eivät ole negatiivisia.
2. Osoita ilman laskinta, että $\sqrt{10} + \sqrt{14} < \sqrt{11} + \sqrt{13}$

9.2. Neliöjuuriyhtälö

1. Neliöjuuriyhtälön ratkaiseminen ”korota toiseen ja tarkista lopuksi” - menetelmällä
Siirrä juuri yksistään yhtälön toiselle puolelle.
Korota molemmat puolet toiseen (jolloin juuri poistuu)
Ratkaise saatu polynomiyhtälö.
Sijoita saadut x:t alkuperäiseen yhtälöön (tai johonkin ennen neliöönkorotusta olevaan yhtälöön)
Jos sijoituksella saatu yhtälö on tosi, saatu x kelpaa ratkaisuksi, jos epätosi, niin x ei kelpaa.

9.2.1. Ratkaise a) $\sqrt{3 - x} = x - 1$ b) $\sqrt{5x - 4} = x$ c) $\sqrt{3x - 14} = x - 6$ d) $\sqrt{4x + 1} = x + 1$
2. Ratkaise a) $\sqrt{x^2 - 8} = 2 - x$ b) $x - \sqrt{x - 1} = 7$ c) $x + \sqrt{x - 1} = 7$ d) $x + \sqrt{x^2 - 1} = 3$

3. Ratkaise a) $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{2x^2 - 9x + 7} = 0$ b) $\sqrt{x} - \sqrt{2x + 1} + 1 = 0$ c) $\sqrt{x + 1} = \sqrt{1 - 2x} - 2$
4. Suorakulmaisen kolmion ala on 5 ja hypotenuusan pituus 5. Laske kateettien pituudet
5. Määritä vakio a siten, että yhtälöllä $\sqrt{x^2 + ax} + \sqrt{2x + 4a + 1} = 0$ on ratkaisu.

2. Neliöjuuriyhtälön ratkaiseminen ”anna neliöönkorotusehdot” - menetelmällä
Siirrä juuri yksistään yhtälön toiselle puolelle.
Korota molemmat puolet toiseen.
Ratkaise saatu yhtälö.
Aseta ehdot x:lle: 1° Juurrettava ≥ 0 JA 2° neliöön korotettava lauseke ≥ 0.
Tarkista täyttääkö saatu x nämä ehdot 1° ja 2°

6. Ratkaise a) $\sqrt{x} + x = 1$ b) $\sqrt{3x + 2} = x + 1$ c) $x + \sqrt{3 - 2x} = 1$

3. Neliöjuuriyhtälön ratkaiseminen graafisesti
Piirrä vasemman puolen (juurifunktion) ja oikean puolen (polynomifunktion) kuvaajat koordinaatistoon.
Ratkaisut ovat leikkauspisteiden x-koordinaatit.

7. Ratkaise graafisesti yhtälö a) $\sqrt{x} = x - 1$ b) $\sqrt{x - 2} = x – 3$

9.3. Itseisarvoepäyhtälö

1. | P(x) | < | Q(x) | epäyhtälön ratkaiseminen
Laita itseisarvot eri puolille epäyhtälöä.
Korota molemmat puolet toiseen (yhtäpitävyys säilyy koska itseisarvot eivät voi olla negatiivisia)
Itseisarvot voi poistaa, koska neliön itseisarvo on sama kuin neliö.
Ratkaise näin saatu itseisarvoton epäyhtälö.

9.3.1. Ratkaise a) $|3x - 2| > |2x - 3|$ b) $|2x - 3| < |x + 6|$ c) $|x - 1| - 2|x| < 0$

9.4. Yhtälön ja epäyhtälön korottaminen kuutioon

1. Yhtäpitävyys kuutioon korotuksessa
säilyy aina kantaluvuista riippumatta
$a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$ ja $a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3$

9.4.1. Osoita, että $\sqrt[3]{a^3 + b^3} < a + b$, kun a ja b ovat positiivisia.

2. Kuutiojuuriyhtälön ratkaiseminen
Siirrä kuutiojuuri yksin yhtälön toiselle puolelle.
Korota molemmat puolet kolmanteen potenssiin.
Ratkaise näin saatu yhtälö.

2. Ratkaise a) $\sqrt[3]{x} + 3 = 0$ b) $\sqrt[3]{x^3 - 8} = x - 2$ c) $\sqrt[3]{x^3 - 2} + x = 0$

3. Kuutiojuuriepäyhtälön ratkaiseminen
Siirrä kuutiojuuri yksistään epäyhtälön toiselle puolelle.
Korota molemmat puolet kuutioon.
Ratkaise näin saatu epäyhtälö.

3. Ratkaise a) $\sqrt[3]{x} < 2$ b) $\sqrt[3]{x - 2} > 3$ c) $\sqrt[3]{1 - x} + 1 < 0$ d) $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} < x - 1$

9.5. Yhtälön ja epäyhtälön korottaminen yleiseen potenssiin

1. Yhtäpitävyys potenssiinkorotuksessa
säilyy jos molemmat puolet ovat positiivisia.
$a < b \Leftrightarrow a^r < b^r$ ja $a = b \Leftrightarrow a^r = b^r$

2. Erilaisten yhtälöiden ratkaisua
Käytetään sääntöä $a = b \; || \; (\;)^n \Leftrightarrow a^n = b^n$, jos esiintyy n:nsiä juuria, jotka halutaan poistaa.
Ja samaa kääntäen $a^n = b^n \; || \; \sqrt[n]{(\;)} = (\;)^{1/n} \Leftrightarrow a = b$,jos halutaan poistaa n:s potenssi

9.5.1. Ratkaise a) $\sqrt[4]{x^8 + x - 2} = x^2$ b) $(x - 1)^{0,25} = 2$
2. Ratkaise a) $(x - 2)^3 = 4$ b) $(x - 1)^{2,8} = 3,2$

3. Erilaisten epäyhtälöiden ratkaisua
Käytetään sääntöä $a < b \;||\; (\;)^n \Leftrightarrow a^n < b^n$, jos esiintyy n:nsiä juuria, jotka halutaan poistaa.
Ja samaa kääntäen $a^n < b^n \;||\; \sqrt[n]{(\;)} = (\;)^{1/n} \Leftrightarrow a < b$, jos halutaan poistaa n:s potenssi.

3. Ratkaise a) $\sqrt[5]{4x - 1} < 3$ b) $(x - 1)^{0,2} > 2$
4. Ratkaise a) $(x - 1)^7 < 128$ b) $(2x)^\pi > 3$

10. Eksponenttifunktio

10.1. Funktio $y = a^x$

1. Kuvaaja
on koko ajan x-akselin yläpuolella, kulkee pisteen (0,1) kautta ja monotoninen. $a > 0$.

2. Määrittelyjoukko
on koko R

3. Arvojoukko
on R_+ eli positiivisten reaalilukujen joukko

4. Monotonisuus
a^x on kasvava, jos $a > 1$ Eli kantaluku on > 1
a^x on vähenevä, jos $0 < a < 1$ eli kantaluku välillä]0,1[
a^x on vakiofunktio, jos $a = 1$

10.1.1. Millä vakion k arvoilla funktio $f(x) = (2k - 3)^x$ on aidosti a) kasvava b) vähenevä?
2. Millä vakion a arvoilla funktio $f(x) = (a^2 - 1)^x$ on määritelty. Millä a:n arvoilla f on kasvava?

5. Kiinteä piste
Kaikki eksponenttifunktiot kulkevat saman pisteen eli (0,1) kautta.

10.2. Eksponenttiyhtälöitä ja epäyhtälöitä

1. Yhtälö, jossa kaksi termiä ja sama kantaluku
Siirrä termit eri puolelle yhtälöä
Käytä sääntöä $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$ ja ratkaise viimeinen yhtälö

10.2.1. Ratkaise a) $3^x = 9$ b) $25^x = 5$ c) $100^x = 1000$ d) $32^x = 16^{x-1}$ e) $7^{x-3} = 49^x$ f) $3^x = 9^{-1}$ g) $0,4^x = 2,5^{4x-1}$.
2. Ratkaise a) $3^{-x} = (-3)^3$ b) $2^x + 1 = 0$ c) $15^x = 25 \cdot 3^x$ d) $8 \cdot 4^x = \sqrt[3]{2}$ e) $2 \cdot 8^{2x} = 8 \cdot 2^{8x}$ f) $2^{x+1} \cdot 2^{x-1} = 2$

2. Yhtälössä useampia termejä mutta joka kohdassa missä on x on tismalleen x:n sama lauseke (esim. a^x)
Merkitse tätä tismalleen samaa lauseketta (a^x) y:llä ja korvaa lauseke epäyhtälössä y:llä.
Ratkaise saadusta yhtälöstä y
Laita ratkaisuun takaisin y:n paikalle lauseke (a^x) ja ratkaise x.

3. Ratkaise a) $4^x + 2^x = 6$ b) $4^x - 20 \cdot 2^x + 64 = 0$ c) $9^x + 2 \cdot 3^x = 3$ d) $2^{x+1} - 2^{x-1} = 12$ e) $2^x + 2^{1-x} = 3$.
4. Ratkaise $(x + 2)^{x^2 - x} = 1$

3. Epäyhtälö, jossa kaksi termiä ja sama ykköstä suurempi kantaluku
Siirrä termit eri puolille epäyhtälöä.
Käytä sääntöä $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$ (kun $a > 1$) ja ratkaise epäyhtälö $x < y$.

5. Ratkaise a) $3^x > 81$ b) $2^{-x} < ¼$ c) $5^x \geq \sqrt{5}$ d) $2^{x-2} > 8$ e) $4^{x-1} < 8$
6. Ratkaise a) $\frac{2^x - 1}{2^x - 4} \geq 0$ b) $\frac{2^x}{2^x - 1} > 1$

4. Epäyhtälö, jossa kaksi termiä ja sama ykköstä pienempi kantaluku
Siirrä termit eri puolille epäyhtälöä.
Käytä sääntöä $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$ (kun $0 < a < 1$) ja ratkaise epäyhtälö $x > y$.

7. Ratkaise a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{8}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{3}{2}\right)^{3x-4}$

5. Epäyhtälö, jossa useampia termejä mutta joka kohdassa missä on x on tismalleen sama x:n lauseke. Merkitse tätä tismalleen samaa lauseketta (a^x) y:llä ja korvaa lauseke epäyhtälössä y:llä Ratkaise epäyhtälöstä y. Laita saatuun ratkaisuun y:n paikalle takaisin lauseke (a^x) ja ratkaise x.

8. Ratkaise a) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$ b) $2 - 2^{-x} < 2^x$.

6. Sanoista eksponenttiyhtälö tai epäyhtälö, joka ratkaistaan Tee yhtälö tai epäyhtälö samoin periaattein kuin muissakin sanallisissa tehtävissä ja ratkaise se.

9. Mopon hinta on 12 800 mk. Hinta putoaa vuosittain puoleen. Milloin mopon hinta on 100 mk?

11. Logaritmifunktio

11.1. Kymmenkantainen logaritmi

1. Yhtälön $y = 10^x$ kuvaajasta x:n etsiminen, kun y on annettu Piirrä annetun y:n kohdalle vaakasuora. x on kuvaajan ja tämän suoran leikkauspisteen x-koordinaatti.

11.1.1. Piirrä käyrä $y = 10^x$. Millä x:llä potenssin arvo on a) 1 b) 2 c) 3 d) -1 e) 0,5 ?

2. 10-kantaisen logaritmin määritelmä $\log_{10}$ x:n arvo on se eksponentti, mihin luku 10 pitää korottaa, jotta potenssin arvoksi tulisi logaritmoitava x Merkintä: $\log_{10} = \lg$. HUOM.! Laskimissa on yleensä merkintä log

2. Mitä on a) lg 10 b) lg 1 c) lg 100 d) lg 1 000 e) lg 10 000 f) lg 0,1 g) lg 0,01 ?

3. Mistä luvuista voi ottaa logaritmin Logaritmi saadaan vain positiivisista luvuista. Ts. logaritmoitava > 0

3. Millä x:n arvoilla on määritelty a) lg (x - 1) b) lg (1 - 2x) c) lg $(x^2 - 9)$ d) lg (x + 2) + lg (3 - x) ?

4. Kymmenkantaisen logaritmin log x arvo laskimella Canon F-800P : $\boxed{x}$ $\boxed{\text{log}}$ → $\boxed{\text{arvo}}$ TI-85 : $\boxed{\text{LOG}}$ $\boxed{x}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ → $\boxed{\text{arvo}}$

4. Määritä a) lg 2 b) lg 3 c) lg 4 d) lg 5 e) lg 23,4 f) lg 0,54 g) lg 0,086 h) lg (-0,32).

11.2. Logaritmijärjestelmät

1. Logaritmin määritelmä $\log_a x$ tarkoittaa sitä eksponenttia, mihin kantaluku a pitää korottaa, jotta saataisiin logaritmoitava luku x.

2. Logaritmin arvon laskeminen palauttamalla se eksponenttiyhtälön ratkaisemiseen $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

11.2.1. Laske a) $\log_3 9$ b) $\log_2 8$ c) $\log_5 125$ d) $\log_4 2$ e) $\log_2 \sqrt{2}$ f) $\log_6 1$ g) $\log_7 7$

2. Laske a) $\log_2 ½$ b) $\log_{½} 2$ c) $\log_2 8^5$ d) $\log_2 \frac{1}{8}$ e) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$ f) $\log_3 \frac{9}{\sqrt[5]{3}}$

3. Luonnollinen logaritmi on kyseessä kun logaritmijärjestelmän kantaluku on e. Merkitään ln x (= $\log_e x$)

4. Luonnollisen logaritmin arvo laskimella Canon F-800P : $\boxed{x}$ $\boxed{\text{ln}}$ → $\boxed{\text{arvo}}$ TI-85 : $\boxed{\text{LN}}$ $\boxed{x}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ → $\boxed{\text{arvo}}$

3. Anna likiarvo a) ln 2 b) ln 3,14 c) 4,56 d) ln 81 e) ln 0,98 f) ln 0,032 g) ln (-0,12)

5. Luonnollisen logaritmijärjestelmän kantaluku e

on päättymätön ja jaksoton desimaaliluku (irrationaaliluku) ja arvoltaan likimäärin 2,71828

6. Logaritmifunktio $y = f(x) = \log_a x$
on funktio, jonka muuttuja on logaritmoitavassa.

7. Logaritmifunktion kuvaaja
on kokonaan y-akselin oikealla puolella, monotoninen ja kulkee pisteen (1,0) kautta.

8. Logaritmifunktion monotonisuus
Logaritmifunktio $\log_a x$ on kasvava, kun kantaluku $a > 1$
Ja vähenevä kun kantaluku on välillä]0,1[eli $0 < a < 1$.

4. Millä vakion a arvoilla funktio $f(x) = \log_{2a-5} x$ on a) kasvava b) vähenevä?

9. Logaritmifunktion määrittelyjoukko
on R_+ eli logaritmoitava > 0

5. Mikä on funktion f(x) = a) $\ln (x - 3)$ b) $\log_2 (4 - x^2)$ c) $\log_a (x + 2) - \log_a (5 - x)$ määrittelyjoukko?

10. Logaritmifunktion arvojoukko
on koko R

11. Minkä pisteen kautta logaritmifunktioiden kuvaajat kulkevat?
Pisteen (1,0)

12. $\log_a 1$
$= 0$

13. $\log_a a$
$= 1$

14. Logaritmifunktion kantaluku
pitää olla > 0 ja ≠ 1. Yleensä vain > 1

11.3. Logaritmin laskusääntöjä

1. Logaritmi tulosta $\log_k ab$
$= \log_k a + \log_k b$

11.3.1. Sievennä a) $\log_2 2a$ b) $\log_3 9x$ c) $\log_5 125y$

2. Logaritmi osamäärästä $\log_k \frac{a}{b}$
$= \log_k a - \log_k b$

2. Sievennä a) $\log_6 \frac{x}{6}$ b) $\ln \frac{e}{x}$ c) $\log \frac{100}{a}$

3. Logaritmi potenssista $\log_k a^n$
$= n \cdot \log_k a$

3. Sievennä a) $\lg a^5$ b) $\lg a^3b^4$ c) $\ln e^2a^3$ d) $\ln \frac{1}{e^3}$ e) $\lg \sqrt{a}$

4. Kahden logaritmin summan yhdistäminen $\log_k a + \log_k b$
$= \log_k ab$

4. Esitä yhtenä logaritmina a) $\log_2 a + \log_2 x$ b) $\lg 2 + \lg 5$ c) $\ln 3 + \ln 4$
5. Kumpi luvuista $\ln (2 + 3)$ vai $\ln 2 + \ln 3$ on suurempi?
6. Sievennä $\log_2 (1 + \frac{1}{2}) + \log_2 (1 + \frac{1}{3}) + \log_2 (1 + \frac{1}{4}) + \ldots + \log_2 (1 + \frac{1}{255})$

5. Kahden logaritmin erotuksen yhdistäminen $\log_k a - \log_k b$

$= \log_k \frac{a}{b}$

7. Esitä yhtenä logaritmina a) $\ln a - \ln x$ b) $\lg 20 - \lg 2$ c) $\log_2 24 - \log_2 3$ d) $\lg (x^2 - 4) - \lg (x - 2)$
8. Kumpi luvuista a) $\log_2 (6 - 2)$ vai $\log_2 6 - \log_2 2$ b) $\log_{½} (6 - 2)$ vai $\log_{½} 6 - \log_{½} 2$ on suurempi?

6. Logaritmin edessä olevan kertoimen siirtäminen logaritmoitavaan $n \cdot \log_k a$
$= \log_k a^n$

9. Esitä yhtenä logaritmina a) $3\ln a$ b) $4\lg x$ c) $-2\lg y$ d) $3\ln a + 4 \ln b$ e) $5\lg x - 6\lg y$

7. Säännön $\log_a a^n = n$ käyttäminen logaritmin arvon laskemisessa
Sievennä logaritmoitavaa potenssiksi, jonka kantaluku on sama kuin logaritmijärjestelmän kantaluku.
Tällöin logaritmin arvo on logaritmoitavan eksponentti.

10. Laske a) $\log_a a^3$ b) $\log_k k^5$ c) $\lg 100$ d) $\log_2 16$ e) $\log_2 \sqrt{8}$ f) $\log_3 \frac{1}{9}$

8. Säännön $n = \log_a a^n$ käyttäminen reaaliluvun muuttamiseksi logaritmiksi.

11. Esitä a) 3-kantaisena logaritmina luku 2 b) 5-kantaisena logaritmina luku -1.
12. Esitä yhtenä logaritmina a) $1 + \log_3 x$ b) $3 + \log_2 5$

9. Logaritmilausekkeiden sieventämisiä
Käytä eo. sääntöjä 1 - 6 lausekkeen sieventämisessä.

13. Osoita, että lausekkeen $\frac{\ln a + \ln \sqrt{a}}{\ln a^2 - \ln \sqrt[3]{a}}$ arvo ei riipu vakion a arvosta, kun a on positiivinen ja $a \neq 1$.
14. Olkoon $\log_3 2 = a$. Määritä a:n avulla a) $\log_3 6$ b) $\log_3 18$ c) $\log_3 12$ d) $\log_3 1\frac{1}{3}$
15. Olkoon $x = \log_3 18$. Lausu x:n avulla $\log_3 2$.

10. $a^{\log_a x}$
$= x$

16. Sievennä a) $10^{\lg 3}$ b) $2^{\log_2 5}$ c) $3^{\log_3 2}$ d) $e^{\ln 1,23}$

11. Logaritmijärjestelmästä toiseen siirtyminen
$$\log_a x = \frac{\log_{Uusi} x}{\log_{Uusi} a}$$

17. Mitä on a) 2-kantaisena logaritmina $\log_4 5$ b) 10-kantaisena logaritmina $\ln 10$?
18. Perustele ilman laskinta kumpi on suurempi $\log_2 3$ vai $\log_4 10$

12. Erikantaisten logaritmien arvojen saaminen laskimella
Käytä eo. kaavaa muodossa $\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}$ tai $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ ja suorita ko. lasku laskimella.

19. Laske 3-numeroinen likiarvo luvulle a) $\log_3 2$ b) $\log_7 6$ c) $\log_2 5{,}48$.

11.4. Logaritmiyhtälöt

1. Yhtälön $\log_k P(x) = a$ ratkaiseminen
Selvitä ensin määrittelyjoukko (ratkaisemalla $P(x) > 0$)
Käytä logaritmin määritelmää ja saata yhtälö muotoon $P(x) = k^a$ ja ratkaise tämä.
Tarkista kuuluuko saatu x määrittelyjoukkoon.

11.4.1. Ratkaise a) $\log_2 x = 5$ b) $\log_3 (x - 1) = 2$ c) $\log_4 (3x - 1) = ½$ d) $\ln (x + 1) = 2$ e) $\lg (3x + 1) = 1$.

2. Yhtälön $\log_k P(x) = \log_k Q(x)$ ratkaiseminen
Selvitä ensin määrittelyjoukko (ratkaisemalla $P(x) > 0$ ja $Q(x) > 0$)
Merkitse logaritmoitavat yhtäsuuriksi (käytetään sääntöä $\log a = \log b \Leftrightarrow a = b$)
Ratkaistaan saatu yhtälö.
Tarkistetaan kuuluvatko saadut x:t määrittelyjoukkoon

2. Ratkaise a) $\lg (x + 9) = \lg 3$ b) $\ln (x + 2) = \ln (-x)$ c) $\lg (x + 2) = 2\lg x$
3. Ratkaise a) $\lg x + \lg 6 = \lg (x + 6)$ b) $\ln (x - 1) + \ln (x - 2) + \ln (x + 3) = \ln 6$
4. Ratkaise a) $\log_3 x = 1 + \log_3 (x - 1)$ b) $\log_2 (2x - 1) = 1 + \log_2 (1 - x)$

5. Ratkaise a) (ln x - 2)(lg x + 1) = 0 b) $(\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 4 = 0$

3. Eksponenttiyhtälö, jossa kaksi termiä ja niillä eri kantaluku $a^x = b$
Otetaan kummastakin puolesta logaritmi, jolloin x saadaan eteen tekijäksi ja yhtälö polynomiyhtälöksi.
Ratkaistaan tästä yhtälöstä x.

6. Ratkaise a) $2^x = 3$ b) $5^x = 100$ c) $3^{x-1} = 2$ d) $3^x = 2^{x+1}$

4. Sanallisia tehtäviä, jotka johtavat logaritmiyhtälöihin
Tee yhtälö kuten muissakin sanallisissa tehtävissä ja ratkaise saatu yhtälö.

7. Auton arvo vähenee 11% vuodessa. Monenko vuoden kuluttua arvo on puolet alkuperäisestä?
8. Missä ajassa hinnat kaksinkertaistuvat, jos vuosittainen inflaatio on a) 4% b) 12% ?
9. Bakteeriviljelmä viisinkertaistuu vuorokaudessa. Missä ajassa se tulee 1000-kertaiseksi?
10. Vuoden 1980 alussa oli erään valtion asukasluku 70 miljoonaa. Väkiluvun arvioidaan kaksinkertaistuvan 20 vuodessa. Minä vuonna väkiluku ylittää 100 miljoonaa?
11. Olkoon valtion A väkiluku 28 miljoonaa ja vuotuinen kasvuprosentti 0,92 sekä valtion B vastaavat luvut 33 miljoonaa ja 0,23. Missä ajassa valtion A väkiluku saavuttaa valtion B väkiluvun ja mikä on väkiluku tällöin?

Vastaukset harjoitustehtäviin

1.2.1. a) - h) (0,0)
2.a) (0,1) b) (0,3) c) (0,-4)
d) (0,5) e) (0,3)
3. a) (½,-¼) b) (1,-1) c) (1½,-2¼)
d) (2,-4) e) (3,9) f) (¼,1/16)
4. a) (1,-2) b) (1,1) c) (1,2)
d) (2,5) e) (-1,3)
5. a) - h) y-akseli (x = 0)
6. a) - e) y-akseli (x = 0)
7. a) x = ½ b) x = 1 c) x = 1½
d) x = 2 e) x = 3 f) x = ¼
8. a - c) x = 1 d) x = 2 e) x = -1
9. a) (3,-4) b) (1,3) c) (2,2)
10. a) 2 b) 7/8 c) -4/3

1.3.1. $y = -2x^2$
2.a) $y = 2x^2 + 3$ b) $y = x^2 - 3x + 7$
3. a) 1, 3 b) 1, ½ c) 1 d) ei

2.2.1.a)4, -1 b) 2½, -1 c) 1,3; 0,1
2. a) 3, -1 b) 1, -3½ c) 2,8; -1,5

2.3.1. a) 2i b) 4i c) 10i d) $i\sqrt{2}$
e) $2i\sqrt{3}$
2. a) 2 ja 1 b) 3 ja -4 c) 0 ja 5
d) -6 ja 0
3. a) (3,-6) b) (1,2) c) (0,7)
d) (5,0)
4. a) 2 + 3i b) -4 + 5i c) 8 d) -3i
5. a) -4 + 7i b) 7 + i c) 3 + 4i
d) -2 - 2i

2.4.1. a) 1, -2 b) 1½, -1¼
c) 5, -3, 4, -20
2.a) 0, 3 b) 0, 2½ c) 0, ½ d) 0, -2
3. a) 0; 0,17 b) 0; 1,28 c) 0; 0,15
d) 0; 3,375
4. a) 0, 2b/a b) 0, $\sqrt{5}$ c) 0, $2\cdot10^{-8}$
d) 0; $1{,}75\cdot10^{-12}$
5. a) ±7 b) $\pm\sqrt{5}$ c) ±2 d) ei e) ±½
f) $\pm\frac{1}{4}\sqrt{2}$
6. a) ±0,15 b) ±2 c) ±3b/a

7. a) ±2, 3 b) 0, ±3, 8
8. a) 4, -2 b) 4, -1 c) 2, 1 d) ±1
9. a) 3, -1 b) 5, -1 c) 2½, -½
10. $x = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$
11. a) 2, 4 b) 2, ½ c) ½, -¼
d) 2½, -1½ e) 1½, -5
12. a) $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ b) $\frac{1}{4}(3\pm\sqrt{41})$
c) $\dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$ d) $\dfrac{-7 \pm \sqrt{29}}{10}$
13. a) 3 b) -5 c) -1 ± 2i d) (3 ± i)/5
14. a) 1,2 ; 2,1 b) 0,21; 0,13
c) 2,896; 0,004
15. a) 1½, 1 b) 2, 1½ c) 1, 6
16. a) $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$, $-2\sqrt{3}$
c) $\sqrt{5}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{5}$
17. a) 2a, a b) 1½a, -4a c) a, 3
d) u, ½
18. a) 32, -45 b) 37½, -50
c) 35, 2/35
19. a) 2, 3 b) 4, -1 c) 1, 3
20. a) 2, -0,4 b) 0, 3 c) $1 \pm \sqrt{6}$
d) 0, ±1, -2
21. a) 0, 1, 2, -3 b) 1 ± 2i
22. a = 0 ja x = 0 ; a = -1 ja x = 1
24. a) ±2, $\pm\sqrt{2}$ b) 3, 2 c) ±3
25. a) (-1,0), (4,0) b) (-1,0),
(2½,0)
26. 0,412 , -1,09

2.5.1. ¾ tai 4/3
2. 9 tai -10
3. a) 0, 6 b) -1, 7 c) 1, 5 d) 3
4. -1, -2
5. ½ tai 5/3
6. 71 ja 72 tai -72 ja -71
7. 9 ja 11 tai -9 ja -11
8. 76
9. 20, 21 ja 29
10. 20 m ja 30 m
11. 20 cm
12. 60 mk
13. -3 tai 8/12

14. 36
15. a) 8 b) 16
16. 120 m
17. a) 7, -1 b) 2, -1/3
18. -1, 2/3
19. a) ±3 b) 2, -3

2.6.1. a) 25 b) -44 c) 0
2. a) 2 b) 1 c) 0
4. a = b
5. a) a < 4 b) a = 4 c) a > 4
6. a = 7, x = -3 tai a = -5, x = 3
7. a ≤ 1/3
8. 12
9. a) ½ b) ½, 0

2.7.1. a) S = -3, T = -4 b) S = 3,
T = 1½ c) S = -2/3, T = -1/3
2. -1/12
4. 2
5. -1/3
6. a) 2, 3 b) 2, 1½ c) ½, -2/3
7. a) $x^2 - 7x + 12 = 0$ b) $2x^2 - 11x + 5 = 0$ c) $x^2 - 12x + 36 = 0$
d) $6x^2 - 5x + 1 = 0$
8. a) $x^2 - 10x - 24 = 0$
b) $x^2 - 9x + 8 = 0$
9. $x^2 - 4x + 1 = 0$
10. a) -1½ b) -10 c) -4½ d) 3/20
e) 22¼
11. 1536

2.8.1. a) (x - 6)(x + 1)
b) (3x + 2)(x - 2) c) (1 + x)(5x - 3)
2. a) (a - 5)(2a + 1)
b) (c + 1)(3c - 10)
c) (x + a)(x - 5a)
d) (2a - b)(2a + 3b)
3. $\dfrac{x - 4}{2x - 1}$
4. a) $x^2 - 24x + 143$ b) $x^2 - 3x - 40$
c) $4x^2 - 24x + 35$
5. $2x^2 + 2x - 12$

6. $x^2 - 2x - 2 = 0$
7. $-24x^2 + 2x + 2 = 0$
8. a) 5 b) -1 c) 11½
9. 1, -2

2.9.1. a) $-2 < x < 2$ b) $x < -2$ tai $x > 2$ c) $\varnothing$ d) R
e) $x \geq 2$, $x \leq -2$
2. a) $0 < x < 3$ b) $x > 0$ tai $x < -1½$ c) $-0,2 \leq x \leq 0$
3. a) $x > 3$ tai $x < -2$
b) $-2 < x < 1½$ c) $1 < x < 9$
4. a) $x \neq 2$ b) $\varnothing$ c) -1 d) R
5. a) $x > 1$ tai $x < 0$ b) $x > 2$ tai $x < 1$ c) $-3 < x < 5$

2.10.1. $-1½ < x < 1$
2. $½ < x < 2$
3. $a \leq 0$ tai $a \geq 8/9$
4. 52
5. 8 m - 20 m
6. $x < ½$ tai $x > 2$
7. $0 < a < 1/9$
8. $10\text{ m} \leq x \leq 15\text{ m}$

3.1.2. a) suuria b) pieniä
3. a) pieniä b) suuria
5. a) suuria b) suuria
6. a) pieniä b) pieniä

4.1.1. a) $3x - 2$ b) $x^2 - 2x + 3$
2. $8x^3 - 12x^2 + 16x = 2x(4x^2 - 6x + 8)$
3. $12x^3 - 30x^2 + 18x = 6x^2(2x - 5) + 18x$
4. a) $x^2 - 3x + 4$ b) $3x^2 - 5x + 3$
5. a) $2x^2 + 3x - 4$ jää 2
b) $2x^3 - 5x - 4$ jää 4
6. a) $3x^2 + 5x - 6$ b) $4x^2 + 6x - 7$
7. a) $x^2 - 3x - 2$ b) $x^2 - 4x + 3$
8. a) $3x^2 - 4x + 5$ b) $2x^2 - 4x + 5$
9. a) $2x^2 + 3x - 4$ jää 2
b) $5x^2 - 8x - 40$ jää -10
10. a) $x^2 - 3ax - 4a^2$
b) $x^2 + 2ax - 3a^2$
11. $a + 6$, $a = -6$

4.2.1. a) $2x(3x - 4)$ b) $5x^2(x - 2)$
c) $2ab(2a + 3b)$ d) $3a^2b(2a - 7b)$
e) $2x(x^2 - 2x + 3)$
2. a) $(x - 2)(x^2 + 3)$
b) $2(x - 3)(x^2 - 3)$ c) $(x^2 - 5)(x^3 - 3)$
3. a) $(x + 7)(x - 7)$
b) $(2x + 5)(2x - 5)$
c) $2(x + 5)(x - 5)$
d) $3(x + 2y)(x - 2y)$
e) $(x^2 + 4a^2)(x + 2a)(x - 2a)$
f) $(x^4 + 16)(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$
4. a) $(x + 3)^2$ b) $(x + 5)^2$
c) $x(x + 10)^2$ d) $2a(x + 4)^2$
5. a) $(x - 1)^2$ b) $(x - 2a)^2$
c) $5(x - 4a)^2$ d) $(x + 2)^2(x - 2)^2$
6. a) $(x - 5)(x + 1)$
b) $(x - 3)(2x + 1)$ c) $(x - 2)(3x + 7)$
d) $(x - 2)(5x - 6)$ e) $(x - 2a)(x - 3a)$

4.3.1. a) 0 b) 4 c) 23/8
2. a) $4 - x$ b) $3x^2 - x + 1$
3. a) ei b) on c) ei
5. a) on b) on
6. a) ei b) ei c) on
9. -6
10. -4
11. -15
12. 1
13. $a = -1$, $b = 5$
14. $(x - 2)(x^2 - 3)$
15. $(x - 1)(x - 2)(x + 2)$
16. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
17. $a(x^3 + 4x^2 + x - 6)$, $a \neq 0$
18. $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$
19. $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$
21. ±2
22. $a \leq 4$
24. $(x + 2)^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

5.1.1. a) 2, ±3 b) ½, ±1, 4
c) ±2, -3, -2/3
2. a) 0, 3, -1 b) 0, 1, 5 c) 0, 1, -2
d) 2, ±3
3. a) 3 b) ±2, 3 c) ±1, -3
4. a) 0, -2, -4 b) -½, -1, -3
c) $2, \pm\sqrt{3}$

5.2.1. a) $-1 < x < 0$ tai $x > 1$
b) $x > 4/3$ c) $x < -1$ tai $2 < x < 4$
d) $x < -4$ tai $x > 5$

5.3.1. a) $x < -1/3$ tai $0 < x < 1$
b) $0 < x < 3 - \sqrt{2}$ tai $x > 3 + \sqrt{2}$
c) $x = 0$ tai $1 \leq x \leq 4$ d) $x \leq 1$
e) $-2 < x < 2$ tai $x > 4$

5.4.1. $-3, 1 \pm \sqrt{2}$
2. $a = 4$, $x = -1$, $x = 2/3$
3. $2 \pm \sqrt{3}$
4. a) ±1, ±2, ±3, ±6
b) ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12
5. a) $2, 1 \pm \sqrt{2}$ b) $3, 2 \pm \sqrt{5}$
c) $x < -1$, $3 < x < 5$
6. -10, -8, -4, 2
7. a) ±1, ±5, ±½, ±2½
b) ±1, ±2, ±1/3, ±2/3
8. a) $½, \pm\sqrt{3}$ b) $1/3, \pm\sqrt{5}/5$
c) $-½, \pm\sqrt{2}$
10. 3 tai 12
12. 1 m, 1,5 m ja 2 m
13. 3 dm
14. 1 tai -3
15. a) 1,6, -0,6, -1 b) 1,5 ; -1,2

5.5.1. a) ±1, ±2 b) ±1, ±3
c) $\pm 2, \pm\sqrt{½}$ d) ±2
2. a) 0,±2 b) 0, ±½ c) 1, 2
3. a) $-2 < x < -1$ tai $1 < x < 2$
b) $-\sqrt{6} < x < \sqrt{6}$
c) $x < -4$ tai $-1 < x < 1$ tai $x > 4$
4. a) ±2, ±3 b) ±2, 3, -1
5. a) -2, -4 b) 2 c) $1 + \sqrt[3]{2}$ d) 4
e) 3 , -1 f) $2 \pm \sqrt{2}$

6.1.1. a) 1 b) 1¾ c) 3
2. a) $x \neq 3$ b) $x \neq \pm 2$
c) $x \neq 0, -½, \pm 3$
3. a) 1½ b) 0, 5 c) 4, -1

6.2.1. a) $\frac{5y^2}{6x^2}$ b) $x + 1$ c) $\frac{x}{2}$
d) $\frac{x + 1}{x}$ e) $2x^2 + 3x$ f) $\frac{x}{2}$ g) $-x$
2. a) $\frac{x - 2}{x + 2}$ b) $\frac{x + 1}{3}$ c) $\frac{5 - 2x}{5 + 2x}$
d) $\frac{x^2 - 4x}{x + 4}$ e) $\frac{x + 3}{x - 2}$
3. a) $\frac{x + 3}{x + 4}$ b) $\frac{x - 4}{x - 5}$ c) $\frac{x - 1}{x - 2}$
d) $\frac{2x - 1}{2x - 3}$
4. a) -2, -6 b) 2, -28
5. a) -1/6 b) -½
6. a) $\frac{4x + 8}{2x^2 + 4x}$ b) $\frac{2x^2 - 2x}{2x^2 + 4x}$
c) $\frac{x^3 - x^2 - 6x}{2x^2 + 4x}$
7. a) $\frac{10}{2x}$ ja $\frac{x^2}{2x}$ b) $\frac{2x^2}{x^2 - x}$ ja $\frac{3x - 3}{x^2 - x}$
c) $\frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ ja $\frac{x}{x^2 - 1}$ d) $\frac{2}{x^3 - x}$, $\frac{3x}{x^3 - x}$ ja $\frac{x^2 - x}{x^3 - x}$
8. a) $\frac{y}{x}$ b) $\frac{x}{x + 1}$ c) $3x - 3$ d) $\frac{ab}{b - 2a}$
e) $\frac{x - 4}{2x}$
9. a) $\frac{3c}{a}$ b) $\frac{2a}{a + b}$ c) $\frac{y - 1}{y}$ d) $\frac{x}{2}$
e) $\frac{x + 3}{2}$
10. a) $\frac{7x}{8}$ b) $\frac{13}{6x}$ c) $-\frac{x}{2}$ d) $\frac{x}{10}$ e) $\frac{2}{3x}$
11. a) ½ b) $\frac{x + 4}{x^2 - 4}$ c) $\frac{a}{a + 1}$
d) $\frac{1}{a(a + 1)}$ e) 3 f) $x + 2$
12. a) $\frac{a - b}{a(a + b)}$ b) $\frac{1 - a}{a}$ c) $a - 1$
d) $\frac{a - 1}{a(a + 1)}$
13. -5
14. $\frac{a - b}{a + b}$, $\frac{5}{13}$

6.3.1. a) 2, b) 0, 1
2. aukko $x = 1$; as: $x = 0$

6.4.1. a) $x \neq 1, x \neq 0$
b) $x \neq \pm 1, x \neq 2$
2. a) $x = -3$ b) $\varnothing$ c) $x = 4$
3. a) $1 < x < 2$ b) $-2 < x < 0$ tai $x > 2$ c) $x < -5$ tai $-3 < x < 5$
d) $-1 < x < 0$ tai $4 < x < 5$
4. a) $x < -2$ tai $0 < x < 2$
b) $-1 < x < 0$ tai $x > 3$
c) $7/12 < x < 1½$
5. a) $-5 \leq x$ ja $x \neq 5$
b) $x < 0$ tai $x = 1/3$
c) $x \geq 3$ tai $x < 1$ ja $x \neq -1$
6. $c > 4$
7. NK: $x = 0, x = 2$; MJ: $x \neq 3$; $x < 0$ tai $2 < x < 3$

7.1.2. a) 1,4 b) -1,3 c) 1,7
3. a) 2 b) $\sqrt[3]{7}$ c) -1 d) -3 e) $\sqrt[5]{6}$
f) $\sqrt[7]{8}$
4. a) 2 b) -3 c) -5 d) 2 e) -5 f) 2
5. a) 1,587 b) 1,149 c) 1,860
d) 1,139 e) 1,012
7. $x = 2,5$
9. a) ±1,7 b) ±1,5 c) ±0,8 d) ei
10. a) $\pm\sqrt{5}$ b) ±2 c) $\pm\sqrt[4]{5}$ d) $\pm\sqrt[6]{7}$
e) 0 f) ei
11. a) 2 b) 3 c) 2 d) 2 e) 1 f) 0
g) ei
12. a) 1,495 b) 1,383 c) 1,316
d) 1,316 e) 0,792
13. a) $x \geq 2$ b) $x \leq ¾$ c) $-2 \leq x \leq 2$
15. $x > 1,1$

7.2.1. a) a b) $|x|$
2. a) a^2 b) $|x^3|$ c) c^{20}
3. a) $3|x|$ b) $2a^2$ c) $2|x|y^2$ d) $x\sqrt[3]{x}$
e) $xy\sqrt[5]{y}$
4. a) $\frac{x}{2}$ b) $\frac{4x^2}{3|y|^3}$ c) 1½
5. a) 3 b) $2x^3$
6. a) ½ b) $2x^3$
7. a) 4 b) 5 c) $5\sqrt[4]{5}$ d) 25 e) $9x^4$
8. a) on b) ei c) on

7.3.1. 3,5-kertainen
2. 4,4%
3. 16%
4. 43%

8.1.1. a) 2 b) 2 c) 3 d) 2 e) ½
f) 2/3 g) ei h) ei
2. a) 1,31 b) 1,32 c) 1,58
d) 0,919
3. a) 1/5 b) ½ c) 3 d) ¾
4. a) $5^{½}$ b) $a^{1/3}$ c) $(3x)^{1/4}$ e) $2^{1/x}$

8.2.1. a) 4 b) 27 c) 27/8 d) 16/9
2. a) 3,76 b) 0,137 c) 100,8
3. a) 1/8 b) 1/81 c) 25/16

8.3.1. a) 8,82 b) 1,21 c) 180

8.4.1. a) 4 b) a c) 8 d) ¼
2. a) $\sqrt[6]{a^5}$ b) $\sqrt[12]{½}$ c) x
3. $\sqrt[3]{3}$

8.5.1. 240
2. 1300

9.2.1. a) 2 b) 1, 4 c) 10 d) 0, 2
2. a) ei ratk. b) 10 c) 5 d) 5/3
3. a) 1 b) 0, 4 c) ei ratk.
4. $\sqrt{5}$ ja $2\sqrt{5}$
5. a) a = -¼ tai a = -½
6. a) $½(3 - \sqrt{5})$ b) $½(1 \pm \sqrt{5})$
c) $-\sqrt{2}$
7. a) 2,6 b) 4,6

9.3.1. a) $x < -1$ tai $x > 1$
b) $-1 < x < 9$ c) $x < -1$ tai $x > 1/3$

9.4.2. a) -27 b) 2, 0 c) 1
3. a) $x < 8$ b) $x > 29$ c) $x > 2$
d) $x > 1/3$

9.5.1. a) 2 b) 17
2. a) $2 + \sqrt[3]{4}$ b) 2,515
3. a) $x < 61$ b) $x > 33$
4. a) $x < 3$ b) $x > 0,709$

10.1.1. a) $k > 2$ b) $1½ < k < 2$
2. $a < -1$ tai $a > 1$; $a < -\sqrt{2}$ tai $a > \sqrt{2}$

10.2.1. a) 2 b) ½ c) 1½ d) -4 e) -3
f) -2 g) 0,2
2.a) $\varnothing$ b) $\varnothing$ c) 2 d) -4/3 e) -1 f) ½
3.a) 1 b) 2 , 4 c) 0 d) 3 e) 0 , 1
4. ±1, 0, 3
5. a) $x > 4$ b) $x > 2$ c) $x \geq ½$
d) $x > 5$ e) $x < 2½$
6. a) $x \leq 0$ tai $x > 2$ b) $x > 0$
7. a) $x < 3$ b) $x < 1$
8. a) $0 < x < 1$ b) $x \neq 0$
9. 7 v

11.1.1. a) 0 b) 0,3 c) 0,5 d) $\varnothing$
e) -0,3
2. a) 1 b) 0 c) 2 d) 3 e) 4 f) -1
g) -2
3. a) $x > 1$ b) $x < ½$ c) $x > 3$ tai $x < -3$ d) $-2 < x < 3$
4. a) 0,301 b) 0,477 c) 0,602
d) 0,699 e) 1,369 f) -0,268
g) -1,066 h) ei

11.2.1. a) 2 b) 3 c) 3 d) ½ e) ½
f) 0 g) 1
2. a) -1 b) -1 c) 15 d) -3 e) -½
f) 9/5
3. a) 0,693 b) 1,144 c) 1,517
d) 4,394 e) -0,020 f) -3,442 g) ei
4. a) $a > 3$ b) $2½ < a < 3$
5. a) $x > 3$ b) $-2 < x < 2$
c) $-2 < x < 5$

11.3.1. a) $1 + \log_2 a$ b) $2 + \log_3 x$
c) $3 + \log_5 y$
2.a) $\log_6 x - 1$ b) $1 - \ln x$ c) $2 - \lg a$
3. a) $5\lg a$ b) $3\lg a + 4\lg b$
c) $2 + 3\ln a$ d) -3 e) $½\lg a$
4. a) $\log_2 ax$ b) $\lg 10 = 1$ c) $\ln 12$
5. $\ln 2 + \ln 3$
6. 7
7. a) $\ln \frac{a}{x}$ b) $\lg 10 = 1$ c) $\log_2 8 = 3$
d) $\lg (x + 2)$
8. a) $\log_2(6 - 2)$ b) $\log_{½} 6 - \log_{½} 2$
9. a) $\ln a^3$ b) $\lg x^4$ c) $\lg y^{-2}$
d) $\ln a^3b^4$ e) $\lg \frac{x^5}{y^6}$
10. a) 3 b) 5 c) 2 d) 4 e) 1½ f) -2
11. a) $\log_3 9$ b) $\log_5 0,2$
12. a) $\log_3 3x$ b) $\log_2 40$
14. a) a + 1 b) a + 2 c) 2a + 1
d) 2a - 1
15. x - 2
16. a) 3 b) 5 c) 2 d) 1,23
17. a) $\log_2 \sqrt{5}$ b) $\frac{1}{\lg e}$
18. $\log_4 10$
19. a) 0,631 b) 0,921 c) 2,45

11.4.1. a) 32 b) 10 c) 1 d) $e^2 - 1$
e) 3
2. a) -6 b) -1 c) 2
3. a) 1,2 b) $\sqrt{7}$
4. a) 1½ b) ¾
5. a) 0,1 tai e^2 b) 2 tai 16
6. a) $\log_2 3$ b) $\frac{2}{\lg 5}$ c) $\frac{\lg 6}{\lg 3}$
d) $\frac{\lg 2}{\lg 1½}$
7. 6 v
8. a) 18 v b) 6 v
9. 4,3 vrk
10. 1990
11. 24 v kuluttua, 35 milj.

Koetehtäviä aiemmilta vuosilta

90.1.1. Ratkaise a) $x^2 - 9x = 0$ b) $x^2 - 9 = 0$ c) $x^2 - 9x = 22$ [a) 0 , 9 b) ± 3 c) 11 , -2]

90.1.2. Ratkaise a) $x - 3 < 2\frac{1}{2}x - 6$ b) $2x^2 - 3x - 5 > 0$ c) $x - 3 < 2\frac{1}{2}x - 6$ ja $2x^2 - 3x - 5 > 0$ [a) $x > 2$ b) $x < -1$ tai $x > 2\frac{1}{2}$ c) $x > 2\frac{1}{2}$]

90.1.3. Mikä on a ja tällöin x, kun yhtälöllä $x^2 + 2(x - a) = ax$ on kaksinkertainen ratkaisu? [a = -2 , x = -2]

90.1.4. Supista $\frac{a^2 - 5a - 6}{2a^2 - a - 3}$ [$\frac{a - 6}{2a - 3}$]

90.1.5. Jos kuution särmä kasvaa 2 cm, niin tilavuus kasvaa 152 cm^3. Mikä on alkuperäinen särmä? [4 cm]

90.1.6. Mikä on a, kun paraabelin $y = ax^2 - 4x + a$ huippu on x-akselin yläpuolella? [$-2 < a < 0$ tai $a > 2$]

90.1.7. Määritä a ja b, kun polynomi $P(x) = x^{1001} + ax + b$ on jaollinen polynomilla $x^2 - 1$. [a = - 1 , b = 0]

90.2.1. Ratkaise a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $(x - 1)(x^2 - 4x) = 5(x - 1)$ [a) ± 3 , ± 2 b) 5 , ± 1]

90.2.2. Ratkaise yhtälö $\sqrt{4x + 1} + 1 = x$ [x = 6]

90.2.3. Ratkaise epäyhtälö $(x^2 - 1)(2 - 3x) \le 0$ [$-1 \le x \le \frac{2}{3}$ tai $x \ge 1$]

90.2.4. Määritä a, kun x = 2 toteuttaa yhtälön $3x^3 + x^2 + ax - 4 = 0$. Mitkä ovat tällöin muut ratkaisut?
[a = - 12 , $x = -\frac{1}{3}$, x = - 2]

90.2.5. Ratkaise epäyhtälö $|x^2 - 3x| \le 2x$. [$1 \le x \le 5$ tai $x = 0$]

90.2.6. Millä a:n ja b:n arvoilla epäyhtälön $\frac{x + a}{x + b} > 3$ ratkaisujoukko on [-1,2[? [a = - 8 , b = - 2]

90.2.7. Olkoon a > 2. Osoita, että $\sqrt{a - 2} + \sqrt{a + 2} < \sqrt{a - 1} + \sqrt{a + 1}$.

91.1.1. Ratkaise a) $9x^2 - 4 = 0$ b) $9x^2 - 4x = 0$ c) $9x^2 - 4x - 5 = 0$ [a) $\pm\frac{2}{3}$ b) 0, $\frac{4}{9}$ c) 1 , $-\frac{5}{9}$]

91.1.2. Ratkaise epäyhtälöt a) $\frac{x}{3} + 3 > 2x$ b) $(\frac{x}{3} + 3)^2 > (2x)^2$ [a) $x < \frac{9}{5}$ b) $-1\frac{2}{7} < x < 1\frac{4}{5}$]

91.1.3. Laske lausekkeen $(\frac{1}{2})^{xy} + 3^{x+y}$ arvo, kun x ja y ovat yhtälön $x^2 - 2x - 2 = 0$ ratkaisut. [13]

91.1.4. Ratkaise kaksoisepäyhtälö $2x - 1 < x^2 - 4 \le 12$ [$-4 \le x < -1$ tai $3 < x \le 4$]

91.1.5. Määritä sellaisen suorakulmion muotoisen alueen pinta-ala, jonka piirin pituus on 146 m ja jonka halkaisija on 53 m. [1260 m^2]

91.1.6. Millä a:n arvoilla lausekkeen $\frac{2x - 1}{x^2 + ax + 9}$ a) arvo voidaan laskea kaikilla x:n arvoilla b) voi supistaa?
[a) $-6 < a < 6$ b) $a = -18\frac{1}{2}$]

91.1.7. Kolmannen asteen polynomilla P(x) on yksinkertainen nollakohta x = - 2 ja kaksinkertainen nollakohta x = 2. Laske P(1) - P(-1), kun $P(3) = 3\frac{1}{3}$. [- 4]

91.2.1. Ratkaise yhtälö $x - 2 = \sqrt{2x - 1}$ [5]

91.2.2. Ratkaise epäyhtälö $| 3x + 1 | < x + 11$ [$- 3 < x < 5$]

91.2.3. Ratkaise yhtälö a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ b) $(x - 1)^3 = 4(x - 1)$ [a) ± 3 , ± 1 b) 3 , ± 1]

91.2.4. Ratkaise epäyhtälö $x - 2 > \frac{3}{x}$ [$- 1 < x < 0$ tai $x > 3$]

91.2.5. Ratkaise epäyhtälö $x^4 - 5x^3 + 6x^2 \le 0$ [$2 \le x \le 3$ tai $x = 0$]

91.2.6. Osoita, että $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > \frac{1}{b} + 1$, kun $a > b > 1$.

91.2.7. Määritä vakiot a ja b siten, että yhtälöllä $| x^2 - 4x | + ax + b = 0$ on ratkaisut $x = -1$ ja $x = 3$. Onko yhtälöllä tällöin muita ratkaisuja? Ja jos on, niin mitkä ovat muut ratkaisut. [a = ½ ja b = - 4½, on , 4½ ja 1½]

91.3.1. a) Piirrä funktion $f(x) = x^x$, $x \in [0,1 ; 2]$ kuvaaja. b) Millä välillä f on vähenevä (kuviosta saatavalla tarkkuudella)? c) Millä x:llä funktio saa kuvion perusteella arvon 3? [$0,1 < x < 0,4$, $x = 1,8$]

91.3.3. Ratkaise a) $8^x > \frac{1}{32}$ b) $9^x + 3^x = 12$. [a) $x > - 1\frac{2}{3}$ b) $x = 1$]

91.3.5. Kumpi on suurempi a) $\sqrt[6]{32}$ vai $\sqrt[5]{4}$ b) $\sqrt[3]{3}$ vai $\sqrt{2}$ [a) $\sqrt[6]{32}$ b) $\sqrt[3]{3}$]

91.3.6. Millä a:n arvoilla funktio $f(x) = (a^2 - 1)^{-x}$ on aidosti kasvava? [$1 < | a | < \sqrt{2}$]

91.4.1. Määritä x, kun a) $x = \log_2 64$ b) $\lg x = -2$ c) $\log_2 64 = 3$ [a) 6 b) 0,01 c) 4]

91.4.3. Ratkaise yhtälö $\log_2 x + \log_2 (2 + x) = 3$. [2]

91.4.7. Viljolla on tapana käyttää rahoistaan enintään 10% aamulla olleesta rahamäärästä. Hän haluaa, että kuukauden lopussa hänellä on ainakin 300 mk yllättäviä menoja varten. Miten paljon Viljon pitää saada rahaa kuukauden alussa, että tämä olisi mahdollista? Monenko päivän pakkoloman Viljo kestää seuraavan kuun alusta, jos pakkoloma alkaa kuun alussa ja Viljolla ei ole säästöjä sekä Viljon pienin ostos on 10 mk? [7563,30 mk , 30 päiväksi]

92.1.1. Ratkaise x , kun a) $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$ b) $x = (- \frac{1}{8})^{1/3}$ c) $(\frac{1}{2})^x > \frac{1}{8}$ [a) - ½ b) ei ole c) $x < 3$]

92.1.3. Ratkaise yhtälöt a) $(2x)^4 = 2$ b) $4^{2x} = 2$ c) $\sqrt[4]{2x} = 2$ [a) $\pm \frac{1}{2}\sqrt[4]{2}$ b) ¼ c) 8]

92.1.7. Mikä on pienin ykköstä suurempi kokonaisluku, jonka toinen , kolmas , neljäs ja viides juuri ovat kokonaislukuja? [2^{60} = 1 152 921 504 606 846 976]

92.2.1. Ratkaise a) $(3^x)^2 = 27$ b) $(x^3)^2 = 27$ c) $\sqrt[3]{x^2} = 27$ [a) 1½ b) $\pm \sqrt{3}$ c) $\pm 81\sqrt{3}$]

92.2.3. Ratkaise a) $2x^4 + 10x = 0$ b) $16^x < \sqrt[7]{½}$ [a) $- \sqrt[3]{5}$ b) $x < - \frac{1}{28}$]

92.2.6. Ratkaise yhtälö $9x^{2/3} + 4x^{-2/3} = 37$. [$x = 8$, $x = \frac{1}{27}$]

92.3.1. a) Laske $\log_2 \sqrt[7]{2}$ b) Mikä on funktion $\ln (4x - 1)$ määrittelyjoukko? c) Sievennä lauseke $3 \lg x - \lg x^2$.

92.3.4. Ratkaise yhtälö $\log_2 (x - 1) = 1 + \log_2 (4 - x)$

92.3.6. Työntekijän palkka oli 100 mk/h. Sitä korotettiin 3 kertaa 8%, sitten 4 kertaa 5% ja lopuksi 3 kertaa 4%. Mikä oli tuntipalkka näiden korotusten jälkeen? Mikä korotusprosentti olisi antanut saman lopputuloksen, jos sen olisi saanut 10 kertaa?

1. a) $\log_2 \sqrt[7]{2} = x$; $2^x = \sqrt[7]{2}$; $2^x = 2^{1/7}$; $\mathbf{x = 1/7}$. b) $4x - 1 > 0$; $4x > 1$; $\mathbf{x > 1/4}$. c) $3 \lg x - \lg x^2 = 3 \lg x - 2 \lg x = \mathbf{\lg x}$.
4. $\log_2 (x - 1) = \log_2 2 + \log_2 (4 - x)$; $\log_2 (x - 1) = \log_2 (8 - 2x)$; $x - 1 = 8 - 2x$; $3x = 9$; $\mathbf{x = 3}$. Mj: $x - 1 > 0$ ja $4 - x > 0$; $x > 1$ ja $x < 4$; ts. $1 < x < 4$.
6. $P = (1 + 0{,}08)^3 \cdot (1 + 0{,}05)^4 \cdot (1 + 0{,}04)^3 \cdot 100$ mk = **172,25 mk** . $(1 + x)^{10} \cdot 100$ mk = 172,25 mk ; $(1 + x)^{10} = 1{,}7225$; $1 + x = \sqrt[10]{1{,}7225}$; $1 + x = 1{,}0558$; **x = 5,6%**.

92.4.5. Olkoon $\log_2 3 = a$. Laske a:n avulla $\log_3 72$.

92.4.6. Kummalla tavalla saadaan suurempi ja montako prosenttia suurempi loppupalkka, korottamalla palkkaa 10 kertaa 7,5% vai korottamalla palkkaa ensin 5 kertaa 5% ja sitten 5 kertaa 10%?

5. Tiedetään, että $\log_2 3 = a$ ja $\log_2 2 = 1$; $\log_3 72 = (\log_2 72) / (\log_2 3) = (\log_2 8{\cdot}9) / (\log_2 3)$ $= (\log_2 2^3 + \log_2 3^2) / (\log_2 3) = (3\log_2 2 + 2\log_2 3) / (\log_2 3) = \mathbf{(3 + 2a) / a}$.
6. Palkka nyt = a . Palkka 2. tavalla = $1{,}10^5 \cdot 1{,}05^5 \cdot a = 2{,}05546a$. Palkka 1. tavalla = $1{,}075^{10} \cdot a = 2{,}06103a$; $2{,}06103a : 2{,}05546a = 1{,}0027$. Vastaus: **Ensimmäisellä tavalla 0,27% suurempi** .

93.1.1. Ratkaise a) $2x^2 - 5x = 0$ b) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ c) Jaa tekijöihin $2x^2 - 5x + 3$.

93.1.2. Ratkaise $| x - 5 | < 3x + 13$

93.1.3. Kun positiivinen luku vähennetään neliöstään saadaan erotukseksi vähintään 90. Mitä arvoja kyseinen luku voi saada?

93.1.4. Ratkaise yhtälö a) $x^5 - 7x^3 - 18x = 0$ b) $x^4 - 4x^3 + x^2 + 12x - 12 = 0$, kun $x = 2$ on kaksinkertainen ratkaisu.

93.1.5. Ratkaise $\dfrac{x^2}{x - 1} - 4 \leq \dfrac{x}{x - 1}$

93.1.6. Tutki onko polynomi $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + 10x - 15$ jaollinen lausekkeella a) $x - 5$ b) $2x - 3$ c) Jaa polynomi P(x) tekijöihin.

93.1.7. Määritä vakio a siten, että epäyhtälö $x^4 - 2x^2 + a^2 > 0$ on tosi kaikilla x:n arvoilla.

1. a) $x(2x - 5) = 0$; $\mathbf{x = 0}$ tai $2x - 5 = 0$; $2x = 5$; **x = 2½** b) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \dfrac{5 \pm 1}{4}$; **x = 1½** tai $\mathbf{x = 1}$ c) $2x^2 - 5x + 3 = 2(x - 1½)(x - 1) = \mathbf{(2x - 3)(x - 1)}$
2. $-3x - 13 < x - 5 < 3x + 13$; $-3x - 13 < x - 5$ JA $x - 5 < 3x + 13$; $-4x < 8$ JA $-2x < 18$; $x > -2$ JA $x > -9$; Kenties taulukko ; $\mathbf{x > -2}$
3. Olkoon ko. luku = x. $x^2 - x \geq 90$; $x^2 - x - 90 \geq 0$; NK: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 360}}{2} = \dfrac{1 + 19}{2}$; $x = 10$ tai $x = -9$ Kuvaaja: ylösp. auk. par. ; $x \geq 10$ tai $x \leq -9$; Koska luku positiivinen, vain edelliset kelpaavat. V: $\mathbf{x \geq 10}$
4. a) $x(x^4 - 7x^2 - 18) = 0$; $\mathbf{x = 0}$ tai $y^2 - 7y - 18 = 0$ ($y = x^2$) ; $y = 9$ tai $y = -2$; $x^2 = 9$ (tai $x^2 = -2$); $\mathbf{x = \pm 3}$ b) $x = 2$ on kaksinkertainen ratkaisu ts. tekijänä on $(x - 2)^2$. Toinen tekijä saadaan jakamalla $(x^4 - 4x^3 + x^2 + 12x - 12) : (x^2 - 4x + 4) = x^2 - 3$ Yhtälö $\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4)(x^2 - 3) = 0$; $x^2 - 4x + 4 = 0$ tai $x^2 - 3 = 0$; $\mathbf{x = 2}$ tai $\mathbf{x = \pm \sqrt{3}}$
5. $\dfrac{x^2}{x - 1} - \dfrac{4(x - 1)}{x - 1} - \dfrac{x}{x - 1} \leq 0$; $\dfrac{x^2 - 4x + 4 - x}{x - 1} \leq 0$; $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} \leq 0$; OS. NK x = 1 tai x = 4 Kuvaaja ylösp. auk. par. Merkit + 1 - 4 + NIM.: NK x = 1 ; kuvaaja nouseva suora. Merkit: - 1 + ; Merkit taulukkoon : - 1 - 4 + ; V: $\mathbf{x \leq 4}$ JA $\mathbf{x \neq 1}$

6. a) Sijoitetaan jakajan nollakohta lausekkeeseen.
NK on $x = 5$; $P(5) = 4\cdot5^3 - 6\cdot5^2 + 10\cdot5 - 15 = 500 - 150 + 50 - 15 = 385 \neq 0$ V: **ei jaollinen**
b) NK = 1½ ; $P(1½) = 4\cdot(1½)^3 - 6\cdot(1½)^2 + 10\cdot1½ - 15 = 13½ - 13½ + 15 - 15 = 0$; V: **on jaollinen**
c) Yksi tekijä on $2x - 3$; Toinen tekijä = $(4x^3 - 6x^2 + 10x - 15) : (2x - 3) = 2x^2 + 5$ V: $\mathbf{(2x - 3)(2x^2 + 5)}$

7. EY $\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 + a^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 + a^2 - 1 > 0$; Koska neliö on ≥ 0 , on oltava $a^2 - 1 > 0$
NK $a = \pm 1$; Paraabeli ; V : $\mathbf{a > 1}$ tai $\mathbf{a < -1}$

94.1.1. Ratkaise yhtälöt a) $4x^2 - 25 = 0$ b) $4x^2 - 25x = 0$ c) $4x^2 - 25x + 25 = 0$.

94.1.2. Millä x:n arvoilla on määritelty lauseke a) $\sqrt{2x - 4}$ b) $\sqrt{3 - ½x}$ c) $\sqrt{2x - 4} + \sqrt{3 - ½x}$

94.1.3. Ratkaise epäyhtälö $x + 1 < \frac{6}{x}$.

94.1.4. Supista lauseke $\frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 - 4x + 3}$.

94.1.5. Millä vakion a arvoilla yhtälön $x^2 - 2ax + 3a = 0$ ratkaisut ovat reaaliset?

94.1.6. Ratkaise epäyhtälö $| x^2 - 2x - 4 | < x^2 + 4$

94.1.7. Suorakulmion kannan ja korkeuden pituuksien summa on 12. Kun toista pidennetään kaksinkertaiseksi ja toista lyhennetään yhtä paljon, niin saadaan suorakulmio, jonka pinta-ala on 9 yksikköä alkuperäistä suurempi. Kuinka suuri on alkuperäisen suorakulmion ala?

94.1.8. Ratkaise yhtälö $x^3 - 3x^2 = 2x - 6$.

94.1.9. Määritä vakiot a ja b polynomissa $P(x) = -x^2 + ax - b$ siten, että $P(a) = 1$ ja polynomin P nollakohtien keskiarvo on 1.

94.1.10. a) Onko polynomi $3x^5 - 11x^2 + x + 10$ jaollinen binomilla $x + 2$? b) Onko polynomi $5x^3 + ax^2 + bx + 4$, missä a ja b ovat kokonaislukuja, jaollinen binomilla $2x - 1$, ja jos on, niin millä ehdolla?

1. a) $4x^2 - 25 = 0$; $4x^2 = 25$; $x^2 = \frac{25}{4}$; $x = \pm\frac{5}{2} = \mathbf{\pm 2½}$

b) $4x^2 - 25x = 0$; $x(4x - 25) = 0$; $\mathbf{x = 0}$ tai $4x - 25 = 0$; $4x = 25$; $x = \frac{25}{4} = \mathbf{6¼}$

c) $4x^2 - 25x + 25 = 0$; $x = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 400}}{8} = \frac{25 \pm 15}{8}$; $\mathbf{x = 5}$ tai $\mathbf{x = 1¼}$

2. a) Juuri määritelty, kun juurrettava ≥ 0 ; $2x - 4 \geq 0$; $2x \geq 4$; $\mathbf{x \geq 2}$
b) 3 - ½x ³ 0 ; - ½x ³ - 3 || : (- ½) ; $\mathbf{x \leq 6}$
c) Näkemällä kohdista a) ja b) tai tekemällä niistä taulukko nähdään c) kohdan vastaus $\mathbf{2 \leq x \leq 6}$

3. $x + 1 < \frac{6}{x}$; $x + 1 - \frac{6}{x} < 0$; $\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} - \frac{6}{x} < 0$; $\frac{x^2 + x - 6}{x} < 0$
OS: nk $x^2 + x - 6 = 0$; $x = 2$ tai $x = -3$; Kuvaaja ylösp. auk. par. Merkit + -3 - 2 +
NIM: nk $x = 0$, kuvaaja nouseva suora. Merkit - 0 +
Merkit taulukkoon, josta merkit: - -3 + 0 - 2 + V : $\mathbf{x < -3}$ tai $\mathbf{0 < x < 2}$

4. OS: nk $2x^2 - 3x - 9 = 0$; $x = 3$ tai $x = -1½$, joten os:n tekijät ovat $2(x - 3)(x + 1½)$
NIM: nk $x^2 - 4x + 3 = 0$; $x = 3$ tai $x = 1$ joten nim:n tekijät $(x - 3)(x - 1)$
$\frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 - 4x + 3} = \frac{2(x - 3)(x + 1½)}{(x - 3)(x - 1)} = \frac{2x + 3}{x - 1}$

5. Yhtälön $x^2 - 2ax + 3a = 0$ ratkaisut ovat reaaliset, jos yhtälön $D \geq 0$; $4a^2 - 12a \geq 0$; NK: $4a(a - 3) = 0$
$a = 0$ tai $a = 3$; paraabelista $\mathbf{a \leq 0}$ tai $\mathbf{a \geq 3}$

6. $| x^2 - 2x - 4 | < x^2 + 4$; $-x^2 - 4 < x^2 - 2x - 4 < x^2 + 4$; $-x^2 - 4 < x^2 - 2x - 4$ JA $x^2 - 2x - 4 < x^2 + 4$
$2x^2 - 2x > 0$ JA $-2x < 8$; $x(x - 1) > 0$ JA $x > -4$
I EY: nk $x = 0$ ja $x = 1$. Kuvaaja ylösp. auk. par. EY toteutuu $x < 0$ tai $x > 1$
II EY toteutuu kun $x > -4$
Alueet taulukkoon, josta $\mathbf{-4 < x < 0}$ **tai** $\mathbf{x > 1}$

7. I suorakulmio: kanta = x , korkeus = 12 - x , Ala = x(12 - x)
II suorakulmio : kanta = 2x , korkeus = 12 - 2x , Ala = 2x(12 - 2x)
$x(12 - x) + 9 = 2x(12 - 2x)$; $12x - x^2 + 9 = 24x - 4x^2$; $3x^2 - 12x + 9 = 0$; $x^2 - 4x + 3 = 0$; x = 1 tai x = 3
Ala = 1·(12 - 1) = **11** tai Ala = 3·(12 - 3) = **27**

8. $x^3 - 3x^2 = 2x - 6$; $x^2(x - 3) = 2(x - 3)$ || : (x - 3) ; $x^2 = 2$ tai x - 3 = 0 ; $\mathbf{x = \pm\sqrt{2}}$ tai **x = 3**

9. $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 1$; $x_1 + x_2 = 2$; $-\frac{a}{-1} = 2$; **a = 2**
P(a) = 1 ; P(2) = 1 ; - 4 + 2·2 - b = 1 ; **b = - 1**

10. a) pol. on jaoll. (x + 2):lla, jos x = - 2 on pol:n nk. 3·(-32) - 11·4 - 2 + 10 = - 96 - 44 - 2 + 10 = -132 V: **ei**
b) Pol. on jaoll. jos sen nk on ½. Koska pol:n kertoimet ovat kokonaislukuja, niin, jos sillä on rationaalinen nollakohta on sen nimittäjä jokin korkeimman asteen termin kertoimen tekijä.
Siis nimittäjä on jokin luvun 5 tekijä.
Koska 2 ei ole tekijänä 5:ssa ei ½ voi olla nollakohta. Ja siis pol ei ole jaollinen (2x - 1):llä.

94.2.1. Ratkaise yhtälöt a) $x^2 - 4 = 0$ b) $x^2 - 4x = 0$

94.2.2. Millä x:n arvoilla on a) $5 - 4x < 4x - 3$ b) $2 + x - x^2 > 0$

94.2.3. Ratkaise epäyhtälö $x^3 - 5x^2 + 4x > 0$

94.2.4. Supista lauseke $\frac{3x^2 - 4x - 4}{x^3 - 2x^2}$

94.2.5. Millä a:n arvolla yhtälöllä $x^2 - 10x + (a - 1) = 0$ on kaksinkertainen ratkaisu? Mikä on ko. ratkaisu?

94.2.6. Ratkaise yhtälö $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

94.2.7. Suorakulmaisen kolmion toinen kateetti on 7 cm lyhyempi kuin toinen kateetti ja 8 cm lyhyempi kuin hypotenuusa. Mikä on kolmion ala?

94.2.8. Ratkaise epäyhtälö $| x^2 - 5x | > 5x - 9$.

94.2.9. Muodosta jokin sellainen toisen asteen yhtälö, jonka ratkaisut ovat kaksi kertaa niin suuret kuin yhtälön $x^2 - 1111x - 2222 = 0$ ratkaisut.

94.2.10. Määritä polynomin $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$ kertoimet a ja b , kun jaettaessa polynomi P(x) binomilla (x - 2) on jakojäännös 1 ja polynomin P(x) + 2 tekijänä on (x + 1).

1. a) $x^2 - 4 = 0$; $x^2 = 4$; $\mathbf{x = \pm 2}$ b) $x^2 - 4x = 0$; x(x - 4) = 0 ; **x = 0** tai **x = 4**

2. a) 5 - 4x < 4x - 3 ; - 4x - 4x < -3 - 5 ; - 8x < - 8 || : (- 8) ; **x > 1**
b) nk: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$; x = -1 x = 2 Kuvaaja : alasp. auk. par. Merkit: - -1 + 2 - V: **- 1 < x < 2**

3. $x^3 - 5x^2 + 4x > 0$; $x(x^2 - 5x + 4) > 0$; x:n merkit: posit. kun x > 0
$(x^2 - 5x + 4)$:n merkit : nk $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$ x = 4 tai x = 1. Kuvaaja ylösp. auk. par. Merkit + 1 - 4 +
Taulukkoon tekijöiden merkit, josta tulon merkit - 0 + 1 - 4 + V: **0 < x < 1 tai x > 4**

4. OS: nk $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6}$ x = 2 tai $x = -\frac{2}{3}$; $\frac{3x^2 - 4x - 4}{x^3 - 2x^2} = \frac{3(x - 2)(x - \frac{2}{3})}{x^2(x - 2)} = \mathbf{\frac{3x - 2}{x^2}}$

5. Yhtälöllä on kaksinkertainen ratkaisu, jos diskriminantti on nolla. 100 - 4(a - 1) = 0 ; 100 - 4a + 4 = 0
-4a = -104 ; **a = 26**. Yhtälö on tällöin $x^2 - 10x + 25 = 0$; $x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} = \frac{10 \pm 0}{2} = \mathbf{5}$

6. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$; huomataan, että x = 1 on yksi nollakohta ; tekijänä on (x - 1)
Jakamalla jakokulmassa saadaan toiseksi tekijäksi $x^2 - 5x + 6$
$(x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$; x - 1 = 0 tai $x^2 - 5x + 6 = 0$; **x = 1** tai $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$; **x = 3** tai **x = 2**

7. Lyhin kateetti = x ; pitempi kateetti = x + 7 ; hypotenuusa = x + 8 ; Pythagoraan teoreemalla saadaan $x^2 + (x + 7)^2 = (x + 8)^2$; $x^2 + x^2 + 14x + 49 = x^2 + 16x + 64$; $x^2 - 2x - 15 = 0$; $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2}$; x = 5 tai (x = - 3) , jolloin pitempi kateetti on 5 + 7 = 12 ; Ala = ½·12·5 = **30 cm^2**
8. $\lvert x^2 - 5x \rvert > 5x - 9$; $x^2 - 5x > 5x - 9$ tai $x^2 - 5x < -5x + 9$; A: $x^2 - 10x + 9 > 0$ tai B: $x^2 < 9$ A: nk $x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}$; x = 9 tai x = 1 Kuvaaja ylösp. auk. par. Toteutuu, kun x < 1 tai x > 9 B: nk x = ± 3 . Kuvaaja ylösp. auk. par. Toteutuu, kun -3 < x < 3 Taulukkoon molempien toteutumisalueet, josta vastaus V: **x < 3** tai **x > 9**
9. $y_1 = 2x_1$ ja $y_2 = 2x_2$; $y_1 + y_2 = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot 1111 = 2222 = -\frac{b}{a}$ $y_1 \cdot y_2 = 2x_1 \cdot 2x_2 = 4x_1 \cdot x_2 = 4 \cdot (-2222) = -8888 = \frac{c}{a}$ valitaan a = 1, jolloin b = - 2222 ja c = - 8888 V : $\mathbf{y^2 - 2222y - 8888 = 0}$
10. $\begin{cases} JJ = 1 \\ x + 1 \text{ on tekijä} \end{cases}$; $\begin{cases} P(2) = 1 \\ P(-1) + 2 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 8 + 4a + 2b + 3 = 1 \\ -1 + a - b + 5 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 4a + 2b = -10 \;\lVert \cdot 1 \\ a - b = -4 \;\lVert \cdot 2 \end{cases}$ 6a = - 18 ; **a = - 3** ; - 3 - b = - 4 ; **b = 1**

94.3.1. Sievennä a) $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$ b) $27^{-4/3}$ c) $\log_a \sqrt[5]{a^2}$

94.3.2. Ratkaise $2^{3x} = ½$.

94.3.3. Mikä on funktion $f(x) = \ln(4 - x^2)$ määrittelyjoukko?

94.3.4. Olkoon $\log_5 2 = a$. Mitä on $\log_5 20$ esitettynä a:n avulla?

94.3.7. Ratkaise yhtälö $3 \log_2 (x - 2) = 2 + \log_2 (x - 1) + \log_2 (x + 2)$.

1. a) $\sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \mathbf{\frac{1}{4}}$ b) $\left(\sqrt[3]{27}\right)^{-4} = 3^{-4} = \mathbf{\frac{1}{81}}$ c) $\log_a \sqrt[5]{a^2} = \log_a a^{2/5} = \mathbf{2/5}$.
2. $2^{3x} = ½$; $2^{3x} = 2^{-1}$; 3x = -1 ; $\mathbf{x = -\frac{1}{3}}$
3. logaritmoitava > 0 ; $4 - x^2 > 0$ NK: $x^2 = 4$; x = ±2 Kuvaaja alasp. auk. par. josta vastaus V: **- 2 < x < 2**
4. $\log_5 2 = a$ ja $\log_5 5 = 1 \Rightarrow \log_5 20 = \log_5 2 \cdot 2 \cdot 5 = \log_5 2 + \log_5 2 + \log_5 5 = a + a + 1 =$ **2a + 1**
7. MJ: x - 2 > 0 ja x - 1 > 0 ja x + 2 > 0 eli yhdessä x > 2 $\log_2 (x - 2)^3 = \log_2 2^2 + \log_2 (x - 1) + \log_2 (x + 1)$; $\log_2 (x - 2)^3 = \log_2 4(x - 1)(x + 2)$ $(x - 2)^3 = 4(x - 1)(x + 2)$; $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 4x^2 + 4x - 8$ $x^3 - 10x^2 + 8x = 0$; $x(x^2 - 10x + 8) = 0$; (x = 0) tai $\mathbf{x = 5 + \sqrt{17}}$ tai ($x = 5 - \sqrt{17}$)

94.4.1. Sievennä (tarkat arvot) a) $\sqrt[5]{32}$ b) $8^{-2/3}$ c) $\log_3 27$ d) $\ln \sqrt{e}$

94.4.6. Ratkaise yhtälöt a) $2^x = \sqrt[3]{4}$ b) $(2^x + 1)^2 + (2^x - 3)^2 = 10$.

94.4.8. Millä x:n arvolla $\lg \frac{3}{2} + \lg \frac{4}{3} + \lg \frac{5}{4} + ... + \lg \frac{x - 1}{x - 2} + \lg \frac{x}{x - 1} = 2$.

94.4.10. Tuotteen A hinta on kaksinkertainen tuotteen B hintaan nähden. Hintojen tasaamiseksi A:n hintaa alennetaan ja B:n korotetaan kuukausittain yhtä suurella vakioprosentilla. Vuoden kuluttua B:n hinta on 76% A:n hinnasta. Milloin hinnat ovat yhtä suuret?

1. a) $\sqrt[5]{32} = \mathbf{2}$ b) $8^{-2/3} = \left(\frac{1}{8}\right)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right)^2 = (½)^2 =$ **¼** c) $\log_3 27 = \log_3 3^3 = \mathbf{3}$ d) $\ln \sqrt{e} = \ln (e)^{½} =$ **½**
6. a) $2^x = \sqrt[3]{4}$; $2^x = 4^{1/3}$; $2^x = (2^2)^{1/3}$; $2^x = 2^{2/3}$; **x = 2/3** b) $(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x + 1 + (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 9 = 10$; $2 \cdot (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x = 0$; $(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x = 0$ $2^x(2^x - 2) = 0$; ($2^x = 0$) tai $2^x - 2 = 0$; $2^x = 2$; **x = 1**

8. $\lg\frac{3}{2} + \lg\frac{4}{3} + \lg\frac{5}{4} + ... + \lg\frac{x-1}{x-2} + \lg\frac{x}{x-1} = 2$

$\lg\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot ... \cdot\frac{x-1}{x-2}\cdot\frac{x}{x-1} = \lg 100$; $\lg\frac{x}{2} = \lg 100$; $\frac{x}{2} = 100$; **$x = 200$**

10. B:n hinta = H ; A:n hinta = 2H

B:n hinta kuukausittain = $(1 + p/100)^n \cdot H$; A:n hinta kuukausittain = $(1 - p/100)^n \cdot 2H$

$(1 + p/100)^{12} \cdot H = 0,76\cdot(1 - p/100)^{12} \cdot 2H$

$\left(\frac{1 + p/100}{1 - p/100}\right)^{12} = 1,52 \ || \ \sqrt[12]{(\ )}$; $\left(\frac{1 + p/100}{1 - p/100}\right) = 1,0355$; $p = 1,744$

$(1 + 1,744/100)^n \cdot H = (1 - 1,744/100)^n \cdot 2H$; $\left(\frac{1,01744}{0,98256}\right)^n = 2 \ || \ \ln(\ )$; $n\cdot\ln 1,0354 = \ln 2$

$n = 19,8$ V: **20 kk kuluttua**

94.5.1. Ratkaise yhtälö $2^{x-1} = 8$

94.5.3. Laske funktioiden määrittelyjoukot a) $f(x) = \sqrt[4]{2x - 3}$ b) $f(x) = \lg(4 - x^2)$

94.5.5. Ratkaise yhtälö $(\lg x + 2)\cdot\lg(x + 2) = 0$

94.5.7. Olkoon $\log_2 3 = x$ ja $\log_5 2 = y$. Laske $\log_2 5$ ja $\log_5 6$.

1. $2^{x-1} = 8$; $2^{x-1} = 2^3$; $x - 1 = 3$; **$x = 4$**

3. a) $2x - 3 \geq 0$; **$x \geq 1½$** b) $4 - x^2 > 0$; $x^2 < 4$; $|x| < 2$; **$-2 < x < 2$**

5. $(\lg x + 2)\cdot\lg(x + 2) = 0$; Mj: $x > 0$ ja $x > -2$; $\lg x + 2 = 0$ tai $\lg(x + 2) = 0$;
$\lg x = -2$ tai $\lg(x + 2) = \lg 1$; $\lg x = \lg 10^{-2}$ tai $x + 2 = 1$; **$x = 0,01$** (tai $x = -1$)

7. $\log_2 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 2} = \mathbf{\frac{1}{y}}$ $\log_5 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 5} = \frac{\log_2 3\cdot 2}{\log_2 5} = \frac{\log_2 3 + \log_2 2}{\log_2 5} = \frac{x + 1}{1/y} =$ **$y(x + 1)$**

94.6.1. Ratkaise yhtälöt a) $2^{x-1} = 4$ b) $\sqrt[4]{x - 1} = 2$ c) $(x - 1)^4 = 2$

94.6.3. Määritä funktioiden a) $f(x) = \log_2(4 - x^2)$ b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3 - 2x}}$ määrittelyjoukot.

94.6.4. Ratkaise yhtälö $2\log_3 x - 1 = 0$.

94.6.6. Ratkaise yhtälö $9^x + 3^x = 12$

94.6.7. Määritä kaksi lukua, joiden 10-kantaisten logaritmien summa on 3 ja erotus 1.

94.6.10. Jäniskanta pienenee 20% viidessä vuodessa pienenemisen ollessa vuosittain prosentuaalisesti samansuuruista. Missä ajassa jäniskanta pienenee puoleen?

1. a) $2^{x-1} = 4$; $2^{x-1} = 2^2$; $x - 1 = 2$; **$x = 3$** b) $\sqrt[4]{x - 1} = 2 \ ||(\ )^4$; $x - 1 = 16$; **$x = 17$**

c) $(x - 1)^4 = 2 \ || \ \sqrt[4]{(\ )}$; $x - 1 = \pm\sqrt[4]{2}$; **$x = 1 \pm \sqrt[4]{2}$**

3. a) $4 - x^2 > 0$; $x^2 < 4$; $|x| < 2$; **$-2 < x < 2$** b) $3 - 2x > 0$; $-2x > -3$; **$x < 1½$**

4. a) $2\sin x - 1 = 0$; $\sin x = ½$; $\sin x = \sin 30°$; **$x = 30° + n\cdot 360°$** tai **$x = 150° + n\cdot 360°$**

b) $2\log_3 x - 1 = 0$; $\log_3 x = ½$; $\log_3 x = \log_3 3^{½}$; $x = 3^{½} = \mathbf{\sqrt{3}}$

6. $9^x + 3^x = 12$; $(3^x)^2 + 3^x - 12 = 0$; Kun $3^x = y$, saadaan $y^2 + y - 12 = 0$; $y = 3$ tai $y = -4$
$3^x = 3$ Û **$x = 1$** tai $3^x = -4$, jolla ei ole ratkaisua

7. $\begin{cases}\lg x + \lg y = 3 \ || \cdot 1 \\ \lg x - \lg y = 1 \ || \cdot 1\end{cases}$; $2\lg x = 4$; $\lg x = 2$; $\lg x = \lg 10^2$; **$x = 100$**
$2 + \lg y = 3$; $\lg y = 1$; $\lg y = \lg 10$; **$y = 10$**

10. Jäniskanta aluksi = K. Vuotuinen vähenemisprosentti = p

$\left(1 - \frac{p}{100}\right)^5 \cdot K = 0,8\cdot K \ || \ \sqrt[5]{(\ )}$; $1 - \frac{p}{100} = 0,95635$; $p = 4,4\%$

$0,95635^n \cdot K = ½K \ || \ \ln(\ )$; $n\cdot\ln 0,95635 = \ln 0,5$; $n = 15,5$ V: **noin 16 vuotta**

95.1.1. Ratkaise yhtälöt a) $9x^2 - 4 = 0$ b) $9x^2 - 4x = 0$ c) $9x^2 - 4x - 5 = 0$

95.1.2. Sievennä a) $\log_3 18 + \log_3 4½$ b) $\dfrac{\sqrt{8 \cdot \sqrt[3]{32}}}{\sqrt[3]{2}}$

95.1.3. Ratkaise yhtälö $\sqrt{x - 1} = x - 3$

95.1.4. Millä a:n arvolla yhtälöllä $ax^2 + 4ax + 1 = 0$ on vain yksi reaalinen ratkaisu? Mikä on tämä ratkaisu?

95.1.5. Ratkaise a) $4^{3x+1} < 8$ b) $\lg(3x + 1) = 2$

95.1.6. Ratkaise epäyhtälö $\dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 4} \le 0$

95.1.7. Tilan neliöpohjaisen ja 2,0 m syvän lietelantasäiliön tilavuus piti kasvattaa uusien ympäristösäädösten mukaisesti kaksinkertaiseksi. Tavoitteeseen päästiin kasvattamalla pohjaneliön sivua 5,0 m. Kuinka suuri tilavuus vaadittiin, ja mitkä olivat alkuperäisen säiliön mitat?

95.1.8. Sievennä lauseke $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2 - x} - \dfrac{2}{x^2 - 1}$

95.1.9. Määritä a ja b, kun x = 1 ja x = -2 ovat yhtälön $x^3 + 2x^2 + ax + b = 0$ ratkaisuja. Mikä on tällöin yhtälön kolmas ratkaisu?

95.1.10. Erään hallituksen tavoitteena oli vähentää työttömien määrä puoleen neljässä vuodessa. Kuinka monta prosenttia työttömien määrän pitäisi pudota vuosittain, jos määrä pienenisi joka vuosi yhtä monta prosenttia? Montako vuotta työttömien määrän väheneminen puoleen kestäisi, jos vähenemisprosentti vuosittain on vain neljäsosa edellä saadusta vähenemisprosentista?

1. a) $9x^2 - 4 = 0$; $9x^2 = 4$; $x^2 = \dfrac{4}{9}$; $\mathbf{x = \pm \dfrac{2}{3}}$

b) $9x^2 - 4x = 0$; $x(9x - 4) = 0$; $\mathbf{x = 0}$ tai $9x - 4 = 0$; $9x = 4$; $\mathbf{x = \dfrac{4}{9}}$

c) $9x^2 - 4x - 5 = 0$; $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 180}}{18} = \dfrac{4 \pm 14}{18}$; $\mathbf{x = 1}$ tai $\mathbf{x = -\dfrac{5}{9}}$

2. a) $\log_3 18 + \log_3 4½ = \log_3 18 \cdot 4½ = \log_3 81 = \log_3 3^4 = \mathbf{4}$

b) $\dfrac{\sqrt{8\sqrt[3]{32}}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{(2^3 \cdot (2^5)^{1/3})^{½}}{2^{1/3}} = \dfrac{(2^3 \cdot 2^{5/3})^{½}}{2^{1/3}} = \dfrac{(2^{14/3})^{½}}{2^{1/3}} = \dfrac{2^{7/3}}{2^{1/3}} = 2^{6/3} = 2^2 = \mathbf{4}$

3. $\sqrt{x - 1} = x - 3 \; || \; (\,)^2$; $x - 1 = x^2 - 6x + 9$; $x^2 - 7x + 10 = 0$

$x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \dfrac{7 \pm 3}{2}$; x = 5 tai x = 2

TARK: $\sqrt{5 - 1} = 5 - 3$; $\sqrt{4} = 2$ Tosi ; $\sqrt{2 - 1} = 2 - 3$; $\sqrt{1} = -1$ epätosi ; V : **x = 5**

4. D = 0 ; $16a^2 - 4a = 0$; $4a(4a - 1) = 0$; a = 0 tai 4a - 1 = 0 ; 4a = 1 ; **a = ¼**
Jos a = 0, on yhtälö 0 + 0 + 1 = 0 , jolla ei ole ratkaisua
Jos a = ¼ , on yhtälö $¼x^2 + x + 1 = 0$; $x^2 + 4x + 4 = 0$; $(x + 2)^2 = 0$; x + 2 = 0 ; **x = -2**

5. a) $4^{3x+1} < 8$; $(2^2)^{3x+1} < 2^3$; $2^{6x+2} < 2^3$; 6x + 2 < 3 ; 6x < 1 ; $\mathbf{x < \dfrac{1}{6}}$

b) log (3x + 1) = 2 ; $3x + 1 = 10^2$; 3x = 99 ; **x = 33** ; MJ: 3x + 1 = 3·33 + 1 = 100 > 0

6. OS: nk $x^2 + 4x - 5 = 0$ $\dfrac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \dfrac{-4 \pm 6}{2}$; x = 1 tai x = -5 . Kuvaaja ylösp. auk. par. Merkit + -5 - 1 +

NIM: nk: $x^2 - 4 = 0$; $x^2 = 4$; x = ± 2 Kuvaaja ylösp. auk. par. Merkit + -2 - 2 +

Merkit taulukkoon, josta murtolausekkeen merkit + -5 - -2 + 1 - 2 + V: $\mathbf{-5 \le x < -2}$ tai $\mathbf{1 \le x < 2}$

7. Olk. alkuperäisen neliön sivu = x
$2 \cdot V_{ALK} = V_{UUSI}$; $2 \cdot 2{,}0 \cdot x^2 = 2{,}0 \cdot (x + 5)^2$; $2x^2 = x^2 + 10x + 25$; $x^2 - 10x - 25 = 0$
$x = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 + 100}}{2} = \dfrac{10 \pm 10\sqrt{2}}{2} = 5 \pm 5\sqrt{2}$. Koska negat. ei käy, on $x = 5 + 5\sqrt{2} \approx 12$ m

Alkuperäiset mitat ovat **12 m x 12 m x 2,0 m** ; V_{UUSI} = 2,0 m x 17 m x 17 m = **580 m^3**

8. $\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2 - x} - \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x(x - 1)} - \frac{2}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{2(x + 1)(x - 1)}{x(x + 1)(x - 1)} + \frac{x + 1}{x(x + 1)(x - 1)} - \frac{2x}{x(x + 1)(x - 1)} =$

$\frac{2x^2 - 2 + x + 1 - 2x}{x(x + 1)(x - 1)} = \frac{2x^2 - x - 1}{x(x + 1)(x - 1)} = \frac{2(x - 1)(x + ½)}{x(x + 1)(x - 1)} = \mathbf{\frac{2x + 1}{x(x + 1)}}$

9. $\begin{cases} 1 + 2 + a + b = 0 \\ -8 + 8 - 2a + b = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} a + b = -3 \ \| \cdot 1 \\ -2a + b = 0 \ \| \cdot (-1) \end{cases}$; $\begin{cases} a + b = -3 \\ 2a - b = 0 \end{cases}$ a = - 3 ; **a = - 1** ; - 1 + b = - 3 ; **b = - 2**

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$; $x^2(x + 2) - (x + 2) = 0$; $(x^2 - 1)(x + 2) = 0$

$x^2 - 1 = 0$ tai $x + 2 = 0$; $x = \pm 1$ tai $x = 2$; Kolmas ratkaisu on **x = -1**.

10. $T_n = T \cdot a^n$; $½T = T \cdot a^4$; $a^4 = ½$; $a = \sqrt[4]{0,50} = 0,84 = 1 - 0,16$; V : **16%**

Jos vähenemis-% = 4 , $½T = T \cdot 0,96^n$; $0,96^n = 0,50$ || lg ( ) ; $\lg 0,96^n = \lg 0,50$

$n \cdot \lg 0,96 = \lg 0,50$ || : lg 0,96 ; n = 17 V: **17 vuotta**

95.2.1. Ratkaise epäyhtälöt a) $x^2 > 64$ b) $x^2 < 64x$

95.2.2. Jaa tekijöihin polynomit a) $6a^3 - 4a^2$ b) $b^3 - 25b$ c) $c^2 - 5c + 4$

95.2.3. Sievennä a) $\sqrt[4]{3} \cdot \left(\sqrt[6]{3}\right)^{1,5}$ b) $\log_4 16$

95.2.4. Ratkaise yhtälöt a) $3^{2x-1} = 27$ b) lg x + lg (x - 3) = 1.

95.2.5. Ratkaise yhtälö $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$, kun tiedetään, että yksi ratkaisu on x = 1.

95.2.6. Olkoon $\log_2 3 = a$. Mitä on a:n avulla lausuttuna a) $\log_2 6$ b) $\log_3 12$?

95.2.7. Mitkä ovat yhtälön $2x^2 - 3x - 4 = 0$ ratkaisujen summa ja tulo? Anna yksi sellainen toisen asteen yhtälö, jonka ratkaisut ovat kaksi kertaa niin suuret kuin edellisen yhtälön?

95.2.8. Epäyhtälön $\frac{2x + a}{x - b} \le 0$ ratkaisujoukko on [1 , 4 [. Määritä a ja b.

95.2.9. Auto maksoi uutena 160 000 mk ja kolme vuotta käytettynä 102 000 mk. Kuinka monen vuoden ikäisenä auton saisi 50 000 mk:lla, jos oletetaan hinnan putoavan joka vuosi yhtä monta prosenttia?

95.2.10. Weberin-Fechnerin lain mukaan korvan aistiman ärsykkeen suuruus on verrannollinen intensiteetin (I) logaritmiin. Tällöin äänen voimakkuus (S) desibeleinä on $S(I) = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$, missä I_0 on kuulokynnys 10^{-12} W/m^2. Eräässä 40 oppilaan opetusryhmässä äänen voimakkuus on suurimmillaan 80 dB. Voiko näillä tiedoilla olettaa, että ryhmän puolitus aiheuttaisi suurimman äänen voimakkuuden putoamisen normaalin puheen tasolle eli 40 desibeliin samassa opetustilassa?

1. a) $x^2 > 64$ NK: $x^2 = 64$; $x = \pm 8$; kuvaaja: ylösp. auk. par. Merkit: + -8 - 8 + **x < - 8** tai **x > 8**

b) $x^2 < 64x$ NK: $x^2 - 64x = 0$; $x(x - 64) = 0$; x = 0 tai x = 64 , ylösp. auk. par. Merkit: + 0 - 64 + **0 < x < 64**

2. a) $6a^3 - 4a^2 = \mathbf{2a^2(3a - 2)}$ b) $b^3 - 25b = b(b^2 - 25) = \mathbf{b(b+5)(b - 5)}$

c) $c^2 - 5c + 4 = 0$; $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$ c = 4 tai c = 1 ; $c^2 - 5c + 4 = \mathbf{(c - 4)(c - 1)}$

3. a) $\sqrt[4]{3} \cdot (\sqrt[6]{3})^{1,5} = 3^{1/4} \cdot (3^{1/6})^{1,5} = 3^{1/4} \cdot 3^{1/4} = 3^{1/4+1/4} = 3^{1/2} = \mathbf{\sqrt{3}}$ b) $\log_4 16 = \log_4 4^2 = \mathbf{2}$

4. a) $3^{2x-1} = 27$; $3^{2x-1} = 3^3$; 2x - 1 = 3 ; 2x = 4 ; **x = 2** b) MJ: x > 0 JA x - 3 > 0 ; x > 3

lg x + lg (x - 3) = 1 ; lg x(x - 3) = lg 10 ; x(x - 3) = 10 ; $x^2 - 3x - 10 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}$; **x = 5** (tai x = -2)

5. $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$; Koska x = 1 on ratkaisu, polynomin tekijänä on (x - 1)

$(x - 1)(2x^2 + 5x - 3) = 0$; x - 1 = 0 tai $2x^2 + 5x - 3 = 0$

x = 1 tai $x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$; **x = ½** tai **x = - 3**

6. a) $\log_2 3 = a$; lisäksi tiedetään, että $\log_2 2 = 1$; $\log_2 6 = \log_2 2 \cdot 3 = \log_2 2 + \log_2 3 = \mathbf{1 + a}$

b) $\log_3 12 = \frac{\log_2 12}{\log_2 3} = \frac{\log_2 3 \cdot 2 \cdot 2}{\log_2 3} = \frac{\log_2 3 + \log_2 2 + \log_2 2}{\log_2 3} = \frac{a + 1 + 1}{a} = \mathbf{\frac{a + 2}{a}}$

7. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{2} = \mathbf{1½}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-4}{2} = \mathbf{-2}$ $y_1 + y_2 = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot 1½ = 3$; $y_1 \cdot y_2 = 2x_1 \cdot 2x_2 = 4x_1 \cdot x_2 = -8$ ts. $-\frac{b}{a} = 3$ ja $\frac{c}{a} = -8$; Valitaan a = 1, jolloin b = - 3 ja c = - 8 ; $\mathbf{y^2 - 3y - 8 = 0}$
8. Rj = [1,4[ts. $1 \le x < 4$; Koska x = 1 kuuluu mukaan, on sen oltava osoittajan nollakohta ts. 2 + a = 0 **a = - 2** Toinen raja x = 4 tulee tällöin olla nimittäjän nollakohta ; 4 - b = 0 ; **b = 4**
9. $102\,000 = 160\,00 \cdot a^3$; $a^3 = 0{,}6375 \;\|\| \sqrt[3]{(\ )}$; a = 0,86 = 1 - 0,14 ; Hinta laskee vuosittain 14% $50\,000 = 160\,000 \cdot 0{,}86^n$; $0{,}86^n = 0{,}3125 \;\|\|$ lg ( ) ; $n \cdot \lg 0{,}86 = \lg 0{,}3125$; n = 7,7 V**: 8 vuotta**
10. 40 oppilasta: $80 = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$; $8 = \lg \frac{I}{I_0}$; $\frac{I}{I_0} = 10^8$; $I = 10^8 \cdot I_0 = 10^8 \cdot 10^{-12}\ W/m^2 = 10^{-4}\ W/m^2$ 20 oppilasta: kurkuista lähtee tehoa vain puolet edellisestä eli $I = 0{,}5 \cdot 10^{-4}\ W/m^2$ $S(I) = 10 \cdot \lg \frac{0{,}5 \cdot 10^{-4}}{10^{-12}} = 10 \cdot \lg (5 \cdot 10^{-7}) = 77$ (dB) > 40 dB V: **EI**

95.3.1. Ilmoita kolmen desimaalin tarkkuudella a) lg 0,567 b) ln 9 c) $\log_2 5$ d) $3^{1,3}$ e) $\sqrt[4]{5}$.

95.3.2. Ratkaise yhtälöt a) $3x^2 = -x$ b) $x^2 - 2x - 1 = 0$

95.3.3. Milloin funktio a) $f(x) = \lg (x^2 - 4)$ on määritelty b) $f(x) = (2a - 3)^x$ on kasvava?

95.3.4. Ratkaise yhtälö $\lg 3x - \lg (x - 2) = 1$

95.3.5. Polynomi $2x^3 - 4x^2 + 5x + a$ on jaollinen polynomilla x + 1. Mikä on jakojäännös, kun näin saatu polynomi jaetaan polynomilla x - 1?

95.3.6. Laske a) $\log_a \frac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$ b) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} : \sqrt[6]{a}$

95.3.7. Määritä se kolmannen asteen polynomi P(x), jolle x = - 2 on kaksinkertainen nollakohta ja x = 1 nollakohta sekä joka saa arvon 8, kun x = 0. Ratkaise epäyhtälö P(x) > 0.

95.3.8. Ratkaise epäyhtälö $\frac{x^2 + 4x - 5}{x + 5} \le 0$

95.3.9. Ratkaise yhtälö $\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 8x} = x + 1$.

95.3.10. Millä a:n arvoilla paraabelin $y = ax^2 + 2ax - 3$ huippu on x-akselin yläpuolella?

1. a) **-0,246** b) **2,197** c) $\log_2 5 = \frac{\lg 5}{\lg 2} = \mathbf{2{,}322}$ d) **4,171** e) **1,495**
2.a) $3x^2 = -x$; $3x^2 + x = 0$; $x(3x + 1) = 0$; x = 0 tai 3x + 1 = 0 ; **x = 0** tai $\mathbf{x = -\frac{1}{3}}$ b) $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \mathbf{1 \pm \sqrt{2}}$
3.a) $x^2 - 4 > 0$ NK: x = ± 2 ; Kuvaaja ylösp. auk. par. Merkit + -2 - 2 + V: **x > 2** tai **x < - 2** b) Kantaluku > 1 ; 2a - 3 > 1 ; 2a > 4 ; **a > 2**
4. lg 3x - lg (x - 2) = 1 MJ: 3x > 0 JA x - 2 > 0 ; x > 0 JA x > 2 $\lg \frac{3x}{x-2} = 1$; $\frac{3x}{x-2} = 10^1$; 3x = 10x - 20 ; 7x = 20 : $\mathbf{x = 2\frac{6}{7}}$
5. P(x) jaollinen (x + 1):llä ; x = - 1 on nollakohta ; -2 - 4 - 5 + a = 0 ; a = 11 $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x + 11$; JJ = P(1) = 2 - 4 + 5 + 11 = **14**
6.a) $\log_a \frac{1}{\sqrt[5]{a^3}} = \log_a \frac{1}{a^{3/5}} = \log_a a^{-3/5} = \mathbf{-3/5}$ b) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} : \frac{6}{a} = a^{1/2} \cdot a^{2/3} : a^{1/6} = a^{1/2 + 2/3 - 1/6} = a^1 = \mathbf{a}$
7. $P(x) = a(x + 2)^2(x - 1)$; P(0) = 8 ; $a \cdot 4 \cdot (-1) = 8$; a = -2 ; $P(x) = -2(x + 2)^2(x - 1)$ Kuvaaja: kulkee ylhäältä alas, hipaisee x-akselia -2:ssa ja alapuolelle 1:n jälkeen V: x < 1 , x ≠ -2

8. OS: NK $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2}$; x = 1 tai x = -5 Kuv. ylösp. auk. par. Merkit: + -5 - 1 + NIM: NK: x + 5 = 0 ; x = -5 Kuv: nouseva suora , Merkit: - -5 + Merkit taulukkoon, josta : - -5 - 1 + V: $\mathbf{x \leq 1}$, $\mathbf{x \neq -5}$
9. $\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 8x} = x + 1$ || $(\ )^3$; $x^3 - x^2 + 8x = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; $4x^2 - 5x + 1 = 0$ $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8}$; **x = 1** tai **x = ¼**
10. 1° jos a > 0 , on kuvaaja ylöspäin aukeava paraabeli, jolloin paraabelin huippu on x-akselin yläpuolella, jos D < 0 ; $4a^2 + 12a < 0$; NK: 4a(a + 3) = 0 a = 0 tai a = -3 Kuv. ylösp. auk. par. Merkit: + -3 - 0 + -3 < a < 0, joista mikään ei ole > 0. Joten tällä alueella ei ole ratkaisua. 2° jos a < 0 , on kuvaaja alaspäin aukeava paraabeli, jolloin paraabelin huippu on x-akselin yläpuolella, jos D > 0 ; $4a^2 + 12a > 0$; NK: a = 0 tai a = -3 Kuv. ylösp. auk. par. Merkit: + -3 - 0 + a > 0 tai a < -3 ,joista vain jälkimmäiset ovat alueella 2° V: **a < -3**

95.4.1. Ratkaise yhtälöt a) $x^2 - 4x + 3 = 0$ b) $x^2 - 2x - 1 = 0$.

95.4.2. Sievennä a) $\sqrt[4]{a^{12}}$ b) $a^{2/3} : a^{1/2}$ c) $\log_a 1/a$

95.4.3. Ratkaise a) $4^x = 2^{3 - x}$ b) $\log_2 (3x - 1) = 3$

95.4.4. Supista $\frac{2x^2 - 3x - 5}{4x^2 - 10x}$

95.4.5. Ratkaise a) 2x > 128 b) $2x^2 > 128$ c) $2x^3 > 128$

95.4.6. Maapallon väkiluku oli 1987 5 mrd ja vuotuinen kasvuvauhti on 1,7 %. Kuinka monta asukasta on maapallolla vuonna 2000? Jos vuotuinen kasvuprosentti putoaa vuonna 2000 1,5%:iin ja 2020 1,3%:iin, niin milloin maapallolla on 10 mrd asukasta?

95.4.7. Olkoon $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$. Ratkaise epäyhtälö P(x) > 0, kun x = 1 on yksi polynomin nollakohta.

95.4.8. Millä a:n arvolla yhtälöllä $x^2 + ax + a = 1$ on kaksinkertainen ratkaisu? Mikä tämä ratkaisu on?

95.4.9. a) Mikä on jakojäännös, kun polynomi $P(x) = 2x^{27} + 3x^{16} + 4x^2 - 5$ jaetaan polynomilla x - 1 ?
b) Onko (x + 1) polynomin P(x) tekijä? c) Onko P(x) jaollinen $(x^2 - 1)$: llä ?

95.4.10. Ratkaise yhtälö $\sqrt{x} + \sqrt{2x + 1} = 5$.

1. a) $x^2 - 4x + 3 = 0$; $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$; **x = 3** tai **x = 1** b) $x^2 - 2x - 1 = 0$; $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \mathbf{1 \pm \sqrt{2}}$
2. a) $\sqrt[4]{a^{12}} = a^{12/4} = \mathbf{a^3}$ b) $a^{2/3} : a^{1/2} = a^{2/3 - ½} = a^{1/6} = \mathbf{\sqrt[6]{a}}$ c) $\log_a 1/a = \log_a a^{-1} = \mathbf{-1}$
3. a) $4^x = 2^{3 - x}$; $(2^2)^x = 2^{3 - x}$; $2^{2x} = 2^{3 - x}$; 2x = 3 - x ; 3x = 3 ; **x = 1** b) $\log_2 (3x - 1) = 3$; $3x - 1 = 2^3$; 3x = 1 + 8 ; 3x = 9 ; **x = 3**
4. OS: NK $2x^2 - 3x - 5 = 0$; $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4}$; x = 2½ tai x = - 1 $\frac{2x^2 - 3x - 5}{4x^2 - 10x} = \frac{2(x - 2½)(x + 1)}{2x(2x - 5)} = \frac{(2x - 5)(x + 1)}{2x(2x - 5)} = \mathbf{\frac{x + 1}{2x}}$
5. a) 2x > 128 || : 2 ; **x > 64** b) $2x^2 > 128$; $x^2 > 64$ || $\sqrt{\ }$; | x | > 8 ; **x > 8** tai **x < - 8** c) $2x^3 > 128$; $x^3 > 64$ || $\sqrt[3]{\ }$; **x > 4**
6. Vuonna 2000 on asukkaista $A = A_0 \cdot a^n$; $A = 5 \text{ mrd} \cdot 1{,}017^{13} = 6{,}23$ mrd Vuonna 2020 on asukkaista $A = 6{,}23 \text{ mrd} \cdot 1{,}015^{20} = 8{,}39$ mrd $10 \text{ mrd} = 8{,}39 \cdot 1{,}013^x$ || : 8,39 ; $1{,}192 = 1{,}013^x$ || lg( ) ;lg 1,192 = x · lg 1,013 ; x = 14 V: vuonna **2034**
7. $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (x - 1)(2x^2 - 5x + 2)$, koska x = 1 on NK. II tekijä jakamalla P(x) = 0 ; $(x - 1)(2x^2 - 5x + 2) = 0$; x - 1 = 0 tai $2x^2 - 5x + 2 = 0$; x = 1 ; x = 2 ; x = ½ Piirtämällä kuvaaja ja katsomalla milloin se on x-akselin yläpuolella **½ < x < 1** tai **x > 2**

8. $x^2 + ax + a = 1$; $x^2 + ax + (a - 1) = 0$; kaksinkertainen ratkaisu, jos D = 0 ; $a^2 - 4(a - 1) = 0$
$a^2 - 4a + 4 = 0$; $(a - 2)^2 = 0$; **a = 2** , jolloin yhtälöksi tuleex$^2 + 2x + 1 = 0$; $(x + 1)^2 = 0$; **x = -1**

9. a) JJ = P(1) = 2 + 3 + 4 - 5 = **4** b) P(-1) = -2 + 3 + 4 - 5 = 0, joten JJ = 0 eli **on jaollinen**
c) $x^2 - 1=(x - 1)(x + 1)$. P(x) on jaollinen $(x^2 - 1)$:llä, jos se on jaollinen kummallakin tekijällä. Koska kohdan a mukaan P(x) ei ole jaollinen (x - 1):llä, P(x) **ei ole jaollinen** $(x^2 - 1)$:llä

10. $\sqrt{x} + \sqrt{2x + 1} = 5$;$\sqrt{2x + 1} = 5 - \sqrt{x}$ || $(\ )^2$; $2x + 1 = 25 - 10\sqrt{x} + x$; $10\sqrt{x} = 24 - x$ || $(\ )^2$
$100x = 576 - 48x + x^2$; $x^2 - 148x + 576 = 0$; $x = \dfrac{148 \pm \sqrt{21904 - 2304}}{2} = \dfrac{148 \pm 140}{2}$
x = 144 tai x = 4 TARK; x = 144 : $\sqrt{144} + \sqrt{289} = 5$; 12 + 17 = 5 (ei käy)
x = 4 : $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$; 2 + 3 = 5 (käy) V : **x = 4**

96.1.1. Ratkaise a) yhtälö $2x^2 = 5x$ b) epäyhtälö $2x^2 < 5x$ c) yhtälö $x(x - 5) = 6$

96.1.2. Ratkaise yhtälö a) $3x^3 = 192$ b) $x^6 - 64 = 0$ c) $x^{1½} = 27$

96.1.3. Sievennä a) $\log_2 \sqrt{8}$ b) $\log_3 18a - \log_3 2a$ c) $\ln e^{-4/3}$.

96.1.4. Ratkaise x, tarkka arvo ja likiarvo 3 numeron tarkkuudella a) $3 \lg x = -2$ b) $5^{7x+1} = 125$ c) $e^{2x} = 3$

96.1.5. Ratkaise yhtälö $\sqrt{3x + 1} + 2x = 0$

96.1.6. Millä vakion k arvoilla epäyhtälö $2x^2 - 3kx + 1 \geq 0$ on aina tosi?

96.1.7. Yhtälön $2x^3 - 3x^2 + ax + 12 = 0$ eräs ratkaisu on x = -3. Määritä yhtälön muut ratkaisut.

96.1.8. Ratkaise a) $3 \cdot 4^x < 96$ b) $(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x + 1 = 0$

96.1.9. Millä vakion a arvoilla yhtälön $2x^2 - 12x + a = 0$ ratkaisut ovat positiivisia kokonaislukuja?

96.1.10. Kaupunkialueella oleva suorakulmion muotoinen maapalsta, jonka sivut ovat 75 m ja 160 m, kaavoitettiin samankokoisiksi asuintonteiksi. Myöhemmin tonttien kokoa päätettiin pienentää 200 m^2:llä, jolloin saatiin 5 tonttia enemmän. Minkä kokoisia tontit olivat ja kuinka monta niitä lopulta saatiin?

1.a) $2x^2 = 5x$; $2x^2 - 5x = 0$; $x(2x - 5) = 0$; x = 0 tai 2x - 5 = 0 ; x = 0 tai x = 2½
b) Kuv. ylösp. auk. par. Merkit: + 0 - 2½ + V: 0 < x < 2½
c) $x(x - 5) = 6$; $x^2 - 5x - 6 = 0$; $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \dfrac{5 \pm 7}{2}$; x = 6 tai x = -1

2. a) $3x^3 = 192$ || : 3 ; $x^3 = 64$ || $\sqrt[3]{(\ )}$; x = 4 b) $x^6 - 64 = 0$; $x^6 = 64$ || $\sqrt[6]{(\ )}$; | x | = 2 ; x = ± 2
c) $x^{1½} = 27$ || $(\ )^2$ MP > 0 ; $x^3 = 729$ || $\sqrt[3]{(\ )}$; x = 9

3. a) $\log_2 \sqrt{8} = \log_2 8^{½} = \log_2 (2^3)^{½} = \log_2 2^{1½} = 1½$
b) $\log_3 18a - \log_3 2a = \log_3 18a{:}2a = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$ c) $\ln e^{-4/3} = -4/3$

4. a) $3 \cdot \lg x = -2$ ||:3 ; $\lg x = -2/3$; $x = 10^{-2/3} \approx 0{,}215$
b) $5^{7x+1} = 125$; $5^{7x+1} = 5^3$; 7x + 1 = 3 ; 7x = 2 ; x = 2/7 ≈ 0,286
c) $e^{2x} = 3$ || ln ( ) ; $\ln e^{2x} = \ln 3$; $2x = \ln 3$; $x = ½ \cdot \ln 3 \approx 0{,}549$

5. $\sqrt{3x + 1} + 2x = 0$; $\sqrt{3x + 1} = -2x$ || $(\ )^2$ EHTO: -2x > 0 ts. x < 0
$3x + 1 = 4x^2$; $4x^2 - 3x - 1 = 0$; $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{8} = \dfrac{3 \pm 5}{8}$; (x = 1) tai x = -¼

6. $2x^2 - 3kx + 1 \geq 0$; vas. puolen määrittelemän funktion kuvaajan on oltava x-akselilla tai sen yläpuolella. Ts. nollakohtia ei ole tai sitten on yksi kaksinkertainen ratkaisu ts. D ≤ 0
$(3k)^2 - 8 \leq 0$; $9k^2 \leq 8$ ||:9 ; $k^2 \leq \dfrac{8}{9}$; NK: $k = \pm \dfrac{\sqrt{8}}{3}$ Kuv. ylösp. auk. par. Merkit : + - + $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \leq k \leq +\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

7. $2x^3 - 3x^2 + ax + 12 = 0$; x = -3 ratk. ⇒ $2\cdot(-27) + 3\cdot(-9) + a\cdot(-3) + 12 = 0$; -54 - 27 - 3a + 12 = 0 ; a = -23 ;
YHT: $2x^3 - 3x^2 - 23x + 12 = 0$; x = - 3 on NK ⇒ tekijänä (x + 3) , toinen jakamalla $(x + 3)(2x^2 - 9x + 4) = 0$
x + 3 = 0 tai $2x^2 - 9x + 4 = 0$; x = - 3 tai $x = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{4} = \dfrac{9 \pm 7}{4}$; x = 4 tai x = ½

8. a) $3 \cdot 4^x < 96$ ||:3 ; $4^x < 32$; $(2^2)^x < 2^5$; $2^{2x} < 2^5$; 2x < 5 ; x < 2½
b) $(3^x)^2 - 2\cdot 3^x + 1 = 0$; $3^x = y$ ⇒ $y^2 - 2y + 1 = 0$; $(y - 1)^2 = 0$; y = 1 ; 3x = 1 ; 3x = 30 ; x = 0

9. $2x^2 - 12x + a = 0$; $x_1 + x_2 = -\frac{-12}{2} = 6$. Kun x_1 ja x_2 pos. kokonaislukuja

$x_1 = 1$ ja $x_2 = 5$ (tai päinvastoin) ; $x_1 \cdot x_2 = 5 = \frac{a}{2}$; $a = 10$

$x_1 = 2$ ja $x_2 = 4$ (tai päinvastoin) ; $x_1 \cdot x_2 = 8 = \frac{1}{2}a$; $a = 16$ $x_1 = 3$ ja $x_2 = 3$; $x_1 \cdot x_2 = 9 = \frac{1}{2}a$; $a = 18$

10. Ala = $75 \cdot 160\ m^2 = 12\,000\ m^2$. Olkoon tontteja alussa = x , lopussa = x + 5

Tontin koko alussa = $\frac{12\,000}{x}$, koko lopussa = $\frac{12\,000}{x + 5}$

$\frac{12\,000}{x} = \frac{12\,000}{x+5} + 200 \ \| \cdot x(x + 5)$; $12\,000(x + 5) = 12\,000x + 200x(x + 5) \ \| : 200$

$60x + 300 = 60x + x^2 + 5x$; $x^2 + 5x - 300 = 0$; $x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 1200}}{2} = \frac{-5 \pm 35}{2}$; $x = 15$ (tai $x = -20$)

Tontit olivat alaltaan lopuksi 600 m^2 ja niitä oli 20.

96.2.1. Laske a) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$ b) $(-\frac{1}{8})^{1/3}$ c) lg 100 .

96.2.2. Ratkaise a) $3x^2 + 4x - 4 = 0$ b) $3x^2 + 4x - 4 < 0$ c) Jaa tekijöihin $3x^2 + 4x - 4$.

96.2.3. Ratkaise a) $\sqrt[3]{x - 1} = 3$ b) $(x - 1)^3 = 3$ c) $3^{x-1} = 3$

96.2.4. Sievennä lauseke a) $\log_2 4x^2 - 2\log_2 x$ b) $\sqrt[3]{7\sqrt{7}}$

96.2.5. Ratkaise yhtälö $2\sqrt{x + 5} - x = 2$

96.2.6. Millä a:n arvoilla yhtälöllä $x^2 + (a + 1)x + 1 = 0$ ei ole reaalisia ratkaisuja?

96.2.7. Sievennä lauseke $\frac{2x - 5}{x^2 - x} + \frac{3}{x - 1} + \frac{4}{x}$

96.2.8. Ratkaise epäyhtälö $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 > 0$

96.2.9. Mitkä kokonaisluvut voivat olla yhtälön $x^2 + ax + 3 = 0$ ratkaisuja. Mikä ovat tällöin yhtälön ratkaisut?

96.2.10. Puutarhurilla oli 370 kukantainta. Hän teki niistä kaksi neliön muotoista täyteen istutettua kukkapenkkiä (yhtä monta tainta joka rivillä molempiin suuntiin) siten, että toiseen neliöön tuli sivuille 3 tainta enemmän kuin toiseen. Näin jäi yksi taimi yli. Kuinka monta tainta hän istutti kumpaankin penkkiin?

1. a) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$ b) $(-\frac{1}{8})^{1/3}$ ei ole määritelty c) $\lg 100 = \log 10^2 = 2$

2. a) $3x^2 + 4x - 4 = 0$; $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \frac{-4 \pm 8}{8}$; $x = \frac{2}{3}$ tai $x = -2$

b) Kuv. Ylösp. auk. par. Merkit: + - + V: $-2 < x < \frac{2}{3}$ c) $3x^2 + 4x - 4 = 3(x + 2)(x - \frac{2}{3}) = (x + 2)(3x - 2)$

3. a) $\sqrt[3]{x - 1} = 3 \ \| (\ )^3$; $x - 1 = 27$; $x = 28$ b) $(x - 1)^3 = 3 \ \| \sqrt[3]{(\ )}$ $x - 1 = \sqrt[3]{3}$; $x = 1 + \sqrt[3]{3}$
c) $3^{x-1} = 3$; $x - 1 = 1$; $x = 2$

4. a) $\log_2 4x^2 - 2\log_2 x = \log_2 4 + \log_2 x^2 - \log_2 x^2 = \log_2 2^2 = 2$

b) $\sqrt[3]{7\{R(;7)} = (7 \cdot 7^{1/2})^{1/3} = (7^{3/2})^{1/3} = 7^{3/2 \cdot 1/3} = 7^{1/2} = \sqrt{7}$

5. $2\sqrt{x + 5} - x = 2$; $2\sqrt{x + 5} = x + 2 \ \| (\ )^2$; $4(x + 5) = x^2 + 4x + 4$; $4x + 20 = x^2 + 4x + 4$; $x^2 = 16$; $x = \pm 4$
TARK: x = 4 : $2\sqrt{4 + 5} - 4 = 2$; $2\cdot3 - 4 = 2$ TOSI x = - 4 : $2\sqrt{-4 + 5} - 4 = 2$; $2\cdot1 - 4 = 2$ EPÄTOSI V: x = 4

6. Yhtälöllä $x^2 + (a + 1)x + 1 = 0$ ei ole reaalisia ratkaisuja, jos yhtälön D < 0
$(a + 1)^2 - 4 < 0$; $a^2 + 2a + 1 - 4 < 0$; $a^2 - 2a - 3 < 0$

NK: $a = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$; a = - 3 tai a = 1 Kuv: Ylösp. auk. par. Merkit: + -3 - 1 + V: $-3 < a < 1$

7. $\frac{2x - 5}{x^2 - x} + \frac{3}{x - 1} + \frac{4}{x} = \frac{2x - 5}{x(x - 1)} + \frac{3}{x - 1}^{[x} + \frac{4}{x}^{[x-1} = \frac{2x - 5}{x(x - 1)} + \frac{3x}{x(x - 1)} + \frac{4x - 4}{x(x - 1)} = \frac{2x - 5 + 3x + 4x - 4}{x(x - 1)} = \frac{9x - 9}{x(x - 1)} =$

$\frac{9(x - 1)}{x(x - 1)} = \frac{9}{x}$

8. $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 > 0$ NK : $x^2(x - 2) - 3(x - 2) = 0$; $(x - 2)(x^2 - 3) = 0$; $x - 2 = 0$ tai $x^2 - 3 = 0$
$x = 2$ tai $x = \pm\sqrt{3}$ KUVAAJA: alhaalta ylös, ylittää x-aks. NK:ssa Merkit: - + - + V: $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ tai $x > 2$

9. Tulo = 3 ; $x_1 \cdot x_2 = 3$, jolloin $x_1 = 3$ ja $x_2 = 1$ TAI $x_1 = 1$ ja $x_2 = 3$ TAI $x_1 = -3$ ja $x_2 = -1$ TAI $x_1 = -1$ ja $x_2 = -3$
$9 + 3a + 3 = 0$ TAI $1 - a + 3 = 0$; $3a = -12$ TAI $-a = -4$; $a = -4$ TAI $a = 4$

10. Olkoon 1. Neliössä x kukkaa rivillä , jolloin niitä kaikkiaan $x \cdot x$ kpl ja 2. neliössä on $x + 3$ kukkaa rivillä ja siis $(x + 3)^2$ kukkaa kaikkiaan.
$(x + 3)^2 + x^2 + 1 = 370$; $x^2 + 6x + 9 + x^2 + 1 - 370 = 0$; $2x^2 + 6x - 360 = 0$; $x^2 + 3x - 180 = 0$
$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 720}}{2} = \frac{-3 \pm 27}{2}$; $x = 12$ (tai $x = -15$) V: 1. penkkiin 144 kpl ja 2. penkkiin 225 kpl

96.3.1. Ratkaise yhtälö a) $x^2 - 3x = 0$ b) $x^2 - 4 = 0$ c) $x^2 - 5x + 6 = 0$

96.3.2. Sievennä lauseke a) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$ b) $\log_3 \frac{1}{27}$ c) $(\frac{1}{27})^{2/3}$

96.3.3. Ratkaise epäyhtälö a) $\sqrt[3]{x - 3} > 2$ b) $(x - 3)^3 > 2$ c) $3^{x-3} > 9$

96.3.4. Sievennä a) $\sqrt[6]{6} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt{6} \cdot 6$ b) $2\log_3 x + \log_3 4x - \log_3 x^3$

96.3.5. Ratkaise yhtälö $\sqrt{2x - 3} + 9 = x$

96.3.6. Sievennä lauseke $\frac{3}{x - 2} + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2 - 2x}$ ja laske sen jälkeen lausekkeen arvo, kun $x = 14$.

96.3.7. Ratkaise epäyhtälö $| 2x - 1 | < | x + 2 |$

96.3.8. Mikä arvo on luvulla a, kun epäyhtälön $x^3 + ax^2 - 11x + 12 > 0$ toteutumisalueen yhtenä rajana on $x = 1$. Ratkaise tämän jälkeen koko epäyhtälö.

96.3.9. Suorakulmion muotoisen 2000 m^2 suuruisen joenrantatontin kolmelle muulle kuin joenrannan suuntaiselle sivulle istutetaan pensasaita ja yhdelle sivulle jätetään 3 m leveä aukko tietä varten. Pensasaidan istutuskustannukset ovat 30 mk/m. Määritä tontin mitat, kun aita maksoi 3810 mk?

96.3.10. Kolmannen asteen polynomilla P(x) on kaksinkertainen nollakohta $x = 1$.
Kun polynomi jaetaan $(x + 1)$:llä on jakojäännös 8. Määritä polynomi, kun $P(2) = 5$.

1. a) $x^2 - 3x = 0$; $x(x - 3) = 0$; $x = 0$ tai $x - 3 = 0$; $x = 0$ tai $x = 3$ b) $x^2 = 4$; $x = \pm 2$
c) $x^2 - 5x + 6 = 0$; $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$; $x = 3$ tai $x = 2$

2. a) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$ b) $\log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3$ c) $(\frac{1}{27})^{2/3} = [(\frac{1}{27})^{1/3}]^2 = [\frac{1}{3}]^2 = \frac{1}{9}$

3. a) $\sqrt[3]{x - 3} > 2$ || $(\ )^3$; $x - 3 > 8$; $x > 11$ b) $(x - 3)^3 > 2$ || $\sqrt[3]{(\ )}$; $x - 3 > \sqrt[3]{2}$; $x > 3 + \sqrt[3]{2}$
c) $3^{x-3} > 9$; $3^{x-3} > 3^2$; $x - 3 > 2$; $x > 5$

4. a) $\sqrt[6]{6} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt{6} \cdot 6 = 6^{1/6} \cdot 6^{1/3} \cdot 6^{1/2} \cdot 6 = 6^{1/6 + 1/3 + ½ + 1} = 6^2 = 36$
b) $2\log_3 x + \log_3 4x - \log_3 x^3 = \log_3 x^2 + \log_3 4x - \log_3 x^3 = \log_3 \frac{x^2 \cdot 4x}{x^3} = \log_3 \frac{4x^3}{x^3} = \log_3 4$.

5. $\sqrt{2x - 3} + 9 = x$; $\sqrt{2x - 3} = x - 9$ || $(\ )^2$ (Ehto: $x > 9$) ; $2x - 3 = x^2 - 18x + 81$
$x^2 - 20x + 84 = 0$; $x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 336}}{2} = \frac{20 \pm 8}{2}$; $x = 14$ (tai $x = 6$)

6. $\frac{3}{x - 2} + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2 - x} = \frac{3}{x - 2} + \frac{4}{x} - \frac{6}{x(x - 2)} = \frac{3x}{x(x - 2)} + \frac{4(x - 2)}{x(x - 2)} - \frac{6}{x(x - 2)} = \frac{3x + 4x - 8 - 6}{x(x - 2)} = \frac{7x - 14}{x(x - 2)} = \frac{7(x - 2)}{x(x - 2)}$
$= \frac{7}{x}$, jonka arvo $= \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

7. $| 2x - 1 | < | x + 2 |$ || $(\ )^2$; $(2x - 1)^2 < (x + 2)^2$; $4x^2 - 4x + 1 < x^2 + 4x + 4$; $3x^2 - 8x - 3 < 0$

NK: $x = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{6} = \frac{8 \pm 10}{6}$; x = 3 tai $x = -\frac{1}{3}$; Kuv: Ylösp. auk. par. Merkit: + - + V: $-\frac{1}{3} < x < 3$
8. Raja x = 1 $\Leftrightarrow$ x = 1 on NK ; $1^3 + a\cdot1^2 - 11\cdot1 + 12 = 0$; a = -2 Jakamalla $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$; $(x - 1)(x^2 - x - 12) = 0$; x - 1 = 0 tai $x^2 - x - 12 = 0$; x - 1 = 0 tai $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$ x = 4 tai x = -3 ; Kuv: alhaalta ylös, ylittää x-akselin NK:issa V: -3 < x < 1 tai x > 4
9. Olkoon rannan suuntainen sivu = x ; toinen sivu = $\frac{Ala}{x} = \frac{2000}{x}$ $(x + 2\cdot\frac{2000}{x} - 3)\cdot30 = 3810$; $x + \frac{4000}{x} - 3 = 127 \;\Vert\cdot x$; $x^2 - 130x + 4000 = 0$; $x = \frac{130 \pm \sqrt{16900 - 16000}}{2} =$ $\frac{130 \pm 30}{2}$; x = 80 m, jolloin toiset sivut 25 m ja 25 m tai x = 50 m, jolloin toiset sivut 40 m ja 40 m.
10. $P(x) = (x - 1)^2(ax + b)$; $\begin{cases} JJ = 8 \\ P(2) = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} P(-1) = 8 \\ P(2) = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} 4\cdot(-a + b) = 8 \\ 1\cdot(2a + b) = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} -a + b = 2 \;\Vert\cdot(-1) \\ 2a + b = 5 \;\Vert\cdot 1 \end{cases}$ 3a = 3 ; a = 1 ; 2 + b = 5 ; b = 3 ; $P(x) = (x - 1)^2(x + 3) = (x^2 - 2x + 1)(x + 3) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

97.1.2. Ratkaise a) yhtälö $(2x - 3)(x^2 - 4) = 0$ b) epäyhtälö $(x - 1)^2 < x(x + 2)$

97.1.4. Ratkaise epäyhtälö a) $3x^2 - 4x < 0$ b) $3x^2 - 4x - 4 > 0$

97.1.6. Millä c:n arvolla yhtälöllä $2x^2 - 4x + c = 0$ on kaksinkertainen ratkaisu? Mikä tämä kaksinkertainen ratkaisu tällöin on?

97.1.10. Särkyvää tavaraa sisältävä kuution muotoinen laatikko on pakattava suuremman kuution muotoisen laatikon sisään niin, että laatikoiden seinien välissä on joka kohdassa 5 cm leveä tila, joka täytetään vaahtomuovirouheella. Mikä on sellaisen pienemmän kuution särmä, jonka paketin täytteeseen kuluu 37 dm^3 rouhetta?

2. a) $(2x - 3)(x^2 - 4) = 0$; 2x - 3 = 0 tai $x^2 - 4 = 0$; 2x = 3 tai $x^2 = 4$; x = 1½ tai x = ±2 b) $(x - 1)^2 < x(x + 2)$; $x^2 - 2x + 1 < x^2 + 2x$; - 2x - 2x < -1 ; -4x < - 1 $\Vert$: (-4) ; x > ¼

4. a) $\boxed{3x^2 - 4x < 0}$ NK: x(3x - 4) = 0 ; x = 0 tai 3x - 4 = 0 ; x = 4/3 ; PAR: ylösp. aukeava V: 0 < x < 4/3 b) $\boxed{3x^2 - 4x - 4 > 0}$ NK: $x = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6}$; x = 2 tai $x = \frac{-2}{3}$; PAR: ylösp. aukeava V: $x < \frac{-2}{3}$ tai x > 2
6. 2-kertainen ratkaisu, jos D = 0 ; 16 - 8c = 0 ; - 8c = - 16 $\Vert$: (-8) ; c = 2 $2x^2 - 4x + 2 = 0 \;\Vert : 2$; $x^2 - 2x + 1 = 0$; $(x - 1)^2 = 0$; x = 1
10. Olkoon sisemmän kuution sivu = x, ulomman kuution sivu = x + 1 (dm) Sisemmän kuution tilavuus = x^3 ; Ulomman kuution tilavuus = $(x + 1)^3$ Rouheen tilavuus = $(x + 1)^3 - x^3$ $(x + 1)^3 - x^3 = 37$; $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 = 37$; $3x^2 + 3x - 36 = 0$; $x^2 + x - 12 = 0$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$; x = 3 (tai x = - 4) ; V: sivu on 30 cm.

97.2.2. Ratkaise yhtälö a) $9x^2 - 16 = 0$ b) $9x^2 - 16x = 0$ c) $9x^2 - 16x - 4 = 0$

97.2.5. Millä a:n arvoilla yhtälöllä $x^2 + 12x + a = 0$ ei ole ratkaisua?

97.2.8. Ratkaise kaksoisepäyhtälö $x^2 < 2x + 3 < x^2 + 3$.

97.2.9. Määritä a ja b, kun epäyhtälön $x^2 + ax + b < 0$ ratkaisujoukko on] -2,3 [.

2. a) $9x^2 - 16 = 0$; $9x^2 = 16$; $x^2 = \frac{16}{9}$; $x = \pm\frac{4}{3}$ b) $9x^2 - 16x = 0$; x(9x - 16) = 0 ; x = 0 tai 9x - 16 = 0 ; 9x = 16 ; $x = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$ c) $9x^2 - 16x - 4 = 0$; $x = \frac{16 \pm \sqrt{256+144}}{18} = \frac{16 \pm 20}{18}$; x = 2 tai $x = -\frac{2}{9}$
5. Yhtälöllä $x^2 + 12x + a = 0$ ei ole ratkaisua, jos yhtälön diskriminantti on negatiivinen D < 0 ; $12^2 - 4a < 0$; -4a < -144 $\Vert$:(-4) ; a > 36

8. $x^2 < 2x + 3 < x^2 + 3$; $x^2 < 2x + 3$ JA $2x + 3 < x^2 + 3$; $x^2 - 2x - 3 < 0$ JA $2x - x^2 < 0$

I : NK: $x^2 - 2x - 3 = 0$; $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$; x = 3 tai x = -1 ; PAR: ylöp. aukeava $-1 < x < 3$

II: NK: $x(2 - x) = 0$; x = 0 tai x = 2 ; PAR: alasp. aukeava $x < 0$ tai $x > 2$

Tee lukusuorataulukko, johon merkitset ylimmälle riville toteutumisalueeksi $-1 < x < 3$ ja toiselle riville vastaavasti $x < 0$ ja $x > 2$ sekä kolmannelle yhteinen toteutumisalue , josta V: $-1 < x < 0$ tai $2 < x < 3$

9. Koska ey toteutuu välillä]-2,3[täytyy nollakohtien olla x = -2 ja x = 3

$\begin{cases} x = -2 \text{ on NK} \\ x = 3 \text{ on NK} \end{cases}$; $\begin{cases} 4 - 2a + b = 0 \;\|\; \cdot(-1) \\ 9 + 3a + b = 0 \;\|\; \cdot 1 \end{cases}$; $5 + 5a = 0$; $a = -1$; $4 + 2 + b = 0$; $b = -6$

97.3.1. Ratkaise yhtälö $\sqrt[3]{x^6 + 1} = 2$

97.3.2. Sievennä a) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ b) $\left(\frac{27}{343}\right)^{2/3}$ c) $\log \sqrt{10}$

97.3.3. Ratkaise yhtälöt a) $2^{3x - 4} = 4^{5x - 6}$ b) $\lg (2x - 3) = 1$

97.3.4. Määritä a, kun binomi x + 2 on polynomin $x^3 + ax^2 + 3x - 2$ tekijä.

97.3.5. Ratkaise epäyhtälö $| 2x - 3 | < | x + 1 |$

97.3.6. Mikä reaaliluku x toteuttaa yhtälön $x + \sqrt{2x + 1} = 7$?

97.3.7. Millä x:illä toteutuu epäyhtälö $(x^2 + x)(x - 3) > 2x - 6$

97.3.8. Sievennä lauseke $\frac{x}{x - 2} + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2 - 2x}$ ja laske sen jälkeen lausekkeen arvo kun $x = \frac{5}{7}$.

97.3.9. Osoita, että lausekkeen $\frac{\lg a^2 - \lg 100}{\ln a - \ln 10}$ arvo ei riipu vakion a > 0 arvosta. Mikä on tämä vakioarvo?

97.3.10. Vetelin asukasluku oli vuoden 1997 alussa 4013 ja vuoden 1998 alussa 3980. Jos väkiluku vähenee vuosittain yhtä monta prosenttia, niin milloin Vetelin väkiluku on alle 3000?

1. $\sqrt[3]{x^6 + 1} = 2 \;\|\; (\,)^3$; $x^6 + 1 = 8$; $x^6 = 7 \;\|\; \sqrt[6]{(\,)}$; $x = \pm \sqrt[6]{7}$

2. a) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$ b) $\left(\frac{27}{343}\right)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{\frac{27}{343}}\right)^2 = \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$ c) $\lg \sqrt{10} = \lg 10^{½} = ½$

3. a) $2^{3x - 4} = 4^{5x - 6}$; $2^{3x - 4} = (2^2)^{5x - 6}$; $2^{3x - 4} = 2^{10x - 12}$; $3x - 4 = 10x - 12$; $7x = 8$; $x = \frac{8}{7}$

b) $\lg (2x - 3) = 1$ MJ: $2x - 3 > 0$; $\lg (2x - 3) = \lg 10$; $2x - 3 = 10$; $2x = 13$; $x = 6½$

4. x + 2 on tekijä ⇔ x = -2 on polynomin $x^3 + ax^2 + 3x - 2$ nollakohta

$(-2)^3 + a(-2)^2 + 3\cdot(-2) - 2 = 0$; $-8 + 4a - 6 - 2 = 0$; $4a = 16$; $a = 4$

5. $| 2x - 3 | < | x + 1 | \;\|\; (\,)^2$; $4x^2 - 12x + 9 < x^2 + 2x + 1$; $3x^2 - 14x + 8 < 0$

NK: $x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 96}}{6} = \frac{14 \pm 10}{6}$; x = 4 tai x = 2/3 Kuv: ylösp. auk. par. Merkit: + - + V: 2/3 < x < 4

6. $x + \sqrt{2x + 1} = 7$; $\sqrt{2x + 1} = 7 - x \;\|\; (\,)^2$; $2x + 1 = 49 - 14x + x^2$; $x^2 - 16x + 48 = 0$

$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 192}}{2} = \frac{16 \pm 8}{2}$; x = 12 tai x = 4

TARK: x = 12 ; $12 + \sqrt{2\cdot 12 + 1} = 7$; 12 + 5 = 7 ; ei kelpaa

x = 4 ; $4 + \sqrt{2\cdot 4 + 1} = 7$; 4 + 3 = 7 ; kelpaa V: x = 4

7. $(x^2 + x)(x - 3) > 2x - 6$; NK: $(x^2 + x)(x - 3) = 2(x - 3) \;\|\; : (x - 3)$; $x^2 + x = 2$ tai $x - 3 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$ tai x = 3 ; $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$; x = 1 tai x = -2

Kuv: alhaalta ylös. Ohittaa x-akselin nk:issa V: -2 < x < 1 tai x > 3

8. $\frac{x}{x - 2} + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2 - 2x} = \frac{x^2}{x(x - 2)} + \frac{3(x - 2)}{x(x - 2)} - \frac{4}{(x - 2)x} = \frac{x^2 + 3x - 6 - 4}{x(x - 2)} = \frac{x^2 + 3x - 10}{x(x - 2)}$

koska osoittajan nollakohdat ovat $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2}$ eli $x = 2$ tai $x = -5$

on lauseke $= \frac{(x - 2)(x + 5)}{x(x - 2)} = \frac{x + 5}{x}$, jolloin arvo $= \frac{5/7 + 5}{5/7} = \frac{5 + 35}{5} = 8$

9. $\frac{\lg a^2 - \lg 100}{\ln a - \ln 10} = \frac{2\lg a - 2}{\ln a - \ln 10} = \frac{2(\lg a - 1)}{\frac{\lg a}{\lg e} - \frac{\lg 10}{\lg e}} = \frac{2\lg e(\lg a - 1)}{\lg a - 1} = 2\lg e$,

jonka arvo on a:sta riippumaton vakio

10. Asukkaista jäljellä vuoden kuluttua $\frac{3980}{4013} = 0{,}991777$ (= 99,1777 %)

Asukkaita on jäljellä x:n vuoden kuluttua $4013 \cdot 0{,}991777^x$ henkilöä

$4013 \cdot 0{,}991777^x = 3000$ || : 4013 ; $0{,}991777^x = 0{,}74757$ || lg( )

$x \cdot \lg 0{,}991777 = \lg 0{,}74757$; $x = 35{,}234$ V: Vuonna 2032

97.4.1. Ratkaise a) yhtälö $x^3 - 4x = 0$ b) epäyhtälö $x^3 - 4x < 0$

97.4.2. Sievennä a) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$ b) $\left(\frac{1}{64}\right)^{1/3}$ c) $\log_2 \frac{1}{64}$

97.4.3. Mikä arvo on a:lla, kun jakolaskun $(x^3 + ax^2 - 3x - 8):(x - 2)$ jakojäännös on 6. Mikä on jakojäännös, jos sama jaettava jaetaankin binomilla $x + 2$?

97.4.4. Ratkaise a) $(2x - 1)^3 = 8$ b) $\sqrt[3]{2x - 1} = 5$ c) $\lg (2x - 1) = 1$

97.4.5. Sievennä lauseke $\frac{x}{x - 1} - \frac{2}{x^2 - x} - \frac{2}{x}$

97.4.6. Ratkaise a) $2^{x-3} = \sqrt{2}$ b) $2^{x-3} = 5$

97.4.7. Olkoon lg 2 = a. Määritä a:n avulla logaritmit a) lg 20 b) lg 5 c) lg 32.

97.4.8. Ratkaise yhtälö $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{3x}$

97.4.9. Esitä lauseke $x^4 + 4$ kahden toisen asteen polynomin tulona.

97.4.10. Auto maksoi uutena 160 000 mk ja kolmen vuoden kuluttua 102 000 mk. Kuinka monen vuoden kuluttua auton saisi 50 000 mk:lla, jos hinta putoaisi joka vuosi yhtä monta prosenttia?

1. a) $x^3 - 4x = 0$; $x(x^2 - 4) = 0$; $x = 0$ tai $x^2 - 4 = 0$; $x = 0$ tai $x^2 = 4$; $x = 0$ tai $x = \pm 2$

b) Kuv: alhaalta ylös. Ohittaa x-akselin nk:issa $x < -2$ tai $0 < x < 2$

2. a) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}$ b) $\left(\frac{1}{64}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$ c) $\log_2 \frac{1}{64} = \log_2 2^{-6} = -6$

3. JJ = P(2) = 8 + 4a - 6 - 8 = 4a - 6 ; JJ = 6 ; 4a - 6 = 6 ; 4a = 12 ; a = 3

JJ = P(-2) = $-8 + 4 \cdot 3 + 6 - 8 = 18 - 16 = 2$

4. a) $(2x - 1)^3 = 8$ || $\sqrt[3]{(\ )}$; $2x - 1 = 2$; $2x = 3$; $x = 1\frac{1}{2}$

b) $\sqrt[3]{2x - 1} = 5$ || $(\ )^3$; $2x - 1 = 125$; $2x = 126$; $x = 63$

c) $\lg(2x - 1) = 1$; $\lg (2x - 1) = \lg 10$; $2x - 1 = 10$; $2x = 11$; $x = 5\frac{1}{2}$

5. $\frac{x}{x - 1} - \frac{2}{x^2 - x} - \frac{2}{x} = \frac{x}{x - 1} - \frac{2}{x(x - 1)} - \frac{2}{x} = \frac{x^2}{x(x - 1)} - \frac{2}{x(x - 1)} - \frac{2x - 2}{x(x - 1)} = \frac{x^2 - 2 - 2x + 2}{x(x - 1)} = \frac{x^2 - 2x}{x(x - 1)} = \frac{x(x - 2)}{x(x - 1)} = \frac{x - 2}{x - 1}$

6. a) $2^{x-3} = \sqrt{2}$; $2^{x-3} = 2^{\frac{1}{2}}$; $x - 3 = \frac{1}{2}$; $x = 3\frac{1}{2}$

b) $2^{x-3} = 5$ || lg( ) ; $\lg 2^{x-3} = \lg 5$; $(x - 3)\lg 2 = \lg 5$; $x - 3 = \frac{\lg 5}{\lg 2}$; $x = 3 + \frac{\lg 5}{\lg 2} \approx 5{,}3$

7. a) $\lg 20 = \lg 2 \cdot 10 = \lg 2 + \lg 10 = a + 1$ b) $\lg 5 = \lg 10/2 = \lg 10 - \log 2 = 1 - a$

c) $\lg 32 = \lg 2^5 = 5\lg 2 = 5a$

8. $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{3x}$ || $(\ )^2$; $x^2 - 4 = 3x$; $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$; $x = 4$ tai $x = -1$

Tark: $x = 4$: $\sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$ tosi ; $x = -1$: $\sqrt{1 - 4} = \sqrt{-3}$ epätosi. V: $x = 4$

9. $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 =$

$[(x^2 + 2) + (2x)][(x^2 + 2)-(2x)] = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$

10. Olkoon alentumisprosentti = p ; alentumiskerroin $\alpha = (1 - p/100)$

$160\,000\cdot\alpha^3 = 102\,000$ || : 160 000 ; $\alpha^3 = 0{,}6375$ || $\sqrt[3]{(\ )}$; $\alpha = 0{,}86$; p = 14%
$160\,000 \cdot 0{,}86^x = 50\,000$ || : 160 000 ; $0{,}86^x = 0{,}3125$ || lg( )
$x\cdot\lg 0{,}86 = \lg 0{,}3125$ || : lg 0,86 ; x = 7,7 V: 8 v vanhana.

97.5.1. Sievennä a) $\lg 10^4$ b) $\lg 25 + \lg 4$ c) $\lg \sqrt[7]{100}$

97.5.2. Jaa tekijöihin a) $x^2 - 8x + 16$ b) $x^3 - 16x$ c) $x^2 - 8x + 15$

97.5.3. Sievennä a) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6$ b) $\left(\sqrt[n]{a^3}\right)^{2n}$ c) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}$

97.5.4. Sievennä $\dfrac{a}{(c - a)(a - b)} + \dfrac{b}{(a - b)(b - c)} + \dfrac{c}{(b - c)(c - a)}$

97.5.5. Ratkaise yhtälö a) $3^{-1} \cdot 4^x = \dfrac{1}{96}$ b) $(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$

97.5.6. Ratkaise a) yhtälö $(x + 1)(x - 2)^3(x + 4)^2 = 0$ b) epäyhtälö $(x + 1)(x - 2)^3(x + 4)^2 \le 0$

97.5.7. Määritä sellainen luku a, että yhtälön $y = \log_a x$ kuvaaja kulkee pisteen (4,2) kautta. Mikä on kuvaajan pisteen y-koordinaatti, kun x = ½? Mikä on kuvaajan pisteen x-koordinaatti, jos y = 5?

97.5.8. Ratkaise a) yhtälö $\sqrt{2x - 3} + x = 9$ b) epäyhtälö $| x - 1 | < | x - 5 |$

97.5.9. Määritä vakio a siten, että lauseke $\dfrac{x^3 + (a - 5)x^2 - 5ax}{x + 3}$ voidaan supistaa. Supista.

97.5.10. Lasitehtailija on huomannut, että 3 mm paksu lasi päästää lävitseen 95% valosta. Kuinka monta prosenttia valosta pääsee 1 cm paksuisen samanlaatuisen lasikerroksen läpi? Kuinka paksu lasi tarvitaan, jotta puolet valosta suodattuisi lasikerrokseen?

1. a) $\lg 10^4 = 4$ b) $\lg 25 + \lg 4 = \lg 25 \cdot 4 = \lg 100 = \lg 10^2 = 2$

c) $\lg \sqrt[7]{100} = \lg \sqrt[7]{10^2} = \lg 10^{2/7} = 2/7$

2. a) $x^2 - 8x + 16 = x^2 + 2\cdot 4\cdot x + 4^2 = (x - 4)^2$ b) $x^3 - 16x = x(x^2 - 16) = x(x + 4)(x - 4)$

c) $x^2 - 8x + 15 = 0$; $x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \dfrac{8 \pm 2}{2}$; x = 5 tai x = 3 ; $x^2 - 8x + 15 = (x - 5)(x - 3)$

3. a) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6 = (a^{2/3})^6 = a^{2/3\cdot 6} = a^4$ b) $\left(\sqrt[n]{a^3}\right)^{2n} = (a^{3/n})^{2n} = a^{3/n\cdot 2n} = a^6$

c) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}} = (a \cdot a^{1/3})^{1/4} = (a^{1 + 1/3})^{1/4} = a^{4/3 \cdot 1/4} = a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$

4. $\dfrac{a}{(c - a)(a - b)} + \dfrac{b}{(a - b)(b - c)} + \dfrac{c}{(b - c)(c - a)} = \dfrac{a(b - c)}{(c - a)(a - b)(b - c)} + \dfrac{b(c - a)}{(a - b)(b - c)(c - a)} + \dfrac{c(a - b)}{(b - c)(c - a)(a - b)} =$
$\dfrac{a(b - c) + b(c - a) + c(a - b)}{(a - b)(b - c)(c - a)} = \dfrac{ab - ac + bc - ab + ac - bc}{(a - b)(b - c)(c - a)} = 0$

5. a) $3^{-1} \cdot 4^x = 1/96$ || ·3 ; $4^x = 3/96$; $(2^2)^x = 1/32$; $2^{2x} = 2^{-5}$; 2x = -5 ; x = -2½

b) $(3^x)^2 - 2\cdot 3^x - 3 = 0$ (merk: $3^x = y$) ; $y^2 - 2y - 3 = 0$; $y = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2}$; y = 3 tai y = -1

$3^x = 3$ (tai $3^x = -1$) ; x = 1

6. a) $(x + 1)(x - 2)^3(x + 4)^2 = 0$; (x + 1) = 0 tai $(x - 2)^3 = 0$ tai $(x + 4)^2 = 0$
$x_1 = -1$; $x_{2,3,4} = 2$ (kolminkertainen nk); $x_{5,6} = -4$ (kaksinkertainen nk)
b) Vasen puoli on 6. asteen polynomifunktio, jonka korkeimman asteen termin kerroin > 0
Kuv: ylhäältä ylös. Ohittaa x-akselin -1:ssä ja 2:ssa sekä sivuaa -4:ssa V: x = -4 tai $-1 \le x \le 2$

7. $y = \log_a x$; (4,2) ∈ kuvaaja , $2 = \log_a 4$; $a^2 = 4$; a = ±2 (kantaluku > 0) ; a = 2
$y = \log_2 ½ = \log_2 2^{-1} = -1$; $5 = \log_2 x$; $x = 2^5 = 32$

8. a) $\sqrt{2x - 3} + x = 9$; $\sqrt{2x - 3} = 9 - x$ || $(\ )^2$; $2x - 3 = 81 - 18x + x^2$; $x^2 - 20x + 84 = 0$

$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 336}}{2} = \frac{20 \pm 8}{2}$; (x = 14 tai) x = 6

TARK: x = 14 : $\sqrt{28 - 3} + 14 = 9$; 5 + 14 = 9 epätosi; x = 6 : $\sqrt{12 - 3} + 6 = 9$; 3 + 6 = 9 tosi

b) $|x - 1| < |x - 5|$ || $(\ )^2$; $x^2 - 2x + 1 < x^2 - 10x + 25$; $8x < 24$; $x < 3$

9. Jotta voisi supistaa, on (x + 3) oltava osoittajan tekijä ts. x = -3 on osoittajan nollakohta.

$(-3)^3 + (a - 5)(-3)^2 - 5a(-3) = 0$; $-27 + 9a - 45 + 15a = 0$; $24a = 72$; $a = 3$

$\frac{x^3 + (a - 5)x^2 - 5ax}{x + 3} = \frac{x^3 - 2x^2 - 15x}{x + 3} = x^2 - 5x$ (esim. jakokulmassa tai jakaen tekijöihin)

10. Kun paksuus on d = 3 mm , valoa pääsee läpi $0{,}95 \cdot V_0$

Kun paksuus on 2d, valoa pääsee läpi $0{,}95^2 \cdot V_0$; Kun paksuus on 3d, valoa pääsee läpi $0{,}95^3 \cdot V_0$

… Kun paksuus on nd, valoa pääsee läpi $0{,}95^n \cdot V_0$

Olkoon nd = x $\Rightarrow$ n = x/d ; $V = 0{,}95^{x/d} \cdot V_0$

$V = 0{,}95^{10/3} \cdot V_0 = 0{,}843V_0$; Ts. läpi pääsee 84,3%

$½V_0 = 0{,}95^{x/3} \cdot V_0$; $0{,}95^{x/3} = ½$ || lg ( )

$x/3 \cdot \lg 0{,}95 = \lg ½$ || : lg 0,95 ; x/3 = 13,5 ; x = 40,5 (mm) V: 4,05 cm.

98.1.3. Ratkaise a) epäyhtälö $4x^2 > 9$ b) yhtälö $4x^2 - 5x - 9 = 0$

98.1.6. Jaa osoittaja ja nimittäjä tekijöihin sekä supista $\frac{3x^2 + 6x + 3}{4x^2 + 3x - 1}$

98.1.8. Millä a:n arvolla yhtälön $(a + 1)x = a^2 - 1$ ratkaisuna on a) x = 1 b) kaikki x:t?

98.1.10. Johda toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisukaava.
Vihje: kerro ensin yhtälö luvulla 4a. Ts. saat yhtälöksi $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$.

3. a) $4x^2 > 9$; NK: $4x^2 = 9$; $x^2 = 9/4$; $x = \pm 3/2$; PAR: ylöp. aukeava V : x < -1½ tai x > 1½

b) $4x^2 - 5x - 9 = 0$; $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{8} = \frac{5 \pm 13}{8}$; x = 2¼ tai x = - 1

6. OS: NK: $3x^2 + 6x + 3 = 0$; $x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{6} = \frac{-6 \pm 0}{6}$; x = -1 tai x = -1

NIM: NK: $4x^2 + 3x - 1 = 0$; $\frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{8} = \frac{-3 \pm 5}{8}$; x = ¼ tai x = -1

Tällöin murtolauseke voidaan sieventää $\frac{3x^2 + 6x + 3}{4x^2 + 3x - 1} = \frac{3(x + 1)(x + 1)}{4(x - ¼)(x + 1)} = \frac{3(x + 1)}{4x - 1}$

8. a) x = 1 ja $(a + 1) \cdot x = a^2 - 1$; $(a + 1) \cdot 1 = a^2 - 1$; $a^2 - a - 2 = 0$; $a = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$ a = 2 tai a = -1

b) Kaikki x:t ovat ratkaisuja, jos yhtälö on muotoa $0 \cdot x = 0$ ts. a + 1 = 0 ja $a^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ a = -1 ja $a^2 = 1$ $\Leftrightarrow$ a = -1 ja a = ±1 $\Leftrightarrow$ a = -1

10. $ax^2 + bx + c = 0$ || $\cdot$ 4a $\Leftrightarrow$ $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ $\Leftrightarrow$ $(2ax)^2 + 2 \cdot (2a) \cdot b = -4ac$ || + b^2

$\Leftrightarrow$ $(2ax)^2 + 2 \cdot (2a) \cdot b + b^2 = b^2 - 4ac$ $\Leftrightarrow$ $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ || $\sqrt{\ }$ $\Leftrightarrow$ $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$\Leftrightarrow$ $2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ || : 2a $\Leftrightarrow$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

98.2.1. Ratkaise yhtälö a) x = 3x - 2 b) $x^2 = 3x - 2$

98.2.6. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $x^2 + ax + a = 0$ on kaksi erisuurta reaalista ratkaisua?

1. a) x = 3x - 2 ; x - 3x = -2 ; -2x = -2 ; x = 1

b) $x^2 = 3x - 2$; $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$; x = 2 tai x = 1

6. $x^2 + ax + a = 0$; 2 erisuurta reaalista ratkaisua, jos D > 0 ; $a^2 - 4a > 0$

NK: a(a - 4) = 0 ; a = 0 tai a = 4 ; PAR: ylösp. aukeava V: a < 0 tai a > 4

98.3.3. Ratkaise a) yhtälö $2x^2 - 5x - 18 = 0$ b) epäyhtälö $2x^2 - 5x < 0$

98.3.6. Olkoon yhtälön $x^2 + 3x - 2 = 0$ ratkaisut x_1 ja x_2. Mitä on a) $(x_1 + x_2)x_1x_2$ b) $(x_1 + x_2)^3$?

98.3.8. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $ax^2 + ax + a + 1 = 0$ on kaksinkertainen ratkaisu? Määritä myös nämä kaksinkertaiset ratkaisut.

98.3.9. Talouspaperirullia myydään kahdessa erikokoisessa paketissa, joista suuremmassa on 10 rullaa enemmän kuin pienemmässä. Jos 750 rullan erä paketoidaan suurempiin paketteihin, tarvitaan 20 pakettia vähemmän kuin paketoitaessa pienempiin paketteihin. Kuinka monta rullaa paketeissa on?

98.3.10. Muodosta jokin kokonaislukukertoiminen, muotoa $P(x) < 0$ oleva polynomiepäyhtälö, joka on tosi x:n arvoilla 1, 2 ja 4, mutta epätosi x:n arvoilla 0 ja 5.

3. a) $2x^2 - 5x - 18 = 0$; $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{4} = \frac{5 \pm 13}{4}$; $x = 4½$ tai $x = -2$ b) $2x^2 - 5x < 0$; NK: $x(2x - 5) = 0$; $x = 0$ tai $2x - 5 = 0$; $x = 2½$ PAR: ylösp. auk. Merkit: + - + V: $0 < x < 2½$
6. $x^2 + 3x - 2 = 0$; $x_1 + x_2 = -\frac{3}{1} = -3$; $x_1x_2 = \frac{-2}{1} = -2$ a) $(x_1 + x_2)(x_1x_2) = (-3)(-2) = 6$ b) $(x_1 + x_2)^3 = (-3)^3 = -27$
8. $ax^2 + ax + (a + 1) = 0$ on II asteen yhtälö, kun $a \neq 0$ JA sillä on kaksinkertainen ratkaisu, kun $D = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a(a + 1) = 0$; $a^2 - 4a^2 - 4a = 0$; $-3a^2 - 4a = 0$; $a(-3a - 4) = 0$; ($a = 0$) tai $-3a - 4 = 0$; $-3a = 4$; $a = -4/3$ $-4/3 \cdot x^2 - 4/3 \cdot x - 4/3 + 1 = 0 \,\|\cdot(-3) \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x + 1)^2 = 0$; $2x + 1 = 0$; $x = -½$
9. Olkoon pienessä paketissa x rullaa. Isossa paketissa on x + 10 rullaa. Pikkupaketteja tulee 750 / x kpl ja isoja paketteja tulee 750 / (x + 10) $\frac{750}{x} = \frac{750}{x + 10} + 20 \,\| \cdot x(x + 10)$; $750(x + 10) = 750x + 20x(x + 10)$ $750x + 7500 = 750x + 20x^2 + 200x$; $20x^2 + 200x - 7500 = 0 \,\| : 20$; $x^2 + 10x - 375 = 0$ $x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 1500}}{2} = \frac{-10 \pm 40}{2}$; $x = 15$ (tai $x = -25$) V: pienessä paketissa on 15 rullaa ja isossa paketissa on 25 rullaa.
10. P(x) voisi olla esim. toisen asteen polynomifunktio, jonka nollakohdat ovat 0 ja 5, jolloin kuvaaja on x-akselin alapuolella, kun x = 1, 2 ja 4. $P(x) < 0$; $(x - 0)(x - 5) < 0$; $x^2 - 5x < 0$.

98.4.1. Sievennä a) $(a^6)^{1/3}$ b) $\log_a a^6$ c) $\sqrt[12]{a^6}$

98.4.2. Ratkaise yhtälö a) $2^{x-1} = 4$ b) $\log_2 (x – 1) = 4$

98.4.3. Suorita jakolaskut a) $\frac{12x^3}{3x}$ b) $\frac{x^2 - 9}{x + 3}$ c) $\frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 3}{x + 3}$

98.4.4. Määritä luku a, kun polynomi $x^3 – (a – 3)x^2 – 2ax + a – 6$ on jaollinen polynomilla $x – a$.

98.4.5. Ratkaise yhtälö $\sqrt{x + 2} + x = 0$

98.4.6. Ratkaise epäyhtälö $x^3 > x^2 – x$

98.4.7. Ratkaise yhtälö $\frac{x}{x^2 - 1} + \frac{x - 1}{x^2 + x} = \frac{x + 1}{x^2 - x}$

98.4.8. Jaa polynomi $x^3 + 2x^2 – 4x – 8$ ensimmäisen asteen tekijöihin.

98.4.9. Ratkaise yhtälö a) $x^4 – x^2 – 2 = 0$ b) $(x^2 – 2)^4 – (x^2 – 2)^2 – 2 = 0$

98.4.10. Kun yhtälössä $y = \lg x + 1$ luku x tulee kaksinkertaiseksi, kasvaa luku y 50%. Määritä luvut x ja y.

1. a) $(a^6)^{1/3} = a^{6 \cdot 1/3} = a^2$ b) $\log_a a^6 = 6$ c) $\sqrt[12]{a^6} = (a^6)^{1/12} = a^{6 \cdot 1/12} = a^{½} = \sqrt{a}$
2. a) $2^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x-1} = 2^2 \Leftrightarrow x – 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$ b) $\log_2 (x – 1) = 4 \Leftrightarrow \log_2 (x – 1) = \log_2 2^4 \Leftrightarrow x – 1 = 16 \Leftrightarrow x = 17$
3. a) $\frac{12x^3}{3x} = 4x^2$ b) $\frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x + 3} = x – 3$ c) $(x^3 + 2x^2 – 4x – 3) : (x + 3) = x^2 - x – 1$ (jakokulmassa)
4. (x – a):lla jaollinen $\Leftrightarrow$ x = a on nollakohta. $a^3 – (a – 3)a^2 – 2a\cdot a + a – 6 = 0$ $\Leftrightarrow a^3 – a^3 + 3a^2 – 2a^2 + a – 6 = 0 \Leftrightarrow a^2 + a – 6 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow a = 3$ tai $a = -2$
5. $\sqrt{x + 2} + x = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{x + 2} \,\| (\ )^2 \Leftrightarrow x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 – x – 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ tai $x = -1$ TARK.: $x = 2$; $\sqrt{2 + 2} + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 + 2 = 0$ (EI) ; $x = -1$; $\sqrt{-1 + 2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 – 1 = 0$ (KELPAA) V: $x = -1$

6. $x^3 > x^2 - x \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x > 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x + 1) > 0$

NK: $x = 0$ tai $x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} \notin R$. Kuv: alhaalta ylös. Ohittaa x-akselin vain 0:ssa V: $x > 0$

7. $\frac{x}{x^2 - 1} + \frac{x - 1}{x^2 + x} = \frac{x + 1}{x^2 - x} \Leftrightarrow \frac{x}{(x + 1)(x - 1)} + \frac{x - 1}{x(x + 1)} = \frac{x + 1}{x(x - 1)} \parallel \cdot x(x + 1)(x - 1)$ MJ: $x \neq 0, \pm 1$

$\Leftrightarrow x^2 + (x - 1)^2 = (x + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ tai})\ x = 4$

8. $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = x^2(x + 2) - 4(x + 2) = (x^2 - 4)(x + 2) = (x + 2)(x - 2)(x + 2) = (x + 2)^2(x - 2)$

9.a) $x^4 - x^2 - 2 = 0$; merk. $x^2 = a$; $a^2 - a - 2 = 0$; $a = 2$ tai $a = -1$; $x^2 = 2$ (tai $x^2 = -1$) ; $x = \pm\sqrt{2}$

b) $(x^2 - 2)^4 - (x^2 - 2)^2 - 2 = 0$; merk. $(x^2 - 2)^2 = a$; $a^2 - a - 2 = 0$; $a = 2$ tai $a = -1$

$(x^2 - 2)^2 = 2$ (tai $(x^2 - 2)^2 = -1$) ; $x^2 - 2 = \pm\sqrt{2}$; $x^2 = 2 \pm \sqrt{2}$; $x = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$

10. $\begin{cases} y = \lg x + 1 \\ 1{,}5y = \lg 2x + 1 \end{cases}$; $\begin{cases} y = \lg x + 1 & \parallel \cdot (-1) \\ 1{,}5y = \lg 2 + \lg x + 1 & \parallel \cdot 1 \end{cases}$

$0{,}5y = \lg 2$; $y = 2\lg 2 = \lg 2^2 = \lg 4$

$\lg 4 = \lg x + 1$; $\lg 4 = \lg x + \lg 10$; $\lg 4 = \lg 10x$; $10x = 4$; $x = 0{,}4$

98.5.1. Sievennä a) $(\sqrt[4]{3})^{12}$ b) $\log_3 \sqrt[4]{3}$ c) $(\log_3 3)^{12}$

98.5.2. Ratkaise epäyhtälö a) $3^{2x+1} > 27$ b) $\lg(2x + 1) < \lg 27$

98.5.3. Jaa tekijöihin a) $x^2 - 16$ b) $4x^2 - 12x + 9$ c) $x^3 + 4x$

98.5.4. Ratkaise yhtälö a) $x^4 - 4x^2 = 0$ b) $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$

98.5.5. Millä a:n arvoilla funktio $f(x) = (2a - 1)^x$ on kasvava?

98.5.6. Ratkaise yhtälö $\sqrt{2x + 3} + 15 - 4x = 0$

98.5.7. Sievennä lauseke $\left(\frac{x + 1}{x} + 2 + \frac{x}{x + 1}\right) : \left(\frac{x + 1}{x} - \frac{x}{x + 1}\right)$

98.5.8. Ratkaise epäyhtälö $x \leq \frac{2 + x}{x}$

98.5.9. Määritä luku a, kun $(x + 1)$ on polynomin $x^3 + 2ax^2 - 3x - 6a$ tekijä. Laske sen jälkeen millä x:n arvoilla polynomi saa negatiivisia arvoja.

98.5.10. Osoita, että lausekkeen $\frac{\log_x y}{\log_{2x} y} - \log_x 2$ arvo on luvuista x ja y riippumaton vakio.

1. a) $(\sqrt[4]{3})^{12} = 3^{12/4} = 3^3 = 27$ b) $\log_3 \sqrt[4]{3} = \log_3 3^{1/4} = 1/4$ c) $(\log_3 3)^{12} = (1)^{12} = 1$

2. a) $3^{2x+1} > 27$; $3^{2x+1} > 33$; $2x + 1 > 3$; $2x > 2$; $x > 1$ b) $\lg(2x + 1) < \lg 27$; $2x + 1 < 27$ JA $2x + 1 > 0$

$2x < 26$ JA $2x > -1$; $x < 13$ JA $x > -1/2$; $-1/2 < x < 13$

3) a) $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$ b) $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$ c) $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$

4. a) $x^4 - 4x^2 = 0$; $x^2(x^2 - 4) = 0$; $x^2 = 0$ tai $x^2 - 4 = 0$; $x^2 = 0$ tai $x^2 = 4$; $x = 0$ tai $x = \pm 2$

b) $x^4 - 4x^2 - 5 = 0(x^2 = a)$ $a^2 - 4a - 5 = 0$; $a = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$; $a = 5$ tai $a = -1$; $x^2 = 5$ (tai $x^2 = -1$) $x = \pm\sqrt{5}$

5. Eksp. fkt kasvava, kun kantaluku > 1 ; $2a - 1 > 1$; $2a > 2$; $a > 1$

6. $\sqrt{2x + 3} + 15 - 4x = 0$; $\sqrt{2x + 3} = 4x - 15 \parallel (\ )^2$; MJ: $2x + 3 \geq 0$ JA $4x - 15 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3\frac{3}{4}$

$2x+3 = 16x^2 - 120x + 225$; $16x^2 - 122x + 222 = 0$; $x = \frac{122 \pm \sqrt{14884 - 14208}}{32} = \frac{122 \pm 26}{32}$ $x = 4\,5/8$ (tai $x=3$)

7. $\left(\frac{x + 1}{x} + 2 + \frac{x}{x + 1}\right) : \left(\frac{x + 1}{x} - \frac{x}{x + 1}\right) = \left(\frac{(x + 1)^2}{x(x + 1)} + \frac{2x(x + 1)}{x(x + 1)} + \frac{x^2}{x(x + 1)}\right) : \left(\frac{(x + 1)^2}{x(x + 1)} - \frac{x^2}{x(x + 1)}\right) =$

$\frac{(x + 1)^2 + 2x(x + 1) + x^2}{x(x + 1)} : \frac{(x + 1)^2 + x^2}{x(x + 1)} = \frac{x^2 + 2x + 1 + 2x^2 + 2x + x^2}{x(x + 1)} : \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2}{x(x + 1)} = \frac{4x^2 + 4x + 1}{x(x + 1)} : \frac{2x + 1}{x(x + 1)}$

$= \frac{(2x + 1)^2}{x(x + 1)} \cdot \frac{x(x + 1)}{2x + 1} = \frac{(2x + 1)^2}{2x + 1} = 2x + 1$

8. $x \leq \frac{2 + x}{x}$; $x - \frac{2 + x}{x} \leq 0$; $\frac{x^2}{x} - \frac{2 + x}{x} \leq 0$; $\frac{x^2 - x - 2}{x} \leq 0$

OS: NK: $x^2 - x - 2 = 0$; $x = 2$ tai $x = -1$ Kuv: Ylösp. auk. par. Merkit: + -1 - 2 +
NIM: NK: $x = 0$ KUV: nouseva suora. Merkit: - 0 +
Merkit taulukkoon, josta murtolausekkeen merkit: - -1 + 0 - 2 + V: $x \le -1$ tai $0 < x \le 2$

9. $(x + 1)$ on polynomin $x^3 + 2ax^2 - 3x - 6a$ tekijä $\Leftrightarrow$
$x = -1$ on polynomin $x^3 + 2ax^2 - 3x - 6a$ nollakohta $-1 + 2a + 3 - 6a = 0$ $-4a = -2$; $a = \frac{1}{2}$
Polynomi negatiivinen $\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 3x - 3 < 0 \Leftrightarrow x^2(x + 1) - 3(x + 1) < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3)(x + 1) < 0$
NK: $x^2 - 3 = 0$ tai $x + 1 = 0$; $x = \pm\sqrt{3}$ tai $x = -1$ KUV: alhaalta ylös. Ohittaa x-akselin NK:issa
V: $x < -\sqrt{3}$ tai $1 < x < \sqrt{3}$

10. $\frac{\log_x y}{\log_{2x} y} - \log_x 2 = \log_x y : \log_{2x} y - \log_x 2 = \log_x y : \frac{\log_x y}{\log_x 2x} - \log_x 2 = \log_x y \cdot \frac{\log_x 2x}{\log_x y} - \log_x 2 = \log_x 2x - \log_x 2 =$
$\log_x 2 + \log_x x - \log_x 2 = \log_x x = 1$, joka on x:stä ja y:stä riippumaton!

99.1.1. Ratkaise yhtälö a) $x^2 = 6$ b) $x(x - 1) = 0$ c) $x(x - 1) = 6$

99.1.2. Laske lausekkeiden tarkat arvot a) $\sqrt[5]{32}$ b) $(\frac{16}{9})^{3/2}$ c) $\lg \sqrt[13]{10}$

99.1.3. Mikä on jakojäännös, kun polynomi $x^{1999} + x + 1$ jaetaan binomilla a) $x - 1$ b) $x + 1$?

99.1.4. Jaa tekijöihin polynomit a) $a^3 - 4a$ b) $2x^2 - 20x + 50$ c) $x^3 - 2x^2 + x - 2$

99.1.5. Ratkaise a) yhtälö $(x^2 - 2x - 3)(x + 1) = 0$ b) epäyhtälö $(x^2 - 2x - 3)(x + 1) < 0$.

99.1.6. Ratkaise yhtälö $4^{1-x} = \frac{1}{8}$

99.1.7. Ratkaise epäyhtälö $\frac{2}{x + 1} + \frac{1}{x - 2} < 0$.

99.1.8. Määritä vakio a siten, että yhtälöllä $x^2 - ax + 2x - a + 2 = 0$ on yksi reaalinen ratkaisu.

99.1.9. Jaa osoittaja ja nimittäjä tekijöihin sekä supista $\frac{x^3 - 7x + 6}{2x^2 - 5x + 2}$

99.1.10. Kassa-apulaisen piti laskea yhteen kaksi hintaa. Laskiessaan hän painoikin vahingossa kertonäppäintä, mutta sai siitä huolimatta oikean summan 4,05 euroa. Mitkä olivat oikeat hinnat?

1. a) $x^2 = 6$; $x = \pm\sqrt{6}$ b) $x(x - 1) = 0$; $x = 0$ tai $x - 1 = 0$; $x = 0$ tai $x = 1$
c) $x(x - 1) = 6$; $x^2 - x - 6 = 0$; $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$; $x = 3$ tai $x = -2$

2. a) $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$ b) $(\frac{16}{9})^{3/2} = (\sqrt{\frac{16}{9}})^3 = (\frac{4}{3})^3 = \frac{64}{27}$ c) $\lg \sqrt[13]{10} = \lg 10^{1/13} = \frac{1}{13}$

3. a) $JJ = x^{1999} + x + 1 \,|_{x = 1} = 1^{1999} + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$
b) $JJ = x^{1999} + x + 1 \,|_{x = -1} = (-1)^{1999} + (-1) + 1 = -1 - 1 + 1 = -1$

4. a) $a^3 - 4a = a(a^2 - 4) = a(a + 2)(a - 2)$ b) $2x^2 - 20x + 50 = 2(x^2 - 10x + 25) = 2(x - 5)^2$
c) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x^3 - 2x^2) + (x - 2) = x^2(x - 2) + (x - 2) = (x^2 + 1)(x - 2)$

5. a) $(x^2 - 2x - 3)(x + 1) = 0$; $x^2 - 2x - 3 = 0$ tai $x + 1 = 0$; $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$ tai $x = -1$
ts. $x_1 = 3$ tai $x_2 = -1$ tai $x_3 = -1$
b) NK:t edellä. Kuvaaja kolmannen asteen polynomifunktio, jota x-akseli hipaisee, kun $x = -1$ ja leikkaa, kun $x = 3$, joten merkit : --- -1 --- 3 +++ V: $x < 3$ ja $x \neq -1$

6. $4^{1 - x} = \frac{1}{8}$; $(2^2)^{1 - x} = \frac{1}{2^3}$; $2^{2 - 2x} = 2^{-3}$; $2 - 2x = -3$; $-2x = -5$; $x = 2\frac{1}{2}$

7. $\frac{2}{x + 1} + \frac{1}{x - 2} < 0$; $\frac{2(x - 2)}{(x + 1)(x - 2)} + \frac{x + 1}{(x + 1)(x - 2)} < 0$; $\frac{2x - 4 + x + 1}{(x + 1)(x - 2)} < 0$; $\frac{3x - 3}{(x + 1)(x - 2)} < 0$
OS: NK $3x - 3 = 0$; $x = 1$
Kuvaaja nouseva suora, jonka merkit --- 1 +++
NIM: NK $(x + 1)(x - 2) = 0$
$x = -1$ tai $x = 2$

OS	---	---	+++	+++
NIM	+++	---	---	+++
ML	---	+++	---	+++
	-1	1	2	

Kuvaaja on ylösp. auk. par. merkit +++ -1 --- 2 +++ V : $x < -1$ tai $1 < x < 2$
8. $x^2 - ax + 2x - a + 2 = 0$; $x^2 + (2 - a)x + (2 - a) = 0$. Yksi ratkaisu, jos D = 0 $(2 - a)^2 - 4(2 - a) = 0$; $4 - 4a + a^2 - 8 + 4a = 0$; $a^2 = 4$; $a = \pm 2$
9. OS: huomataan, että x = 1 on yksi nollakohta, joten tekijänä on (x - 1) toinen tekijä saadaan jakamalla jakokulmassa $(x^3 - 7x + 6) : (x - 1) = x^2 + x - 6$ saadun osamäärän nollakohdat ovat $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$; x = 2 ja x = -3, joten osoittaja on tekijöissään $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$ NIM: nollakohdat ovat $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$; x = 2 tai x = ½ $\frac{x^3 - 7x + 6}{2x^2 - 5x + 2} = \frac{(x - 1)(x - 2)(x + 3)}{2(x - 2)(x - \frac{1}{2})} = \frac{(x - 1)(x + 3)}{2(x - \frac{1}{2})} = \frac{(x - 1)(x + 3)}{2x - 1}$
10. Olkoon ensimmäinen hinta = x, jolloin toinen hinta on 4,05 - x Kun tulo on sama kuin summa, saadaan yhtälö $x(4{,}05 - x) = 4{,}05$; $4{,}05x - x^2 = 4{,}05$ $x^2 - 4{,}05x + 4{,}05 = 0$; $x = \frac{4{,}05 \pm \sqrt{4{,}05^2 - 4 \cdot 4{,}05}}{2} = \frac{4{,}05 \pm \sqrt{16{,}4025 - 16{,}2}}{2} = \frac{4{,}05 \pm \sqrt{0{,}2025}}{2} = \frac{4{,}05 \pm 0{,}45}{2}$; x = 2,25 tai x = 1,80 V: 2,25 euroa ja 1,80 euroa

99.2.1. Ratkaise a) yhtälö $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) epäyhtälö $3x^2 - 6x < 0$.

99.2.2. Laske likiarvot 3 desimaalin tarkkuudella a) $\sqrt[3]{13}$ b) $7^{3/4}$ c) lg 56.

99.2.3. Jaa tekijöihin a) $a^2 - 25$ b) $x^2 - 12x + 36$ c) $6x^2 + 24x + 24$

99.2.4. Sievennä ilman laskinta a) $\lg (10\sqrt{10})$ b) $\sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[4]{4}$

99.2.5. Ratkaise yhtälö $\lg x^2 - 2 = 0$

99.2.6. Ratkaise epäyhtälö $(x^2 - 3)(x + 1) < 0$.

99.2.7. Määritä vakio a siten, että yhtälöllä $x^2 = ax - 1$ ei ole reaalisia ratkaisuja.

99.2.8. Määritä luvut a ja b, kun polynomi $x^3 + 2x^2 + ax + b$ on jaollinen binomeilla x + 1 ja x - 2.

99.2.9. Kuution muotoisen kappaleen pinnalle lisättiin 1,0 cm paksuinen eristekerros siten, että muoto säilyi edelleen kuutiona. Laske alkuperäisen kuution tilavuus, kun lisättävän eristekerroksen tilavuus oli 1352 cm^3.

99.2.10. Kahdensadan kilometrin mökkimatkaan kului puoli tuntia vähemmän aikaa, kun keskinopeutta nostettiin 20 km/h. Montako prosenttia keskinopeus oli tällöin kasvanut?

1. a) $x^2 - 7x + 10 = 0$; $x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}$; x = 5 tai x = 2 b) $3x^2 - 6x < 0$; NK: $3x(x - 2) = 0$; x = 0 tai x = 2. PAR: ylösp. aukeava merkit ++ 0 -- 2 ++ V: $0 < x < 2$
2. a) $\sqrt[3]{13} \approx 2{,}351$ b) $7^{3/4} \approx 4{,}304$ c) $\lg 56 \approx 1{,}748$
3. a) $a^2 - 25 = (a + 5)(a - 5)$ b) $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$ c) $6x^2 + 24x + 24 = 6(x^2 + 4x + 4) = 6(x + 2)^2$
4. a) $\lg (10\sqrt{10}) = \lg (10 \cdot 10^{½}) = \lg (10^{1½}) = 1½$ b) $\sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[4]{4} = 4^{1/6} \cdot 4^{1/4} = 4^{1/6 + 1/4} = 4^{2/12 + 3/12} = 4^{5/12} = (2^2)^{5/12} = 2^{5/6} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$
5. $\lg x^2 - 2 = 0$ (MJ: $x^2 > 0$; $x \neq 0$) ; $\lg x^2 = 2$; $\lg x^2 = \lg 10^2$; $x^2 = 100$; $x = \pm 10$
6. $(x^2 - 3)(x + 1) < 0$; NK: $x^2 - 3 = 0$ tai $x + 1 = 0$; $x = \pm \sqrt{3}$ tai x = -1 KUV.: "nouseva" 3. asteen polynomi. Merkit: --- $-\sqrt{3}$ +++ -1 --- $\sqrt{3}$ +++ V: $x < -\sqrt{3}$ tai $-1 < x < \sqrt{3}$
7. $x^2 = ax - 1$; $x^2 - ax + 1 = 0$. Ei reaalisia ratkaisuja, jos D < 0 ; $a^2 - 4 < 0$ NK: $a^2 = 4$; $a = \pm 2$. PAR.: ylösp. aukeava. Merkit: +++ -2 --- 2 +++ V: $-2 < a < 2$
8. $\begin{cases} \text{jaollinen } (x + 1)\text{:llä} \\ \text{jaollinen } (x - 2)\text{:lla} \end{cases}$; $\begin{cases} x = -1 \text{ on nk} \\ x = 2 \text{ on nk} \end{cases}$; $\begin{cases} -1 + 2 - a + b = 0 \\ 8 + 8 + 2a + b = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a - b = 1 \\ 2a + b = -16 \end{cases}$ 3a = -15 ; a = -5 ; -5 - b = 1 ; b = -6
9. Olkoon alkuperäisen kuution sivu = x. Uuden kuution sivu = x + 2 $(x + 2)^3 - x^3 = 1352$; $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 = 1352$; $6x^2 + 12x - 1344 = 0 \Vert : 6$

$x^2 + 2x - 224 = 0$; $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 896}}{2} = \frac{-2 \pm 30}{2}$; x = 14 (tai x = -16) Alkup. tilavuus on 14^3 cm^3 = 2744 cm^3
10. Nopeus alussa = x ja nopeus lopussa = x + 20. Aika alussa = $\frac{200}{x}$ ja aika lopussa = $\frac{200}{x + 20}$ $\frac{200}{x + 20} + \frac{1}{2} = \frac{200}{x}$ $\|\cdot 2x(x + 20)$; $400x + x(x + 20) = 400(x + 20)$; $400x + x^2 + 20x = 400x + 8000$; $x^2 + 20x - 8000 = 0$; $x = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 32000}}{2} = \frac{-20 \pm 180}{2}$; x = 80 (tai x = -100) Nopeus on muuttunut 80:sta 100:aan. 100:80 = 1,25 = 125%. V: Kasvanut 25%

00.1.1. Laske lausekkeiden a) $\sqrt[5]{67}$ ja b) 2^{π} likiarvot 3 numeron tarkkuudella

sekä lausekkeen c) $\sqrt[3]{6^{-9}}$ d) $49^{-1½}$ tarkat arvot.

00.1.2. Ratkaise yhtälö a) $3x^2 + 5x = 0$ b) $3x^2 + 5x + 2 = 0$

00.1.3. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $3x^2 + ax + 12 = 0$ on kaksi erisuurta reaalista ratkaisua?

00.1.4. Ratkaise yhtälö $8^{2x - 1} = \frac{1}{4}$

00.1.5. Sievennä $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[3]{4} : \sqrt[15]{16}$

00.1.6. Ratkaise epäyhtälö $2^{2x} - 2^{x+3} > 128$

00.1.7. Puistoon rakennetaan suorakulmion muotoinen kukkamaa. Se reunustetaan laudalla, jota tarvitaan yhteensä 134 m. Mitkä ovat kukkamaan mitat, kun pinta-ala on 66 m^2 ?

1. a) $\sqrt[5]{67} \approx 2{,}32$ b) $2^{\pi} \approx 8{,}82$ c) $\sqrt[3]{6^{-9}} = 6^{-9/3} = 6^{-3} = (\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$ d) $49^{-1½} = (\frac{1}{49})^{3/2} = (\sqrt{\frac{1}{49}})^3 = (\frac{1}{7})^3 = \frac{1}{343}$
2. a) $3x^2 + 5x = 0$; $x(3x + 5) = 0$; x = 0 tai 3x + 5 = 0 ; x = 0 tai $x = -\frac{5}{3}$ b) $3x^2 + 5x + 2 = 0$; $x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{-5 \pm 1}{6}$; $x = -\frac{2}{3}$ tai x = - 1
3. $3x^2 + ax + 12 = 0$ yhtälöllä on kaksi reaalista ratkaisua, jos yhtälön D > 0 $a^2 - 4\cdot3\cdot12 > 0$; $a^2 - 144 > 0$ NK: $a^2 = 144$; $a = \pm12$ KUV: YAP +++ -12 --- 12 +++ V: a < -12 tai a > 12
4. $8^{2x - 1} = \frac{1}{4}$; $(2^3)^{2x - 1} = \frac{1}{2^2}$; $2^{6x - 3} = 2^{-2}$; 6x - 3 = -2 ; 6x = 1 ; $x = \frac{1}{6}$
5. $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[3]{4} : \sqrt[15]{16} = \sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} : \sqrt[15]{2^4}$ $= 2^{3/5} \cdot 2^{2/3} : 2^{4/15} = 2^{3/5 + 2/3 - 4/15} = 2^{9/15 + 10/15 - 4/15} = 2^{15/15} = 2^1 = 2$
6. $2^{2x} - 2^{x+3} > 128$; $(2^x)^2 - 2^x \cdot 2^3 > 128$; $(2^x)^2 - 8\cdot2^x - 128 > 0$. Olkoon $2^x = a$ $a^2 - 8a - 128 > 0$ NK: $a^2 - 8a - 128 = 0$; $a = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 512}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{8 \pm 24}{2}$; a = 16 tai a = -8 KUV: YAP +++ -8 --- 16 +++ a < -8 tai a > 16 ($2^x < -8$ ei mahdollinen) tai $2^x > 16$; $2^x > 2^4$; x > 4
7. Olkoon kanta = x ja korkeus = h. Piiri = 134 ; 2h + 2x = 134 ; 2h = 134 - 2x ; h = 67 - x Ala = 66 ; x(67 - x) = 66 ; $67x - x^2 = 66$; $-x^2 + 67x - 66 = 0$ $\|\cdot (-1)$; $x^2 - 67x + 66 = 0$ $x = \frac{67 \pm \sqrt{67^2 - 4\cdot1\cdot66}}{2} = \frac{67 \pm \sqrt{4225}}{2} = \frac{67 \pm 65}{2}$; x = 66 tai x = 1 V: Mitat ovat 66 m x 1 m

00.2.1. Sievennä a) $\log_2 16$ b) lg 4 + lg 2,5 c) 2lg 30 - lg 9

00.2.2. Jaa $(6x^3 - x^2 - 20x + 12) : (2x - 3)$

00.2.3. Määritä vakion a arvo, kun polynomin $x^3 + ax^2 - 3x + 2$ tekijänä on $x + 1$. Mikä on jakojäännös, jos näin saatu polynomi jaetaan binomilla $(x - 2)$?

00.2.4. Ratkaise yhtälö $\frac{x}{x + 1} + \frac{1}{x - 1} = \frac{x}{x - 1}$

00.2.5. Ratkaise yhtälö $\lg x + \lg(x + 1) = \lg(3 - x)$

00.2.6. Sievennä $\frac{x}{x - 1} + \frac{x + 1}{x} - \frac{3x - 2}{x^2 - x}$

00.2.7. Ratkaise murtoepäyhtälö $\frac{x^2 + 1}{x + 2} \le 2$

---

1. a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ b) $\lg 4 + \lg 2{,}5 = \lg 4\cdot 2{,}5 = \lg 10 = \lg 10 = 1$
c) $2\lg 30 - \lg 9 = \lg 30^2 - \lg 9 = \lg 900 - \lg 9 = \lg 900/9 = \lg 100 = \lg 10^2 = 2$

2.

$$\begin{array}{rlllll}
 & & 3x^2 & + \ 4x & - \ 4 & \\
\hline
2x - 3 \ | & 6x^3 & - \ x^2 & - \ 20x & + \ 12 & \\
 & \underline{6x^3 \ \pm \ 9x^2} & & & & \\
 & & 8x^2 & - \ 20x & & \\
 & & \underline{8x^2 \ \pm \ 12x} & & & \\
 & & & -8x & + \ 12 & \\
 & & & -8x & + \ 12 &
\end{array}$$

---

3. Polynomin tekijänä on $x + 1 \Leftrightarrow x = -1$ on polynomin nollakohta
$(-1)^3 + a(-1)^2 - 3\cdot(-1) + 2 = 0$; $-1 + a + 3 + 2 = 0$; $a = -4$
Polynomin jakojäännös jaettaessa $(x - 2)$:lla on polynomin arvo kohdassa $x = 2$
$x^3 - 4x^2 - 3x + 2 \mid x = 2 = 2^3 - 4\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + 2 = 8 - 16 - 6 + 2 = -12$

---

4. $\frac{x}{x + 1} + \frac{1}{x - 1} = \frac{x}{x - 1} \ \| \cdot (x + 1)(x - 1)$ Mj: $x + 1 \ne 0$ ja $x - 1 \ne 0$; $x \ne \pm 1$
$x(x - 1) + (x + 1) = x(x + 1)$; $x^2 - x + x + 1 = x^2 + x$; $1 = x$, joka ei käy. V : $L = \emptyset$

---

5. $\lg x + \lg(x + 1) = \lg(3 - x)$ MJ: $x > 0$ JA $x + 1 > 0$ JA $3 - x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3$
$\lg x(x + 1) = \lg(3 - x)$; $x^2 + x = 3 - x$; $x^2 + 2x - 3 = 0$
$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$; $x = 1$ (tai $x = -3$)

---

6. $\frac{x}{x - 1} + \frac{x + 1}{x} - \frac{3x - 2}{x^2 - x} = \frac{x}{x - 1} + \frac{x + 1}{x} - \frac{3x - 2}{x(x - 1)} = \frac{x^2}{x(x - 1)} + \frac{(x + 1)(x - 1)}{x(x - 1)} - \frac{3x - 2}{x(x - 1)}$
$= \frac{x^2 + (x + 1)(x - 1) - (3x - 2)}{x(x - 1)} = \frac{x^2 + x^2 - 1 - 3x + 2}{x(x - 1)} = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x(x - 1)} = \frac{2(x - 1)(x - ½)}{x(x - 1)} = 2x - 1$
OS:n NK:t $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$ $x = 1$ tai $x = ½$

---

7. $\frac{x^2 + 1}{x + 2} \le 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x + 2} - 2 \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x + 2} - \frac{2x + 4}{x + 2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2} \le 0$
OS: NK $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$; $x = 3$ tai $x = -1$ KUV: YAP +++ -1 --- 3 +++
NIM: NK $x + 2 = 0$; $x = -2$ KUV: nouseva suora --- -2 +++

OS:	+++	+++	---	+++
NIM:	---	+++	+++	+++
ML:	---	+++	---	+++
	-2	-1	3	V: $x < -2$ tai $-1 \le x \le 3$

00.3.1. a) Anna 3-desimaaliset likiarvot luvuille lg 4 ja ln 3. Sievennä b) $\log_a a^3$ c) $\lg \frac{20}{a} + \lg \frac{a}{2}$

00.3.2. Jaa $(18x^3 - 63x^2 + 49x - 10) : (3x - 2)$

00.3.3. Ratkaise yhtälö $\frac{8}{x^2 - 2x} + 1 = \frac{4}{x - 2}$

00.3.4. Olkoon lg 5 = a. Määritä a:n avulla logaritmien arvot a) lg 50 b) lg 0,5 c) lg 200.

00.3.5. Ratkaise epäyhtälö $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} \le 0$

00.3.6. Sievennä $\left(1 - \dfrac{1}{x + 2}\right) : \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x}$

00.3.7. Määritä vakioiden a ja b arvot, kun polynomin $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + b$ tekijänä on $x + 2$ ja polynomi on jaollinen binomilla $x - 2$.

1. a) $\lg 4 = 0{,}6021$ ja $\ln 3 = 1{,}099$ b) $\log_a a^3 = 3$ c) $\lg \dfrac{20}{a} + \lg \dfrac{a}{2} = \lg \dfrac{20}{a} \cdot \dfrac{a}{2} = \lg 10 = 1$

2.
$$\begin{array}{rrrrr}
 & 6x^2 & -\ 17x & +\ 5 & \\
\hline
3x - 2\ | & 18x^3 & -\ 63x^2 & +\ 49x & -\ 10 \\
 & -18x^3 & \pm\ 12x^2 & & \\
\cline{2-3}
 & & -\ 51x^2 & 49x & \\
 & & -\ 51x^2 & -\ 34x & \\
\cline{3-4}
 & & & 15x & -\ 10 \\
 & & & 15x & -\ 10
\end{array}$$
V: $6x^2 - 17x + 5$

3. $\dfrac{8}{x^2 - 2x} + 1 = \dfrac{4}{x - 2}$; $\dfrac{8}{x(x - 2)} + 1 = \dfrac{4}{x - 2}$ || $\cdot\, x(x - 2)$ MJ: $x \ne 0$ ja $x \ne 2$

$8 + x(x - 2) = 4x$; $8 + x^2 - 2x - 4x = 0$; $x^2 - 6x + 8 = 0$; $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \dfrac{6 \pm 2}{2}$ $x = 4$ (tai $x = 2$)

4. Tiedetään, että $\lg 5 = 2$ ja $\lg 10 = 1$ a) $\lg 50 = \lg 5\cdot 10 = \lg 5 + \lg 10 = a + 1$
b) $\lg 0{,}5 = \lg 5/10 = \lg 5 - \lg 10 = a - 1$ c) $\lg 200 = \lg 1000/5 = \lg 1000 - \lg 5 = \lg 10^3 - \lg 5 = 3 - a$

5. $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} \le 0$

OS: NK $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$; $x = 2$ tai $x = 1$ KUV. YAP +++1 --- 2 +++

NIM: NK $4 - x^2 = 0$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$ KUV. AAP --- -2 +++ 2 ---

OS :	+ + +	| + + +	• - - -	• + + +
NIM:	- - -	o + + +	| + + +	o - - -
ML :	- - -	o + + +	• - - -	o| - - -
	-2	1	2	

V : $x < -2$ tai $x \ge 1$ ja $x \ne 2$

6. $\left(1 - \dfrac{1}{x + 2}\right) : \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x} = \left(\dfrac{x + 2}{x + 2} - \dfrac{1}{x + 2}\right) : \dfrac{(x + 1)(x - 1)}{x(x + 2)} = \dfrac{x + 2 - 1}{x + 2} \cdot \dfrac{x(x + 2)}{(x + 1)(x - 1)}$
$= \dfrac{(x + 1)x(x + 2)}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)} = \dfrac{x}{x - 1}$

7. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + b$, jossa 2 tuntematonta a ja b. Tarvitaan 2 yhtälöä
$\begin{cases} x + 2 \text{ on tekijä} \\ \text{jaollinen } (x - 2)\text{:lla} \end{cases}$; $\begin{cases} P(-2) = 0 \\ P(2) = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -16 - 12 - 2a + b = 0 \\ 16 - 12 + 2a + b = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -2a + b = 28 \\ 2a + b = -4 \end{cases}$
$2b = 24$; $b = 12$; $2a + 12 = -4$; $2a = -16$; $a = -8$ V: $a = -8$ ja $b = 12$

01.1.1. Ratkaise yhtälö a) $2x^2 - 8x = 0$ b) $2x^2 - 8 = 0$ c) $2x^2 - 15x - 8 = 0$

01.1.2. Sievennä lauseke a) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x - 3}{4}$ b) $\dfrac{a^2 - 1}{a} : \dfrac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - a}$

01.1.3. Ratkaise epäyhtälöt a) $3x^2 - 48 < 0$ b) $3 - 2x - x^2 < 0$

01.1.4. Sievennä tarkka arvo lausekkeelle a) $49^{3/2}$ b) $\sqrt[3]{27a^6}$ c) $\log_{81} 27$

01.1.5. Ratkaise epäyhtälö $2^{1-x} > \sqrt[3]{4}$

01.1.6. Millä k:n arvoilla yhtälöllä $x(x^2 - 4x + 12) = kx$ on kolme erisuurta reaalista ratkaisua?

01.1.7. Ratkaise epäyhtälö $(x + 5)(2x - 1)(3 - x) \ge 0$

01.1.8. Määritä vakio a siten, että polynomilla $x^3 - ax - 12$ on tekijänä $x + 2$. Mikä on tällöin toinen tekijä?

01.1.9. Ratkaise yhtälö $\log_2 x + \log_2 (x - 3) = 2$

01.1.10. Olkoon A kaikkien muotoa $\frac{1}{n}$ (, missä $n \in Z_+$,) olevien murtolukujen joukko. Murtoluku $\frac{1}{6}$ voidaan kirjoittaa kahden A:han kuuluvan erisuuren luvun summana. Mitkä ovat nämä kahden luvun summat, kun niitä on kaikkiaan neljä erilaista paria? Perustele, miksei voi olla muita.

1. a) $2x^2 - 8x = 0$; $2x(x - 4) = 0$; $2x = 0$ tai $x - 4 = 0$; $x = 0$ tai $x = 4$
b) $2x^2 - 8 = 0$; $2x^2 = 8 \;||: 2$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$
c) $2x^2 - 15x - 8 = 0$; $x = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 64}}{4} = \frac{15 \pm \sqrt{289}}{4} = \frac{15 \pm 17}{4}$; $x = 8$ tai $x = -½$

2. a) $\frac{x}{2} - \frac{x - 3}{4} = \frac{2x}{4} - \frac{x - 3}{4} = \frac{2x - (x - 3)}{4} = \frac{2x - x + 3}{4} = \frac{x + 3}{4}$
b) $\frac{a^2 - 1}{a} : \frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - a} = \frac{(a + 1)(a - 1)}{a} : \frac{(a - 1)^2}{a(a - 1)} = \frac{(a + 1)(a - 1)}{a} \cdot \frac{a(a - 1)}{(a - 1)^2} = a + 1$

3. a) $3x^2 - 48 < 0$; NK: $3x^2 - 48 = 0$; $x^2 = 16$; $x = \pm 4$; YAP +++ -4 --- 4 +++ V: $-4 < x < 4$
b) $3 - 2x - x^2 < 0 \;|| \cdot(-1)$; $x^2 + 2x - 3 > 0$; NK: $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$; $x = 1$ tai $x = -3$
AAP : --- -3 +++ 1 --- V : $x < -3$ tai $x > 1$

4. a) $49^{3/2} = (49)^{3/2} = (\sqrt{49})^3 = (7)^3 = 343$; b) $\sqrt[3]{27a^6} = 3a^2$
c) $\log_{81} 27 = x$; $81^x = 27$; $(3^4)^x = 3^3$; $3^{4x} = 3^3$; $4x = 3$; $x = ¾$

5. $2^{1-x} > \sqrt[3]{4}$; $2^{1-x} > 4^{1/3}$; $2^{1-x} > (2^2)^{1/3}$; $2^{1-x} > 2^{2/3}$; $1 - x > 2/3$; $-x > -1/3$; $x < 1/3$

6. $x(x^2 - 4x + 12) = kx \;||: x$; $x = 0$ tai $x^2 - 4x + 12 = k$. Täten yksi ratkaisu on $x = 0$.
Yhtälöllä on kolme erisuurta reaalista ratkaisua, jos jälkimmäisellä yhtälöllä on kaksi erisuurta ratkaisua, joista kumpikaan ei ole nolla (ts $k \neq 12$). $x^2 - 4x + (12 - k) = 0$
$D > 0$; $16 - 4(12 - k) > 0 \;||: 4$; $4 - 12 + k > 0$; $k > 8$: V: $k > 8$ ja $k \neq 12$

7. $(x + 5)(2x - 1)(3 - x) \geq 0$ NK : $x + 5 = 0$ tai $2x - 1 = 0$ tai $3 - x = 0$; $x = -5$ tai $x = ½$ tai $x = 3$
KUV: jos poistetaan sulut kertomalla tulee x^3:n termiksi $x \cdot 2x \cdot (-x) = -2x^3$
kuvaaja tulee vasemmalta ylhäältä ja menee oikealle alas +++ -5 --- ½ +++ 3 ---
V: $x \leq -5$ tai $½ \leq x \leq 3$

8. $x^3 - ax - 12$ on tekijänä $x + 2 \Leftrightarrow (x^3 - ax - 12)$:n nollakohta on $x = -2$
$(-2)^3 - a \cdot (-2) - 12 = 0$; $-8 + 2a - 12 = 0$; $2a = 20$; $a = 10$
Jakamalla jakokulmassa

$$\begin{array}{r|llll}
 & x^2 & & -2x & -6 \\ \hline
x + 2 & x^3 & & -10x & -12 \\
 & \underline{x^3} & \underline{+2x^2} & & \\
 & & -2x^2 & -10x & \\
 & & \underline{-2x^2} & \underline{-4x} & \\
 & & & -6x & -12 \\
 & & & \underline{-6x} & \underline{-12}
\end{array}$$

V: $x^3 - 10x - 12 = (x + 2)(x^2 - 2x - 6)$

9. $\log_2 x + \log_2 (x - 3) = 2$; MJ : $x > 0$ JA $x - 3 > 0$ ts $x > 3$
$\log_2 x(x - 3) = \log_2 2^2$;$x(x - 3) = 4$; $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$; $x = 4$, $(x = -1)$

10. $\frac{1}{6} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Olkoon edellinen suurempi(, joka on oltava vähemmän kuin luku mutta enemmän kuin puolet luvusta), joten $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{6}$ ts. $6 < x < 12$
Kokeillaan eri x: arvoja, saadaanko y:ksi kokonaisluku
$x = 7 : \frac{1}{y} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$; $x = 8 : \frac{1}{y} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$; $x = 9 : \frac{1}{y} = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$
$x = 10 : \frac{1}{y} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$; $x = 11 : \frac{1}{y} = \frac{1}{6} - \frac{1}{11} = \frac{5}{66}$ (ei käy)(tai 4 paria tuli jo)
V : $\frac{1}{7} + \frac{1}{42}$, $\frac{1}{8} + \frac{1}{24}$, $\frac{1}{9} + \frac{1}{18}$ ja $\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$

01.2.1. Ratkaise yhtälö $x^2 - 2x - 15 = 0$, .

01.2.2. Määritä vakio k siten, että yhtälöllä $x^2 + 2x + (2k - 7) = 0$ ei ole reaalisia ratkaisuja.

01.2.3. Sievennä ilman laskinta a) $\lg 40 + \lg 25$ b) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{16}$

01.2.4. Määritä vakio a siten, että polynomilla $x^2 - ax - 1$ on tekijä $x + 3$.

01.2.5. Ratkaise epäyhtälö $2^{1-x} > \sqrt[3]{4}$.

01.2.6. Millä muuttujan arvoilla funktio $f(x) = \lg \frac{x + 1}{x - 1}$ on määritelty ?

01.2.7. Ratkaise yhtälö $2 \log_2 (x - 2) = \log_2 9$.

01.2.8. Ratkaise epäyhtälö $(x + 5) (2x - 1) (3 - x) \geq 0$.

01.2.9. Sievennä lauseke $[1 - a - \frac{a(1 - a)}{3}] : (a - 3)$.

01.2.10. Osoita, että jos r on yhtälön $x^2 - 6x + 7 = 0$ ratkaisu, niin myös $\frac{7}{r}$ on yhtälön ratkaisu.

1. $x^2 - 2x - 15 = 0$; $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2}$; x = 5 tai x = -3

2. $x^2 + 2x + (2k - 7) = 0$ ei ole reaalisia ratkaisuja, jos D < 0.
$4 - 4(2k - 7) < 0$; $4 - 8k + 28 < 0$; $- 8k < - 32 \;||: (-8)$; $k > 4$

3. a) $\lg 40 + \lg 25 = \lg 40 \cdot 25 = \lg 1000 = \lg 10^3 = 3$
b) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{16} = 4^{1/3} \cdot 16^{1/6} = (2^2)^{1/3} \cdot (2^4)^{1/6} = 2^{2/3} \cdot 2^{4/6} = 2^{2/3} \cdot 2^{2/3} = 2^{4/3} = 2 \cdot 2^{1/3} = 2\sqrt[3]{2}$

4. $x^2 - ax - 1$:llä on tekijänä (x + 3), jos x = - 3 on sen nollakohta
$(-3)^2 - a(-3) - 1 = 0$; $9 + 3a - 1 = 0$; $3a = -8$; $a = - 8/3$

5. $2^{1-x} > \sqrt[3]{4}$; $2^{1-x} > 4^{1/3}$; $2^{1-x} > (2^2)^{1/3}$; $2^{1-x} > 2^{2/3}$; $1-x > 2/3$; $-x > 2/3 -1$; $x < 1/3$

6. $f(x) = \lg \frac{x + 1}{x - 1}$ on määritelty , kun $\frac{x + 1}{x - 1} > 0$
OS: NK x + 1 = 0 ; x = -1 , KUV: nous. suora --- -1 +++
NIM: NK x - 1 = 0 ; x = 1 , KUV: nous suora --- 1 +++
V : x < -1 tai x > 1

OS	---	+++	+++
NIM	---	---	+++
ML	+++	---	+++
	-1	1	

7. $2\log_2 (x - 2) = \log_2 9$. MJ: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$
$\log_2 (x - 2)^2 = \log_2 9$; $(x - 2)^2 = 9 \;|| \sqrt{(\,)}$; $x - 2 = \pm 3$; $x = 2 \pm 3$; x = 5 (tai x = -1)

8. $(x + 5)(2x - 1)(3 - x) \geq 0$;NK: x + 5 = 0 tai 2x - 1 = 0 tai 3 - x = 0 ; x = -5 tai x = ½ tai x = 3
KUV: 3. asteen polynomi, jonka kuvaaja tulee vasemmalta ylhäältä
+++ -5 --- ½ +++ 3 --- V: $x \leq -5$ tai $½ \leq x \leq 3$

9. $[1 - a - \frac{a(1 - a)}{3}] : (a - 3) = [\frac{3(1 - a)}{3} - \frac{a(1 - a)}{3}] : (a - 3) = \frac{3(1 - a) - a(1 - a)}{3} : (a - 3) = \frac{(3 - a)(1 - a)}{3} \cdot \frac{1}{a - 3}$
$= \frac{-1(1 - a)}{3} = \frac{a - 1}{3}$

10. $x^2 - 6x + 7 = 0$ ratkaisu on x = r , joten $r^2 - 6r + 7 = 0$. Sijoitetaan yhtälöön $x = \frac{7}{r}$ $(r \neq 0)$
$(\frac{7}{r})^2 - 6 \cdot \frac{7}{r} + 7 = \frac{49}{r^2} - \frac{42}{r} + 7 = \frac{49}{r^2} - \frac{42r}{r^2} + \frac{7r^2}{r^2} = \frac{49 - 42r + 7r^2}{r^2} = \frac{7(7 - 6r + r^2)}{r^2} = \frac{7 \cdot 0}{r^2} = 0$, joten $x = \frac{7}{r}$
toteuttaa myös yhtälön

02.1.1. Ratkaise yhtälö a) $9x^2 - 4 = 0$, b) $x^2 + 2x = 0$

02.1.2. Laske a) $0{,}25^{1/4} \cdot 64^{1/4}$, b) $\log_4 1 + \log_3 3 + \log_2 4$.

02.1.3. Ratkaise epäyhtälö $-2(x - 1)(x + 2) \geq 0$

02.1.4. Määritä vakio a siten, että polynomi $2x^3 - x^2 - 13x + a$ on jaollinen binomilla x - 1
Mikä on jakojäännös, kun saatu polynomi jaetaan binomilla (x + 1)?

02.1.5. Ratkaise epäyhtälö $x^3 + x^2 - 5x - 5 > 0$

02.1.6. Määritä vakio a siten, että yhtälöllä $ax^2 + ax + (a - 1) = 0$ on täsmälleen yksi ratkaisu. Mikä on tämä ratkaisu?

02.1.7. Ratkaise epäyhtälö $\frac{x - 2}{x} \geq \frac{x}{x - 2}$.

02.1.8. Olkoon luku a positiivinen ja $a \neq 1$. Osoita, että lausekkeen $\frac{\lg a + \lg a^3}{\lg \sqrt{a}}$ arvo ei riipu luvusta a.

02.1.9. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $\frac{x}{x - 1} = \frac{x + a}{x + 1}$ ei ole ratkaisua ?

02.1.10. Suorakulmion sivujen pituuksien suhde on 5 : 4. Sen nurkista leikataan pois neliöt, joiden sivu on 3 cm. Jäljellä oleva osa taitetaan suorakulmaisen särmiön muotoiseksi kannettomaksi laatikoksi. Laske laatikon pohjasärmien pituudet, kun laatikon tilavuus on 420 cm^3.

1. a) $9x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 9x^2 = 4 \,||: 9 \Leftrightarrow x^2 = 4/9 \Leftrightarrow x = \pm 2/3$
b) $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ tai $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ tai $x = -2$

2. a) $0{,}25^{1/4} \cdot 64^{1/4} = (0{,}25 \cdot 64)^{1/4} = 16^{1/4} = \sqrt[4]{16} = 2$ b) $\log_4 1 + \log_3 3 + \log_2 4 = 0 + 1 + \log_2 2^2 = 1 + 2 = 3$

3. $-2(x - 1)(x + 2) \geq 0$ Nollakohdat saa helpoiten tästä muodosta, ja x^2:n kerroin on -2.
NK: $-2(x - 1)(x + 2) = 0$; $x - 1 = 0$ tai $x + 2 = 0$; $x = 1$ tai $x = -2$
KUV: on alaspäin aukeava paraabeli - - - -2 + + + 1 - - - Vastaus : $-2 \leq x \leq 1$.

4. Polynomi on jaollinen (x - 1):llä jos $2x^3 - x^2 - 13x + a\,|_{x=1} = 2 - 1 - 13 + a = 0$; $a = 12$
JJ = $2x^3 - x^2 - 13x + 12\,|_{x=-1} = -2 -1 + 13 + 12 = 22$

5. $x^3 + x^2 - 5x - 5 > 0$ NK: $(x^3 + x^2) - (5x + 5) = 0$; $x^2(x + 1) - 5(x + 1) = 0$; $(x^2 - 5)(x + 1) = 0$
$x^2 = 5$ tai $x = -1$; $x = \pm\sqrt{5}$ tai $x = -1$
KUV: 3. asteen polynomifunktio, joka tulee alhaalta vasemmalta ja menee ylös oikealle
--- $-\sqrt{5}$ + + + -1 - - - $\sqrt{5}$ + + + V: $-\sqrt{5} < x < -1$ tai $x > \sqrt{5}$

6. $ax^2 + ax + a - 1 = 0$ on täsmälleen yksi ratkaisu, jos yhtälön diskriminantti = 0
$a^2 - 4 \cdot a \cdot (a - 1) = 0$; $a^2 - 4a^2 + 4a = 0$; $-3a^2 + 4a = 0$; $a(-3a + 4) = 0$; ($a = 0$ tai) $-3a + 4 = 0$ $-3a = -4$; $a = 4/3$
($a = 0$ ei kelpaa, koska yhtälö silloin $-1 = 0$ eli ei II asteen yhtälö
$4/3x^2 + 4/3x + 4/3 - 1 = 0 \,|| \cdot 3$; $4x^2 + 4x + 1 = 0$; $(2x + 1)^2 = 0$; $2x + 1 = 0$; $x = -½$

7. $\frac{x - 2}{x} \geq \frac{x}{x - 2}$; $\frac{x - 2}{x} - \frac{x}{x - 2} \geq 0$; $\frac{(x - 2)^2}{x(x - 2)} - \frac{x^2}{x(x - 2)} \geq 0$; $\frac{x^2 - 4x + 4 - x^2}{x(x - 2)} \geq 0$; $\frac{-4x + 4}{x(x - 2)} \geq 0$
OS: NK $-4x + 4 = 0$; $-4x = -4$; $x = 1$ KUV: laskeva suora + + + 1 - - -
NIM: NK $x(x - 2) = 0$; $x = 0$ tai $x = 2$ KUV: yl. auk. par. + + + 0 - - - 2 + + +
OS: + + + + + + 1 - - - - - -
NIM:+ + + 0 - - - - - - 2 + + +
ML: + + + 0 - - - 1 + + + 2 - - - V: $x < 0$ tai $1 \leq x < 2$

8. $\frac{\lg a + \lg a^3}{\lg \sqrt{a}} = \frac{\lg a + 3\lg a}{\lg a^{½}} = \frac{4\lg a}{½\lg a} = \frac{4}{½} = 8$, joka ei riipu a:sta

9. $\frac{x}{x - 1} = \frac{x + a}{x + 1} \,|| \cdot (x - 1)(x + 1)$ MJ: $x \neq \pm 1$; $x(x + 1) = (x + a)(x - 1)$; $x^2 + x = x^2 - x + ax - a$
$2x - ax = -a \,|| \cdot (-1)$; $ax - 2x = a$; $(a - 2)x = a$; $x = \frac{a}{a - 2}$
Yhtälöllä ei ratkaisua, jos nim = 0 eli a = 2 tai x ei kuulu määrittelyjoukkoon
$x = 1$; $\frac{a}{a - 2} = 1$; $a = a - 2$; $2 = 0$ ei ratkaisua a:lle
$x = -1$; $\frac{a}{a - 2} = -1$; $a = -a + 2$; $2a = 2$; $a = 1$ V: $a = 2$ tai $a = 1$

10. Olkoon sivujen suhdeyksikkö = x, joten sivut ovat 5x ja 4x. Kun nurkista leikataan 3 (cm) sivuiset neliöt, jää laatikon sivuiksi 5x - 6 ja 4x - 6 ja laatikon korkeudeksi 3
$V = 420$; $(5x - 6)(4x - 6) \cdot 3 = 420$; $(5x - 6)(4x - 6) = 140$; $20x^2 - 30x - 24x + 36 = 140$
$20x^2 - 54x - 104 = 0$: $x = \frac{54 \pm \sqrt{2916 + 8320}}{40} = \frac{54 \pm 106}{40}$; $x = 4$ (tai $x = - 52/40$)
Laatikon sivut $5 \cdot 4$ cm - 6 cm = 14 cm ja $4 \cdot 4$ cm - 6 cm = 10 cm V:14 cm x 10 cm x 3 cm

02.2.1. Ratkaise a) $(x - 5)(1 - 3x) = 0$ b) $(x - 5)(1 - 3x) = 15$

02.2.2. Sievennä lauseke $\frac{x^2 - 9}{3x} : \frac{x^2 - 3x}{6}$

02.2.3. Määritä vakio a siten, että polynomi $P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x + a$ on jaollinen binomilla $x - 3$.

02.2.4. a) Sievennä $\sqrt[3]{64a^6}$ b) $49^{-1½}$ c) Jaa tekijöihin $a^3 + 2a^2 + a$

02.2.5. Millä x:n arvoilla funktio f on määritelty, kun a) $f(x) = \sqrt[4]{6 - x - x^2}$ b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 2x}}$

02.2.6. Ratkaise yhtälö a) $\log_4 x = -2$, b) $3 \cdot 2^{x + 1} = 12$.

02.2.7. Termospulloon kaadetun kuuman nesteen lämpötila x tunnin kuluttua on $20 + 80 \cdot 2^{-0,086x}$ (C °).
a) Mikä on nesteen lämpötila 6 tunnin kuluttua ?b) Missä ajassa lämpötila laskee 70 asteeseen ?

02.2.8. Määritä se neljännen asteen polynomi P(*x*), jolla on tekijä $x^2 + 1$, nollakohdat 1, -2 ja jolla P(0) = 4.

02.2.9. Millä luvun n kokonaislukuarvolla tulon $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{n - 1}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ arvo = 100?

02.2.10. Ratkaise epäyhtälö $x^3 - x^2 - x \geq |x|$, kun a) $x \geq 0$ b) $x \leq 0$.

---

1. a) $(x - 5)(1 - 3x) = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0$ tai $1 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 5$ tai $x = 1/3$
b) $(x - 5)(1 - 3x) = 15$; $x - 3x^2 - 5 + 15x = 15$; $3x^2 - 16x + 20 = 0$
$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{6} = \frac{16 \pm 4}{6}$ $x = \frac{10}{3}$ tai $x = 2$

---

2. $\frac{x^2 - 9}{3x} : \frac{x^2 - 3x}{6} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{3x} \cdot \frac{6}{x(x - 3)} = \frac{(x + 3)\cdot 2}{x^2} = \frac{2x + 6}{x^2}$

---

3. Polynomi on jaollinen (x - 3):lla, jos P(3) = 0
$2\cdot 3^3 - 3^2 - 13\cdot 3 + a = 0$; $54 - 9 - 39 + a = 0$; $a = -6$

---

4. a) $\sqrt[3]{64a^6} = 4a^2$ b) $49^{-1½} = \left(\frac{1}{49}\right)^{3/2} = \left(\sqrt{\frac{1}{49}}\right)^3 = \left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1}{343}$
c) $a^3 + 2a^2 + a = a(a^2 + 2a + 1) = a(a + 1)^2$

---

5. a) $f(x) = \sqrt[4]{6 - x - x^2}$; MJ: $6 - x - x^2 \geq 0$ NK: $x^2 + x - 6 = 0$
$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$; x = 2 tai x = -3 , KUV: AAP - - - -3 + + + 2 - - - V: $-3 \leq x \leq 2$
b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 2x}}$; MJ $x^2 - 2x \neq 0$; $x(x - 2) \neq 0$; $x \neq 0$ tai $x \neq 2$

---

6. a) $\log_4 x = -2$; $4^{-2} = x$; $x = \frac{1}{16}$
b) $3 \cdot 2^{x + 1} = 12$ || : 3 $\Leftrightarrow 2^{x+1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^2 \Leftrightarrow x + 1 = 2$; $x = 1$

---

7. a) $t(x) = 20 + 80 \cdot 2^{-0,086x}$; $t(6) = 20 + 80\cdot 2^{-0,086\cdot 6} = 75,9°$
b) $t(x) = 70$; $20 + 80\cdot 2^{-0,086x} = 70$; $80\cdot 2^{-0,086x} = 50$ ||: 80 ; $2^{-0,086x} = 0,625$ || lg ( )
$-0,086x\cdot \lg 2 = \lg 0,625$ || : $-0,086\cdot \lg 2 \Leftrightarrow x = 7,9$ (h)

---

8. NK : x = 1 ja x = -2 $\Rightarrow$ tekijät ovat x - 1 ja x + 2
$P(x) = a(x^2 + 1)(x - 1)(x + 2)$; $P(0) = 4$; $a\cdot 1\cdot(-1)\cdot 2 = 4$; $a = -2$
V: $P(x) = -2(x^2 + 1)(x - 1)(x + 2) = -2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 4$

---

9. $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{3}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 100 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n} = 100$
$\Leftrightarrow \frac{n+1}{2} = 100 \Leftrightarrow n+1 = 200 \Leftrightarrow n = 199$

---

10. a) $x^3 - x^2 - x \geq |x|$, kun $x > 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x \geq x \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x \geq 0$
NK: $x(x^2 - x - 2) = 0$; x = 0 tai x = 2 tai x = -1 KUV: --- -1 +++ 0 --- 2 +++ V: $x \geq 2$ tai $x = 0$
b) $x^3 - x^2 - x \geq |x|$, kun $x < 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x \geq -x \Leftrightarrow x^3 - x^2 \geq 0$
NK: $x^2(x - 1) = 0$; $x^2 = 0$ tai $x - 1 = 0$; x = 0 tai x = 1 KUV: --- 0 --- 1 +++ V: x = 0

02.3.1. Muuta juurimuotoon a) $5^{1/3}$ b) $10^{-½}$. Esitä potenssina c) $\sqrt{3}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$

02.3.2. Laske tarkka arvo lausekkeelle a) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{64}}$ b) lg 10 000 c) $4^{-2½}$

02.3.3. Ratkaise yhtälö $\dfrac{3\cdot 9^x}{3^x} = 81$

02.3.4. Olkoon polynomi $P(x) = x^2 + 20x - 68$. a) Mikä on polynomin arvo, kun x = 11. b) Millä x:n arvoilla polynomi saa arvon 1?

02.3.5. Millä a:n arvoilla yhtälöllä $3x^2 + ax + 4 = 0$ on kaksinkertainen reaalinen ratkaisu?
b) Millä a:n arvoilla paraabelin $y = ax^2 + 6x + a$ kuvaaja on kokonaan x-akselin yläpuolella?

02.3.6. a) Sievennä $\dfrac{x}{1 - \dfrac{1}{1 - x}}$. b) Mikä on lausekkeen arvo, kun x = 11?

02.3.7. Ratkaise epäyhtälö $x + \dfrac{1}{x - 3} < 1$

02.3.8. Kansantalous kasvaa vuosittain 2,5%. Miten monta prosenttia kansantalous on kasvanut 10 vuodessa? Monenko vuoden kuluttua kansantalous on tullut 1,5-kertaiseksi?

02.3.9. Äänen voimakkuutta kuvataan desibeliasteikolla seuraavasti: Voimakkuus desibelinä on $10\cdot\lg\dfrac{I}{I_0}$, missä I on tutkittavan äänen intensiteetti (wattia/neliömetri) ja I_0 on kuulokynnys eli ääni, joka vielä kuullaan ja sen intensiteetti on 10^{-12} W/m^2. Mikä on rock-konsertin äänen voimakkuus desibeleinä, kun sen intensiteetti on 1 W/m^2?

02.3.10. Mikä on a, kun yhtälön $x^3 + 2x^2 - 3x + a = 0$ yksi nollakohta on x = -2? Mitkä ovat tällöin yhtälön muut ratkaisut?

1. a) $5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$ b) $10^{-½} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ c) $\sqrt{3} = 3^{½}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} = 4^{-1/3}$

2. a) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{64}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{4^3}} = \dfrac{1}{4}$ b) lg 10 000 = lg 10^4 = 4 c) $4^{-2½} = \dfrac{1}{4^{2½}} = \dfrac{1}{4^2\cdot\sqrt{4}} = \dfrac{1}{16\cdot 2} = \dfrac{1}{32}$

3. $\dfrac{3\cdot 9^x}{3^x} = 81$; $\dfrac{3\cdot(3^2)^x}{3^x} = 3^4$; $3^{1+2x-x} = 3^4$; 1 + x = 4 ; x = 3

4. $P(x) = x^2 + 20x - 68$; $P(11) = 11^2 + 20\cdot 11 - 68 = 121 + 220 - 68 = 273$
$P(x) = 1$; $x^2 + 20x - 68 = 1$; $x^2 + 20x - 69 = 0$; $x = \dfrac{-20 \pm \sqrt{400 + 276}}{2} = \dfrac{-20 \pm 26}{2}$
x = 3 tai x = -23

5. a) Yhtälöllä $3x^2 + ax + 4 = 0$ on kaksinkertainen reaalinen ratkaisu, jos sen D > 0
$a^2 - 4\cdot 3\cdot 4 > 0$; $a^2 > 16\cdot 3$; $|a| > 4\sqrt{3}$; $a > 4\sqrt{3}$ tai $a < -4\sqrt{3}$
b) Paraabelin $y = ax^2 + 6x + a$ kuvaaja on kokonaan x-akselin yläpuolella, kun sillä ei ole reaalisia nollakohtia, ts. D < 0 : $36 - 4\cdot a\cdot a < 0$; $a^2 > 9$; $|a| > 3$; a > 3 tai a < -3

6. a) $\dfrac{x}{1 - \dfrac{1}{1 - x}} = \dfrac{x(1 - x)}{1 - x - 1} = \dfrac{x(1 - x)}{-x} = x - 1$ b) kun x = 11, on lausekkeen arvo = 11 - 1 = 10

7. $x + \dfrac{1}{x - 3} < 1$; $\dfrac{x(x - 3)}{x - 3} + \dfrac{1}{x - 3} - \dfrac{x - 3}{x - 3} < 0$; $\dfrac{x^2 - 3x + 1 - x + 3}{x - 3} < 0$; $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 3} < 0$
OS: $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0$ NIM: nk: x - 3 = 0 ; x = 3 ; kuv: nouseva suora --- 3 +++
Osamäärä on negatiivinen, kun x < 3 ja $x \neq 2$

8. Olkoon kansantalouden arvo nyt A. Arvo n vuoden kuluttua on $A_n = A\cdot 1{,}025^n$
$A_{10} = A\cdot 1{,}025^{10} = 1{,}28A$, joten kansantalous on kasvanut 28%
$A_n = 1{,}5A$; $A\cdot 1{,}025^n = 1{,}5A$; $1{,}025^n = 1{,}5$ || lg ( ) ; lg $1{,}025^n$ = lg 1,5 ; n·lg 1,025 = lg 1,5
0,0107n = 0,176 ; n = 16,4. V: 16 vuoden kuluttua.

9. Voimakkuus = $10 \cdot \lg \frac{I}{I_0} = 10 \cdot \lg \frac{1\ \text{W}}{10^{-12}\ \text{W}} = 10 \cdot \lg 10^{12} = 10 \cdot 12 = 120$ (db)
10. $x = -2$ on yhtälön $x^3 + 2x^2 - 3x + a = 0$ ratkaisu ; $-8 + 8 + 6 + a = 0$; $a = -6$ $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0$; $x^2(x + 2) - 3(x + 2) = 0$; $(x^2 - 3)(x + 2) = 0$; $x^2 = 3$ (tai $x = -2$) $x = \pm\sqrt{3}$