

# PITKÄ MATEMATIIKKA

KURSSI MA1  
FUNKTIOT JA YHTÄLÖT 1

Markku Männikkö  
2003

## Sisällysluettelo:

1. Lukujoukot.....	1
1.1 Luonnolliset luvut.....	1
1.2 Kokonaisluvut.....	1
1.3 Rationaaliluvut.....	3
1.4 Reaaliluvut.....	5
2. Potenssi.....	7
2.1 Potenssin määritelmä ja arvon laskeminen.....	7
2.2 Potenssin laskusääntöjä.....	7
2.3 Luvun kymmenpotenssimuoto.....	8
2.4 Eksponentiaalinen malli.....	9
3. Polynomi.....	9
3.1 Polynomien käsite.....	9
3.2 Polynomien yhteen- ja vähennyslasku.....	10
3.3 Polynomien kertolasku.....	10
3.4 Polynomien jakaminen monomilla.....	10
3.5 Binomien laskukaavat.....	10
3.6 Binomin muut potenssit.....	11
4. Funktiot.....	11
4.1 Lauseke ja funktio.....	11
4.2 Funktion määrittely- ja arvojoukko.....	12
4.3 Funktion nollakohta ja merkki.....	13
4.4 Lineaarinen funktio.....	14
4.5 Itseisarvo.....	15
4.6 Funktio matemaattisena mallina.....	16
4.7 Verrannollisuus.....	17
5. Ensimmäisen asteen yhtälöt.....	18
5.1 Peruskäsitteitä.....	18
5.2 Ensimmäisen asteen yhtälön ratkaiseminen.....	19
5.3 Ongelmanratkaisu yhtälöillä.....	20
5.4 Prosentti.....	20
5.5 Jakosuhteet.....	21
5.6 Itseisarvoyhtälö.....	22
6. Ensimmäisen asteen epäyhtälö.....	22
6.1 Peruskäsitteitä.....	22
6.2 Reaalilukuvälit.....	22
6.3 Ensimmäisen asteen epäyhtälön ratkaiseminen.....	23
6.4 Kaksoisepäyhtälö.....	24
6.5 Itseisarvoepäyhtälö.....	24
6.6 Epäyhtälöprobleemat.....	24
7. Ensimmäisen asteen yhtälöpari.....	24
7.1 Yhtälöparin ratkaisutapoja.....	24
7.2 Yhtälöpariprobleema.....	26
7.3 Yhtälöparin ratkaisujen erikoistapauksia.....	26
8. Neliöjuuri.....	27
8.1 Neliöjuuren käsite.....	27
8.2 Yhtälö $x^2 = a$ .....	27
8.3 Neliöjuuren arvo irrationaalinen.....	28
8.4 Neliöjuurifunktio.....	28
8.5 Neliöjuuren laskusääntöjä.....	28
8.6 Neliöjuuriluvuilla laskeminen.....	29
Vastaukset harjoitustehtäviin.....	30
Koetehtäviä aiemmilta vuosilta.....	34

# MA 1. Funktiot ja yhtälöt 1.

## 1. Lukujoukot

### 1.1. Luonnolliset luvut

#### 1. Luonnollisten lukujen joukko

Muodostuu luvuista 0, 1, 2, 3, ... . Joukon symbolina on kirjain N.

#### 2. Joukkosulkeet

Joukko voidaan ilmoittaa käyttäen joukon merkinä aaltosulkeita  $\{ \}$ . Esim.  $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Sulkeiden sisällä ilmoitetaan joukkoon kuuluvat luvut luettelemalla tai antamalla alkioiden toteuttama sääntö

#### 3. Alkio kuuluu joukkoon

Merkitään  $3 \in N$ , mikä tarkoittaa, että 3 on yksi joukon N alkioista.

1.1.1. Kuuluuko luku  $x = 3$  joukkoon a)  $A = \{1, 2, \dots\}$  b)  $B = \{x \mid x > 2\}$  c)  $C = \{x \mid 0 < x < 3\}$  d) N ?

2. Luettele joukon alkiot a)  $A = \{x \mid x \in N \text{ ja } x < 5\}$  b)  $B = \{x \in N \mid x \leq 5\}$  c)  $C = \{x \in N \mid x < 5 \text{ ja } x \geq 2\}$ .

3. Kuuluuko luku  $x$  joukkoon N, kun a)  $2x = 3$  b)  $2x = 4$  c)  $x^2 = 4$  d)  $x + 3 = 4$  ?

#### 4. Osajoukko on joukko on osa toisesta joukosta

Merkitään  $A \subset N$ , mikä tarkoittaa, että kaikki joukon A alkiot ovat myös joukon N alkioita.

4. Onko  $A \subset N$ , kun a)  $A = \{1, 2, 3, \dots\}$  b)  $A = \{3, 2, 1, \dots\}$

#### 5. Eri laskutoimitusten tulosten kuuluminen luonnollisten lukujen joukkoon

Kahden luonnollisen luvun YHTEEN- ja KERTOLASKUN tulos on myös luonnollinen luku.

5. Olkoon  $x \in N$ . Kuuluuko joukkoon N varmasti luku a)  $2x$  b)  $2 + x$  c)  $2x + 3$  d)  $2x/3$  e)  $2x^3$  ?

### 1.2. Kokonaisluvut

#### 1. Kokonaislukujen joukko

Muodostuu luvuista ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... . Joukon symbolina on Z

1.2.1. Luettele joukon alkiot a)  $A = \{x \in Z \mid x < 3\}$  b)  $B = \{x \in Z \mid x \geq -1\}$  c)  $C = \{x \in Z \mid x < 3 \text{ ja } x \geq -1\}$

2. Kuuluuko luku  $x$  joukkoon Z, kun a)  $2x = 3$  b)  $2x + 4 = 0$  c)  $x^2 - 4 = 0$  d)  $x^2 + 4 = 0$ .

#### 2. Kokonaislukujen yhteenlasku

SAMANMERKKISTEN lukujen a) etumerkki on yhteinen etumerkki ja b) itseisarvo on itseisarvojen summa

ERIMERKKISTEN lukujen a) etumerkki on suuremman etumerkki ja b) itseisarvo on itseisarvojen erotus

Useammasta luvusta voi laskea positiiviset yhteen, negatiiviset yhteen ja lopuksi näiden summa

3. Laske a)  $5 + 6$  b)  $-7 - 8$  c)  $9 - 4$  d)  $6 - 9$  e)  $1,2 - 3,4$  f)  $2 - 7 + 3 - 5 + 8 - 4$

#### 3. Kokonaislukujen kertolasku

Kahden SAMANMERKKISEN luvun etumerkki on + ja itseisarvo on itseisarvojen tulo

Kahden ERIMERKKISEN luvun etumerkki on - ja itseisarvo on itseisarvojen tulo

Useamman luvun tulon etumerkki on +, jos negatiivisia tekijöitä on parillinen määrä, -, jos pariton määrä

4. Laske a)  $5 \cdot (+6)$  b)  $-7 \cdot (-8)$  c)  $9 \cdot (-4)$  d)  $-9 \cdot 6$  e)  $(-1,2) \cdot (-5)$  f)  $-2 \cdot (-3) \cdot (+4) \cdot (-1)$

#### 4. Laskutoimitusten tulosten kuuluminen kokonaislukujen joukkoon

Kahden kokonaisluvun YHTEEN-, VÄHENNYS- ja KERTOLASKUN tulos on aina kokonaisluku.

5. Olkoon  $x \in Z$ . Kuuluuko joukkoon Z varmasti luku a)  $5 - x$  b)  $5 \cdot x$  c)  $5 : x$  d)  $1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \dots \cdot x^2 : x$

#### 5. Kokonaisluku (a) on jaollinen toisella kokonaisluvulla (b)

Jos tämä luku (a) jaettuna toisella (b) antaa tulokseksi kokonaisluvun. Ts.  $a/b$  on kokonaisluku.

Tai jos luku (a) voidaan esittää kahden kokonaisluvun tulona, jonka yhtenä tekijänä on toinen (b).  $a = n \cdot b$

6. Onko a) 6 jaollinen 3:lla b) 3 jaollinen 6:lla c) 125 jaollinen 11:lla?

#### 6. Jaollisuus ja tekijät

Luku on jaollinen kaikilla tekijöillään.

7. Määritä tekijät kokonaisluvulle a) 12 b) 54 c) 60.

7. Parillinen luku yleisesti

on muotoa  $2 \cdot n$ , missä  $n \in \mathbb{Z}$ , eli parillisessa luvussa on varmasti tekijänä luku 2.

8. Olkoon  $n \in \mathbb{Z}$ . Onko luku a)  $4n$  b)  $5n$  c)  $5n + 1$  d)  $6n^2$  e)  $6n + 2$  aina parillinen?

8. Pariton luku yleisesti

on muotoa  $2 \cdot n + 1$ , missä  $n \in \mathbb{Z}$

9. Olkoon  $n \in \mathbb{Z}$ . Onko luku a)  $4n + 1$  b)  $5n + 2$  c)  $2n^2 - 1$  d)  $2n^2 + 3$  aina pariton?

9. a:lla jaollinen luku yleisesti

on muotoa  $a \cdot n$ , missä  $n \in \mathbb{Z}$ .

10. Esitä yleisesti kaikki a) 3:lla b) 4:llä jaolliset luvut.

11. Esitä yleisesti kaikki kokonaisluvut, jotka 3:lla jaettaessa antaa jakojäännökseksi luvun 1.

10. Luvun todistaminen parilliseksi (parittomaksi)

Osoitetaan, että luku on muotoa 2 kertaa jokin kokonaisluku (2 kertaa jokin kokonaisluku + 1).

12. Olkoon  $x$  ja  $y$  parillisia. Osoita, että a)  $x + y$  b)  $3x + 5y$  on parillinen.

13. Olkoon  $x$  ja  $y$  parittomia. Osoita, että a)  $m + n$  on parillinen b)  $m \cdot n$  on pariton.

11. 2:lla jaollisuussääntö

Kokonaisluku on jaollinen 2:lla, jos luvun viimeinen numero on 0, 2, 4, 6 tai 8 eli jaollinen kahdella

14. Onko luku jaollinen 2:lla a) 68 b) 210 c) 201?

12. 3:lla jaollisuussääntö

Kokonaisluku on jaollinen 3:lla, jos luvun numeroiden summa on jaollinen kolmella

15. Onko luku jaollinen 3:lla a) 68 b) 210 c) 201?

13. 4:llä jaollisuussääntö

Kokonaisluku on jaollinen 4:lla, jos luvun kahden viimeisen numeron muodostama luku on jaollinen 4:lla

16. Onko luku 4:lla jaollinen a) 68 b) 8348 c) 13 886?

14. 5:llä jaollisuussääntö

Kokonaisluku on jaollinen 5:llä, jos luvun viimeinen numero on 0 tai 5.

17. Onko luku 5:lla jaollinen a) 68 b) 135 c) 2345 d) 1234567890?

15. 6:lla jaollisuussääntö

Kokonaisluku on jaollinen 6:lla, jos se on jaollinen sekä 2:lla että 3:lla.

18. Onko luku 6:lla jaollinen a) 210 b) 736 b) 1234?

\*16. 7:llä jaollisuussääntö

Tapa 1: Poistetaan luvusta viimeinen numero. Jäännösluvusta vähennetään edellinen viimeinen numero kahdella kerrottuna. Jos näin saatu luku on jaollinen 7:llä, oli alkuperäinenkin luku jaollinen 7:llä.

Tapa 2: Jaa luku lopusta 3 numeron ryhmiin. Laske luku 1. ryhmä - 2. ryhmä + 3. ryhmä - 4. ryhmä + ...

Jos näin saatu luku on jaollinen 7:llä, on alkuperäinenkin luku jaollinen 7:llä.

19. Onko luku 7:llä jaollinen a) 364 b) 13 251 c) 12345678901234?

17. 8:lla jaollisuussääntö

Kokonaisluku on jaollinen 8:lla, jos luvun kolmen viimeisen numeron muodostama luku on jaollinen 8:lla.

20. Onko luku 8:lla jaollinen a) 364 b) 1996 c) 12345678901234?

18. 9:llä jaollisuussääntö

Kokonaisluku on jaollinen 9:llä, jos luvun numeroiden summa on jaollinen 9:llä

21. Onko luku 9:llä jaollinen a) 3572 b) 25 371 c) 12345678901234?

19. 10:llä jaollisuussääntö

Kokonaisluku on jaollinen 10:llä, jos luvun viimeinen numero on 0.

\*20.11:lla jaollisuussääntö

Kokonaisluku on jaollinen 11:lla, jos luvun  $(1. + 3. \text{ numero} + \dots) - (2. + 4. \text{ numero} + \dots)$  on jaollinen 11:lla.

22. Onko luku 11:lla jaollinen a) 375 862 b) 81 629 372 c) 12345678901234?

\*21. Määritelmä alkuluvulle

Alkuluku on kokonaisluku, joka A) on  $\geq 2$ , ja B) ei ole jaollinen muilla kokonaisluvuilla kuin 1:llä ja itsellään.

\*22. Eratostheneen seula

Sillä etsitään alkulukuja johonkin lukuun asti. Kirjoitetaan ensin kaikki tutkittavat kokonaisluvut  $\{2, 3, \dots, n\}$ .

Pienin (2) on alkuluku. Poistetaan joukosta muut 2:lla jaolliset luvut, eli kakkosen monikerrat.

Pienin jäljelle jääneistä (3) on alkuluku. Poistetaan joukosta muut 3:lla jaolliset luvut eli kolmosen monikerrat.

Kokeilua ja poistamista jatketaan lukuun  $\sqrt{n}$  asti.

Jäljelle jääneet ovat alkulukuja.

23. Määritä alkuluvut, jotka ovat alle a) 50 b) 200?

23. Kokonaisluvun jakaminen alkutekijöihin

Jos luku on jaollinen 2:lla, on  $n = 2 \cdot p$ , jos  $p$  on jaollinen 2:lla, on  $n = 2 \cdot 2 \cdot q$  jne.

Kun  $q$  ei ole enää 2:lla jaollinen, tarkastellaan 3:lla jaollisuus samalla tavalla luvusta  $q$ .

Kun käydään läpi kaikki alkuluvut  $\sqrt{n}$ :ään asti, on saatu luvun  $n$  kaikki alkulukutekijät, yksikäsitteisesti.

24. Jaa alkutekijöihin a) 72 b) 192 c) 480.

### 1.3. Rationaaliluvut

1. Rationaalilukujen joukkoon kuuluvat luvut

Kaikki kokonais- ja murtoluvut. Joukkoa merkitään  $Q$ :lla.

2. Laskutoimitusten tulosten kuuluminen rationaalilukujen joukkoon

Kahden rationaaliluvun summa, erotus, tulo ja osamäärä on myös rationaaliluku.

Ainoa poikkeus, on osamäärässä, kun jaetaan luvulla 0, jolloin laskun lopputulos ei ole rationaalinen luku.

1.3.1. Olkoon  $x \in Q$ . Kuuluuko joukkoon  $Q$  varmasti luku a)  $2x + 3$  b)  $2x : 3$  c)  $3 : 2x$  d)  $\sqrt{4x}$

3. Rationaalilukujen joukon yleinen määritelmä

$Q = \{x \mid 1^\circ x = \frac{m}{n}, 2^\circ m \in Z, 3^\circ n \in Z \text{ ja } 4^\circ n \neq 0\}$  eli

Luku on esitettävissä murtolukumuodossa, osoittaja ja nimittäjä ovat kokonaislukuja ja nimittäjä ei ole nolla.

4. Murtoluvun muuttaminen desimaaliluvuksi

Suoritetaan murtoluvun esittämä jakolasku.

2. Muuta desimaaliluvuksi a)  $\frac{5}{8}$  b)  $1 \frac{7}{12}$  c)  $\frac{1}{13}$  d) Miksi  $\frac{1}{13}$  on desimaalilukuna jaksollinen?

5. Päättävän desimaaliluvun muuttaminen murtoluvuksi

Jos viimeinen desimaali on esimerkiksi tuhannesosia  $n$ ,  $xyz = n \frac{xyz}{1000}$

3. Muuta murtoluvuksi a) 0,1875 b) 2,085.

6. Päättymättömän ja jaksollisen desimaaliluvun muuttaminen murtoluvuksi

$n,xyzxyz\dots = n \frac{xyz}{999}$  eli, jos jaksoon kuuluu  $k$  numeroa, tulee nimittäjäksi  $k$  yhdeksikköä ja osoittajaksi jakso.

4. Muuta murtoluvuksi a) 0,3636... b) 2,189189... .

7. Päättymättömän ja sekajaksollisen desimaaliluvun muuttaminen murtoluvuksi

Kerrotaan luku ensin sellaisella  $10:n$  potenssilla, että desimaalipiikun jälkeen alkaa jakso.

Muutetaan näin saatu luku kohdan 1.3.5. mukaisesti murtoluvuksi ja siitä varsinaiseksi murtoluvuksi.

Jaetaan saatu luku lopuksi sillä luvulla, jolla aluksi kerrottiin.

5. Muuta murtoluvuksi a) 0,083333 b) 1,54242... .

8. Luvun todistaminen rationaaliseksi

Sievennetään lukua niin, että nähdään kaikki 4 ehtoa kohdassa 1.3.3 toteutuvat.

6. Olkoon  $x \in Q$  ja  $y \in Q$  sekä  $x \neq -1$ . Osoita, että a)  $x + 1 \in Q$  b)  $x + y \in Q$  c)  $\frac{x+y}{x+1} \in Q$ .

## 9. Murtoluvun laventaminen

Osoittaja ja nimittäjä kerrotaan samalla luvulla (laventajalla). Murtoluvun arvo ei muutu.

7. Lavenna a)  $\frac{2}{3}$  luvulla 4 b)  $4\frac{5}{6}$  luvulla 7.

8. Lavenna samannimisiksi a)  $\frac{2}{3}$  ja  $\frac{3}{4}$  b)  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$  ja  $\frac{3}{4}$  c)  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{4}$  ja  $\frac{4}{5}$ .

## 10. Murtoluvun supistaminen

Osoittaja ja nimittäjä jaetaan samalla luvulla (supistajalla). Murtoluvun arvo ei muutu.

9. Supista a)  $\frac{84}{140}$  b)  $\frac{48}{78}$

## 11. Murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskun laskemissääntö

Murtolukuja saa laskea yhteen ja vähentää, kun niillä on sama nimittäjä. Tarvittaessa lavennetaan.

Tällöin osoittajaksi tulee osoittajien summa (erotus) ja nimittäjäksi yhteinen nimittäjä.  $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

10. Laske a)  $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$  b)  $1\frac{1}{5} + 2\frac{1}{2} - \frac{2}{3}$

## 12. Sekamurtolukujen muuttaminen varsinaiseksi murtoluvuksi

$a\frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}$  eli osoittajaksi kokonaisosa kertaa nimittäjä + osoittaja. Nimittäjä pysyy samana.

11. Laske a)  $2\frac{2}{3} - 1\frac{4}{5}$  b)  $4\frac{1}{6} + 3\frac{2}{5} - 2\frac{3}{4}$

## 13. Kertolaskusääntö

Sekamurtoluvut muutetaan ensin varsinaisiksi murtoluvuiksi.

Tulon osoittajaksi osoittajien tulo ja nimittäjäksi nimittäjien tulo.  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Lopuksi supistetaan, jos voidaan. (Supistaa voi jo tekijöitäkin!)

12. Laske a)  $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9}$  b)  $1\frac{3}{4} \cdot 2\frac{6}{7}$  c)  $\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{y}$  d)  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$

## 14. Kokonaisluku kertaa murtoluku

Kokonaisluku voidaan kertoa suoraan osoittajaan.  $n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{b}$  (koska  $= \frac{n}{1} \cdot \frac{a}{b}$ )

13. Laske a)  $6 \cdot \frac{2}{3}$  b)  $6 \cdot \frac{2}{5}$  c)  $7 \cdot \frac{5}{14}$

## 15. Murtoluvusta tulo

Otetaan toiseksi tekijäksi osoittaja ja toiseksi tekijäksi  $\frac{1}{\text{NIM}}$  ts.  $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$

14. Esitä tulona a)  $\frac{2}{3}$  b)  $\frac{2x}{y}$  c)  $\frac{5}{y}$

## 16. Jakolaskusääntö

Jaettava kerrotaan jakajan käänteisluvulla. Jatkossa tulo kuten edellä 1.3.13:ssä.  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

15. Laske a)  $\frac{3}{4} : \frac{5}{6}$  b)  $3\frac{1}{5} : 2\frac{6}{7}$

## 17. Laskut laskimella murtolukunäppäimen avulla

Murtoluku  $x\frac{y}{z}$  syötetään laskimeen (jossa on murtolukunäppäin) näppäilyllä  $\boxed{x} \boxed{a/b/c} \boxed{y} \boxed{a/b/c} \boxed{z} \boxed{a/b/c}$

16. Laske laskimella a)  $2\frac{1}{3} \cdot 4\frac{2}{5} : 8\frac{1}{6}$  b)  $(1\frac{2}{3} + 4\frac{5}{6}) : 2\frac{8}{9} - 1\frac{1}{4}$

## 1.4. Reaaliluvut

## 1. Irrationaalilukujen joukko

Irrationaalilukujen joukkoon kuuluu, kaikki ne reaaliset luvut, jotka eivät ole rationaalilukuja.

Ts. ne, joita ei voi esittää kokonais- tai murtolukuina.

Tällaisia ovat esim. päättymättömät jaksottomat desimaaliluvut,  $\pi$ ,  $\sqrt{2}$ , ...

1.4.1. Onko yhtälön ratkaisu irrationaalinen a)  $2x = 3$  b)  $x^2 = 3$  c)  $2x^2 = 32$ ?

## 2. Reaalilukujen joukko

Reaalilukujen joukkoon kuuluvat kaikki rationaaliset ja irrationaaliset luvut.

## 3. Laskutoimitusten tulosten kuuluminen reaalilukujen joukkoon

Reaalilukujen summa, erotus, tulo ja osamäärä (paitsi 0:lla jako) ovat reaalilukuja.

## 4. Lukujen esittäminen lukusuoralla

Suoralle tulee merkitä nolla (0) ja ykkönen (1) nollan oikealle puolelle.

Tämän jälkeen jokaisen luvun paikka on luvun itseisarvo kertaa "0 - 1" - janan pituus origosta oikealle, jos luku on positiivinen ja vasemmalle, jos luku on negatiivinen.

## 5. Lukujoukkojen N, Z, Q ja R hierarkia

$N \subset Z \subset Q \subset R$  Ts. jokainen luonnollinen luku on kokonaisluku, jokainen kokonaisluku on rationaalinen ja jokainen rationaalinen luku on reaalinen.

2. Mihin lukujoukoista N, Z, Q ja R kuuluu a) -1 b) 2,7 c)  $\pi - 1$  d)  $-\sqrt{9}$  ?

3. Mikä on "pienin" lukujoukoista N, Z, Q, R, mihin kuuluu yhtälön a)  $2x - 4 = 0$  b)  $2x + 4 = 0$  c)  $x^2 - 4 = 0$  d)  $x^2 = 41$  e)  $2x = 41$  ratkaisu?

## 6. Yhteen- ja kertolaskun vaihdantalait

$a + b = b + a$  ;  $a \cdot b = b \cdot a$

## 7. Yhteen- ja kertolaskun liitäntälait

$(a + b) + c = a + (b + c)$  ;  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

4. Laske päässä a)  $17 + 29 + 3$  b)  $217 + (345 + 283)$  c)  $2 \cdot 37 \cdot 5$  d)  $25 \cdot 97 \cdot 4$ .

## 8. Osittelulait. Miten summa kerrotaan jollakin luvulla.

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  ;  $(m + n) \cdot a = m \cdot a + n \cdot a$  eli kumpikin yhteenlaskettava kerrotaan toisella tekijällä

5. Laske päässä a)  $6 \cdot (10 + 2)$  b)  $6 \cdot 104$  c)  $3 \cdot 1023$

## 9. Osittelulait. Miten tulojen summa muutetaan yhdeksi tuloksi.

$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$  ;  $m \cdot a + n \cdot a = (m + n) \cdot a$  eli yhteisellä tekijällä kerrotaan toisten tekijöiden summa

6. Laske päässä a)  $8 \cdot 39 + 2 \cdot 39$  b)  $36 \cdot 47 + 64 \cdot 47$  c)  $36 \cdot 47 + 65 \cdot 47$ .

## 10. Nolla 0

on yhteenlaskun neutraalialkio, eli kun se on yhteenlaskettavana on summa toinen yhteenlaskettava

$a + 0 = a$  ja  $0 + a = a$

## 11. Vastaluvut

Kaksi lukua on vastalukuja, jos niillä on sama itseisarvo mutta eri etumerkki.

7. Mikä on vastaluku luvulle a) 15 b) -27 c) 0 d) a e)  $(-a)^2$  ?

## 12. Vastaluvut lukusuoralla

ovat yhtä kaukana origosta mutta eri puolilla origoa.

8. Kumpi on lukusuoralla kauempana origosta a + 1 vai a - 1, kun a) a > 0 b) a < -2?

## 13. Vastalukujen summa

on nolla. Tämä voisi olla myös vastalukujen määritelmä

9. Olkoon x ja y vastalukuja. Mikä on a) x + y b)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  c) x - y ?

14. Vastaluvun vastaluku  
 $-(-a) = a$  eli on alkuperäinen luku

15. Erotuksen muuttaminen summaksi.  
 $a - b = a + (-b)$  eli vähenevään lisätään vähentäjän vastaluku

16. Kertolaskuja vastaluvuilla  
 $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -ab$  kahden erimerkkisen luvun tulo on negatiivinen  
 $(-a) \cdot (-b) = ab$  kahden negatiivisen luvun tulo on positiivinen  
 Useamman luvun tulo on negatiivinen, jos negatiivisia tekijöitä on pariton lukumäärä

17. Ykkönen 1  
 on kertolaskun neutraalialkio eli se tulon tekijänä antaa tulokseksi toisen tuon tekijän  
 $1 \cdot a = a$  ja  $a \cdot 1 = a$

18. Käänteisluvut  
 Kaksi lukua on käänteislukuja, jos niiden murtolukuesityksessä ensimmäisen osoittaja on toisen nimittäjä ja ensimmäisen nimittäjä on toisen osoittaja.

10. Mikä on käänteisluku luvulle a)  $\frac{1}{3}$  b)  $\frac{2}{5}$  c)  $1\frac{1}{3}$  d)  $-2,7$  ?

19. Käänteislukujen tulo  
 on 1. Tämä voisi olla myös käänteislukujen määritelmä.

11. Olkoon x ja y käänteislukuja. Mitä on a)  $x \cdot y$  b)  $x \cdot (-y)$  c)  $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$  d)  $\frac{x}{y}$  ?

20. Kahden luvun järjestys  
 Kahden luvun vertailussa on täsmälleen yksi vertailuista  $a < b$ ,  $a = b$  ja  $a > b$  voimassa

21. Kolmen luvun vertailu  
 Jos  $a < b$  ja  $b < c$ , niin  $a < c$

22. Saman luvun lisäys vertailtaviin lukuihin  
 Jos  $a < b$ , niin  $a + c < b + c$  eli saman luvun lisääminen ei muuta summan järjestystä

23. Positiivisten lukujen tulo  
 on positiivinen eli jos  $a > 0$  ja  $b > 0$ , niin  $a \cdot b > 0$

24. Reaalilukujen täydellisyysaksiooma  
 Jokaisella rajoitetulla joukolla on pienin yläraja ja suurin alaraja.

25. Merkitsevien numeroiden lukumäärä  
 on kokonaisluvussa luvun alusta siihen asti olevien numeroiden määrä, jonka jälkeen numerot ovat nollia.  
 Desimaaliluvun alussa olevat nollat eivät ole merkitseviä numeroita, lopussa olevat nollat ovat merkitseviä.

12. Montako merkitsevää numeroa on luvussa a) 27300 b) 27,34 c) 27,3400 d) 0,0273 ?

26. Merkitsevien desimaalien (yksikköjen) lukumäärä  
 on kokonaisluvussa se yksikkö, jonka jälkeen tulee vain nollia.  
 Desimaaliluvussa viimeisen desimaalin yksikkö.

13. Minkä yksikön tarkkuudella on annettu luku a) 27399 b) 27,34 c) 27,3400 d) 0,0273 ?

27. Tarkkuus yhteen- ja vähennyslaskussa  
 annetaan sen yksikön (desimaalin) tarkkuudella mikä on suurin (heikoin) annetuissa luvuissa.

14. Laske a)  $27300 + 4560$  b)  $2,734 - 0,035841$

28. Tarkkuus kerto- ja jakolaskussa  
 annetaan samalla merkitsevien numeroiden lukumäärällä, mikä on vähin määrä annetuissa luvuissa

15. Laske a)  $2350 \cdot 0,08756$  b)  $0,3750 : 0,0874$



## 2. Potenssi

### 2.1. Potenssin määritelmät ja arvon laskeminen

$$1. a^n$$

=  $a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$  eli tulo, jossa on kantaluvun  $a$  suuruisia tekijöitä eksponentin  $n$  osoittama määrä

2.1.1. Merkitse luvun a) 2 b)  $x$  i) neljäs potenssi ii) vastaluvun 5. potenssi iii) kuudennen potenssin vastaluku.

#### 2. Potenssin etumerkki

Positiivisen luvun potenssit ovat positiivisia.

Negatiivisen luvun parillinen potenssi on positiivinen ja pariton potenssi negatiivinen.

2. Laske a)  $3^2$  b)  $-3^2$  c)  $(-3)^2$  d)  $4^3$  e)  $-4^3$  f)  $(-4)^3$  g)  $3^4$  h)  $-3^4$  i)  $(-3)^4$  k)  $-(-3)^4$  l)  $4^5$  m)  $-4^5$  n)  $(-4)^5$  o)  $-(-4)^5$

$$3. a^1 = a$$

3. Laske a)  $7^1$  b)  $8 + 7^1$  c)  $(8 + 7)^1$  d)  $8^1 + 7^1$

$$4. a^0$$

= 1, kun  $a \neq 0$  HUOM.!  $0^0$  ei ole määritelty.

4. Laske a)  $21^0$  b)  $32 + 21^0$  c)  $(32 + 21)^0$  d)  $32^0 + 21^0$  e)  $2^0 + 0^2 + 2^1 + 1^2 + (-2)^0 + (-2)^1$

$$5. a^{-n}$$

=  $\frac{1}{a^n}$  eli korotetaan  $a$  ensin eksponentin vastaluvun potenssiin ja tästä käänteisluku

=  $\left(\frac{1}{a}\right)^n$  eli ensin  $a$ :sta käänteisluku ja tämä korotetaan eksponentin vastaluvun osoittamaan potenssiin

5. Laske a)  $2^{-3}$  b)  $3^{-2}$  c)  $-2^{-3}$  d)  $(-2)^{-3}$  e)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$  f)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$  g)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$  h)  $\left(2\frac{1}{2}\right)^{-2}$  i)  $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$

#### 6. Potenssi potenssiin

$a^{b^c} = a^{(b^c)}$  eli lasketaan alimman kantaluvun eksponenttina oleva ylin potenssin arvo ensin

6. Laske a)  $2^{2^3}$  b)  $(2^2)^3$  c)  $3^{2^1}$  d)  $4^{2^0}$  e)  $(-\frac{1}{2})^{(-\frac{1}{2})^{(-2)}}$

### 2.2. Potenssin laskusääntöjä

$$1. (ab)^n$$

=  $a^n \cdot b^n$ . Tulo korotetaan potenssiin siten, että tulon tekijät korotetaan tähän potenssiin ja nämä kerrotaan

2.2.1. Laske a)  $(3a)^2$  b)  $(-3a)^2$  c)  $(2b)^3$  d)  $(-2b)^3$  e)  $(3a)^4$  f)  $(-3a)^4$  g)  $(2ax)^5$  h)  $(-2axy)^5$

2. Mikä luku sopii sulkeisiin a)  $( )^2 = 4x^2$  b)  $( )^3 = 27a^3$  c)  $( )^3 = -64y^3$  d)  $( )^4 = 16c^4$  ?

$$2. \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

=  $\frac{a^n}{b^n}$  Osamäärä korotetaan potenssiin siten, että osoittajaan osoittajan ja nimittäjään nimittäjän ko. potenssi

3. Laske a)  $\left(\frac{a}{2}\right)^2$  b)  $\left(\frac{x}{3}\right)^4$  c)  $\left(-\frac{a}{x}\right)^5$  d)  $\left(\frac{2}{x}\right)^6$  e)  $\left(\frac{a}{2x}\right)^7$  f)  $\left(\frac{2x}{3y}\right)^4$

4. Mikä luku sopii sulkeisiin a)  $( )^2 = \frac{x^2}{9}$  b)  $( )^3 = \frac{64}{x^3}$  c)  $( )^3 = -\frac{125}{a^3}$  d)  $( )^4 = \frac{10000a^4}{81b^4}$  ?

$$3. (a^m)^n$$

=  $a^{mn}$ . Potenssi korotetaan potenssiin siten, että kantaluku korotetaan eksponenttien tulon potenssiin

5. Laske a)  $(a^4)^5$  b)  $(b^3)^6$  c)  $(x^5)^{-2}$  d)  $(-2y^3)^7$  e)  $(2x^3)^2$  f)  $(-3a^5)^4$  g)  $[(a^3)^4]^5$

6. Esitä luvun 2 potenssina a)  $4^5$  b)  $8^6$  c)  $16^{17}$

$$4. a^m \cdot a^n$$

=  $a^{m+n}$  Samankantaisia potensseja kerrottaessa yht. kantaluku korotetaan eksponenttien summan potenssiin

7. Laske a)  $a^3 \cdot a^7$  b)  $b^5 \cdot b^6$  c)  $x^3 \cdot x^{-2}$  d)  $y^5 \cdot y^{-5}$  e)  $a^5 \cdot a^6 \cdot a^7$  f)  $2x^3 \cdot 3x^4$  g)  $6x^4 \cdot (-5x^6)$

$$5. a^m : a^n$$

=  $a^{m-n}$  Samankantaisia potensseja jaettaessa yht. kantaluku korotetaan eksponenttien erotuksen potenssiin

$$8. \text{Laske a) } \frac{a^7}{a^3} \text{ b) } \frac{b^6}{b^4} \text{ c) } \frac{x^5}{x^{-2}} \text{ d) } \frac{x^8 \cdot x^9}{x^{10}} \text{ e) } \frac{a^5}{a^9} \text{ f) } \frac{b^6}{b^7}$$

$$6. x^n \cdot y^n$$

=  $(xy)^n$  Kun tulon potensseilla sama eksponentti, kantalukujen tulo korotetaan yhteiseen potenssiin.

$$9. \text{Laske a) } 5^3 \cdot 2^3 \text{ b) } 4^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \text{ c) } 8^{100} \cdot (0,125)^{100} \text{ d) } 8^{101} \cdot 0,125^{100} \text{ e) } \left(\frac{4}{5}\right)^{876} \cdot \left(1\frac{1}{4}\right)^{876}$$

$$7. x^n : y^n$$

=  $\left(\frac{x}{y}\right)^n$  Kun osamäärän potensseilla sama eksponentti, kantalukujen osamäärä korotetaan yhteiseen potenssiin

$$10. \text{Sievennä a) } \frac{14^5}{7^5} \text{ b) } \frac{1230^5}{123^5} \text{ c) } \frac{25^6}{50^6} \text{ d) } \frac{25^7}{50^6} \text{ e) } \frac{16^6}{8^7} \text{ f) } \frac{25^{41}}{5^{80}}$$

$$8. x^{mn}$$

=  $(x^m)^n = (x^n)^m$  Kun eksponentissa tulo, voidaan kantaluku korottaa ensin toisen ja sitten tämä potenssi toisen kantaluvin osoittamaan potenssiin.

$$11. \text{Mikä luku sopii sulkeisiin a) } ( )^2 = a^6 \text{ b) } ( )^3 = x^{12} \text{ c) } ( )^4 = 81y^{20} \text{ d) } ( )^5 = 32a^{10}b^{20} ?$$

$$9. y^{m+n}$$

=  $y^m \cdot y^n$  Kun eksponentissa summa, voidaan kantaluku korottaa kumpaankin potenssiin, jotka kerrotaan.

$$10. y^{m-n}$$

=  $\frac{y^m}{y^n}$  Kun eksponentissa erotus, voidaan kantaluku korottaa kumpaankin potenssiin, jotka sitten jaetaan.

### 11. Laskut potensseilla

Samassa laskussa voi esiintyä useita eo. säännöistä joten käytetään niitä yksi kerrallaan.

$$12. \text{a) } x^6 \cdot (x^3)^4 \text{ b) } a^{36} : a^{12} \text{ c) } 36^a : 12^a \text{ d) } a^n \cdot a^{2n} \cdot a \text{ e) } (b^x)^3 \cdot (b^2)^x \text{ f) } (a^x)^x \text{ g) } [(a^x)^x]^x \text{ h) } -x^4(-x)^4 \text{ i) } -y^3(-y)^3$$

$$13. \text{Sievennä a) } \left(\frac{3a^2}{2b^3}\right)^4 \text{ b) } \frac{(x^{2n+1})^3}{x^{4n}} \text{ c) } \frac{5^{30} \cdot 5^{40}}{5^{69}} \text{ d) } \frac{2a^{x+1}}{a^x} \text{ e) } \frac{3a^{x+1} \cdot a^{x+2}}{(a^{x-1})^2} \text{ f) } \frac{3^4 \cdot 9^5}{27^6} \text{ g) } \frac{6^{1005}}{3^{1004} \cdot 2^{1003}} \text{ h) } \frac{a^n \cdot a^n}{a^n + a^n}$$

### 12. Potenssien vertaaminen

$a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$  ( $a > 1$ ) eli jos kantaluvut ovat samoja, on suurempi se jolla suurempi eksponentti  
 $a^m > b^m \Leftrightarrow a > b$  ( $a$  ja  $b > 1$ ) eli jos eksponentit samoja, on suurempi se, jonka kantaluku on suurempi

$$14. \text{Kumpi on suurempi a) } 4^{345} \text{ vai } 16^{173} \text{ b) } 9^{555} \text{ vai } 27^{369} \text{ c) } 9^{1000} \text{ vai } 80^{500} \text{ d) } 7^{200} \text{ vai } 50^{100}$$

## 2.3. Luvun kymmenpotenssimuoto

### 1. Ison luvun muuttaminen 10-potenssimuotoon

$abcxx,xx = a, bcxxxx \cdot 10^n$ , missä  $n$  on desimaalipilkusta vasemmalle olevien numeroiden määrä miinus 1  
tai  $n$  on sitä kymmenen potenssia mitä yksikköä numero  $a$  edustaa  
tai  $n$  on se määrä monenko numeron yli desimaalipilkua on siirretty vasemmalle

$$2.3.1. \text{Muuta 10-potenssimuotoon a) } 123\,000\,000\,000 \text{ b) } 34\,000\,000\,000\,000 \text{ c) } 1212.$$

### 2. Pienen luvun muuttaminen 10-potenssimuotoon

$0,00\dots0abc = a, bc \cdot 10^{-n}$ , missä  $n$  on desimaalipilkusta oikealle olevien nollien lukumäärä plus 1  
tai  $n$  on sitä kymmenen potenssia mitä yksikköä numero  $a$  edustaa  
tai  $n$  on se määrä monenko numeron yli desimaalipilkua on siirretty oikealle

$$2. \text{Muuta 10-potenssimuotoon a) } 0,0012 \text{ b) } 0,00\,000\,12 \text{ c) } 0,00\,000\,000\,032.$$

### 3. 10-potenssimuotoa olevan luvun muuttaminen desimaalimuotoon

$a, bxxx \cdot 10^n = abxxx, x$  missä desimaalipilkua on siirretty  $n$  numeroa oikealle

$a, bxxx \cdot 10^{-n} = 0,0\dots abxxx$ , missä desimaalipilkua on siirretty  $n$  numeroa vasemmalle

$$3. \text{Muuta desimaalimuotoon a) } 1,2 \cdot 10^5 \text{ b) } 3,4 \cdot 10^{12} \text{ c) } 5,6 \cdot 10^{-4} \text{ d) } 7,8 \cdot 10^{-9}.$$

4. Laskut 10-potenssimuotoisilla luvuilla suoritetaan kuten muillakin potensseilla, kertoimet keskenään, kymmenpotenssit keskenään  
4. Laske päässä a)  $2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^4$  b)  $4 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-4}$  c)  $6 \cdot 10^7 : (2 \cdot 10^5)$  d)  $3 \cdot 10^9 : 4 \cdot 10^2$ .

5. Laskut 10-potenssimuotoisilla luvuilla laskinta käyttäen  
a, bxx · 10<sup>n</sup> syötetään laskimeen [a.bxx] [EXP] [n] , jonka jälkeen laskut normaalisti  
HUOM: Laskimissa yleensä desimaalierotin on piste (ei pilkku)

5. Laske a)  $5,6 \cdot 10^4 \cdot 7,89 \cdot 10^8$  b)  $3,2 \cdot 10^6 : 4,6 \cdot 10^{-4}$  c)  $(2,5 \cdot 10^6)^3$  d)  $\sqrt{8,3 \cdot 10^7}$  e)  $(3,4 \cdot 10^{108})^9$

6. 10-potenssimuodossa olevan luvun kokonaisosan numeroiden lukumäärä on eksponentti + 1 ( eksponentin pitää olla positiivinen)

6. Montako numeroa on luvun kokonaisosassa a)  $2,1 \cdot 10^8$  b)  $3,4 \cdot 10^{160}$  c)  $3,4^{160}$

## 2.4. Eksponentiaalinen malli

1. Suureen arvo, kun sille on tehty samansuuruinen prosentuaalinen muutos monta kertaa  
Jos jokin suure alkuarvoltaan A muuttuu n kertaa samat p % , on saadaan loppuarvo  $A_n$  seuraavasti:

$A_n = A \cdot \alpha^n$  , missä  $\alpha = 1 + \frac{p}{100}$  = kokonkorkotekijä.  $p > 0$ , jos kyseessä kasvu,  $p < 0$ , jos pieneneminen

$\alpha$  voidaan ilmaista myös desimaalilukuna. Jos kasvua 15%, on  $\alpha = 1,15$ . Jos vähenee 25% , on  $\alpha = 0,75$ .

2.4.1. Kuinka suureksi kasvaa 1000 mk pääoma 6 vuodessa, kun vuosittainen korko on 3,5%?

2. Elinkustannusindeksi oli eräänä vuonna 100. Vuotuinen inflaatio oli 5 vuotta peräkkäin 4,2%. Mikä oli elinkustannusindeksi tämän jälkeen?

3. Auto ostettiin 80 000 mk:lla. Arvo alenee vuosittain 15%. Mikä on auton arvo 10 vuoden kuluttua?

4. Auto ostettiin 80 000 mk:lla. Arvo alenee 3 ensimmäisen vuoden aikana 20% vuosittain ja seuraavina vuosina 10%. Mikä on auton arvo 10 vuoden kuluttua?

5. Sääskien määrä on kesäkuun alussa 1000 kappaletta. Määrä kasvaa päivässä 5%. Paljonko on sääskiä kesäkuun lopussa?

## 3. Polynomi

### 3.1. Polynomien käsite

1. Termi  
on yksi yhteenlaskettava. Siinä voi olla numero- ja kirjainlukuista muodostunut tulo.

3.1.1. Mitkä ovat polynomien  $P(x) = 4x^2 + 5ax - 6a$  termit?

2. Termin asteluku  
on termin muuttujana olevien kirjainlukujen eksponenttien summa

2. Mitkä ovat termien asteluvut a)  $6x^2$  b)  $8a^2b^3$  c)  $6ax^7$  ?

3. Polynomi  
on vakioista ja muuttujista yhteen-, vähennys- ja kertolaskuja käyttäen saatu summalauseke.

4. Polynomien asteluku  
on korkeimman termin asteluku

3. Mikä on polynomien asteluku a)  $P(x) = 3x^4 + 5x^6$  b)  $P(x) = 6ax^3 + 4x^2$  c)  $P(a,x) = 6ax^3 + 4x^2$  ?

5. Kertoimet  
ovat muuttujien edessä olevat tekijät etumerkkeineen.

4. Mitkä ovat polynomien  $P(x) = 6x^3 - 7x^2 + 8ax + c$  termien kertoimet?

6. Monomi, binomi, trinomi  
Monomissa on yksi, binomissa on kaksi ja trinomissa on kolme termiä.

5. Mitkä polynomeista  $P(x) = 8x^2 + 3$ ,  $Q(x) = 4x^3 + 2x + 1$ ,  $R(x) = 6ax$ ,  $S(x) = x(x + 1)$  ja  $T(x) = x + 1$  ovat a) monomeja b) binomeja c) trinomeja?

## 7. Polynomien arvon laskeminen

Sijoitetaan polynomien muuttujakirjaimen paikalle se luku, millä arvolla polynomien arvo laskettavana. Jos kyseessä  $x$ :n polynomi  $P(x)$  ja sen arvo laskettava  $a$ :ssa, merkitään tämä  $P(a)$

6. Laske a)  $P(1)$  b)  $P(-2)$  c)  $P(a)$  d)  $P(2a)$ , kun  $P(x) = 2x^2 - 3x - 4$ .

## 8. Polynomien muuttujan ratkaiseminen, kun arvo tunnetaan

Tehdään yhtälö polynomi = arvo (esim.  $P(x) = a$ ), mikä yhtälö ratkaistaan.

7. Millä  $x$ :llä polynomi  $P(x) = 3x - 4$  saa arvon 5?

8. Ratkaise yhtälö a)  $P(x) = -2$  b)  $P(x) = 0$  c)  $P(x) = 3a + 4$ , kun  $P(x) = 3x + 1$

## 3.2. Polynomien yhteen- ja vähennyslasku

## 1. Mitkä termit voidaan laskea yhteen?

sellaiset, joissa on sama kirjainosa.

## 2. Samanmuotoisten termien yhteenlasku

Summaterrin kertoimeksi tulee kertoimien summa ja kirjainosaksi yhteinen kirjainosa.

3.2.1. Laske a)  $3x^2 + 4x^2$  b)  $5x^3 - 4x^3$  c)  $6x - 9x$  d)  $7x^2 + 6x$  e)  $7x^2 + 6x - 5x^2 + 4x + 3$

## 3. Sulkeiden poistaminen polynomien ympäriltä

Jos sulkeiden edessä on + merkki, pysyvät kaikkien sulkeissa olevien termien etumerkit samoina.

Jos sulkeiden edessä on - merkki, vaihtuvat kaikkien sulkeissa olevien termien etumerkit.

2. Laske a)  $(2x + 3x) - (4x - 5x)$  b)  $6x - (7x - 8)$  c)  $x^2 + 3x - 4 + (3x^2 - 4x)$  d)  $2x - [4x^2 - (3x^2 - 4x + 5)]$

3. Vähennä binomien  $4x - 5$  ja  $6 - 7x$  erotuksesta trinomi  $4x^2 + 5x - 6$ .

4. Sievennä lauseke  $x^2 - (2x^2 + 3x - 4) + (3x^2 + 4x - 5)$  ja laske sen arvo, kun  $x = -3$ .

## 3.3. Polynomien kertolasku

## 1. Monomi · monomi

Kerrotaan 1) merkit, 2) vakiot (= numerot) ja 3) muuttujat (= kirjaimet)

3.3.1. Laske a)  $3x^2 \cdot 4x^3$  b)  $-6x \cdot (-2x^2)$  c)  $3ax^2 \cdot 4a^2x^3$  d)  $(-4ax^2) \cdot (-5ab^2x)$

## 2. Polynomi · polynomi

Kerrotaan ensimmäisen polynomien jokaisella termillä toisen polynomien jokainen termi.

2. Laske a)  $4 \cdot 5x + 6$  b)  $4 \cdot (5x + 6)$  c)  $4x \cdot (5x + 6)$  d)  $4x \cdot (5x + 6) - 3x^2 \cdot (2x - 5)$  e)  $(3a^2b - 5ab^2) \cdot 6a^3b^2$

3. Laske a)  $(4x - 5)(6x - 7)$  b)  $(x^2 - 1)(2x + 3)$  c)  $(x^2 - 2x - 3)(4x - 5)$  d)  $(x - 1)(2x - 3) + (4x - 5)(6x + 7)$

4. Kerro binomien  $2x^2 + 3x$  ja  $x^2 - 4x$  erotus monomien  $x^2$  ja  $2x$  summalla.

## 3. Polynomien jakaminen tekijöihinsä, kun niissä on yhteinen tekijä

Toiseksi tekijäksi yhteinen tekijä ja toiseksi tekijäksi sulkeisiin ne termien tekijät mitkä termeihin jäävät, kun niistä otetaan yhteiset tekijät pois (eli alkuperäisen polynomien ja yhteisen tekijän osamäärä)

5. Jaa tekijöihin a)  $2x + 4$  b)  $x^2 - 5x$  c)  $3x^2 - 6x$  d)  $5a^2 + 10a$  e)  $7y^3 - 21y^2$  f)  $8z^3 - 10z^2 - 12z$  g)  $x^{n+1} - x^n$

## 3.4. Polynomien jakaminen monomilla

## 1. Monomi : monomi

Jaetaan merkit, vakiot (= numerot) ja muuttujat (= kirjaimet)

Joskus vain supistetaan vakioita ja muuttujia sekä etumerkki osamäärän merkkisäännön perusteella.

3.4.1. Jaa a)  $\frac{6x^2}{3}$  b)  $\frac{6x^2}{x}$  c)  $\frac{6x^2}{3x}$  d)  $\frac{6x^2}{-3x}$  e)  $\frac{8x^4}{-2x^3}$  f)  $\frac{12x^6}{4x^2}$

## 2. Polynomi : monomi

Jokainen polynomien termi jaetaan monomilla.

2. Jaa a)  $\frac{12x + 16}{4}$  b)  $\frac{x^2 + 2x}{x}$  c)  $\frac{6x^2 - 12x}{3x}$

3. Laske a)  $(4x^2 - 6x) : 2x$  b)  $4x^2 - 6x : 2x$  c)  $4x^2 : (-6x + 2x)$  d)  $(4x^2 + 8x) : (-6x + 2x)$

## 3.5. Binomien laskukaavat

$$1. (a + b)(a - b)$$

$= a^2 - b^2$ . Samojen lukujen summan ja erotuksen tulo on yhteenlaskettavien neliöiden erotus.

$$3.5.1. \text{ Laske a) } (x - 1)(x + 1) \text{ b) } (a - 2)(a + 2) \text{ c) } (y + 3)(y - 3) \text{ d) } (2x + 1)(2x - 1) \text{ e) } (3x^2 + 4x)(3x^2 - 4x)$$

$$2. a^2 - b^2$$

$= (a + b)(a - b)$ . Neliö - neliö on tulona esitettynä kantelukujen summa kertaa kantelukujen erotus.

$$2. \text{ Esitä tulona a) } a^2 - 16 \text{ b) } x^2 - 25 \text{ c) } 4y^2 - 9 \text{ d) } 9b^2 - 49 \text{ e) } 4x^4 - 9y^6 \text{ f) } 16a^4 - 9b^2 \text{ g) } (x + 1)^2 - (x - 1)^2$$

$$3. (a + b)^2$$

$= a^2 + 2ab + b^2$ . Summa toiseen on ensimmäisen neliö + toisen neliö + niiden kaksinkertainen tulo.

$$3. \text{ Laske a) } (x + 3)^2 \text{ b) } (x + 5)^2 \text{ c) } (2x + 1)^2 \text{ d) } (3x + 2)^2 \text{ e) } (4x^2 + 3)^2 \text{ f) } (3x^2 + 2x)^2$$

$$4. a^2 + 2ab + b^2$$

$= (a + b)^2$ . Kun trinomissa on neliö + neliö + näiden kantelukujen tulo kaksinkertaisena, on se tulona (neliönä) esitettynä näiden neliöiden kantelukujen summa toiseen

$$4. \text{ Esitä tulona a) } x^2 + 2x + 1 \text{ b) } x^2 + 8x + 16 \text{ c) } x^2 + 20x + 100 \text{ d) } 4x^2 + 4x + 1 \text{ e) } 4x^2 + 12x + 9$$

$$5. \text{ Mikä termi pitäisi lisätä, jotta saataisiin neliö a) } x^2 + 6x + \quad \text{ b) } a^2 + \quad + 16 \text{ c) } \quad + 32xy + 4y^2$$

$$5. (a - b)^2$$

$= a^2 - 2ab + b^2$ . Erotus toiseen on ensimmäisen neliö + toisen neliö - niiden kaksinkertainen tulo.

$$6. \text{ Laske a) } (a - 4)^2 \text{ b) } (x - 6)^2 \text{ c) } (2x - a)^2 \text{ d) } (3x - 1)^2 \text{ e) } (2a^2 - 5)^2 \text{ f) } (a^3 - 2b^2)^2$$

$$7. \text{ Sievennä a) } (a - 1)^2 + (a + 1)^2 \text{ b) } (x - 2)^2 - (-x - 2)^2 \text{ c) } 2(x - 3)^2 - 3(x - 2)^2$$

$$8. \text{ Olkoon } P(x) = x^2 - 2x + 3. \text{ Laske } P(a - 4).$$

$$9. \text{ Olkoon } P(x) = 2x^2 + 3x - 4. \text{ Laske } P(x + 1) - 2P(x) + P(x - 1)$$

$$6. a^2 - 2ab + b^2$$

$= (a - b)^2$ . Kun trinomissa on neliö + neliö - näiden kantelukujen tulo kaksinkertaisena, on se tulona (neliönä) esitettynä lyhyemmin näiden neliöiden kantelukujen erotus toiseen

$$10. \text{ Esitä tulona a) } a^2 - 14a + 49 \text{ b) } x^2 - 100x + 2500 \text{ c) } x^2 - 2ax + a^2 \text{ d) } 4x^2 - 20x + 4 \text{ e) } x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$11. \text{ Mikä termi on lisättävä, jotta tulisi neliö a) } x^4 - 6x^2 + (\quad) \text{ b) } x^4 - 6x^3 + (\quad) \text{ c) } 4a^2 - (\quad) + 25b^2$$

$$7. \text{ Trinomin neliö } (a + b + c)^2$$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ . Kolmen termin neliö on kaikkien termien neliöiden summa lisättyinä kaikilla kaksinkertaisilla tuloilla

$$12. \text{ Laske a) } (a + b + 1)^2 \text{ b) } (x - y - 2)^2 \text{ c) } (x^2 + x - 1)^2 \text{ d) } (x^3 - x + 2)^2$$

### 3.6. Binomin muut potenssit

1. Potenssin sieventäminen mekaanisesti laskemalla

Kerro ensin kaksi tekijää, sitten näin saatu tulo kolmannella, tämä tulo neljännellä jne.

$$3.6.1. \text{ Laske a) } (x + 1)^3 \text{ b) } (x + 2)^3 \text{ c) } (x - 1)^4 \text{ d) } (2x - 3)^4$$

2. Sieventäminen Pascalin kolmion avulla

$$(a + b)^n = 1 \cdot a^n + n \cdot a^{n-1}b + C \cdot a^{n-2}b^2 + \dots + n \cdot ab^{n-1} + 1 \cdot b^n$$

Laita ensimmäisen termin kirjainosaksi ensimmäisen yhteenlaskettavan asteluvun korkuinen potenssi.

Toiseen termiin ensimmäistä termiä yhtä pienempi potenssi ja toinen yhteenlaskettava potenssiin yksi.

Kolmanteen jälleen ensimmäisen asteluku pienenee yhdellä ja toisen kasvaa yhdellä jne.

Termien kertoimet 1, n, C, D, ..., n, 1 saat Pascalin kolmion n:nnettä riviltä.

$$2. \text{ Laske a) } (a + b)^6 \text{ b) } (x + 1)^7 \text{ c) } (x - 1)^8 \text{ d) } (x - 2)^5$$

$$3. \text{ Jaa tekijöihin a) } x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \text{ b) } a^5 - 10a^4 + 40a^3 - 80a^2 + 80a - 32$$

## 4. Funktiot

### 4.1. Lauseke ja funktio

1. Lauseke

on jonkin laskutoimituksen tulos. Lausekkeessa esiintyy yleensä selviä lukuja ja kirjainlukuja eli muuttujia.

2. Lausekkeen arvon laskeminen jollakin muuttujan arvolla.

Sijoitetaan muuttujan paikalle muuttujan arvo ja lasketaan lausekkeena olevan laskun tulos.

4.1.1. Laske lausekkeen arvo, kun  $a = 4$ ,  $x = 5$  ja  $y = -6$  a)  $2a + 3b$  b)  $2x + 3y$  c)  $ax - y$ .

3. Lausekkeen teko sanallisista tiedoista

Merkitään tuntemattomia tietoja kirjainlukuilla ja merkitään kuinka lasku silloin laskettaisiin.

2. Kolmion kanta on 5. Esitä kolmion ala  $A$  korkeuden  $x$  lausekkeena.

3. Mansikan hinta on 20 mk/l ja pakkauslaatikoiden 2 mk/kpl. Esitä kokonaiskustannusten lauseke, kun ostetaan  $x$  litraa mansikoita  $y$  laatikossa.

4. Funktio

tarkoittaa vastaavuutta, millä muuttujan arvoon liittyy (tai siitä saadaan) täsmälleen yksi lausekkeen arvo.

Muuttujana on yleensä  $x$  ja lausekkeen arvona  $y$ . Siis jokaiseen  $x$ :ään liittyy täsmälleen yksi  $y$ .

5. Funktion arvon laskeminen jollakin muuttujan arvolla.

Sijoitetaan muuttujan ( $x$ ) paikalle sen saama arvo.

Lasketaan mikä tulee tällöin funktion määrittelemän lausekkeen arvoksi

4. Laske funktion  $f: f(x) = 3x^2 + 4x - 5$  arvo, kun a)  $x = 2$  b)  $x = -1$  c)  $x = 3$ .

5. Laske a)  $f(0)$  b)  $f(-1)$  c)  $f(2)$ , kun  $f(x) = (2x + 3) / (4x + 5)$

6. Funktion esitys nuolikuviona

Laitetaan muuttujan arvot yhteen alueeseen ja funktion arvot toiseen.

Yhdistetään toisiaan vastaavat muuttujan ja funktion arvot nuolella muuttujasta  $\rightarrow$  funktion arvoon.

6. Esitä nuolikuviona funktio  $f: x \rightarrow 2x + 3$ ,  $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$

7. Funktion esitys koordinaatistossa

Merkitään funktion toisiaan vastaavat muuttujan ja funktion arvot pisteinä koordinaatistoon.

Muuttujat ovat  $x$ -koordinaatteina ja funktion arvot  $y$ -koordinaatteina.

7. Esitä koordinaatistossa funktio  $f: x \rightarrow 2x + 3$ ,  $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$

8. Esitä koordinaatistossa funktio  $f: x \rightarrow 2x + 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

8. Funktion esitys lukuparien joukkona

Esitetään toisiaan vastaavat muuttujan ja funktion arvot lukupareina  $(x, y)$ , missä lukuparin ensimmäinen luku tarkoittaa muuttujaa ja toinen luku sitä vastaavaa funktion arvoa.

9. Esitä lukuparien joukkona funktio  $f: x \rightarrow 2x + 3$ ,  $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$

9. Onko vastaavuus funktio nuolikuviosta

Vastaavuus on funktio, jos jokaisesta muuttujasta lähtee yksi ja vain yksi nuoli.

10. Onko vastaavuus funktio koordinaatiston kuvaajasta

Jokaisella muuttujan  $x$ -koordinaatin kohdalla olevalla pystysuoralla on täsmälleen yksi kuvaajan piste.

11. Onko vastaavuus funktio lukuparien joukosta

Vastaavuus on funktio, jos millään lukuparilla ei ole samaa  $x$ -koordinaattia.

## 4.2. Funktion määrittely- ja arvojoukko

1. Funktion määrittelyjoukko

on kaikkien muuttujan arvojen joukko

2. Funktion määrittelyjoukon ilmoittaminen funktion määrittelyn yhteydessä

Joko aluksi muodossa  $f: A \rightarrow B$ ,  $f(x) = \dots$ , missä joukko  $A$  on määrittelyjoukko tai lopussa  $f: f(x) = \dots$ ,  $x \in A$ , missä  $A$  on määrittelyjoukko.

4.2.1. Mikä on funktion a)  $f: f(x) = 2x + 3$ ,  $x \in \mathbb{R}_+$  b)  $f: f(x) = 2x + 3$ ,  $x \leq 1$  määrittelyjoukko?

3. Funktion määrittelyjoukko, jos sitä ei ole ilmoitettu funktion määrittelyn yhteydessä

On sovittu, että määrittelyjoukko on koko  $\mathbb{R}$

tai suurin mahdollinen  $\mathbb{R}$ :n osajoukko, missä funktion arvon voi laskea.

2. Mikä on funktion  $f$  määrittelyjoukko, kun a)  $f(x) = 2x + 3$  b)  $f(x) = \frac{2}{x+4}$  c)  $f(x) = \frac{2x}{3x-4}$  ?

4. Funktion arvojoukko muodostuu kaikista funktion saamista arvoista

3. Mikä on funktion a)  $f(x) = 2x + 3, x \in \{-1, 0, 1, 2\}$  b)  $f(x) = 2x + 3, x \geq -1$  arvojoukko?

5. Funktion määrittelyjoukko nuolikuviotesityksestä on niiden alkioiden joukko, mistä lähtee nuoli

6. Funktion arvojoukko nuolikuviotesityksestä on niiden alkioiden joukko, mihin tulee nuoli

7. Funktion määrittelyjoukko koordinaatistokuvaajasta saadaan kuvaajan pisteiden  $x$ -koordinaattien joukosta. Tai projisoidaan kuvaajan pisteet  $x$ -akselille. Määrittelyjoukko on projektio pisteiden joukko.

4. Mikä on funktion  $f : \{(1,2), (3,4), (5,6), (7,8)\}$  määrittelyjoukko?

5. Funktion koordinaatistossa oleva kuvaaja on jana  $A(1,2)B(3,4)$ . Mikä on funktion määrittelyjoukko?

8. Funktion arvojoukko koordinaatistokuvaajasta saadaan kuvaajan pisteiden  $y$ -koordinaattien joukosta. Tai projisoidaan kuvaajan pisteet  $y$ -akselille. Arvojoukko on projektio pisteiden joukko.

6. Mikä on funktion  $f : \{(1,2), (3,4), (5,6), (7,8)\}$  arvojoukko?

7. Funktion koordinaatistossa oleva kuvaaja on jana  $A(1,2)B(3,4)$ . Mikä on funktion arvojoukko?

9. Funktion kuvaajan piirtäminen  
Tehdään lukuparitaulukko. Annetaan  $x$ :lle muutama arvo ja lasketaan vastaava funktion arvo. Merkitään lukuparitaulukon lukuparit pisteinä koordinaatistoon. Jos määrittelyjoukko on yhtenäinen väli, voidaan pisteet yhdistää viivana funktion kuvaajaksi.

8. Piirrä funktion a)  $f(x) = 2x - 3$  b)  $f(x) = x^2 + x$  c)  $f(x) = 4/x$  kuvaaja.

10. Funktion kuvaajan piirtäminen graafisella laskimella

Syötetään funktion lauseke funktiorekisteriin TI-85:

Annetaan koneen piirtää

9. Piirrä laskinta käyttäen funktion a)  $f(x) = x^3 - 4x$  b)  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$  kuvaaja.

### 4.3. Funktion nollakohdat ja merkki

1. Funktion nollakohdan merkitys  
on sellainen muuttujan (yleensä  $x$ ) arvo, jolla funktion arvoksi tulee nolla.

4.3.1. Onko a)  $x = 1$  b)  $x = -2$  c)  $x = -3$  funktion  $f(x) = x^2 + 2x - 3$  nollakohta?

2. Funktion nollakohta funktion kuvaajasta  
on sen pisteen  $x$ -koordinaatti, missä funktion kuvaaja leikkaa  $x$ -akselin

3. Funktion nollakohta ratkaisemalla yhtälö  
Merkitään funktion lauseke  $= 0$  ja ratkaistaan saatu yhtälö.

2. Ratkaise funktion a)  $f(x) = 2x - 8$  b)  $f(x) = 4x + 20$  c)  $f(x) = 3x - 2$  nollakohta.

4. Funktion merkin tarkoitus  
on kertoa minkä merkinen on funktion arvona oleva luku.

3. Mikä on funktion  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  merkki kohdassa a)  $x = 0$  b)  $x = 1$  c)  $x = -2$  ?

5. Funktion merkin katsominen funktion kuvaajasta  
Funktion merkki on positiivinen niissä pisteissä, missä funktion kuvaaja on  $x$ -akselin yläpuolella.

4. Piirrä funktion  $f(x) = 2x - 3$  kuvaaja ja katso siitä, milloin funktio on positiivinen.

**\*6. Kasvava funktio**

Funktion kuvaaja menee ylöspäin tai pysyy samalla vaakatasolla, kun siirytään oikealle.

**\*7. Aidosti kasvava funktio**

Funktion kuvaaja menee ylöspäin, kun siirytään oikealle.

5. Mitkä funktioista  $f(x) = 2x$ ,  $g(x) = -3x$ ,  $h(x) = 4x + 5$  ovat kasvavia funktioita?

**\*8. Aidosti kasvavan funktion ominaisuus**

Suuremmalla  $x$ :llä funktio saa suuremman arvon ja pienemmällä  $x$ :llä pienemmän arvon ja sama kääntäen  
 $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

6. Kumpi on suurempi arvoltaan  $f(x_1)$  vai  $f(x_2)$ , kun  $x_1 = 1,2345678901$ ,  $x_2 = 1,2345678902$  ja  $f(x) = 13x$  ?

**\*9. Vähenevä funktio**

Funktion kuvaaja menee alaspäin tai pysyy samalla vaakatasolla, kun siirytään oikealle.

**\*10. Aidosti vähenevä funktio**

Funktion kuvaaja menee alaspäin, kun siirytään oikealle.

**\*11. Aidosti vähenevän funktion ominaisuus**

Suuremmalla  $x$ :llä funktio saa pienemmän arvon ja pienemmällä  $x$ :llä suuremman arvon ja kääntäen.  
 $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

7. Kumpi on suurempi  $f(x_1)$  vai  $f(x_2)$ , kun  $x_1 = -0,0000000001$ ,  $x_2 = -0,0000000002$  ja  $f(x) = 9 - 0,002x$ ?

**\*12. Aidosti monotonisen funktion arvot ovat yhtä suuret aina ja vain, kun muuttujan arvot ovat yhtä suuret.**

$x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

8. Mikä on  $a$ , kun  $f$  on aidosti kasvava ja a)  $f(a) = f(3)$  b)  $f(2a) = f(3)$  c)  $f(2a) = f(a + 3)$  ?

**13. Vakiofunktio**

on funktio, jonka kaikki arvot ovat yhtä suuret. Kuvaajan kaikki pisteet ovat samalla vaakasuoralla.

**4.4. Lineaarinen funktio****1. Ensimmäisen asteen polynomifunktio**

on sellainen funktio, jonka lauseke on  $x$ :n suhteen ensimmäisen asteen polynomi

4.4.1. Mitkä ovat 1. asteen polynomifunktioita  $f(x) = 2$ ,  $g(x) = 2x + 3$ ,  $h(x) = 3x - 4x^2$ ,  $k(x) = 4x - 5a^2$  ?

**2. Ensimmäisen asteen polynomifunktion kuvaaja**

on suora. Suora on nouseva, jos  $x$ :n kerroin on positiivinen, laskeva, jos  $x$ :n kerroin on negatiivinen.

2. Mitkä funktioiden kuvaajista ovat laskevia suoria  $f(x) = 2x - 3$ ,  $g(x) = 3 - 2x$ ,  $h(x) = -4x - x^2$  ?

**3. Yhtälön  $y = ax + b$  kuvaaja**

on suora. Joka on nouseva, jos  $a > 0$  (eli kulmakerroin on positiivinen) ja laskeva, jos  $a < 0$ .

3. Minkä yhtälön kuvaaja on nouseva suora a)  $y = 5x - 6$  b)  $y = -7x + 8$  c)  $y = -9 + 10x$  d)  $y = 11 - 12x$  ?

**4. Suoran kulmakerroin**

on  $x$ :n kerroin funktion lausekkeessa tai yhtälössä  $y = kx + b$ .

4. Mikä on suoran a)  $y = 3x + 6$  b)  $y = 7 - 5x$  c)  $y = ax + 1$  d)  $y = ax + x$  e)  $y = kx + 2x + 1$  kulmakerroin?

**5. Kulmakertoimen geometrinen merkitys.**

Se kertoo montako yksikköä on siirytävä pystysuorassa suunnassa, kun siirytään yksi yksikkö oikealle.

5. Piste  $(2,16)$  on suoralla  $y = 3x + a$ . Miten korkealla on kuvaaja, kun a)  $x = 3$  b)  $x = 4$  c)  $x = 1$  ?

**6. Suoran ja  $y$ -akselin leikkauspiste**

on funktion arvo, kun  $x = 0$ . Yhtälön  $y = kx + b$  kuvaajassa piste  $(0,b)$

6. Missä pisteessä suora a)  $y = 2x + 5$  b)  $y = -4x - 7$  c)  $y = kx + 1$  d)  $y = 3x + a$  leikkaa  $y$ -akselin?



7. Suoran kuvaajan piirtäminen tekemällä lukuparitaulukko  
Annetaan x:lle kolme yksinkertaista lukuarvoa ja lasketaan vastaava funktion, y:n arvo.  
Kaksi riittäisi, mutta kolmas on tarkistukseksi. Jos pisteet eivät ole samalla suoralla, jokin on laskettu väärin  
Merkitään lukuparit pisteinä koordinaatistoon, ja piirretään näiden kautta suora.

7. Piirrä suora a)  $y = 3x - 2$  b)  $y = -2x + 5$  c)  $y = 7 - x$ .

8. Suoran kuvaajan piirtäminen käyttäen kulmakerrointa ja vakiotermiä  
Merkitään vakiotermistä y-akselin leikkauspiste.  
Merkitään kulmakertoimesta piste yksi ruutu oikealle ja siitä kulmakertoimen verran ylös-alas suunnassa.  
Piirretään suora näiden pisteiden kautta.

8. Piirrä suora a)  $y = 4x - 5$  b)  $y = -3x + 4$  c)  $y = \frac{1}{2}x + 1$  d)  $y = 10x - 25$

9. Suoran monotonisuus

Suora on kasvava, jos kulmakerroin on positiivinen tai nolla, vähenevä, jos kulmakerroin on negatiivinen tai 0.

\*10. Suoran kulmakertoimen laskeminen kahdesta suoran pisteestä

Kulmakerroin on y-koordinaattien erotus jaettuna x-koordinaattien erotuksella.  $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

9. Laske suoran kulmakerroin, kun suora kulkee pisteiden a) (1,2) ja (5,10) b) (-1,3) ja (2,0) kautta.

11. Suoran yhtälön laskeminen kahdesta pisteestä graafisella laskimella TI-85

Valitse statiikkamoodi **STAT**, **F2 = EDIT** ja talletuspaikkojen nimet **xStat**, **yStat**

Syötä pisteiden koordinaatit **x<sub>1</sub>**, **y<sub>1</sub>**, **x<sub>2</sub>**, **y<sub>2</sub>**, **EXIT**

Hae koneen laskemat arvot **F1 = CALC**, **xStat**, **yStat**, **F2 = LINR**

jolloin kone laskee luvut a ja b, jotka ovat suoran yhtälön kertoimet. Suoran yhtälö on  $y = a + bx$

10. Mikä on pisteiden a) (1,2) ja (3,4) b) (2,7) ja (-3,5) kautta kulkevan suoran yhtälö?

#### 4.5. Itseisarvo

1. Itseisarvo

Voidaan karkeasti määritellä, että se on ko. luku ilman etumerkkiä. Siis positiivinen, tai nolla.  
Kirja määrittelee itseisarvon luvun etäisyytenä origosta. Kun janan pituus ei voi olla negatiivinen, ei itseisarvokaan voi olla negatiivinen.

2. Positiivisen luvun itseisarvo

on luku itse.

4.5.1. Mitä on a)  $|5|$  b)  $|15|$  c)  $|\pi|$  d)  $|\pi - 3|$  e)  $|x^2 + 1|$  ?

3. Negatiivisen luvun itseisarvo

on luvun vastaluku.

2. Mitä on a)  $|-8|$  b)  $|-27|$  c)  $|\pi - 1|$  d)  $|\pi - 4|$  ?

4. Luvun itseisarvo funktion avulla määriteltynä .

$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x, & \text{kun } x < 0 \end{cases}$  eli luvun itseisarvo on luku itse, kun luku on positiivinen  
eli luvun itseisarvo on luvun vastaluku, kun luku on negatiivinen

3. Mitä on a)  $|\sqrt{2} - 1|$  b)  $|\sqrt{3} - 2|$  c)  $|a - 1|$ , kun  $a > 1$  d)  $|a - 2|$ , kun  $a < 2$  ?

5. Itseisarvon  $|x|$  geometrinen merkitys

on luvun x etäisyys origosta lukusuoralla.

6. Itseisarvon  $|x - a|$  geometrinen merkitys

on lukujen x ja a välinen matka lukusuoralla.

4. Mikä on x, kun a)  $|x - 5| = 2$  b)  $|x - 3| = 4$  c)  $|x + 4| = 1$  ?

7. Lausekkeen itseisarvo paloittain määriteltynä

$|P(x)| = \begin{cases} P(x), & \text{niillä } x\text{:illä, joilla } P(x) \geq 0 \\ -P(x), & \text{niillä } x\text{:illä, joilla } P(x) < 0 \end{cases}$

5. Esitä ilman itseisarvoja a)  $|x - 2|$  b)  $|x - 6|$  c)  $|x + 2|$  d)  $|7 - x|$  e)  $|2x - 10|$ .

8. Paloittain määritellyn funktion kuvaajan piirtäminen  
Piirretään, ensin katkoviivalla pystysuora, suora sen  $x$ :n arvon kohdalle, missä funktion lauseke muuttuu. Tämä liitoskohta ei kuulu funktion kuvaajaan, mutta se on raja, jota kuvaajan ei pidä ylittää. Piirretään rajan kummallekin puolelle funktion sillä puolella olevan lausekkeen kuvaaja

6. Piirrä funktion a)  $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x + 1, & \text{kun } x < 0 \end{cases}$  b)  $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{kun } x \geq 0 \\ -2x + 1, & \text{kun } x < 0 \end{cases}$  kuvaaja.

9. Paloittain määritellyn funktion kuvaajan piirtäminen graafisella laskimella TI-85

Muu toiminta kuten kohdassa 4.2.10, mutta funktiota syötettäessä  $y_1 = f(x) \cdot (x < x_0) + g(x) \cdot (x \geq x_0)$

Vertailuoperaattorit TEST-valikosta.  $f(x)$  on funktion lauseke, kun  $x < x_0$  ja  $g(x)$ , kun  $x \geq x_0$

10. Itseisarvofunktion kuvaajan piirtäminen

Tee itseisarvosta paloittain määritelty funktio kohdan 4.5.7. mukaisesti.

Piirrä sitten tämän paloittain määritellyn funktion kuvaaja kuten kohdassa 4.5.8 tai 4.5.9.

7. Piirrä funktion a)  $f(x) = |x| + 1$  b)  $f(x) = |x - 3|$  c)  $f(x) = |x - 4| + 1$  d)  $|x - 1| + x$  kuvaaja.

11. Itseisarvofunktion kuvaajan piirtäminen graafisella laskimella

$|f(x)|$  syötetään muodossa  $\text{abs}(f(x))$ . Itseisarvofunktio  $\text{abs}$  löytyy CATALOG-valikosta

12. Itseisarvon suuruus

on aina vähintään nolla, ts.  $| \dots | \geq 0$ .

Tätä voi käyttää lausekkeen arvon arvioimisessa tai yhtälön ratkaisuja pohdittaessa.

8. Mikä on lausekkeen a)  $|x + 18| + 3$  b)  $|2x - 3| - 4$  pienin arvo, kun  $x$  voi olla mikä tahansa luku?

9. Mikä on lausekkeen a)  $10 - |x + 5|$  b)  $4 - x^2 - |5 \cdot x|$  suurin arvo?

10. Mikä on yhtälön a)  $|x + 1| + 2 = 0$  b)  $x^2 + |x| + 1 = 0$  ratkaisujoukko

13. Vastalukujen itseisarvot

ovat yhtä suuret ts.  $|a| = |-a|$

14. Tulon ja osamäärän itseisarvot

$|ab| = |a| \cdot |b|$  eli tulon itseisarvo on tekijöiden itseisarvojen tulo

$|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$  eli osamäärän itseisarvo on jaettavan ja jakajan itseisarvojen osamäärä

Kaavat pätevät myös oikealta vasemmalle

11. Olkoon  $|a| = 5$  ja  $|b| = 6$ . Mitä on a)  $|ab|$  b)  $|b/a|$ ?

15. Kolmioepäyhtälö eli itseisarvo summasta

$|a + b| \leq |a| + |b|$  eli summan itseisarvo on pienempi kuin yhteenlaskettavien itseisarvojen summa

12. Olkoon  $|a| \leq 5$  ja  $|b| \leq 6$ . Mitä voidaan päätellä itseisarvosta  $|a + b|$  ?

16.  $|a|^2 = a^2$

17. Itseisarvot yhtä suuria

$|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$  tai  $a = -b$  ts. sisustat ovat keskenään yhtä suuret tai vastalukuja

13. Mitä voidaan päätellä luvusta  $x$ , kun a)  $|x| = 2$  b)  $|x - 1| = 2$

## 4.6. Funktio matemaattisena mallina

1. Mallintamisen periaate ja mallin paraneminen

Tehdään malli (matemaattinen) kuvaamaan jotakin reaali maailman tapahtumaa.

Mallilla pyritään ennustamaan tai tarkistamaan tapahtuuko reaali maailmassa mallin edellyttämällä tavalla.

Jos malli ei anna tyydyttävää tulosta, pyritään tekemään parempi malli, jota sitten testataan jne.

2. Havaintojen esittäminen koordinaatistossa ja siitä tehtävät päätelmät

Laitetaan havaintopareja kuvaavat pisteet koordinaatistoon.

Voidaan päätellä, että kaikki mahdolliset havainnot olisivat samalla suoralla.

Tai sen milloin toinen havainnoitava suure saa arvon nolla.

4.6.1. Matti lähti matkalle. Liput ostettuaan hänellä oli rahaa 1000 mk. 2 päivän jälkeen rahaa oli 820 mk ja 4 päivän jälkeen 620 mk. Viikon kuluttua rahaa oli 350 mk. Esitä rahavarojen muutos graafisesti päivien funktiona. Paljonko rahaa oli 5 päivän jälkeen? Milloin rahat loppuivat? Minä aikana malli on "luotettava"?

3. Graafisesta mallista algebralliseen malliin

Graafisen mallin muodosta voi tehdä päätelmän millainen algebrallinen malli tilanteeseen sopii. Jos pisteet ovat samalla suoralla, algebralliseksi malliksi sopii suoran yhtälö tai funktioksi ensimmäisen asteen polynomifunktio.

2. Muodosta matemaattinen malli edellisen esimerkin jäljellä oleville rahoille y kuluneiden päivien x funktiona.

4. Interpolointi

on havaintoarvon suuruuden arviointia kahden havaintoarvon välisellä alueella.

Jos havainnot samalla suoralla, muutokset tapahtuvat samassa suhteessa, josta voidaan ko. arvo laskea.

3. Koordinaatiston suoralla on pisteet (12,140) ja (22,250). Mikä on pisteen y-koordinaatti, jos  $x = 18$ ?

4. Matin pituus oli 5 vuotiaana 95 cm ja 10 vuotiaana 120 cm. Mikä oli pituus 7 vuotiaana?

5. Ekstrapolointi

on havainnon suuruuden arviointia havaintojen ulkopuolisella alueella.

Jos havainnot samalla suoralla, muutokset tapahtuvat jatkossakin samassa suhteessa.

Arvioinnin lopuksi on mietittävä, onko tulos mielekäs, tai ollaanko mielekkäällä alueella.

5. Suoralla on pisteet (25,78) ja (30,81). Mikä on suoran y-koordinaatti, kun  $x = 32$ ?

6. Pekan pituus oli 4 vuotiaana 85 cm ja 10 vuotiaana 125 cm. Kuinka pitkä hän on 17 vuotiaana?

6. Matka ts-koordinaatistossa

Kappaleen liikkumista voi havainnollistaa ts- eli aika-matka-koordinaatistossa.

Kunkin hetkistä sijaintia kuvataan laittamalla ko. ajanhetkeä ja sijaintia kuvaava piste koordinaatistoon.

Sijaintia kuvaava arvo on matka alkupisteestä tai muusta sovitusta tarkastelupisteestä.

7. Matti lähti pyörällä Kokkolasta klo 12 ja oli klo 12.30 10 km päässä Kokkolasta. Esitä Matin sijainti Kokkolasta ajan funktiona, kun vauhti oli tasaista.

7. Käytännön matkaongelman ratkaiseminen graafisesti

Laitetaan muutama havaintopiste ts-koordinaatistoon.

Jos liike on tasaista, liikettä kuvaavat pisteet ovat samalla suoralla, joten piirretään suora.

Suorasta voidaan katsoa, milloin ollaan tietyn matkan päässä tai missä ollaan tietyllä ajanhetkellä.

Tai jos kaksi henkilöä liikkuu, niiden kuvaajien leikkauspisteestä nähdään milloin he kohtaavat eli he ovat samalla hetkellä samassa paikassa.

8. Matti lähti Kokkolasta kohti 60 km päässä olevaa Veteliä klo 12 ja oli klo 12.30 10 km päässä Kokkolasta.

Klo 13.30 hän piti puolen tunnin tauon. Pekka lähti Vetelistä klo 13 kohti Kokkolaa ja hän oli 13.30 12 km päässä lähtöpaikastaan. Missä ja milloin pojat kohtasivat, kun vauhdit olivat tasaisia?

\*8. Kattofunktio

$\lceil x \rceil$  = pienin kokonaisluku, joka on  $\geq x$ . Ts. x tai ensimmäinen kokonaisluku, joka on x:ää suurempi.

9. Mitä on a)  $\lceil 4,2 \rceil$  b)  $\lceil 5,17 \rceil$  c)  $\lceil -2,2 \rceil$  d)  $\lceil -3,14 \rceil$  e)  $\lceil 12 \rceil$  ?

\*9. Lattiafunktio

$\lfloor x \rfloor$  = suurin kokonaisluku, joka on  $\leq x$ . Ts. x tai ensimmäinen kokonaisluku, joka on x:ää pienempi.

10. Mitä on a)  $\lfloor 4,2 \rfloor$  b)  $\lfloor 5,17 \rfloor$  c)  $\lfloor -2,2 \rfloor$  d)  $\lfloor -3,14 \rfloor$  e)  $\lfloor 12 \rfloor$  ?

\*10. Int(x) - funktio

on positiivisen desimaaliluvun kokonaisosa. Negatiivisella luvulla arvo = kokonaisosa -1.

Tarkoittaa aivan samaa kuin lattiafunktio.

Laskimissa (TI-85) on tällainen funktio.

11. Mitä on a) Int(3,54) b) Int(4,99) c) Int(-5,82) d) Int(-0,65) e) Int(342)

12. Piirrä funktion a)  $f(x) = \text{Int}(2x)$  b)  $f(x) = 2 \cdot \text{Int}(x)$  c)  $f(x) = x + \text{Int}(x)$  kuvaaja.

## 4.7. Verrannollisuus

1. Suoraan verrannollisuus

Suuret A ja B ovat suoraan verrannollisia, jos A:n arvojen kasvamisesta seuraa, että vastaavat B:n arvot kasvavat samassa suhteessa.

4.7.1. a)  $A_1 = 3$  ja  $B_1 = 7$  sekä  $A_2 = 12$  ja  $B_2 = 28$  b)  $A_1 = 3,1$  ja  $B_1 = 7,2$  sekä  $A_2 = 13$  ja  $B_2 = 29$  ovat toisiaan vastaavia suureiden A ja B arvoja. Ovatko A ja B suoraan verrannolliset?

2. Suoraan verrannollisuuden esittäminen verrantona

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

2. A ja B ovat suoraan verrannolliset. Kun A on 2,7 kg, on B 148 mk. Paljonko on B, kun A on 4,2 kg?

3. Suoraan verrannollisuuden esittäminen algebrallisena yhtälönä (funktiona)

A on suoraan verrannollinen B:hen, jos  $A = k \cdot B$ .  $k = A_1/B_1$ , missä  $A_1$  ja  $B_1$  ovat vastinsuureita. k saadaan myös sijoittamalla yhtälöön  $A = k \cdot B$  yksi vastinpari  $A_1$  ja  $B_1$  ja ratkaisemalla k

3. A on suoraan verrannollinen B:hen. Esitä A:n avulla B, kun  $A = 5$  ja  $B = 8$  vastaavat toisiaan.

4. y on suoraan verrannollinen x:n toiseen potenssiin. Esitä x:n avulla y, kun  $x = 3$  ja  $y = 7$  on vastinpari.

4. Mikä pysyy vakiona suoraan verrannollisuudessa?

Suureiden toisiaan vastaavien arvojen suhde on vakio. ( $A_1 : B_1 = \text{vakio}$ )

5. Kääntäen verrannollisuus

Suureet A ja B ovat kääntäen verrannollisia, jos A:n arvot muuttuvat B:n arvojen käänteislukujen suhteessa.

5. a)  $A_1 = 3$  ja  $B_1 = 7$  sekä  $A_2 = 21$  ja  $B_2 = 1$  b)  $A_1 = 30$  ja  $B_1 = 12$  sekä  $A_2 = 10$  ja  $B_2 = 4$  ovat toisiaan vastaavia suureiden A ja B arvoja. Ovatko A ja B kääntäen verrannolliset?

6. Kääntäen verrannollisuuden esittäminen verrantona

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_2}{B_1}$$

6. A ja B ovat kääntäen verrannolliset. Kun A on 4,8, on B 7,2. Paljonko on B, kun A on 3,6?

7. Kääntäen verrannollisuuden esittäminen algebrallisena yhtälönä

A on kääntäen verrannollinen B:hen, jos  $A = k \cdot \frac{1}{B}$ ,  $k = A_1 \cdot B_1$ , missä  $A_1$  ja  $B_1$  ovat vastinsuureita

k saadaan myös sijoittamalla eo. yhtälöön yksi vastinpari  $A_1$  ja  $B_1$  ja ratkaisemalla k

7. A on kääntäen verrannollinen B:hen. Esitä B:n avulla A, kun  $A = 36$  ja  $B = 0,25$  vastaavat toisiaan.

8. y on kääntäen verrannollinen x:n neliöjuureen. Esitä x:n avulla y, kun  $x = 4$  ja  $y = 5$  on vastinpari.

8. Mikä pysyy vakiona kääntäen verrannollisuudessa

Suureiden toisiaan vastaavien arvojen tulo on vakio. ( $A_1 \cdot B_1 = \text{vakio}$ )

9. Suoraan verrannollisten suureiden graafinen kuvaaja

Suoraan verrannollisten suureiden vastinpisteiden kuvaaja on suora.

9. Bensan hinta on suoraan verrannollinen ostettujen litrojen määrään. Esitä graafisesti hinnan riippuvuus ostetuista litroista, kun 10 l bensaa maksoi 55,50 mk.

10. Kääntäen verrannollisten suureiden graafinen kuvaaja

Kääntäen verrannollisten suureiden vastinpisteiden kuvaaja on hyperbeli, jonka asymptootteina ovat akselit.

10. Matkaan kulunut aika on kääntäen verrannollinen käytettyyn vauhtiin. Esitä graafisesti ajan riippuvuus vauhdista, kun vauhdilla 80 km/h kului aikaa 6 h.

## 5. Ensimmäisen asteen yhtälö

### 5.1. Peruskäsitteitä

1. Yhtälö

on kahden lausekkeen merkitty yhtäsuuruus

2. Yhtälön ratkaisu

on se muuttujakirjaimen arvo, jolla yhtälön molemmat puolet ovat yhtäsuuria. Ratkaisua sanotaan joskus yhtälön juureksi.

5.1.1. Onko a)  $x = 4$  b)  $x = 3$  c)  $x = 2$  d)  $x = 1$  yhtälön  $x^2 + 4 = 5x$  ratkaisu?

2. Mikä pitäisi olla  $a$ :n arvo, jotta  $x = 3$  olisi yhtälön  $2x + a = 5$  ratkaisu?

3. Yhtälön ratkaisujoukko  
on yhtälön kaikkien ratkaisujen muodostama joukko

4. Yhtäpitävät yhtälöt  
ovat sellaisia, joilla on sama ratkaisujoukko

3. Ovatko yhtälöt a)  $2x = 4$  ja  $10 - 5x = 0$  b)  $2x = 4$  ja  $x^2 = 4$  yhtäpitäviä?

## 5.2. Ensimmäisen asteen yhtälön ratkaiseminen

1. Yhtälön ratkaisemisen idea.

Tehdään alkuperäisen yhtälön kanssa yhtäpitäviä yhtälöitä. (Ts. niillä on samat ratkaisut)

Viimeinen yhtäpitävä yhtälö yritetään saada muotoon  $x = a$  ( $x$  yksin yhtälön toisella puolella, toisella ei  $x$ :ää)

Tästä nähdään helposti, että  $x$ :n arvo  $a$  toteuttaa yhtälön eli  $x = a$  on yhtälön ratkaisu.

2. Termin siirtäminen yhtälön toiselle puolelle

Kun termi (= yhteenlaskettava) siirretään yhtälön toiselle puolelle, niin sen etumerkki vaihdetaan.

5.2.1. Ratkaise yhtälö a)  $x - 4 = 8$  b)  $x + 6 = 10$  c)  $10 = 7 - x$ . d) mikä on VERO, kun  $OH + VERO = LASKU$ ?

3. Sulkeiden poistaminen

Jos sulkeissa oleva lauseke kerrotaan, niin sen jokainen termi kerrotaan.

Jos sulkeiden edessä on  $+$  merkki, niin termien etumerkit säilyvät sulkeiden poiston jälkeen.

Jos sulkeiden edessä on  $-$  merkki, niin termien etumerkit vaihtuvat sulkeiden poiston jälkeen.

2. Ratkaise yhtälö a)  $5 - (2 - x) = 0$  b)  $[6 - (5 - x)] = 4$  c)  $x(x + 1) - x^2 = 7$

4. Tekijän siirtäminen yhtälön toiselle puolelle

$x$ :n kertoimena oleva tekijä saadaan pois jakamalla yhtälön molemmat puolet (joka termi) tällä kertoimella.

3. Ratkaise yhtälö a)  $2x = 18$  b)  $5x - 100 = 0$  c)  $42 - 7x = 0$  d)  $5[4 + 3(x - 2)] = 35$  e) ratkaise €, kun  $6€ = MK$ .

5. Nimittäjien poistaminen

Yhtälön molemmat puolet kerrotaan nimittäjällä tai nimittäjien (pienimmällä) yhteisellä jaettavalla.

Jos yhtälön toinen puoli on summa, niin jokainen termi (yhteenlaskettava) kerrotaan tällä luvulla.

4. Ratkaise yhtälö a)  $\frac{x}{3} = 4$  b)  $\frac{x - 2}{3} = 4$  c)  $\frac{3x - 4}{5} = 7$ .

5. Ratkaise yhtälö a)  $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 1$  b)  $\frac{x - 1}{2} + \frac{x + 2}{3} = 6$  c)  $\frac{2x - 1}{3} + \frac{3x + 1}{4} = x + 2$ .

6. Ratkaisun vaiheet

Poista nimittäjät

Poista sulkeet

Siirrä tuntemattomat vasemmalle ja vakiot oikealle puolelle yhtälöä

Laske yhteen

Lopuksi yhtälön molemmat puolet jaetaan tuntemattoman kertoimella.

6. Ratkaise yhtälö a)  $\frac{x + 2}{3} - \frac{2x - 3}{5} = x - 3$  b)  $\frac{7 - x}{4} - \frac{x + 8}{3} = \frac{x - 1}{6} + 3$

7. Yhtälön  $f(x) = 0$  ratkaiseminen graafisesti

Piirretään funktion  $f(x)$  kuvaaja. (paperille tai laskimeen)

Ratkaisu on sen pisteen  $x$ -koordinaatti, missä kuvaaja leikkaa  $x$ -akselin

7. Ratkaise graafisesti yhtälö a)  $2x - 5 = 0$  b)  $3x - 5 = 0$  c)  $\frac{2x - 3}{4} - 1 = 0$

8. Yhtälön  $f(x) = g(x)$  ratkaiseminen graafisesti

Piirretään molempien funktioiden  $f(x)$  ja  $g(x)$  kuvaajat samaan koordinaatistoon. (paperille tai laskimessa)

Ratkaisu on sen pisteen  $x$ -koordinaatti, missä kuvaajat leikkaavat toisensa.

8. Ratkaise graafisesti yhtälö a)  $3x - 2 = \frac{1}{2}x + 3$  b)  $4x - 3 = \frac{5x - 6}{4} + 1$

9. Ratkaisuksi tulee kaikki yhtälön määrittelyjoukon  $x$ :t  
jos yhtälö sieventämisen jälkeen tulee yhtäpitäväksi yhtälön  $0 = 0$  yhtälön kanssa.

9. Ratkaise yhtälö a)  $x(x + 1) = x^2 + x$  b)  $\frac{x-1}{2} = \frac{x-2}{3} + \frac{x+1}{6}$

10. Yhtälöllä ei ole ratkaisua  
jos yhtälö sieventämisen jälkeen tulee yhtäpitäväksi yhtälön  $0 = a$  kanssa, missä  $a \neq 0$ .

10. Ratkaise yhtälö a)  $(x - 2) \cdot 3x = x(3x - 5) - (x + 1)$  b)  $\frac{x}{2} + \frac{x-1}{3} = \frac{5x-4}{6}$

11. Yhtälön  $ax = b$  ratkaisujen lukumäärä eri  $a$ :n ja  $b$ :n arvoilla

Jos  $a \neq 0$ , niin yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu.

Jos  $a = 0$  ja  $b \neq 0$ , niin yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Jos  $a = 0$  ja  $b = 0$ , niin yhtälön toteuttavat kaikki  $x$ :t.

11. Millä  $a$ :n arvolla yhtälöllä a)  $ax - x = 3$  b)  $a(x - 1) + 2(x - 3) = 4$  on täsmälleen yksi ratkaisu?

12. Millä  $a$ :n arvolla yhtälöllä a)  $ax + 2x = 3$  b)  $ax + x = a - 1$  ei ole ratkaisua?

13. Millä  $a$ :n ja  $b$ :n arvolla yhtälöllä a)  $(a - 1)x = b - 2$  b)  $ax + 3 = 4x + b$  on äärettömän monta ratkaisua?

12. Verrantoyhtälön  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ratkaiseminen

Kerrotaan ristikkäin, ts.  $ad = bc$  eli äärimmäisten jäsenten tulo = keskimmäisten tulo

14. Ratkaise yhtälö a)  $\frac{x}{2} = \frac{3}{4}$  b)  $\frac{x-1}{4} = \frac{3x+4}{5}$  c)  $\frac{2x-1}{2} = \frac{x^2-3x+5}{x}$

13. I asteen yhtälön ratkaiseminen, jos yhtälössä on kirjainparametri

Kun yhtälö kerrotaan tai jaetaan parametrin sisältävällä lausekkeella, jakautuu ratkaisu kahteen osaan

a) jos kirjainparametrilla on sellainen arvo, että kertojalla tai jakajalla on nolasta poikkeava arvo, saa kertoa tai jakaa ja ratkaisu etenee normaalisti

b) niillä kirjainparametrin arvoilla, joilla kertoja tai jakaja saa arvon nolla, ei saa kertoa eikä jakaa, vaan yhtälö tutkitaan sijoittamalla yhtälöön parametrin paikalle kyseinen arvo

15. Ratkaise a)  $(a - 1)x = 3$  b)  $(a - 2)x = 3(a - 2)$  c)  $ax + 3 = x + a$

### 5.3. Ongelmanratkaisu yhtälöllä

1. Probleeman ratkaisemisen vaiheet.

Lue tehtävä ja piirrä mahdollinen kuvio.

Merkitse kysyttyä suuretta  $x$ :llä. (tai jotain sellaista suuretta, josta saa helposti kysytyyn suureen)

Muodosta  $x$ :ää ja tunnettuja tietoja hyväksi käyttäen kaikki tehtävässä esiintyvät suureet.

Muodosta jostakin tiedosta yhtälö suureiden välille. (esim. kokonaisuus on osiensa summa)

Ratkaise yhtälö.

Pohdi tuloksen järkevyyttä ja anna vastaus.

5.3.1. Luvun kolmasosan ja neljäsosan summa on 65 pienempi kuin itse luku. Mikä se luku on?

2. Kun luku kerrotaan 5:llä saadaan sama tulos kuin jos lukuun lisätään 5. Mikä on luku?

3. Mikä luku on vähennettävä murtoluvun  $\frac{7}{19}$  osoittajasta ja nimittäjästä, jotta luvun arvoksi tulisi  $\frac{1}{5}$ ?

4. Kahden peräkkäisen kokonaisluvun neliöiden erotus on 229. Määritä luvut.

5. Ympyrärenkaan leveys on 5 mm ja pinta-ala  $470 \text{ mm}^2$ . Määritä sisemmän ympyrän säde.

6. Bussista poistui neljäsosa matkustajista ja seuraavalla pysäkillä kolmasosa jäljelle jääneistä, minkä jälkeen bussissa oli 24 matkustajaa. Montako matkustajaa oli alunperin, kun pysäkeiltä ei tullut uusia?

### 5.4. Prosentti

1. Osuuden laskeminen, kun tunnetaan osuus prosentuaalisena jostakin määrästä.

Osuus =  $\frac{\text{prosentit}}{100} \cdot \text{määrä}$  ( osuus =  $b$ , prosentit =  $p$  ja määrä =  $a$  kaavassa 5.4.4 )

5.4.1. Paljonko on 15% luvusta 260?

2. Prosenttiluvun laskeminen, kun tunnetaan osuus ja mistä määrästä se on osa

prosentit =  $\frac{\text{OSUUS}}{\text{määrä}} \cdot 100$  ( prosentit =  $p$ , osuus =  $b$  ja määrä =  $a$  kaavassa 5.4.4 )

2. Kuinka monta prosenttia on luku 300 luvusta 800?

3. Määrän laskeminen, kun tunnetaan osuus arvona ja prosentteina

$$\text{määrä} = \frac{\text{OSUUS}}{\text{prosentit}} \cdot 100 \quad (\text{määrä} = a, \text{ osuus} = b \text{ ja prosentit} = p \text{ kaavassa 5.4.4})$$

3. Mistä luvusta 60% on 165?

4. Prosenttilaskun peruskaava

$$b = \frac{p}{100} \cdot a \quad (\text{tai jos käytetään desimaalilukuja } b = 0,0p \cdot a, \text{ jos } p \text{ 1-numeroinen luku), missä}$$

a = perusarvo. Tunnistus: 1) sta pääte (mistä osa), 2) kuin sanan jäljessä oleva luku, 3) kokonaisuus, 4) alkuperäisempi, ...

p = prosenttiluku. Tunnistaa % merkistä.

b = prosenttiarvo. Tarkoittaa samaa kuin p mutta arvona. (p = alennusprosentti, b = alennus jne.)

5. Kaavan käyttö yhtälönä prosenttilaskun ratkaisemiseksi

Korvataan kaavassa a, b ja p x:llä ja annetuilla luvuilla.

Ratkaistaan näin saatu yhtälö.

4. 3,1 miljoonasta äänestäjästä äänesti 72%. Montako henkilöä kävi äänestämässä?

5. Sormuksen massa on 74 g ja siinä on 65 g kultaa. Mikä on sormuksen kultapitoisuusprosentti?

6. Korkoprosentti on 2,5%. Paljonko tiilillä on oltava, jotta korkotuotto olisi 10 000 mk?

7. Hillon sokeripitoisuus pitäisi olla 32%. Paljonko mansikoita tarvitaan, kun sokeria on 1,6 kg?

8. Auton mittari näyttää 100 km/h, kun todellinen nopeus oli 92 km/h. Mikä oli mittarin virheprosentti?

9. Malmilohkareessa, jonka massa oli 4,8 kg on 0,40 kg kuparia ja 30% rautaa. Kuinka monta a) kilogrammaa b) prosenttia oli muita aineita?

6. Suurentunut arvo, pienentynyt arvo, kun tunnetaan suurentumis-%

Jos suuremmuus-% on p, on suurempi luku prosentteina  $(100 + p)\%$  pienemmästä.

Jos pienemmyys-% on p, on pienempi luku prosentteina  $(100 - p)\%$  suuremmasta.

Jos luku on p% suurempi kuin a, on ko. luku  $(100 + p)/100 \cdot a$

Jos hintaa on alennettu a:sta p%, on alennettu hinta  $(100 - p)/100 \cdot a$

10. Mikä luku on 20% suurempi kuin 400?

11. Mikä luku on 25% pienempi kuin 240?

12. Millä hinnalla tavara myytiin, kun 125 mk hintaa alennettiin 40%?

13. Mitä lukua on luku 460 15% suurempi?

14. Kuinka monta prosenttia on luku 34 enemmän kuin luku 24?

15. Tavara myytiin 15% alennuksella hintaan 136 mk. Mikä oli hinta ennen alennusta?

16. Mansikoiden hinta oli 9,60 mk/kg mutta 12 kg laatikon sai 108 mk:lla. Montako % oli alennus?

17. Auto ostettiin vuoden 1995 alussa hinnalla 120 000 mk. Arvo laski 15% kahtena ensimmäisenä vuonna. Vuoden 1997 lopussa arvo oli 78 000 mk. Montako % arvo laski vuoden 1997 aikana?

7. Liuoslaskun ratkaisu taulukkoa käyttäen

Tee taulukko, jossa on oma vaakarivi I osalle, II osalle ja yhdistetylle osalle (I + II)

Ja oma pystyrivi kokonaismäärälle, prosentille ja "kalliimmalle" aineelle.

Täytä taulukon puuttuvia tietoja vaakasuoraan prosenttilaskun kaavaa käyttäen.

Täytä taulukon puuttuvia määriä (ei prosentteja) pystysuoraan yhteenlaskua käyttäen.

18. Sekoitetaan a) 2 kg 5% ja 3 kg 10% b) 2 kg 5% ja 3 kg 10% ja 5 kg 15% sokeriliuosta. Mikä on uuden liuoksen sokeripitoisuus?

19. Kuinka moniprosenttiseksi liuos laimenee, kun 3 kg 6% suolaliuosta lisätään 1 kg vettä?

20. Kuinka paljon vettä on haihdutettava 5,4 kg:sta 10% suolaliuosta, jotta saataisiin 12% liuos?

21. Kuinka paljon 75% ja 90% kultaa on yhdistettävä, jotta saataisiin 200 g 80% kultaa?

8. Muutosprosentin laskeminen, kun lähtöarvoja ei ole annettu

Merkitään alkuperäistä arvoa a:lla (100a:lla).

Laita näkyviin kaikki esiintyvät (tarvittavat) suureet käyttäen a:ta (100a:ta).

Ratkaise tehtävä kuten a (100a) olisi selkeä luku. Lopussa a:t supistuvat pois.

22. Tuote A on 25% kalliimpi kuin tuote B. Montako % tuote B on halvempi kuin tuote A?

23. Montako % neliön ala kasvaa, kun sivut pitenevät 10%?

24. Tuotteen hintaa korotettiin 15%. Alennusmyyntiin hintaa alennettiin ensin 10% ja sitten 5%. Montako prosenttia oli lopullinen hinta alkuperäisestä?

25. Suorakulmion kantaa suurennettiin 10%. Montako % korkeutta on pienennettävä, jotta ala olisi sama?

## 5.5. Jakosuhte

1. Kaksoissuhde (tai moninkertaisempi)

$A : B : C = m : n : p$  tarkoittaa, että  $A : B = m : n$  ja  $A : C = m : p$  ja  $B : C = n : p$

5.5.1.  $A : B : C = 3 : 5 : 7$ . Mikä on a)  $A : C$  b)  $B : A$  c)  $B : C$  ?

2.  $A : B = 3 : 4$  ja  $B : C = 6 : 7$ . Mikä on  $A : B : C$ ?

2. Jakosuhteongelman ratkaiseminen

Usein kannattaa merkitä  $x$ :llä yhtä jako-osaa, jolloin  $A$ :ta vastaa  $mx$ ,  $B$ :tä  $nx$  ja  $C$ :tä  $px$ .

Tämän jälkeen saadaan yhtälö  $mx + nx + px =$  kokonaisuus, josta  $x$  ja vastaavat osien määrät.

3.  $A$ :lla on 20,  $B$ :llä 30 ja  $C$ :llä 40 erään yhtiön osaketta. Miten paljon kukin saa 2,7 milj. mk:n voitosta?

4.  $A$  sijoitti 10 mk,  $B$  11 mk,  $C$  12 mk,  $D$  13 mk ja  $E$  14 mk lottoporukkaan. Kuinka jaetaan voittona saatu 3 milj. mk pelaajien kesken?

## 5.6. Itseisarvoyhtälö

1.  $|x| = a$

$\Leftrightarrow x = a$  tai  $x = -a$

Huom. Yhtälöllä ei ole ratkaisua, jos  $a < 0$ !

5.6.1. Ratkaise a)  $|x| = 2$  b)  $|x| = 10$  c)  $|x - 5| = 0$  d)  $|x + 6| = 0$  e)  $2 \cdot |x| - 10 = 0$ .

2.  $|P(x)| = a$

$\Leftrightarrow P(x) = a$  tai  $P(x) = -a$ , joten tee kyseiset kaksi yhtälöä ja ratkaise ne.

Huom. Yhtälöllä ei ole ratkaisua, jos  $a < 0$ .

2. Ratkaise a)  $|2x| = 5$  b)  $|x - 2| = 5$  c)  $|2x - 5| = 3$  d)  $|3x + 4| - 5 = 0$  e)  $|4x - 5| + 6 = 0$ .

3.  $|P(x)| = |Q(x)|$

$\Leftrightarrow P(x) = Q(x)$  tai  $P(x) = -Q(x)$ , joten tee kyseiset kaksi yhtälöä ja ratkaise ne.

3. Ratkaise a)  $|2x + 3| = |3x + 7|$  b)  $|5x - 6| - |2x - 15| = 0$  c)  $|2x - 3| + |x| = 0$ .

4.  $|P(x)| = Q(x)$

$\Leftrightarrow P(x) = Q(x)$  tai  $P(x) = -Q(x)$ , joten tee kyseiset kaksi yhtälöä ja ratkaise ne.

Tarkista, että saadulla  $x$ :n arvolla  $Q(x)$  ei tule negatiiviseksi. Jos tulee, niin hylkää tämä  $x$ .

4. Ratkaise a)  $|2x - 3| = x$  b)  $|x| = 2x - 3$  c)  $|3x - 4| = 5x - 6$  d)  $|3x - 8| + 12 = x$

## 6. Ensimmäisen asteen epäyhtälö

### 6.1. Peruskäsitteitä

1. Epäyhtälö

on kahden lausekkeen merkitty erisuuruus käyttäen  $<$ ,  $>$ ,  $\neq$ ,  $\leq$  tai  $\geq$  merkkiä.

2. Epäyhtälön ratkaisu

on sellainen  $x$ :n (muuttujan) arvo, jolla epäyhtälössä järjestys on tosi.

6.1.1. Onko a)  $x = 0$  b)  $x = 1$  c)  $x = 2$  d)  $x = 3$  e)  $x = 4$  f)  $x = 5$  epäyhtälön  $2x - 3 < 4$  ratkaisu?

3. Epäyhtälön ratkaisujoukko

muodostuu kaikista niistä muuttujan arvoista, joilla epäyhtälö on tosi

4. Epäyhtälöiden yhtäpitävyys

tarkoittaa sitä, että epäyhtälöillä on sama ratkaisujoukko.

### 6.2. Reaalilukuvälit

1. Välin ilmoittaminen lukusuoralla

Merkitään lukusuoralle tai sen viereen välin päätepisteisiin pallot, täysinäinen tai avoin riippuen siitä kuuluuko päätepiste mukaan lukujoukkoon vai ei ja vedetään viiva pallojen väliin tai pallosta äärettömyyteen.

6.2.1. Merkitse lukusuoralle väli, johon kuuluu lukuja  $x$ , jotka toteuttavat ehdot:  $x = 2$ , lukuja  $x > 2$  ja  $x < 5$



2. Välin ilmoittaminen epäyhtälöllä

Väli a:sta b:hen voidaan ilmoittaa epäyhtälönä  $a < x < b$  tai  $a \leq x \leq b$  tai ...

2. Merkitse lukusuoralle väli a)  $-3 < x < 2$  b)  $-2 \leq x < 1$  c)  $1 \leq x \leq 3$  d)  $x < 4$  e)  $x \geq -1$

3. Välin ilmoittaminen [ ] - merkinnöillä

Väli a:sta b:hen voidaan ilmoittaa  $]a,b[$  tai  $[a,b]$  tai ...

Hakasulut aukeavat sisäänpäin, jos välin päätepiste kuuluu joukkoon, ja ulospäin, jos ei kuulu.

3. Merkitse lukusuoralle välit a)  $[1,4]$  b)  $]-2,3[$  c)  $]0,2[$  d)  $]-1,\infty[$  e)  $]-\infty,1[$ .

4. Esitä epäyhtälöin väli a)  $[1,4]$  b)  $]-2,3[$  c)  $]0,2[$  d)  $]-1,\infty[$  e)  $]-\infty,1[$ .

5. Esitä hakasuluin väli a)  $-3 < x < 2$  b)  $-2 \leq x < 1$  c)  $1 \leq x \leq 3$  d)  $x < 4$  e)  $x \geq -1$ .

4. Suljettu, avoin, puoliavoin väli

Suljetussa välissä molemmat välin päätepisteet kuuluvat joukkoon

Avoimessa välissä molemmat välin päätepisteet eivät kuulu joukkoon.

Puoliavoimessa välissä vain toinen välin päätepiste kuuluu joukkoon.

### 6.3. Ensimmäisen asteen epäyhtälön ratkaiseminen

1. Epäyhtälön kertominen tai jakaminen negatiivisella luvulla

Epäyhtälön molemmat puolet saa kertoa negatiivisella luvulla, mutta järjestyksen suunta täytyy kääntää

6.3.1. Ratkaise epäyhtälö a)  $-2x < -6$  b)  $-3x > 12$  c)  $-\frac{1}{2}x < 5$  d)  $-x/3 \leq 4$

2. I asteen epäyhtälön ratkaiseminen

Ratkaistaan kuten ensimmäisen asteen yhtälö kohdassa 5.2.6.

LISÄYS: kun kerrotaan tai jaetaan negatiivisella luvulla, järjestyksen suunta käännetään.

2. Ratkaise a)  $7x + 5 < 3x + 1$  b)  $2x - 3 < 4x + 5$  c)  $2,4x + 3,5 > 3,6x - 1,3$

3. Ratkaise a)  $4(2 - x) \geq 2x - 1$  b)  $5 - 3(x + 1) < 2x + 3$  c)  $2(3x - 4) < 3(4x - 3) + 1$

4. Ratkaise a)  $\frac{3x-2}{5} > x$  b)  $x - \frac{3x-2}{2} < 2x$  c)  $\frac{x+12}{5} \leq \frac{x+3}{2}$

5. Ratkaise a)  $\frac{3x+3}{4} - \frac{5x+1}{12} > \frac{2x-1}{3}$  b)  $\frac{x}{3} - \frac{2-x}{4} \geq \frac{x+1}{2}$  c)  $\frac{3x-6}{5} - 2x > 1 - \frac{x-1}{2}$

6 Mikä on a, kun epäyhtälön  $\frac{x+2a}{3} \geq x+2$  ratkaisujoukko on  $]-\infty,2]$  ?

3. Epäyhtälöllä ei ole ratkaisua

jos epäyhtälössä sieventämisen jälkeen x:t (tuntemattomat) häviävät ja saatu epäyhtälö on varmasti epätosi

7. Ratkaise a)  $x(x-4) < (x-5)(x+1)$  b)  $\frac{2x-1}{3} - \frac{x+1}{6} \geq \frac{x+5}{2}$

4. Epäyhtälön ratkaisuja ovat kaikki x:t

jos epäyhtälössä sieventämisen jälkeen x:t häviävät ja saatu epäyhtälö on varmasti tosi.

8. Ratkaise a)  $\frac{x}{2} < \frac{2x+1}{4}$  b)  $\frac{x}{2} - \frac{x-1}{5} \leq \frac{3x+2}{10}$ .

5. Epäyhtälön  $f(x) > 0$  ratkaiseminen graafisesti

Piirrä funktion  $f(x)$  kuvaaja. (paperille tai laskimella)

Ratkaisujoukkoon kuuluvat x-koordinaatit kaikista niistä pisteistä, jotka ovat x-akselin yläpuolella.

9. Ratkaise graafisesti epäyhtälö a)  $2x - 3,4 < 0$  b)  $2^x - 3,4 < 0$

6. Epäyhtälön  $f(x) > g(x)$  ratkaiseminen graafisesti.

Piirrä funktioiden  $f(x)$  ja  $g(x)$  kuvaajat samaan koordinaatistoon. (paperille tai laskimella)

Ratkaisujoukkoon kuuluvat x-koordinaatit kaikista niistä pisteistä, joissa f:n kuvaajan y on korkeammalla kuin g:n kuvaajan y-koordinaatti samalla x:llä eli samalla pystysuoralla.

10. Ratkaise graafisesti epäyhtälö a)  $2x - 3 < 4x - 7$  b)  $2^x - 3 < 4x - 7$

7. Epäyhtälön ratkaiseminen graafisen laskimen logiikkafunktion avulla.

Syötä funktion lausekkeeksi ratkaistava epäyhtälö ja anna laskimen piirtää tämän epäyhtälön kuvaaja.

Jos epäyhtälö on tosi jollakin x:llä, niin logiikkafunktion arvo on 1, jos epätosi, niin arvo on nolla.

Epäyhtälö siis toteutuu niillä x:illä, joilla funktion arvo on 1.

## 8. Kirjainkerroin epäyhtälössä

Jos joudutaan jakamaan epäyhtälö kirjaimen sisältävällä lausekkeella, jakaantuu epäyhtälö kolmeen osaan.

Jos lauseke  $> 0$ , saa jakaa ja järjestys säilyy.

Jos lauseke  $< 0$ , saa jakaa ja järjestys kääntyy.

Jos lauseke  $= 0$ , ei saa jakaa, vaan sijoitetaan nollakohta alkuperäiseen epäyhtälöön ja tutkitaan sitä. Tällöin yleensä ratkaisujoukko on  $\mathbb{R}$  tai  $\emptyset$ .

11. Ratkaise a)  $ax < 1$  b)  $(a - 1)x > a$  c)  $a(x - 2) < 3x - 4$ .

## 6.4. Kaksoisepäyhtälö

## 1. "JA"-ryhmän ratkaiseminen

Ratkaise JA sanan molemmilla puolilla olevat epäyhtälöt

Merkitse kummankin epäyhtälön ratkaisujoukot lukusuorataulukkaan omille riveilleen.

Ratkaisujoukko (omalle riville) on näiden leikkausjoukko ts. alue, missä molemmat epäyhtälöt toteutuvat.

6.4.1. Ratkaise a)  $2x > 2$  ja  $x - 4 < 0$  b)  $3 - (x - 1) \leq 3x$  ja  $5x + 6 > 0$  c)  $2x - 5 > 3$  ja  $4 - x > 3$

## 2. "TAI"-ryhmän ratkaiseminen

Ratkaise TAI sanan molemmilla puolilla olevat epäyhtälöt.

Merkitse kummankin epäyhtälön ratkaisujoukot lukusuorataulukkaan omille riveilleen.

Ratkaisujoukko(omalle riville) on näiden yhdiste ts. alue, missä ainakin toinen epäyhtälö toteutuu.

2. Ratkaise a)  $2(x - 3) > 4 - x$  tai  $6 \leq 3x$  b)  $4x \geq 8$  tai  $12 + 3x < 0$  c)  $7x + 3 > 0$  tai  $4 \geq 3x$ .

## 3. Kaksoisepäyhtälön hajoitus kahdeksi osaepäyhtälöiksi

$a < b < c \Leftrightarrow a < b$  JA  $b < c$

3. Hajoita kahdeksi epäyhtälöksi a)  $1 < x < 6$  b)  $x < 2x + 3 \leq 4x - 5$  c)  $3x - 4 < 5 - x < 6x + 7$

## 4. Kaksoisepäyhtälön ratkaiseminen

Hajoita kaksoisepäyhtälö JA-epäyhtälöryhmäksi ja ratkaise kuten kohdassa 6.4.1.

4. Ratkaise a)  $x < 3x - 4 < x + 5$  b)  $5 - x < x + 3 < 4x$  c)  $x - 2 \leq 3x - 4 \leq 5 - 6x$

## 6.5. Itseisarvoepäyhtälö

1.  $|P(x)| < a$  epäyhtälön ratkaiseminen

Hajoita kaksoisepäyhtälöksi  $-a < P(x) < a \Leftrightarrow -a < P(x)$  JA  $P(x) < a$  ja ratkaise kuten JA-ryhmä.

6.5.1. Ratkaise a)  $|x| < 3$  b)  $|x - 1| < 4$  c)  $|2x - 3| < x + 6$  d)  $|\frac{1}{2}x - 1| + 5 < x$ .

2.  $|P(x)| > a$  epäyhtälön ratkaiseminen

Hajoita TAI-ryhmäksi  $P(x) > a$  TAI  $P(x) < -a$  ja ratkaise kuten TAI-ryhmä.

2. Ratkaise a)  $|x| > 4$  b)  $|2x - 3| > 4$  c)  $|3x - 5| > x + 3$ .

## 6.6. Epäyhtälöprobleemat

## 1. Probleeman ratkaiseminen

Tee epäyhtälö vastaavalla tavalla kuin yhtälö kohdassa 5.3.1. ja ratkaise se

6.6.1. Viiden peräkkäisen kokonaisluvun summa on yli 1000. Määritä pienimmät tällaiset luvut.

2. Kauppaan palautetaan 24 pulloa. Pienistä pulloista saadaan 50 p ja isoista 2,50 mk. Kuinka monta isoja pulloa on vähintään oltava, jotta pulloista saataisiin vähintään 35 mk?

3. Tasakylkisen kolmion kanta on 8 cm lyhempi kuin kylki. Miten suuri kylki voi olla, kun piirin pitää olla suurempi kuin 22 cm mutta lyhempi kuin 34 cm?

## 7. Ensimmäisen asteen yhtälöpari

## 7.1. Yhtälöparin ratkaisutapoja

## 1. Yhtälöparin graafinen ratkaiseminen

Piirretään kummankin yhtälön kuvaajat samaan koordinaatistoon.

Ratkaisu on leikkauspisteen x- ja y-koordinaatti.

7.1.1. Ratkaise graafisesti a)  $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$  b)  $\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = 3x + 6 \end{cases}$

### 2. Yhtälöparin ratkaiseminen vertailukeinolla

Ratkaise kummastakin yhtälöstä y lausekkeena, jossa x ja vakioita.

Tee yhtälö x:lle merkitsemällä nämä lausekkeet yhtä suuriksi.

Ratkaise x.

Sijoittamalla saatu x helpompaan y:n yhtälöön, saat y:n arvon.

2. Ratkaise vertailukeinolla a)  $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$  b)  $\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = 3x + 6 \end{cases}$

### 3. Yhtälöparin ratkaiseminen sijoituskeinolla

Ratkaise ensin helpommasta yhtälöstä y lausekkeena, jossa x ja vakioita (y yksin toisella puolella yhtälöä)

Sijoita saatu y:n lauseke (, jossa vain x:ää ja vakioita) toiseen yhtälöön y:n paikalle.

Saadaan yhtälö, jossa on vain x tuntemattomana.

Ratkaistaan tästä yhtälöstä x.

y saadaan sijoittamalla saatu x helpompaan alkuperäiseen yhtälöön.

3. Ratkaise a)  $\begin{cases} y = 3x - 4 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$  b)  $\begin{cases} y = 6 - 2x \\ 4x - 5y = 26 \end{cases}$  c)  $\begin{cases} x = 5y - 2 \\ 3x - 2y = 20 \end{cases}$

### 4. Yhtälöparin ratkaiseminen yhteenlaskukeinolla

Laita yhtälöpari ensin normaalimuotoon, x:t alekkain, y:t alekkain ja toisella puolella vakiot alekkain.

Kerro yhtälöt siten, että yhtälöissä y:n kertoimet ovat vastalukuja.

Laske molemmat yhtälöt puolittain yhteen, jolloin y:t häviävät vastalukuina.

Ratkaise saadusta yhtälöstä x.

Laske y sijoittamalla saatu x johonkin yhtälöön.

4. Ratkaise a)  $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$  b)  $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$  c)  $\begin{cases} 3x - 3y - 1 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$  d)  $\begin{cases} 3x + 5y = 4 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$

5. Ratkaise a)  $\begin{cases} 3x + 4y = 17 \\ 5x - 6y = 3 \end{cases}$  b)  $\begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 5x - 4y = 22 \end{cases}$  c)  $\begin{cases} 7x + 8y = 4 \\ 6x + 7y = 3 \end{cases}$  d)  $\begin{cases} 12x + 17y = 128 \\ 15x + 19y = 151 \end{cases}$

6. Ratkaise a)  $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \\ y = \frac{x}{2} - 3 \end{cases}$  b)  $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{2} - \frac{1}{4} = 0 \\ x - \frac{y}{3} + \frac{2}{3} = 0 \end{cases}$  c)  $\begin{cases} 5(x + y) - 3(x - y) = 4 \\ \frac{x}{2} - \frac{y-1}{3} = 1 \end{cases}$  d)  $\begin{cases} \frac{x-y}{5} - \frac{x+y}{2} = 10 \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 10 \end{cases}$

### \*5. Determinantti

Kaksirivinen determinantti  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

7. Laske determinantin arvo a)  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$  b)  $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$  c)  $\begin{vmatrix} 11 & 17 \\ -18 & 23 \end{vmatrix}$

### \*6. Yhtälöparin ratkaiseminen determinanttikeinolla

Laita yhtälöpari normaalimuotoon  $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} ; y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$$

eli nimittäjään tuntemattomien kertoimista muodostettu determinantti

x:ää (y:tä) ratkaistaessa osoittajadeterminantissa korvataan x:n (y:n) kertoimien sarake vakiotermien sarakeella

8. Ratkaise determinanttikeinolla a)  $\begin{cases} 5x + 8y = 13 \\ 14x - 5y = 17 \end{cases}$  b)  $\begin{cases} 54x + 47y = 165 \\ 71x + 35y = 263 \end{cases}$  c)  $\begin{cases} 2,3x + 5,1y = 8,4 \\ 6,1x - 3,7y = 9,4 \end{cases}$

### 7. Yhtälöparin ratkaiseminen graafisella laskimella

TI-85: **SIMULT** **number = 2** **ENTER** **a<sub>1,1</sub> = a** **a<sub>1,2</sub> = b** **b<sub>1</sub> = c** , ..., **F5 = SOLVE**

9. Ratkaise laskimella a)  $\begin{cases} 5x + 8y = 13 \\ 14x - 5y = 17 \end{cases}$  b)  $\begin{cases} 54x + 47y = 165 \\ 71x + 35y = 263 \end{cases}$  c)  $\begin{cases} 2,3x + 5,1y = 8,4 \\ 6,1x - 3,7y = 9,4 \end{cases}$

8. Yhtälöparin ratkaiseminen, kun niissä  $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$  tms. termejä

Otetaan käyttöön aputuntemattomat  $t = \frac{1}{x}$  ja  $u = \frac{1}{y}$ , jotka laitetaan yhtälöpariin  $\frac{1}{x}$ :n ja  $\frac{1}{y}$ :n tilalle.

Ratkaistaan aputuntemattomat  $t$  ja  $u$ .

Laitetaan  $t$ : ja  $u$ :n paikalle  $\frac{1}{x}$  ja  $\frac{1}{y}$ , joista yhtälöistä ratkaistaan  $x$  ja  $y$ .

10. Ratkaise a)  $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = \frac{1}{6} \end{cases}$  b)  $\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = \frac{41}{20} \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10} \end{cases}$  c)  $\begin{cases} \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} = -\frac{10}{9} \\ \frac{3}{x+y} + \frac{2}{x-y} = -\frac{25}{9} \end{cases}$

## 7.2. Yhtälöpariprobleema

### 1. Ratkaisumenetelmä

Lue tehtävä ja piirrä mahdollinen kuva

Valitse jokin suure  $x$ :ksi ja toinen  $y$ :ksi.

Lausu kaikki esiintyvät ja tarvittavat suureet  $x$ :n,  $y$ :n ja vakiolukujen avulla lausekkeina.

Muodosta kaksi yhtälöä annetuista tiedoista.

Ratkaise  $x$  ja  $y$ .

Pohdi ratkaisujen mielekkyyttä ja anna vastaus.

7.2.1. Kahden luvun summa on 1 ja erotus 5. Määritä luvut

2. Kahden luvun summa on 117. Toisen puolikkaan ja toisen kolmasosan summa on 41. Mitkä ovat luvut?

3. Mansikkahillo säilöttiin 2 dl ja 5 dl purkkeihin. Kuinka monta kumpaakin purkkia tarvittiin, kun 9 litraan hilloa käytettiin 24 mansikkapurkkia, jotka tulivat kaikki täyteen?

4. Kaksinumeroisen luonnollisen luvun kymmeniä ilmoittava luku on 3 suurempi kuin toinen numero. Tämän luvun ja numeroiden paikat vaihtamalla saadun luvun summa on 143. Mikä oli alkuperäinen luku?

## 7.3. Yhtälöparin ratkaisujen erikoistapauksia

### 1. Yhtälöparilla ei ole ratkaisua

jos esim.  $y$ :n eliminoimisen jälkeen  $x$ :tkin eliminoituvat ja saadaan epätosi yhtälö esim.  $0 = 1$ .

7.3.1. Ratkaise a)  $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -4x - 6y = 7 \end{cases}$  b)  $\begin{cases} 4x - 5y = 6 \\ 8x - 10y = 11 \end{cases}$

### 2. Yhtälöparilla on äärettömän monta ratkaisua

jos esim.  $y$ :n eliminoimisen jälkeen  $x$ :tkin eliminoituvat ja saadaan tosi yhtälö esim.  $0 = 0$

HUOM. Ratkaisuksi ei tule kaikki  $x$ :t ja  $y$ :t, vaan ratkaisuja on äärettömästi niin, että alkuperäiset yhtälöt toteutuvat. Itse asiassa molemmat yhtälöt ovat tällöin samoja.

2. Ratkaise a)  $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 6x - 3y - 3 = 0 \end{cases}$  b)  $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$

### 3. Vastauksen antaminen, kun äärettömän monta ratkaisua

JOKO kaikki yhtälön  $ax + by = c$  toteuttavat lukuparit  $(x, y)$  TAI  $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = c/b - ax/b \end{cases}$

3. Anna vastaus, jos molemmat parin yhtälöistä on yhtälön a)  $2x + y = 3$  b)  $3x + 2y = 1$  eri esitysmuotoja?

4. Yhtälöparin  $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$  ratkaisujen lukumäärä

Jos  $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ , on yhtälöparilla täsmälleen yksi ratkaisu.

Jos  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ , ei yhtälöparilla ole ratkaisua.

Jos  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ , on yhtälöparilla äärettömästi ratkaisuja.

4. Montako ratkaisua on yhtälöparilla a)  $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$  b)  $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 10x + 15y = 20 \end{cases}$  c)  $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 9x - 12y = 18 \end{cases}$  ?

5. Millä  $a$ :n arvoilla yhtälöparilla  $\begin{cases} ax + 12y = 32 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$  on täsmälleen yksi ratkaisu?

6. Millä a:n ja b:n arvoilla yhtälöparilla  $\begin{cases} ax + 2y = 3 \\ 4x + by = 6 \end{cases}$  on äärettömän monta ratkaisua?

\*5. Suorien yhdensuuntaisuus kulmakertoimien avulla  
Suorat ovat yhdensuuntaisia, jos niiden kulmakertoimet ovat samat.

7. Mitkä suorista L:  $y = 2x + 3$ , M:  $2x - y = 0$ , N:  $4x + 2y = 1$  ja P:  $3x - 6y = 9$  ovat yhdensuuntaisia?

## 8. Neliöjuuri

### 8.1. Neliöjuuren käsite

#### 1. Määritelmä

$\sqrt{a}$  on = luku b, jos ja vain jos

1°  $b \geq 0$  (eli neliöjuuren arvo ei voi olla negatiivinen)

2°  $b^2 = a$  (eli neliöjuuren arvo toiseen on juuretettava)

8.1.1. Onko a)  $\sqrt{10} = 100$  b)  $\sqrt{1000} = 10$  c)  $\sqrt{100} = 10$  d)  $-\sqrt{100} = 10$  e)  $\sqrt{-100} = 10$  f)  $\sqrt{-100} = -10$

2. Minkä luvun neliöjuuri on a) 7 b) -8 c)  $\pi - 1$  d)  $2 - \pi$  e)  $\sqrt{111}$

#### 2. Arvo miettimällä määritelmän mukaisesti

Mieti kertotaulusta, mikä luku toiseen on juuretettava ja luvun on oltava positiivinen tai nolla.

3. Mieti a)  $\sqrt{81}$  b)  $\sqrt{121}$  c)  $\sqrt{400}$  d)  $\sqrt{2500}$  e)  $\sqrt{0,49}$  f)  $\sqrt{10,24}$  g)  $\sqrt{4 + \sqrt{9} + \sqrt{36}}$  h)  $\sqrt{4 + 9 + 36}$

#### 3. Arvo laskimella

Canon F-800P:    →

TI-85:     →

4. Laske a)  $\sqrt{1,234}$  b)  $\sqrt{87,65}$  c)  $\sqrt{34\ 567}$  d)  $\sqrt{52\ 032,735}$  e)  $\sqrt{927\ 393\ 514\ 100\ 000}$

#### 4. Neliöjuorialgoritmi neliöjuuren arvon laskemiseksi kynällä ja paperilla

1° Jaa luvun numerot desimaalipilkusta kumpaankin suuntaan lähtien 2 numeron ryhmiin

2° Etsi suurin kokonaisluku, jonka neliö on pienempi kuin vasemman puolimaisen ryhmän luku

3° Laita tämä luku vastausrivin ensimmäiseksi numeroksi

4° Laita saamasi luku edellisen luvun alapuolelle ja niiden alapuolelle lukujen summa (luku B)

5° Kerro allekkain olevat luvut ja laita tulo juuretettavan luvun vasemman puolimaisen ryhmän alapuolelle

6° Vähennä edelliset luvut ja tuo perään seuraava kahden numeron ryhmä (luku A)

7° Mieti juuren uusi numero. Lisää se vastausriville, alla olevan summan (B) perään ja sen alapuolelle (C)

8° Numeron tulisi olla sellainen, että kun kerrotaan kaksi alinta lukua B·C, on tulo suurin alle luvun A

9° Kerro B ja C sekä laita tulo luvun A alapuolelle

10° Vähennä A:sta saatu tulo ja tuo seuraava kahden numeron ryhmä tämän perään (uusi A)

11° Laske B + C ja laita summa näiden alapuolelle.

12° Toista kohdat 7° - 11° kunnes pääset haluttuun tarkkuuteen.

13° kun kokonaisosa on laskettu, laita vastausriville desimaalipilkku ja ryhdy arvioimaan desimaaliosaa.

5. Määritä paperilla a)  $\sqrt{2}$  b)  $\sqrt{283024}$  c)  $\sqrt{5,3361}$  d)  $\sqrt{927\ 393\ 514\ 100\ 000}$

#### 5. Ehto juuretettavalle

$\sqrt{a} = b$ . Koska  $b^2 = a$ , on oltava  $a \geq 0$  eli juuretettava on oltava vähintään nolla.

6. Mitkä ovat reaaliilukuja a)  $\sqrt{91}$  b)  $\sqrt{0}$  c)  $\sqrt{-0}$  d)  $\sqrt{-10}$  e)  $\sqrt{x^2 + 1}$  f)  $\sqrt{-x^4 - 1}$ , kun x on reaaliiluku?

### 8.2. Yhtälö $x^2 = a$

#### 1. Yhtälön $x^2 = a$ ratkaiseminen algebrallisesti

$x = \pm \sqrt{a}$

eli laita yhtälö ensin muotoon missä  $x^2$  on yksin yhtälön toisella puolella (siirrot, jakaminen  $x^2$ :n kertoimella)

Ota kummastakin puolesta neliöjuuri ja laita toiselle puolelle  $\pm$  merkki

8.2.1. Ratkaise yhtälö a)  $x^2 = 64$  b)  $x^2 - 20,25 = 0$  c)  $2x^2 - 50 = 0$  d)  $3x^2 + 48 = 0$ .

2. Yhtälön  $x^2 = a$  ratkaiseminen graafisesti

Piirrä paraabeli  $y = x^2$  ja suora  $y = a$

Yhtälön ratkaisu on näiden leikkauspisteen x-koordinaatti.

2. Ratkaise graafisesti yhtälö a)  $x^2 = 5$  b)  $x^2 = 3,6$  c)  $x^2 = 0$  d)  $x^2 = -4$

3. Probleemoja, jotka johtavat yhtälöön  $x^2 = a$

Tee yhtälö kuten 1. asteen probleemoissa kohdassa 5.3.1.

Ratkaise x, pohdi järkevyyt ja anna vastaus.

3. Laske suorakulmaisen kolmion hypotenuusa, kun kateetit ovat 2,3 cm ja 4,1 cm.

4. Ympyrän sisään on piirretty neliö. Laske neliön sivu, kun säde on 10 cm.

5. Neliön pinta-ala on  $28 \text{ cm}^2$ . Mikä on neliön piiri?

### 8.3. Neliöjuuren arvo irrationaalinen

1.  $\sqrt{n}$ , kun n ei ole neliö

Arvot ovat irrationaalilukuja, päättymättömiä jaksottomia desimaalilukuja.

Laskimella niistä saa vain likiarvoin näytön antamalla tarkkuudella (10-12 numeroa)

Jos vastaukseksi tarvitaan tarkka arvo, on se  $\sqrt{n}$

### 8.4. Neliöjuurifunktio

1. Neliöjuurifunktion määrittelyjoukko

$f(x) = \sqrt{x}$ :n määrittelyjoukko on  $x \geq 0$  (eli juurettava on oltava vähintään nolla)

2. Neliöjuurifunktion määrittelyjoukon laskeminen

Merkitse juurettava  $\geq 0$  ja ratkaise tämä epäyhtälö.

8.4.1. Mikä on funktion  $f(x) = a) \sqrt{x-4}$  b)  $\sqrt{5-2x}$  c)  $\frac{1}{\sqrt{x-7}}$  d)  $\sqrt{3-x} + \sqrt{2x-3}$  määrittelyjoukko?

3. Neliöjuurifunktion kuvaajan piirtäminen

Tee lukuparitaulukko.

Selvitä funktion määrittelyjoukko.

Anna x:lle sopivia määrittelyjoukkoon kuuluvia arvoja alkaen alueen reunasta.

Merkitse lukuparit pisteinä koordinaatistoon ja piirrä kuvaaja, joka on oikealle aukeavan paraabelin puolisko

2. Piirrä funktion kuvaaja a)  $f(x) = \sqrt{x+3}$  b)  $f(x) = \sqrt{x+3}$  c)  $f(x) = \sqrt{x+3} - 2$ .

### 8.5. Neliöjuuren laskusääntöjä

1.  $(\sqrt{a})^2$

= a, ( $a \geq 0$ ) eli kun neliöjuuriluku korotetaan toiseen saadaan juurettava

8.5.1. Laske a)  $(\sqrt{5})^2$  b)  $(\sqrt{7})^2$  c)  $(\sqrt{a})^2$  d)  $(\sqrt{-2})^2$  e)  $(2\sqrt{3})^2$  f)  $(-3\sqrt{2})^2$  g)  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$  h)  $2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}$

2.  $(\sqrt{a})^n$

Ja potenssi tuloksi, missä tekijöiden eksponentit ovat kakkosia ja mahdollisesti yhden tekijän ykkösen.

$(\sqrt{a})^n = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{a})^2 \cdot \dots \cdot (\sqrt{a})^2 \cdot \sqrt{a} = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot \sqrt{a}$ , missä viimeinen tekijä vain jos n on pariton.

2. Sievennä a)  $(\sqrt{3})^3$  b)  $(\sqrt{3})^4$  c)  $(\sqrt{3})^5$  d)  $(\sqrt{x})^6$  e)  $(\sqrt{x})^7$  f)  $(2\sqrt{3})^3$  h)  $(-2\sqrt{3})^3$

3.  $\sqrt{a^2}$

= |a| eli juuren alla olevan neliön kantaluvin itseisarvo.

3. Sievennä a)  $\sqrt{7^2}$  b)  $\sqrt{(-7)^2}$  c)  $\sqrt{(\pi-1)^2}$  d)  $\sqrt{(\pi-4)^2}$  e)  $\sqrt{x^2}$  f)  $\sqrt{9x^2}$  g)  $\sqrt{-9x^2}$  h)  $\sqrt{(-9x)^2}$  i)  $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$

4. Sievennä a)  $\sqrt{3^2 + \sqrt{4^2}}$  b)  $\sqrt{3^2 + 4^2}$  c)  $\sqrt{(13-12)^2}$  d)  $\sqrt{13^2 - 12^2}$

4.  $\sqrt{a \cdot b}$

=  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$  ( $a, b \geq 0$ ) eli otetaan juuri kummastakin tekijästä ja nämä kerrotaan

5. Sievennä a)  $\sqrt{64 \cdot 81}$  b)  $\sqrt{36x^2}$  c)  $\sqrt{49a^2}$  d)  $\sqrt{64a^2x^2}$  e)  $\sqrt{a^4 + 4a^2 + 4}$

$$5. \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

=  $\sqrt{a \cdot b}$  eli kaksi juurta voidaan kertoa siten, että juuret kerrotaan ja tästä tulosta otetaan neliöjuuri

6. Sievennä a)  $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$  b)  $\sqrt{18} \cdot \sqrt{8}$  c)  $\sqrt{3a} \cdot \sqrt{27a}$  d)  $\sqrt{7x} \cdot \sqrt{28x}$  e)  $\sqrt{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\sqrt{125}}$

$$6. \sqrt{\frac{a}{b}}$$

=  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  ( $a \geq 0$  ja  $b > 0$ ) eli otetaan osoittajasta ja nimittäjästä ensin neliöjuuret ja nämä jaetaan

7. Sievennä a)  $\sqrt{\frac{121}{64}}$  b)  $\sqrt{\frac{a^2}{4}}$  c)  $\sqrt{\frac{x^2}{49y^2}}$  d)  $\sqrt{\frac{1}{25x^2}}$

$$7. \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

=  $\sqrt{\frac{a}{b}}$  eli kaksi juurta voidaan jakaa siten, että juuret jaetaan ja osamäärästä otetaan neliöjuuri

8. Sievennä a)  $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$  b)  $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{4}}$  c)  $\frac{\sqrt{ab^2}}{\sqrt{a}}$  d)  $\frac{\sqrt{32m^3n}}{\sqrt{2mn^3}}$  e)  $\sqrt{26} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$

$$8. \sqrt{a^{2n}}$$

=  $|a^n|$  eli jaetaan eksponentti kahdella ja laita itseisarvot, jollei arvo ole varmasti vähintään nolla.

9. Sievennä a)  $\sqrt{a^8}$  b)  $\sqrt{x^{10}}$  c)  $\sqrt{4y^4}$  d)  $\sqrt{a^{1998}}$  e)  $\sqrt{a^3} \cdot \sqrt{a^9}$  f)  $\sqrt{12x} \cdot \sqrt{3x^5}$  g)  $\sqrt{2^{52}}$  h)  $\sqrt{49 \cdot 10^{200}}$  i)  $\sqrt{4,9 \cdot 10^{199}}$

$$9. \sqrt{a^{2n+1}}$$

=  $\sqrt{a^{2n} \cdot a} = |a^n| \cdot \sqrt{a}$  eli jaetaan juuret tuloksi, jossa toinen tekijä on a ja toinen parillinen potenssi.

10. Sievennä a)  $\sqrt{x^3}$  b)  $\sqrt{a^5}$  c)  $\sqrt{3^9}$  d)  $\sqrt{x^{1997}}$  e)  $\sqrt{8x^3}$

$$10. \sqrt{a+b}, \sqrt{a-b}$$

Summasta tai erotuksesta ei saa neliöjuurta minkään suoran kaavan perusteella.

Voidaan 1) suorittaa yhteenlasku, sieventää summalauseke 2) tuloksi tai 3) potenssiksi.

11. Sievennä a)  $\sqrt{9+16}$  b)  $\sqrt{9} + \sqrt{16}$  c)  $\sqrt{169-144}$  d)  $\sqrt{169} - \sqrt{144}$  e)  $\sqrt{x^2+2x+1}$  f)  $\sqrt{4x^4+4x^2+1}$

$$11. \sqrt{a^2 \cdot b}$$

$$= |a| \sqrt{b}$$

12. Sievennä a)  $\sqrt{8}$  b)  $\sqrt{12}$  c)  $\sqrt{18}$  d)  $\sqrt{25a}$  e)  $\sqrt{32a^3}$  f)  $\sqrt{16}$  g)  $\sqrt{160}$  h)  $\sqrt{1600}$  i)  $\sqrt{16000}$

12. Positiivisen luvun siirtäminen neliöjuuren alle

$|a| \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$  eli positiivinen luku voidaan siirtää neliöjuuren alle, jos se korotetaan toiseen.

13. Sievennä a)  $2\sqrt{\frac{1}{2}}$  b)  $3\sqrt{\frac{1}{3}}$  c)  $\frac{\sqrt{8}}{2}$  d)  $\frac{\sqrt{200x^3}}{5x}$

13. Negatiivisen luvun siirtäminen neliöjuuren alle

$-a \cdot \sqrt{b} = -\sqrt{a^2 \cdot b}$  eli etumerkki jätetään juuren etumerkiksi ja luku korotetaan juuren alla toiseen.

14. Sievennä a)  $-5\sqrt{\frac{1}{5}}$  b)  $-6\sqrt{\frac{1}{6}}$  c)  $\frac{\sqrt{12}}{-2}$  d)  $\frac{\sqrt{50a^3}}{-5a}$

## 8.6. Neliöjuuriluvuilla laskeminen

1. Millaisia neliöjuurilukuja voi laskea yhteen tai vähentää  
Vain sellaisia, joilla on täsmälleen sama juuret.

2. Neliöjuurilukujen yhteen- ja vähennyslasku  
Kertoimeksi tulee kertoimien summa ja juuriosaksi yhteinen juurios.

8.6.1. Laske a)  $2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$  b)  $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$  c)  $3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - \sqrt{2} + 3\sqrt{3}$  d)  $1 + \sqrt{5} - 2\sqrt{6} - (\sqrt{6} - 3\sqrt{5} - 6)$

2. Laske a)  $\sqrt{32} + \sqrt{8} + \sqrt{18}$  b)  $2\sqrt{12} + 3\sqrt{24} - \sqrt{75} + 2\sqrt{54}$  c)  $\sqrt{8} + 2\sqrt{18} + 3\sqrt{28} + 4\sqrt{48} + 5\sqrt{63}$   
 3. Osoita, että  $\sqrt{98} + \sqrt{2} = \sqrt{128}$

## 3. Neliöjuurimonomi · neliöjuurimonomi

Kerro merkki, kertoimet ja juuret kohdan 8.5.5 mukaisesti

4. Sievennä a)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$  b)  $\sqrt{32} \cdot \sqrt{8}$  c)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$  d)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$   
 5. Sievennä a)  $2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{5}$  b)  $3\sqrt{3} \cdot (-2\sqrt{2})$  c)  $2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{6}$  d)  $-3\sqrt{8} \cdot 2\sqrt{12}$

## 4. Neliöjuuripolynomi · neliöjuuripolynomi

Kerro jokaisella jokainen

6. Sievennä a)  $\sqrt{2}(1 - \sqrt{2} + \sqrt{4})$  b)  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$  c)  $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(2\sqrt{3} - \sqrt{2})$   
 7. Sievennä a)  $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$  b)  $(7 - 3\sqrt{5})(7 + 3\sqrt{5})$  c)  $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$   
 8. Sievennä a)  $\sqrt{3} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{5}$  b)  $(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{5} + 2\sqrt{6}$  c)  $(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{5} + 2\sqrt{6}$

## 5. Neliöjuurimonomin korottaminen potenssiin

Katso merkki, korota kerroin toiseen ja korota juuri toiseen sekä sievennä.

9. Sievennä a)  $(2\sqrt{3})^2$  b)  $(-3\sqrt{5})^2$  c)  $(3\sqrt{2})^3$  d)  $(2\sqrt{5})^4$

## 6. Neliöjuuribinomien korottaminen potenssiin

Laita potenssi tulon muotoon ja kerro jokaisella jokainen

Tai käytä binomien potenssiinkorottamissääntöjä.

10. Sievennä a)  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$  b)  $(\sqrt{5} - 2\sqrt{3})^2$  c)  $(3\sqrt{2} - 4\sqrt{5})^2$

## 7. Neliöjuurilausekkeen osoittaminen toisen lausekkeen neliöjuuren arvoksi

Osoitetaan, että neliöjuuren määritelmän kohdat 1° ja 2° ovat voimassa eli 1° juuren arvo  $\geq 0$  ja 2° juuren arvo toiseen on juurettava

11. Onko a)  $\sqrt{6} - \sqrt{32} = 2 - \sqrt{2}$  b)  $\sqrt{8} + \sqrt{60} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$  c)  $\sqrt{9 - 2\sqrt{5}} = 2 - \sqrt{5}$

## 8. Neliöjuuren poistaminen nimittäjästä, kun nimittäjässä neliöjuurimonomi

Lavenna lauseke nimittäjässä olevalla neliöjuurella

12. Sievennä a)  $\frac{4}{\sqrt{2}}$  b)  $\frac{3}{2\sqrt{3}}$  c)  $\frac{1}{3\sqrt{2}}$  d)  $\frac{3}{2\sqrt{6}}$  e)  $\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}$  f)  $\frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

## 9. Neliöjuuren poistaminen nimittäjästä, kun nimittäjässä neliöjuuribinomi

Jos nimittäjässä on summa  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ , lavenna vastaavalla erotuksella  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ .Jos nimittäjässä on erotus  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ , lavenna vastaavalla summalla  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ .

13. Sievennä a)  $\frac{1}{\sqrt{3} - 1}$  b)  $\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$  c)  $\frac{3}{\sqrt{7} - 2}$  d)  $\frac{1}{\sqrt{3} - 2}$  e)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$  f)  $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$  g)  $\frac{1}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$

14. Sievennä a)  $\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$  b)  $\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1}}$

15. Laske lausekkeen  $x^2 - x - 1$  arvo, kun  $x = \frac{2}{\sqrt{5} - 1}$

16. Ratkaise yhtälö a)  $x\sqrt{3} = x\sqrt{2} + \sqrt{3}$  b)  $x\sqrt{5} - 1 = x + 1$  c)  $\sqrt{2}(x - 1) = x + \sqrt{3}$

## Vastaukset harjoitustehtäviin.

1.1.1. a) K b) K c) E d) K

2. a) {0, 1, 2, 3, 4}

b) {0, 1, 2, 3, 4, 5} c) {2, 3, 4}

3. a) E b) K c) K/E d) K

4. a) K b) E

5. a) K b) K c) K d) E e) K

1.2.1. a) {..., -2, -1, 0, 1, 2}

b) {-1, 0, 1, 2, ...} c) {-1, 0, 1, 2}

2. a) E b) K c) K d) E

3. a) 11 b) -15 c) 5 d) -3 e) -2,2  
f) -3

4. a) 30 b) 56 c) -36 d) -54 e) 6

f) -24

5. a) K b) K c) E d) K

6. a) K b) E c) E

7. a) 1, 2, 3, 4, 6, 12 b) 1, 2, 3,

6, 9, 18, 27, 54 c) 1, 2, 3, 4, 5,

6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

8. a) K b) E c) E d) K e) K

9. a) K b) E c) K d) K

10. a)  $3 \cdot n, n \in \mathbb{Z}$  b)  $4 \cdot n, n \in \mathbb{Z}$ 11.  $3n + 1, n \in \mathbb{Z}$ 

14. a) K b) K c) E

15. a) E b) K c) K

16. a) K b) K c) E

17. a) E b) K c) K d) K

18. a) K b) E c) E

19. a) K b) K c) K

20. a) E b) E c) E



21. a) E b) K c) E  
 22. a) E b) K c) E  
 23. a) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 b) ed. + 51, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199  
 24. a)  $3^2 \cdot 2^3$  b)  $3 \cdot 2^6$  c)  $2^5 \cdot 3 \cdot 5$

- 1.3.1. a) K b) K c) E d) E  
 2. a) 0,625 b) 1,5833...  
 c) 0,076923076923...  
 d) jakojännös on viimeistään 13 jaon jälkeen sama kuin jokin edellisistä ja jako toistuu

3. a)  $\frac{3}{16}$  b)  $2\frac{17}{200}$

4. a)  $\frac{4}{11}$  b)  $2\frac{7}{37}$

5. a)  $\frac{1}{12}$  b)  $1\frac{179}{330}$

7. a)  $\frac{8}{12}$  b)  $4\frac{35}{42}$

8. a)  $\frac{8}{12}$  ja  $\frac{9}{12}$  b)  $\frac{6}{12}$ ,  $\frac{8}{12}$  ja  $\frac{9}{12}$

c)  $\frac{30}{60}$ ,  $\frac{40}{60}$ ,  $\frac{45}{60}$  ja  $\frac{48}{60}$

9. a)  $\frac{3}{5}$  b)  $\frac{8}{13}$

10. a)  $1\frac{5}{12}$  b)  $3\frac{1}{30}$

11. a)  $\frac{13}{15}$  b)  $4\frac{49}{60}$

12. a)  $\frac{2}{3}$  b) 5 c)  $\frac{2x}{3y}$  d)  $\frac{ac}{bd}$

13. a) 4 b)  $2\frac{2}{5}$  c)  $2\frac{1}{2}$

14. a)  $2\frac{1}{3}$  b)  $2\frac{x}{y}$  c)  $5\frac{1}{y}$

15. a)  $\frac{9}{10}$  b)  $1\frac{3}{25}$

16. a)  $1\frac{9}{35}$  b) 1

- 1.4.1. a) E b) K c) E  
 2. a) Z, Q, R b) Q, R c) R d) Z, Q, R  
 3. a) N b) Z c) Z d) R e) Q  
 4. a) 49 b) 845 c) 370 d) 9700  
 5. a) 72 b) 624 c) 3069  
 6. a) 390 b) 4700 c) 4747  
 7. a) -15 b) 27 c) 0 d) -a e)  $-a^2$   
 8. a)  $a + 1$  b)  $a - 1$   
 9. a) 0 b) 0 c)  $2x$   
 10. a) 3 b)  $2\frac{1}{2}$  c)  $\frac{3}{4}$  d)  $-\frac{10}{27}$   
 11. a) 1 b) -1 c) 1 d)  $x^2$   
 12. a) 3 b) 4 c) 6 d) 3

13. a) ykkösten b) sadasosien c&d) kymmenestuhannesosien  
 14. a) 31 900 b) 2,698  
 15. a) 206 b) 4,29

- 2.1.1. a)  $2^4$ ,  $(-2)^5$ ,  $-2^6$   
 b)  $x^4$ ,  $(-x)^5$ ,  $-x^6$   
 2. a) 9 b) -9 c) 9 d) 64 e) -64 f) -64 g) 81 h) -81 i) 81 k) -81 l) 1024 m) -1024 n) -1024 o) 1024

3. a) 7 b) 15 c) 15 d) 15  
 4. a) 1 b) 33 c) 1 d) 2 e) 3

5. a)  $\frac{1}{8}$  b)  $\frac{1}{9}$  c)  $-\frac{1}{8}$  d)  $-\frac{1}{8}$  e) 9

f) 64 g)  $\frac{81}{16}$  h)  $\frac{4}{25}$  i)  $\frac{16}{9}$

6. a) 128 b) 64 c) 9 d) 0 e)  $\frac{1}{16}$

2.2.1. a)  $9a^2$  b)  $9a^2$  c)  $8b^3$

d)  $-8b^3$  e)  $81a^4$  f)  $81a^4$

g)  $32a^5x^5$  h)  $-32a^5x^5y^5$

2. a)  $\pm 2x$  b)  $3a$  c)  $-4y$  d)  $\pm 2c$

3. a)  $\frac{a^2}{4}$  b)  $\frac{x^4}{81}$  c)  $-\frac{a^5}{x^5}$  d)  $\frac{64}{x^6}$

e)  $\frac{a^7}{128x^7}$  f)  $\frac{81y^4}{16x^4}$

4. a)  $\pm \frac{x}{3}$  b)  $\frac{4}{x}$  c)  $-\frac{5}{a}$  d)  $\frac{10a}{3b}$

5. a)  $a^{20}$  b)  $b^{18}$  c)  $x^{-10}$

d)  $-128y^{21}$  e)  $4x^6$  f)  $81a^{20}$  g)  $a^{60}$

6. a)  $2^{10}$  b)  $2^{18}$  c)  $2^{68}$

7. a)  $a^{10}$  b)  $b^{11}$  c)  $x$  d) 1 e)  $a^{18}$

f)  $6x^7$  g)  $-30x^{10}$

8. a)  $a^4$  b)  $b^2$  c)  $x^7$  d)  $x^7$  e)  $a^{-4}$

f)  $b^{-2}$

9. a) 1000 b) 32 c) 1 d) 8 e) 1

10. 32 b)  $10^5$  c)  $\frac{1}{64}$  d)  $\frac{25}{64}$  e) 8 f) 25

11. a)  $\pm a^3$  b)  $x^4$  c)  $\pm 3x^5$

d)  $2a^2b^4$

12. a)  $x^{18}$  b)  $a^{24}$  c)  $3^a$  d)  $a^{3n+1}$

e)  $b^{5x}$  f)  $a^{x^2}$  g)  $a^{x^3}$  h)  $-x^8$  i)  $y^6$

13. a)  $\frac{81a^8}{16b^{12}}$  b)  $x^{2n+3}$  c) 5 d)  $2a$

e)  $3a^5$  f)  $\frac{1}{81}$  g)  $12$  h)  $\frac{1}{2}a^n$

14. a)  $16^{173}$  b)  $9^{555}$  c)  $9^{1000}$

d)  $50^{100}$

2.3.1. a)  $1,23 \cdot 10^{11}$  b)  $3,4 \cdot 10^{13}$

c)  $1,212 \cdot 10^3$

2. a)  $1,2 \cdot 10^{-3}$  b)  $1,2 \cdot 10^{-6}$

c)  $3,2 \cdot 10^{-10}$

3. a) 120 000

b) 3 400 000 000 000

c) 0,00056 d) 0,00 000 000 78

4. a)  $6 \cdot 10^7$  b) 2000 c) 300 d)  $7,5 \cdot 10^6$

5. a)  $4,4 \cdot 10^{13}$  b)  $7,0 \cdot 10^9$   
 c)  $1,6 \cdot 10^{19}$  d) 9100  
 e)  $6,07 \cdot 10^{976}$   
 6. a) 9 b) 161 c) 86

2.4.1. 1229,26 mk

2. 122,8

3. 15 750

4. 19 600

3.1.1.  $4x^2$ ,  $+5ax$ ,  $-6a$

2. a) 2 b) 5 c) 8

3. a) 6 b) 3 c) 4

4. 6, -7,  $8a$ ,  $c$

5. a) R b) P, S, T c) Q

6. a) -5 b) 10 c)  $2a^2 - 3a - 4$

d)  $8a^2 - 6a - 4$

7.  $x = 3$

8. a)  $x = -1$  b)  $x = -\frac{1}{3}$

c)  $x = a + 1$

3.2.1. a)  $7x^2$  b)  $x^3$  c)  $-3x$

d)  $7x^2 + 6x$  e)  $2x^2 + 10x + 3$

2. a)  $6x$  b)  $8 - x$  c)  $4x^2 - x - 4$

d)  $-x^2 - 2x + 5$

3.  $-4x^2 + 6x - 5$

4.  $2x^2 + x - 1$ , 14

3.3.1. a)  $12x^5$  b)  $12x^3$  c)  $12a^3x^5$

d)  $20a^2b^2x^3$

2. a)  $20x + 6$  b)  $20x + 24$

c)  $20x^2 + 24x$

d)  $-6x^3 + 35x^2 + 24x$

e)  $18a^5b^3 - 30a^4b^4$

3. a)  $24x^2 - 58x + 35$  b)  $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$  c)  $4x^3 - 13x^2 - 2x + 15$  d)  $26x^2 - 7x - 32$

4.  $x^4 + 9x^3 + 14x^2$

5. a)  $2(x + 2)$  b)  $x(x - 5)$

c)  $3x(x - 2)$  d)  $5a(a + 2)$

e)  $7y^2(y - 3)$  f)  $2z(4z^2 - 5z - 6)$

g)  $x^n(x - 1)$

3.4.1. a)  $2x^2$  b)  $6x$  c)  $2x$  d)  $-2x$

e)  $-4x$  f)  $3x^4$

2. a)  $3x + 4$  b)  $x + 2$  c)  $2x - 4$

3. a)  $2x - 3$  b)  $4x^2 - 3$  c)  $-x$

d)  $-x - 2$

3.5.1. a)  $x^2 - 1$  b)  $a^2 - 4$  c)  $y^2 - 9$

d)  $4x^2 - 1$  e)  $9x^4 - 16x^2$

2. a)  $(a + 4)(a - 4)$

b)  $(x + 5)(x - 5)$

c)  $(2y + 3)(2y - 3)$

d)  $(3b + 7)(3b - 7)$

e)  $(2x^2 + 3y^3)(2x^2 - 3y^3)$

f)  $(4a^2 + 3b)(4a^2 - 3b)$  g)  $4x$

3. a)  $x^2 + 6x + 9$

b)  $x^2 + 10x + 25$  c)  $4x^2 + 4x + 1$

d)  $9x^2 + 12x + 4$

e)  $16x^4 + 24x^2 + 9$

f)  $9x^4 + 12x^3 + 4x^2$

4. a)  $(x + 1)^2$  b)  $(x + 4)^2$

- c)  $(x + 10)^2$  d)  $(2x + 1)^2$   
 e)  $(2x + 3)^2$   
 5. a) 9 b) 8a c)  $64x^2$   
 6. a)  $a^2 - 8a + 16$   
 b)  $x^2 - 12x + 36$   
 c)  $4x^2 - 4ax + a^2$  d)  $9x^2 - 6x + 1$   
 e)  $4a^4 - 20a^2 + 25$   
 f)  $a^6 - 4a^3b^2 + 4b^4$   
 7. a)  $2a^2 + 2$  b)  $-8x$  c)  $6 - x^2$   
 8.  $a^2 - 10a + 27$   
 9. 4  
 10. a)  $(a - 7)^2$  b)  $(x - 50)^2$   
 c)  $(x - a)^2$  d)  $4(x^2 - 5x + 1)$   
 e)  $x^2(x - 2)^2$   
 11. a) 9 b)  $9x^2$  c)  $20ab$   
 12. a)  $a^2 + b^2 + 1 + 2ab + 2a + 2b$  b)  $x^2 + y^2 + 4 - 2xy - 4x + 4y$   
 c)  $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1$   
 d)  $x^6 - 2x^4 + 4x^3 + x^2 - 4x + 4$

- 3.6.1. a)  $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$   
 b)  $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$   
 c)  $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$   
 d)  $16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81$   
 2. a)  $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$   
 b)  $x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1$   
 c)  $x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1$   
 d)  $x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$   
 3. a)  $(x + 1)^4$  b)  $(a - 2)^5$

- 4.1.1. a) 11 b) -8 c) 26  
 2.  $A = 2\frac{1}{2} \cdot x$   
 3.  $K = 20x + 2y$   
 4. a) 15 b) -6 c) 34  
 5. a)  $\frac{3}{5}$  b) 1 c)  $\frac{7}{13}$   
 9.  $\{(-1, 1), (0, 3), (1, 5), (2, 7)\}$

- 4.2.1. a)  $\mathbb{R}_+$  b)  $\{x | x \leq 1\}$   
 2. a)  $\mathbb{R}$  b)  $x \neq -4$  c)  $x \neq 1\frac{1}{3}$   
 3. a)  $\{1, 3, 5, 7\}$  b)  $\{y \geq 1\}$   
 4.  $\{1, 3, 5, 7\}$   
 5.  $\{x | 1 \leq x \leq 3\}$   
 6.  $\{2, 4, 6, 8\}$   
 7.  $\{y | 2 \leq y \leq 4\}$

- 4.3.1. a) K b) E c) K  
 2. a) 4 b) -5 c)  $\frac{2}{3}$   
 3. a) neg. b) neg. c) pos.  
 4.  $x > 1,5$   
 5. f ja h  
 6.  $f(x_2)$   
 7.  $f(x_2)$   
 8. a) 3 b)  $1\frac{1}{2}$  c) 3

- 4.4.1. g(x), k(x)  
 2. g(x)  
 3. a) c)  
 4. a) 3 b) -5 c) a d)  $a + 1$

- e)  $k + 2$   
 5. a) 19 b) 22 c) 13  
 6. a) (0,5) b) (0,-7) c) (0,1)  
 d) (0,a)  
 9. a) 2 b) -1  
 10. a)  $y = 1 + x$  b)  $y = 6,2 + 0,4x$

- 4.5.1. a) 5 b) 15 c)  $\pi$  d)  $\pi - 3$   
 e)  $x^2 + 1$   
 2. a) 8 b) 27 c)  $\pi + 1$  d)  $4 - \pi$   
 3. a)  $\sqrt{2} - 1$  b)  $2 - \sqrt{3}$  c)  $a - 1$  d)  $2 - a$   
 4. a)  $x = 7, x = 3$  b)  $x = 7, x = -1$  c)  $x = -3, x = -5$

5. a)  $\begin{cases} x - 2, x \geq 2 \\ -x + 2, x < 2 \end{cases}$

- b)  $\begin{cases} x - 6, x \geq 6 \\ -x + 6, x < 6 \end{cases}$

- c)  $\begin{cases} x + 2, x \geq -2 \\ -x - 2, x < -2 \end{cases}$  d)  $\begin{cases} 7 - x, x \leq 7 \\ x - 7, x > 7 \end{cases}$

- e)  $\begin{cases} 2x - 10, x \geq 5 \\ -2x + 10, x < 5 \end{cases}$

8. a) 3 b) -4  
 9. a) 10 b) 4  
 10. a)  $\emptyset$  b)  $\emptyset$   
 11. a) 30 b) 1,2  
 12. kork. 11  
 13. a)  $x = \pm 2$  b)  $x = 3$  tai  $x = -1$

- 4.6.1. 530 mk, 11 pnä, 11 pv  
 2.  $y = 1000 - 95x$   
 3. 206  
 4. 105 cm  
 5. 82,2  
 6. 172 cm  
 7.  $m = 20x$  (x tunteja)  
 8. 14.08 Klasta 32,8 km  
 9. a) 5 b) 6 c) -2 d) -3 e) 12  
 10. a) 4 b) 5 c) -3 d) -4 e) 12  
 11. a) 3 b) 4 c) -6 d) -1 e) 342

- 4.7.1. a) K b) E

2. 230 mk

3.  $B = \frac{8}{5} \cdot A$

4.  $y = \frac{7}{9} \cdot x^2$

5. a) K b) E

6. 9,6

7.  $A = 9 \cdot \frac{1}{B}$

8.  $y = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

- 5.1.1. a) K b) E c) E d) K

2. -1

3. a) K b) E

- 5.2.1. a) 12 b) 4 c) -3

- d) LASKU - OH

2. a) -3 b) 3 c) 7

3. a) 9 b) 20 c) 6 d) 3 e) MK:6

4. a) 12 b) 14 c) 13  
 5. a) 12 b) 7 c) 5  
 6. a) 4 b) -5  
 7. a) 2,5 b) 1,7 c) 3,5  
 8. a) 2 b) 0,9  
 9. a)  $\mathbb{R}$  b)  $\mathbb{R}$   
 10. a)  $\emptyset$  b)  $\emptyset$   
 11. a)  $a \neq 1$  b)  $a \neq -2$   
 12. a)  $a = -2$  b) -1  
 13. a)  $a = 1, b = 2$   
 b)  $a = 4, b = 3$   
 14. a)  $1\frac{1}{2}$  b) -3 c) 2  
 15. a) kun  $a \neq 1, x = 3/(a - 1)$   
 kun  $a = 1, L = \emptyset$   
 b) kun  $a \neq 2, x = 3$   
 kun  $a = 2, L = \mathbb{R}$   
 c) kun  $a \neq 1, x = (a - 3)/(a - 1)$   
 kun  $a = 1, L = \emptyset$

- 5.3.1. 156

2. 1,25

3. 4

4. 114, 115 tai -114, -115

5. 12 mm

6. 48

- 5.4.1. 39

2. 37,5%

3. 275

4. 2,2 milj

5. 88%

6. 400 000 mk

7. 3,4 kg

8. 8,7%

9. a) 2,96 kg b) 61,7%

10. 480

11. 180

12. 75 mk

13. 400

14. 42%

15. 160 mk

16. 6,3%

17. 10%

18. a) 8% b) 11,5%

19. 4,5%

20. 0,9 kg

21. 133g ja 67 g

22. 20%

23. 21%

24. 98,3%

25. 9,1%

- 5.5.1. a) 3:7 b) 5:3 c) 5:7

2. 9:12:14

3. A 0,6, B 0,9 ja C 1,2 mmk

4. A 0,5, B 0,55, C 0,6,

- D 0,65 ja E 0,7 milj. mk

- 5.6.1. a)  $\pm 2$  b)  $\pm 10$  c)  $\pm 5$  d)  $\emptyset$

- e)  $\pm 5$

2. a)  $x = \pm 2,5$  b)  $x = 7, x = -3$

- c)  $x = 4, x = 1$  d)  $x = 1/3, x = -3$

- e)  $\emptyset$

3. a)  $x = -4$ ,  $x = -2$  b)  $x = \pm 3$   
 c)  $\emptyset$   
 4.  $x = 3$ ,  $x = 1$  b)  $x = 3$   
 c)  $x = 1\frac{1}{4}$  d)  $\emptyset$

6.1.1. a) K b) K c) K d) E e) E

- 6.2.4. a)  $1 \leq x \leq 4$  b)  $-2 \leq x < 3$   
 c)  $0 < x < 2$  d)  $x \geq -1$  e)  $x < 1$   
 5.  $]-3,2[$  b)  $[-2,1[$  c)  $[1,3]$   
 d)  $]-\infty,4[$  e)  $[-1,\infty[$

- 6.3.1. a)  $x > 3$  b)  $x < -4$   
 c)  $x > -10$  d)  $x \geq -12$   
 2.a)  $x < -1$  b)  $x > -4$  c)  $x < 4$   
 3. a)  $x \leq 1\frac{1}{2}$  b)  $x > -0,2$   
 c)  $x > 0$   
 4. a)  $x < -1$  b)  $x > 0,4$  c)  $x \geq 3$   
 5.a)  $x < 3$  b)  $x \geq 12$  c)  $x < -3$   
 6.  $a = 5$   
 7. a)  $\emptyset$  b)  $\emptyset$   
 8. a) R b) R

$$11. a) \begin{cases} x < \frac{1}{a}, a > 0 \\ x > \frac{1}{a}, a < 0 \\ L = R, a = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x > \frac{a}{a-1}, a > 1 \\ x < \frac{a}{a-1}, a < 1 \\ L = \emptyset, a = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x < \frac{2a-4}{a-3}, a > 3 \\ x > \frac{2a-4}{a-3}, a < 3 \\ L = R, a = 3 \end{cases}$$

- 6.4.1. a)  $1 < x < 4$  b)  $x \geq 1$  c)  $\emptyset$   
 2. a)  $x \geq 2$  b)  $x \geq 2$  tai  $x < -4$   
 c)  $L = R$   
 3. a)  $x > 1$  ja  $x < 6$   
 b)  $x < 2x + 3$  ja  $2x + 3 \leq 4x - 5$   
 c)  $3x - 4 < 5 - x$  ja  $5 - x < 6x + 7$   
 4. a)  $2 < x < 4\frac{1}{2}$  b)  $x > 1$   
 c)  $x = 1$

- 6.5.1. a)  $-3 < x < 3$  b)  $-3 < x < 5$   
 c)  $-1 < x < 9$  d)  $x > 8$   
 2. a)  $x > 4$  tai  $x < -4$  b)  $x > 3\frac{1}{2}$   
 tai  $x < -\frac{1}{2}$  c)  $x < \frac{1}{2}$  tai  $x > 4$

- 6.6.1. a) 199, 200, 201, 202 ja 203  
 2. 12  
 3.  $10 \text{ cm} < x < 14 \text{ cm}$

$$7.1.1. a) \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} b) \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$2. a) \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} b) \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$3. a) \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} b) \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} c) \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$4. a) \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} b) \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = 1\frac{1}{2} \\ y = \frac{7}{6} \end{cases} d) \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$5. a) \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} b) \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} c) \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$6. a) \begin{cases} x = 3 \\ y = -1\frac{1}{2} \end{cases} b) \begin{cases} x = -\frac{3}{7} \\ y = \frac{5}{7} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = \frac{10}{7} \\ y = \frac{1}{7} \end{cases} d) \begin{cases} x = -1200 \\ y = 500 \end{cases}$$

7. a) -2 b) 10 c) 559

$$8. a) \begin{cases} x = \frac{201}{137} \\ y = \frac{97}{137} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x = \frac{6586}{1447} \\ y = -\frac{2487}{1447} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = \frac{3951}{1981} \\ y = \frac{1481}{1981} \end{cases}$$

$$9. a) \begin{cases} x = 1,47 \\ y = 0,71 \end{cases} b) \begin{cases} x = 4,55 \\ y = -1,72 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = 1,99 \\ y = 0,75 \end{cases}$$

$$10. a) \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases} b) \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = -4/9 \\ y = -5/9 \end{cases}$$

- 7.2.1. 3 ja -2  
 2. 12 ja 105  
 3. 10 kpl 2 dl, 14 kpl 5 dl  
 4. 85

7.3.1. a)  $L = \emptyset$  b)  $L = \emptyset$

$$2. a) \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x - 1 \end{cases} b) \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3x - 2 \end{cases}$$

$$3. a) \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3 - 2x \end{cases} b) \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}x \end{cases}$$

4. a) 1 b)  $\infty$  c) 0  
 5.  $a \neq 10$   
 6.  $a = 2$ ,  $b = 4$   
 7.  $L \parallel M$

- 8.1.1. a) E b) E c) K d) E e) E  
 f) E  
 2. a) 49 b) EI c)  $(\pi - 1)^2$  d) EI e) 111  
 3. a) 9 b) 11 c) 20 d) 50 e) 0,7  
 f) 3,2 g) 11 h) 7  
 4. a) 1,111 b) 9,362 c) 185,9  
 d) 228,1 e)  $3,045 \cdot 10^7$   
 5. a) 1,414 b) 532 c) 2,31  
 d) 30 450 000  
 6. a) K b) K c) K d) E e) K f) E

- 8.2.1. a)  $\pm 8$  b)  $\pm 4,5$  c)  $\pm 5$  d)  $\emptyset$   
 2. a)  $\pm 2,2$  b)  $\pm 1,9$  c) 0 d) ei ole  
 3. 4,7 cm  
 4. 14,1 cm  
 5. 21,2 cm

- 8.4.1. a)  $x \geq 4$  b)  $x \leq 2\frac{1}{2}$   
 c)  $x > 7$  d)  $1\frac{1}{2} \leq x \leq 3$

- 8.5.1. a) 5 b) 7 c) a d) ei ole  
 e) 12 f) 18 g) 5 h) 12  
 2. a)  $3\sqrt{3}$  b) 9 c)  $9\sqrt{3}$  d)  $x^3$   
 e)  $x^3\sqrt{x}$  f)  $24\sqrt{3}$  g)  $-24\sqrt{3}$   
 3. a) 7 b) 7 c)  $\pi - 1$  d)  $4 - \pi$   
 e)  $|x|$  f)  $|3x|$  g) ei ole h)  $|9x|$   
 i)  $|x - 2|$   
 4. a) 7 b) 5 c) 1 d) 5  
 5. a) 72 b)  $6|x|$  c)  $7|a|$  d)  $8|ax|$   
 e)  $a^2 + 2$   
 6.a) 4 b) 12 c) 9a d)  $14x$  e) 5  
 7. a)  $\frac{11}{8}$  b)  $\frac{|a|}{2}$  c)  $\frac{|x|}{7|y|}$  d)  $\frac{1}{5|x|}$

8. a) 3 b)  $\sqrt{5}$  c)  $|b|$  d)  $\frac{4|m|}{|n|}$  e) 2  
 9. a)  $a^4$  b)  $|x|^5$  c)  $2y^2$  d)  $|a|^{999}$   
 e)  $a^6$  f)  $6x^3$  g)  $2^{26}$  h)  $7 \cdot 10^{100}$   
 i)  $7 \cdot 10^{99}$   
 10. a)  $x\sqrt{x}$  b)  $a^2\sqrt{a}$  c)  $81\sqrt{3}$   
 d)  $x^{998}\sqrt{x}$  e)  $2x\sqrt{2x}$   
 11. a) 5 b) 7 c) 5 d) 1 e)  $|x + 1|$   
 f)  $2x^2 + 1$   
 12. a)  $2\sqrt{2}$  b)  $2\sqrt{3}$  c)  $3\sqrt{2}$   
 d)  $5\sqrt{a}$  e)  $4a\sqrt{2a}$  f) 4 g)  $4\sqrt{10}$   
 h) 40 i)  $40\sqrt{10}$   
 13. a)  $\sqrt{2}$  b)  $\sqrt{3}$  c)  $\sqrt{2}$  d)  $2\sqrt{2x}$   
 14. a)  $-\sqrt{5}$  b)  $-\sqrt{6}$  c)  $-\sqrt{3}$   
 d)  $-\sqrt{2a}$

- 8.6.1. a)  $6\sqrt{3}$  b)  $4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$   
 c)  $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$  d)  $7 + 4\sqrt{5} - 3\sqrt{6}$   
 2. a)  $9\sqrt{2}$  b)  $12\sqrt{6} - \sqrt{3}$   
 c)  $8\sqrt{2} + 16\sqrt{3} + 21\sqrt{7}$   
 4. a) 9 b) 16 c)  $\sqrt{6}$  d)  $3\sqrt{2}$   
 5. a)  $6\sqrt{15}$  b)  $-6\sqrt{6}$  c)  $30\sqrt{2}$   
 d)  $-24\sqrt{6}$   
 6. a)  $3\sqrt{2} - 2$  b) 1 c)  $2 + 3\sqrt{6}$   
 7. a)  $1 - \sqrt{10}$  b) 4  
 c)  $\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6} - 6$   
 8. a) 2 b) 1 c) -1  
 9. a) 12 b) 45 c)  $54\sqrt{2}$  d) 400  
 10. a)  $5 + 2\sqrt{6}$  b)  $17 - 4\sqrt{15}$  c)  $98 - 24\sqrt{10}$   
 11. a) K b) K c) E  
 12. a)  $2\sqrt{2}$  b)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  c)  $\frac{\sqrt{2}}{6}$  d)  $\frac{\sqrt{6}}{4}$   
 e)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  f)  $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$   
 13. a)  $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$  b)  $\sqrt{6} + \sqrt{5}$   
 c)  $\sqrt{7} + 2$  d)  $-2 - \sqrt{3}$  e)  $2 + \sqrt{2}$   
 f)  $5 - 2\sqrt{6}$  g)  $\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{6}$   
 14. a)  $\frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}$  b)  $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

$$15.0 \quad | \quad 16. a) 3 + \sqrt{6} \quad b) \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \quad | \quad c) \sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + 2$$

## Koetehtäviä aiemmilta vuosilta

90.1.1. Ratkaise yhtälöpari  $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ -6x - y = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 3 \end{cases}$

90.1.2. Olkoon polynomit  $P(x) = 3x^2 - 10x - 8$  ja  $Q(x) = 3x + 2$ . Muodosta polynomit a)  $P(x) - Q(x)$  b)  $P(x) \cdot Q(x)$  [a)  $3x^2 - 13x - 10$  b)  $9x^3 - 24x^2 - 44x - 16$  ]

90.1.4. Ratkaise yhtälö  $3 - \frac{3x - 5}{4} = \frac{x + 1}{2}$  [  $x = 3$  ]

90.1.5. Esitä luku  $3^{3000}$  muodossa  $a \cdot 10^n$ , missä  $1 \leq a < 10$  [  $2,31 \cdot 10^{1431}$  ]

90.1.6. Kuinka paljon vettä tulisi haihduttaa 200 grammasta 10% suolaliuosta, jotta siitä tulisi 25% suolaliuosta? (Suolaliuoksessa on vettä ja suolaa. Haihdutettaessa vettä haihtuu) [ 120 g ]

90.1.7. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut  $x$  ja  $y$ , joille  $x^2 - y^2 = 33$ . [  $x = 17$  ja  $y = 16$  tai  $x = 7$  ja  $y = 4$  ]

90.2.1. Sievennä a)  $\sqrt{64x^6}$  b)  $\sqrt{\frac{a^{10}}{9b^2}}$  c)  $\sqrt{1 + \frac{2}{a} + \frac{1}{a^2}}$  [a)  $8a^3$  b)  $\frac{a^5}{3b}$  c)  $\frac{a+1}{a}$  ]

90.2.3. Sievennä a)  $\sqrt{8} + \sqrt{12} + \sqrt{32} - \sqrt{48}$  b)  $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(3\sqrt{3} + \sqrt{2})$  [a)  $6\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$  b)  $12 - 7\sqrt{6}$  ]

90.2.4. Ratkaise yhtälöt a)  $3x^2 - 6 = 0$  b)  $\sqrt{3} \cdot x - 6 = 0$  [a)  $\pm\sqrt{2}$  b)  $2\sqrt{3}$  ]

90.2.6. Onko  $\sqrt{12} - \sqrt{140} = \sqrt{7} - \sqrt{5}$  [ on ]

90.2.7. Tasakylkisen kolmion kylki on 15 ja kyljelle piirretty korkeusjana 9. Laske kolmion kanta. [  $3\sqrt{10}$  ]

91.1.1. Ratkaise a)  $\frac{3x}{2} - \frac{5 - 2x}{3} = 7$  b)  $(3x - 4)^2 = (3x - 1)(3x + 1) - 24x$  [a)  $x = 4$  b)  $L = \emptyset$  ]

91.1.2. Sievennä a)  $(2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2}) : (\frac{2}{3} \cdot 1\frac{4}{5} - 1)$  b)  $\frac{2a^7}{3b^2} \cdot (a^{-2})^4 \cdot \frac{(3b)^3}{a^{-1}}$  [a)  $4\frac{1}{6}$  b)  $18b$  ]

91.1.3. Laske a)  $(3x^2 - 4x + 5)(2x^2 + 3x - 4)$  [a)  $6x^4 + x^3 - 14x^2 + 31x - 20$  ]

91.1.4. Määritä reaaliluku  $a$  siten, että yhtälöparin  $\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$  ratkaisu toteuttaa yhtälön  $x^2 + ay^2 = 3$  [  $a=2$  ]

91.1.7. Kahden positiivisen luvun summa on 40% suurempi kuin niiden erotus ja 80% pienempi kuin lukujen neliöiden erotus samassa järjestyksessä. Määritä luvut. [ 6 ja 1 ]

91.2.1. Esitä ilman itseisarvoja a)  $|2x^2 + 3|$  b)  $|\sqrt{5} - 3|$  [a)  $2x^2 + 3$  b)  $3 - \sqrt{5}$  ]

91.2.2. Esitä hakasulkumerkinnöin a)  $1 < x < 3$  b)  $x > 2$ . Esitä epäyhtälöin c)  $[-1, 1[$  d)  $]-4, \infty[$ . [a)  $]1, 3[$  b)  $]2, \infty[$  c)  $-1 \leq x < 1$  d)  $x > -4$  ]

91.2.3. Sievennä a)  $\sqrt{a^2(b+c)^2}$  b)  $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{72}}$  c)  $\sqrt{a^{1001}}$ . [a)  $a(b+c)$  b)  $\frac{1}{2}$  c)  $a^{500} \cdot \sqrt{a}$  ]

91.2.5. Sievennä a)  $\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{24} + \sqrt{\frac{1}{6}}$  b)  $\frac{3\sqrt{5} + 6\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$  [a)  $2\frac{1}{2} \cdot \sqrt{6}$  b)  $1 + \sqrt{10}$  ]

91.2.6. Ratkaise yhtälö  $(x - \sqrt{3})^2 = (x - \sqrt{2})^2$  [  $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$  ]

91.2.7. Suorakulmaisen kolmion kahden lyhimmän sivun suhde on 3:4 ja pisin sivu on 100 cm. Laske kolmion piiri ja ala. [240 cm ; 2400 cm<sup>2</sup> ]

93.1.1. Ratkaise yhtälöryhmä  $\begin{cases} 4x + 5y = 3 \\ 5x + 7y = 0 \end{cases}$

93.1.3. Ratkaise yhtälö a)  $\frac{x+5}{15} = \frac{4x-10}{30}$  b)  $\frac{x}{5} - \frac{x+5}{15} = \frac{4x-10}{30}$

93.1.6. Kultaseppä yhdistää 300 grammaa 75-prosenttista kultaseosta ja 100 grammaa 90-prosenttista kultaseosta. Mikä on uuden seoksen kultapitoisuusprosentti?

93.1.7. Erittäin hyvänä onkimispäivänä Matti sai ongellaan ahvenia, särkiä ja kiiskiä suhteessa 3:2:1 (kaksoissuhde tarkoittaa, että aina kolmea ahventa kohti on kaksi särkiä ja yksi kiiski) sekä Pekka samoja kaloja suhteessa 4:3:1. Pekka sai 4 ahventa ja 5 särkiä enemmän kuin Matti. Montako kalaa Matti sai?

1. $\begin{cases} 4x + 5y = 3 \parallel \cdot 7 \\ 5x + 7y = 0 \parallel \cdot (-5) \end{cases} \begin{cases} 28x + 35y = 21 \\ -25x - 35y = 0 \end{cases} ; 3x = 21 ; x = 7 ; 4 \cdot 7 + 5y = 3 ; 5y = -25 ; y = -5$
3. a) $30(x+5) = 15(4x-10) ; 30x + 150 = 60x - 150 ; 30x - 60x = -150 - 150 ; -30x = -300 ; x = 10$ b) $\frac{x}{5} - \frac{x+5}{15} = \frac{4x-10}{30} \parallel \cdot 30 ; 6x - 2(x+5) = 4x - 10 ; 6x - 2x - 10 = 4x - 10 ; 4x - 4x = 10 - 10 ; L = R$
6. 1. seoksessa kultaa = $\frac{75}{100} \cdot 300 \text{ g} = 225 \text{ g}$ 2. seoksessa = $\frac{90}{100} \cdot 100 \text{ g} = 90 \text{ g}$ . Kultaa yhteensä 315 g. $\frac{x}{100} \cdot 400 \text{ g} = 315 \text{ g} ; 4x = 315 ; x = 78,75$ V: <b>78,75%</b>
7. Olkoon Matilla kiiskiä = x, särkiä = 2x ja ahvenia = 3x Olkoon Pekalla kiiskiä = y, särkiä = 3y ja ahvenia = 4y $\begin{cases} 4y - 3x = 4 \parallel \cdot (-2) \\ 3y - 2x = 5 \parallel \cdot 3 \end{cases} \begin{cases} -8y + 6x = -8 \\ 9y - 6x = 15 \end{cases} ; y = 7 ; 4 \cdot 7 - 3x = 4 ; -3x = -24 ; x = 8$ Matti sai siis 8 kiiskeä, 16 särkiä ja 24 ahventa. Siis yhteensä <b>48 kalaa</b> .

93.2.2. Sievennä a)  $2\sqrt{8} - \sqrt{2} - \sqrt{18} + 6\sqrt{\frac{1}{2}}$  b)  $(4\sqrt{3} - 3\sqrt{5})(2\sqrt{3} + \sqrt{5})$

93.2.3. Piirrä yhtälön  $y = |2x - 4| - 3$  kuvaaja.

93.2.4. Suorakulmaisen kolmion ABC hypotenuusan AB pituus on 15 ja kateetin AC pituus 12. Piste D on sivun AC keskipiste. Laske janan BD pituus.

93.2.5. Millä vakion t arvolla yhtälön  $(x - \sqrt{10})(x + \sqrt{10}) = 2t(x - \sqrt{5})$  ratkaisu on  $x = \sqrt{20}$  ?

93.2.7. Laske allaolevan lausekkeen arvo, kun  $x = 16$

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x-4}} + \frac{1}{\sqrt{x-4} + \sqrt{x-6}} + \frac{1}{\sqrt{x-6} + \sqrt{x-8}} + \frac{1}{\sqrt{x-8} + \sqrt{x-10}} + \frac{1}{\sqrt{x-10} + \sqrt{x-12}}$$

2. a) $2\sqrt{8} - \sqrt{2} - \sqrt{18} + 6\sqrt{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{4 \cdot 2} - \sqrt{2} - \sqrt{9 \cdot 2} + 3\sqrt{4 \cdot \frac{1}{2}} = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ b) $(4\sqrt{3} - 3\sqrt{5})(2\sqrt{3} + \sqrt{5}) = 8\sqrt{9} + 4\sqrt{15} - 6\sqrt{15} - 3\sqrt{25} = 24 + 4\sqrt{15} - 6\sqrt{15} - 15 = 9 - 2\sqrt{15}$
3. $ 2x - 4  = \begin{cases} 2x - 4, & \text{kun } x \geq 2 \\ -2x + 4, & \text{kun } x < 2 \end{cases}$ Lukuparitaulukot kummallekin suoralle $x \geq 2$ : $\begin{array}{ccc} x &   & 2 & 3 & 4 \\ y &   & -3 & -1 & 1 \end{array}$ Kuvaaja koostuu kahdesta pisteen (2,-3) kautta lähtevästä puolisuorasta, jotka kulkevat pisteiden (0,1) ja (4,1) kautta $y = \begin{cases} 2x - 4 - 3, & \text{kun } x \geq 2 \\ -2x + 4 - 3, & \text{kun } x < 2 \end{cases}$ $y = \begin{cases} 2x - 7, & \text{kun } x \geq 2 \\ -2x + 1, & \text{kun } x < 2 \end{cases}$ $x < 2$ : $\begin{array}{ccc} x &   & 2 & 1 & 0 \\ y &   & -3 & -1 & 1 \end{array}$
4. Kolmiossa ABC on hypotenuusa AB = 15 ja kateetti AC = 12, jolloin DC = 6 Pythagoraan lauseen perusteella $BC^2 + 12^2 = 15^2 ; BC^2 + 144 = 225 ; BC^2 = 81 ; BC = 9$ Samoin kolmiosta BCD saadaan $BD^2 = 6^2 + 9^2 = 36 + 81 = 117 ; BD = \sqrt{117} = \sqrt{9 \cdot 13} = 3\sqrt{13}$
5. $x^2 - 10 = 2t(x - \sqrt{5}) ; (\sqrt{20})^2 - 10 = 2t(\sqrt{20} - \sqrt{5}) ; 20 - 10 = 2t(\sqrt{4 \cdot 5} - \sqrt{5}) ; 10 = 2t(2\sqrt{5} - \sqrt{5}) \parallel : 2$ $5 = t \cdot \sqrt{5} \parallel \cdot \sqrt{5} ; 5\sqrt{5} = 5t ; t = \sqrt{5}$

$$7. \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{x-(x-2)} + \frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-4}}{x-2-(x-4)} + \frac{\sqrt{x-4}-\sqrt{x-6}}{x-4-(x-6)} + \frac{\sqrt{x-6}-\sqrt{x-8}}{x-6-(x-8)} + \frac{\sqrt{x-8}-\sqrt{x-10}}{x-8-(x-10)} + \frac{\sqrt{x-10}-\sqrt{x-12}}{x-10-(x-12)} =$$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{2} + \frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-4}}{2} + \frac{\sqrt{x-4}-\sqrt{x-6}}{2} + \frac{\sqrt{x-6}-\sqrt{x-8}}{2} + \frac{\sqrt{x-8}-\sqrt{x-10}}{2} + \frac{\sqrt{x-10}-\sqrt{x-12}}{2} =$$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-12}}{2} = \frac{\sqrt{16}-\sqrt{4}}{2} = \frac{4-2}{2} = 1$$

94.1. Sievennä a)  $\frac{a}{2} : \frac{a}{6}$  b)  $2^0$  c)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$  d)  $3,57 \cdot 10^{13} : 8,29 \cdot 10^{-15}$  e)  $(x-3)^2$  f)  $\sqrt{1\frac{25}{144}}$

94.3. Sievennä lauseke  $1 - (2-x)^2 - (1-2x)(1+2x) - 3x^2$

94.4. Ratkaise yhtälö  $\frac{3x+1}{2} + \frac{2x-3}{3} = \frac{x+1}{12}$

94.6. Ratkaise yhtälöpari  $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 5x+7y=9 \end{cases}$

94.7. Sievennä lauseke  $\sqrt{15}(\sqrt{12}-\sqrt{20}) + \frac{30}{\sqrt{3}}$

94.9. Osoita likiarvoja käyttämättä, että  $\sqrt{35-6\sqrt{34}} = 3\sqrt{2} - \sqrt{17}$ .

94.10. Kun erään kaksinumeroisen positiivisen kokonaisluvun numerot vaihdetaan keskenään, saadaan luku, joka on 27 pienempi kuin alkuperäinen luku. Jos taas alkuperäisestä luvusta vähennetään 45, niin saadaan luku, joka on puolet edellä mainitusta numerot vaihtamalla saadusta luvusta. Mikä on alkuperäinen luku?

1. a)  $\frac{a}{2} : \frac{a}{6} = \frac{a}{2} \cdot \frac{6}{a} = \frac{6a}{2a} = 3$  b)  $2^0 = 1$  c)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$  d)  $3,57 \cdot 10^{13} : 8,29 \cdot 10^{-15} = 4,31 \cdot 10^{27}$

e)  $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$  f)  $\sqrt{1\frac{25}{144}} = \sqrt{\frac{169}{144}} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$

3.  $1 - (2-x)^2 - (1-2x)(1+2x) - 3x^2 = 1 - (4-4x+x^2) - (1-4x^2) - 3x^2 = 1 - 4 + 4x - x^2 - 1 + 4x^2 - 3x^2 = 4x - 4$

4.  $\frac{3x+1}{2} + \frac{2x-3}{3} = \frac{x+1}{12} \parallel \cdot 12 ; 6(3x+1) + 4(2x-3) = x+1 ; 18x+6+8x-12 = x+1 ; 25x = 7 ; x = \frac{7}{25}$

6.  $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 5x+7y=9 \end{cases} \parallel \cdot (-7) ; \begin{cases} -14x-21y=-28 \\ 15x+21y=27 \end{cases} ; x = -1 ; 2 \cdot (-1) + 3y = 4 ; -2 + 3y = 4 ; 3y = 6 ; y = 2$

7.  $\sqrt{15}(\sqrt{12}-\sqrt{20}) + \frac{30}{\sqrt{3}} = \sqrt{15}(2\sqrt{3}-2\sqrt{5}) + \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = 2\sqrt{45}-2\sqrt{75} + \frac{30\sqrt{3}}{3} = 2 \cdot 3\sqrt{5} - 2 \cdot 5\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 6\sqrt{5}$

9.  $\sqrt{35-6\sqrt{34}} = 3\sqrt{2} - \sqrt{17}$  on tosi, jos määritelmän ehdot 1° ja 2° toteutuvat  
 1° arvo<sup>2</sup> =  $(3\sqrt{2} - \sqrt{17})^2 = 9 \cdot 2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{17} + 17 = 35 - 6\sqrt{34} =$  juuretettava. TOTTA  
 2° arvo =  $3\sqrt{2} - \sqrt{17} = \sqrt{9 \cdot 2} - \sqrt{17} = \sqrt{18} - \sqrt{17} > 0$ . TOTTA

10. Olkoon alkuperäinen luku x-kymmentä  $y = 10x + y$   
 numerot vaihtaa saatu luku on y-kymmentä  $x = 10y + x$   
 $\begin{cases} 10x + y = 10y + x + 27 \\ 10x + y - 45 = \frac{1}{2}(10y + x) \end{cases} ; \begin{cases} 9x - 9y = 27 \\ 20x + 2y - 90 = 10y + x \end{cases} ; \begin{cases} x - y = 3 \\ 19x - 8y = 90 \end{cases} ; \begin{cases} x = y + 3 \\ 19x - 8y = 90 \end{cases}$   
 $19(y+3) - 8y = 90 ; 19y + 57 - 8y = 90 ; 11y = 33 ; y = 3 ; x = 6$  V: Alkup. luku oli **63**

94U1. Sievennä a)  $\frac{2}{x} + \frac{3}{x}$  b)  $a^1$  c)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$  d)  $4,28 \cdot 10^{17} \cdot 8,15 \cdot 10^{-31}$  e)  $(x+6)^2$  f)  $\sqrt{4\frac{25}{36}}$

94U3. Sievennä lauseke  $(2x-1)^2 - (1-2x)(1+2x)$ .

94U4. Ratkaise yhtälö  $1 - \frac{4-3x}{6} = \frac{x+2}{2}$

94U6. Ratkaise yhtälöpari  $\begin{cases} 3x+4y=-1 \\ 5x+6y=1 \end{cases}$

94U7. Sievennä lauseke  $2\sqrt{18} - 3\sqrt{12} - \sqrt{6}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + 24\sqrt{\frac{1}{3}}$ .

94U9. Laske lausekkeen  $(3^{612} \cdot 9^{163}) : 27^{313}$  tarkka arvo.

94U10. Määritä vakiot a ja b, kun yhtälö  $a(x + 12) + bx = 24$  on tosi kaikilla x:n arvoilla.

1. a) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x} = \frac{5}{x}$ b) $a^1 = a$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ d) $4,28 \cdot 10^{17} \cdot 8,15 \cdot 10^{-31} = 3,49 \cdot 10^{-13}$
e) $(x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36$ f) $\sqrt{4\frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{169}{36}} = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$
3. $(2x - 1)^2 - (1 - 2x)(1 + 2x) = 4x^2 - 4x + 1 - (1 - 4x^2) = 4x^2 - 4x + 1 - 1 + 4x^2 = 8x^2 - 4x$
4. $1 - \frac{4 - 3x}{6} = \frac{x + 2}{2} \parallel \cdot 6 ; 6 - (4 - 3x) = 3(x + 2) ; 6 - 4 + 3x = 3x + 6 ; 0x = 4 ; L = \emptyset$
6. $\begin{cases} 3x + 4y = -1 \\ 5x + 6y = 1 \end{cases} \parallel \cdot (-3) ; \begin{cases} -9x - 12y = 3 \\ 10x + 12y = 2 \end{cases} ; x = 5 ; 3 \cdot 5 + 4y = -1 ; 4y = -16 ; y = -4$
7. $2\sqrt{18} - 3\sqrt{12} - \sqrt{6}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + 24\sqrt{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{18} - 3\sqrt{12} - \sqrt{12} + \sqrt{18} + 8 \cdot 3\sqrt{\frac{1}{3}}$ $= 3\sqrt{18} - 4\sqrt{12} + 8\sqrt{9 \cdot \frac{1}{3}} = 3\sqrt{9 \cdot 2} - 4\sqrt{4 \cdot 3} + 8\sqrt{3} = 3 \cdot 3\sqrt{2} - 4 \cdot 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 9\sqrt{2} - 8\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 9\sqrt{2}$
9. $(3^{612} \cdot 9^{163}) : 27^{313} = (3^{612} \cdot (3^2)^{163}) : (3^3)^{313} = (3^{612} \cdot 3^{326}) : 3^{939} = 3^{612 + 326 - 939} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
10. $a(x + 12) + bx = 24 ; ax + 12a + bx = 24 ; (a + b)x = 24 - 12a$ Yhtälö on aina tosi, jos se on muotoa $0 = 0$ , eli x:n kerroin ja vakiotermit ovat arvoltaan 0 $\begin{cases} a + b = 0 \\ 24 - 12a = 0 \end{cases} ; \begin{cases} a + b = 0 \\ 12a = 24 \end{cases} ; \begin{cases} a + b = 0 \\ a = 2 \end{cases} ; \begin{cases} b = -2 \\ a = 2 \end{cases}$

95.1.1. Sievennä a)  $\frac{x^3 \cdot x^5}{x^6}$  b)  $3^0 + 3^{-1}$  c)  $\sqrt{40} : \sqrt{8}$  d)  $|\sqrt{3} - 2|$  e)  $(x - 7)^2$  f)  $3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{3}$

95.1.2. Sievennä a)  $3x(2x - 4) - (2x + 3)(2x - 3)$  b)  $(2\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 3\sqrt{2})$

95.1.3. Ratkaise a)  $\frac{2+x}{3} + \frac{3+x}{2} = 23$  b)  $7 - \frac{x}{2} \geq 4 + x$

95.1.4. Vettä lämmitetään sähkölevyllä, jolloin sen lämpötila nousee tasaisesti. Viiden minuutin lämmityksen jälkeen vesi on käden lämpöistä (37°C) ja lämmittyään 15 minuuttia se alkaa kiehua.

- a) Esitä graafisesti veden lämpötilan riippuvuus lämmitysajasta. b) Milloin lämpötila oli 70°C ?  
 c) Kuinka korkea oli veden lämpötila lämmityksen alussa?

95.1.5. Ratkaise  $|3x - 6| < x + 2$ .

95.1.6. Vauhdista 50 km/h jarruttavan auton pysähtymisaika on kääntäen verrannollinen renkaiden ja tien välisen kitkakerroimen neliöjuureen. Pysähtymisaika on 2,8 s, kun kitkakerroin on 0,35. Mikä on pysähtymisaika, kun kitkakerroin on 0,1?

95.1.7. Osoita, että luvut  $2 + \sqrt{3}$  ja  $\frac{1}{\sqrt{3} - 2}$  ovat toistensa vastalukuja.

95.1.8. Olkoon yhtälöpari  $\begin{cases} ax + 3y = 11 \\ 4x + 5y = 1 \end{cases}$

a) Ratkaise yhtälöpari, kun  $a = 5$ . b) Millä a:n arvolla yhtälöparilla ei ole ratkaisua?

95.1.9. Onko  $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$  ?

95.1.10. Iso pussi (5kg) vehnä jauhoja ja 10 munan keno kananmunia (0,575kg) maksoivat yhteensä 39,40 mk. Jauhojen hinta putosi 45% ja kananmunien 7 mk/kg. Kuinka korkeaksi muodostui näiden uusi kilohinta, kun sama ostos maksoi alennusten jälkeen 20,80 mk?

1. a) $\frac{x^3 \cdot x^5}{x^6} = \frac{x^8}{x^6} = x^2$ b) $3^0 + 3^{-1} = 1 + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}$ c) $\sqrt{40} : \sqrt{8} = \sqrt{40 : 8} = \sqrt{5}$ d) $ \sqrt{3} - 2  = 2 - \sqrt{3}$
e) $(x - 7)^2 = x^2 - 14x + 49$ f) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{3} = 7\sqrt{2} - 5\sqrt{3}$
2. a) $3x(2x - 4) - (2x + 3)(2x - 3) = 6x^2 - 12x - (4x^2 - 9) = 6x^2 - 12x - 4x^2 + 9 = 2x^2 - 12x + 9$
b) $(2\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) = 2\sqrt{9} - 6\sqrt{6} + \sqrt{6} - 3\sqrt{4} = 2 \cdot 3 - 5\sqrt{6} - 3 \cdot 2 = -5\sqrt{6}$
3. a) $\frac{2+x}{3} + \frac{3+x}{2} = 23 \parallel \cdot 6$ ; $2(2+x) + 3(3+x) = 138$ ; $4 + 2x + 9 + 3x = 138$ ; $5x = 125$ ; $x = 25$
b) $7 - \frac{x}{2} \geq 4 + x \parallel \cdot 2$ ; $14 - x \geq 8 + 2x$ ; $-x - 2x \geq 8 - 14$ ; $-3x \geq -6$ ; $x \leq 2$
4.a) Piirrä koordinaatistoon vaaka-akselille aika (0 ... 20 min) ja pystyakselille lämpötila (0 ... 100°C) ja tähän suoraa pisteiden (5,37) ja (15,100) kautta. Suora leikkaa pystyakselin n. 5°C kohdalla. Kuvaaja jatkuu pisteestä (15,100) oikealle vaakasuorana ja (0,5):sta vasemmalle vaakasuorana b) aika 70°C lämpötilaan on n. 10 minuuttia c) alkulämpötila oli 5°C.
5. $ 3x - 6  < x + 2$ ; $-x - 2 < 3x - 6 < x + 2$ ; $-x - 2 < 3x - 6$ JA $3x - 6 < x + 2$ ; $-2 + 6 < 3x + x$ JA $3x - x < 2 + 6$ ; $4 < 4x$ JA $2x < 8$ ; $1 < x$ JA $x < 4$ ; $1 < x < 4$
6. $t = \frac{C}{\sqrt{k}}$ ; $2,8 = \frac{C}{\sqrt{0,35}}$ ; $C = 2,8 \cdot \sqrt{0,35} = 1,66$ ; $t = \frac{1,66}{\sqrt{k}} = \frac{1,66}{\sqrt{0,1}} = 5,2$ (s)
7. $\frac{1}{\sqrt{3} - 2} = \frac{\sqrt{3} + 2}{(\sqrt{3})^2 - 2^2} = \frac{\sqrt{3} + 2}{3 - 4} = -(\sqrt{3} + 2)$ , joka on $(2 + \sqrt{3})$ :n vastaluku
8. a) $\begin{cases} ax + 3y = 11 \\ 4x + 5y = 1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} 5x + 3y = 11 \parallel \cdot 5 \\ 4x + 5y = 1 \parallel \cdot (-3) \end{cases}$ ; $\begin{cases} 25x + 15y = 55 \\ -12x - 15y = -3 \end{cases}$ ; $13x = 52$ ; $x = 4$ ; $20 + 3y = 11$ ; $3y = -9$ ; $y = -3$ b) ei ratkaisua, jos $\frac{a}{4} = \frac{3}{5} \neq \frac{11}{1}$ ; $\neq$ on tosi, joten $\frac{a}{4} = \frac{3}{5}$ ; $5a = 12$ ; $a = 2\frac{2}{5}$
9. $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ jos $1^\circ (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = 6 - 2\sqrt{12} + 2 = 8 - 2\sqrt{4 \cdot 3} = 8 - 2 \cdot 2\sqrt{3} = 8 - 4\sqrt{3}$ TOSI ja $2^\circ \sqrt{6} - \sqrt{2} > 0$ joka TOSI, koska $\sqrt{6} > \sqrt{2}$ .
10. Jauhojen kilohinta alussa = x ; lopussa = 0,55x ; Munien alussa = y ; lopussa = y - 7 $\begin{cases} 5x + 0,575y = 39,40 \\ 5 \cdot 0,55x + 0,575(y - 7) = 20,80 \end{cases}$ ; $\begin{cases} 5x + 0,575y = 39,40 \parallel \cdot 1 \\ 2,75x + 0,575y = 24,825 \parallel \cdot (-1) \end{cases}$ ; $2,25x = 14,575 \parallel : 2,25$ , $x = 6,48$ ; $5 \cdot 6,48 + 0,575y = 39,40$ ; $0,575y = 7$ ; $y = 12,17$ Jauhot lopussa = $0,55 \cdot x = 0,55 \cdot 6,48 = 3,56$ (mk/kg) ; Munat lopussa = $y - 7 = 12,17 - 7 = 5,17$ (mk/kg)

95.2.1. Sievennä a)  $(a^3)^4 : a^2$

b)  $2^2 \cdot 4^{-1}$

c)  $\sqrt{9 + 4 + 36} \cdot \sqrt{1 + 4 + 4}$

d)  $|x - 1|$ , kun  $x > 1$

e)  $(2x - 3)^2$

f)  $2\sqrt{a} + 3\sqrt{b} - 4\sqrt{a}$

95.2.2. Tutkitaan lukujoukkoja: A = reaaliluvut, B = luonnolliset luvut, C = rationaaliluvut, D = kokonaisluvut ja E = irrationaaliluvut. Mihin kaikkiin edellä mainittuihin lukujoukkoihin kuuluu luku:

a)  $-\pi$  b)  $\sqrt{4}$  c)  $0,2777\dots$  d)  $0,2777\dots + 1\frac{1}{3}$  e)  $\sqrt{-9}$  f)  $(2 + 3) : 4$

95.2.3. Sievennä a)  $(a + 2)(a - 2) - (2a - 1)^2$  b)  $\frac{\sqrt{18}}{4} - 2\sqrt{8} + \sqrt{98}$

95.2.4. Maljan sisältämä nestemäärä on suoraan verrannollinen nestepinnan korkeuden neliöön. Korkeuden ollessa 10 cm malja sisältää 1,0 l nestettä. Mikä on nestepinnan korkeus, kun maljassa on 2,0 l nestettä?

95.2.5. Kun betoniautossa on 4 m<sup>3</sup> betonia, on auton kokonaispaino 28 tn ja kun siinä on 6 m<sup>3</sup> betonia on kokonaispaino 34 tn. a) Esitä graafisesti auton kokonaispainon riippuvuus betonin tilavuudesta. b) Autossa on kolme akselia. Miten monta m<sup>3</sup> betonia voidaan kuormata, jos ajetaan tiellä, jossa suurin sallittu akselipaino on 15 tn ja paino on jakautunut tasaisesti kaikille akseleille? c) Mikä on auton paino tyhjänä?

95.2.6. Ratkaise a)  $\frac{3+x}{2} - \frac{2-x}{3} = 2$  b)  $x - 1 < x\sqrt{5} + 3$

95.2.7. Osoita, että luvut  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  ja  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  ovat käänteislukuja.

95.2.8. Ratkaise epäyhtälö  $|2x - 3| > 4x$ .



- 95.2.9. Olkoon yhtälöpari  $\begin{cases} tx + 3y = 5 \\ 2x + uy = 10 \end{cases}$  a) Ratkaise yhtälöpari, kun  $t = 5$  ja  $u = -6$ .  
b) Millä  $t$ :n ja  $u$ :n arvoilla yhtälöryhmällä on äärettömästi ratkaisuja?

95.2.10. Retkeilijä on Lapin erämaamökissä ja hänen on lähdettävä paluumatkalle moottorikelkalla, joka käyttää bensiiniä, jossa on 5% öljyä. Retkeilijä huomaa, että hänellä on 10 litraa 10-%:sta ja 20 litraa 2%:sta seosta. Mikä on suurin määrä sopivaa polttoainetta, minkä hän voi näistä sekoittamalla saada?

1. $(a^3)^4 : a^2 = a^{12} : a^2 = a^{10}$ b) $2^{-2} \cdot 4^{-1} = (\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{1}{4})^1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ c) $\sqrt{9+4+36} \cdot \sqrt{1+4+4} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{9} = 7 \cdot 3 = 21$ d) $ x-1  = x-1$ , koska $x > 1$ , jolloin $x-1 > 0$ e) $(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$ f) $2\sqrt{a} + 3\sqrt{b} - 4\sqrt{a} = 3\sqrt{b} - 2\sqrt{a}$
2. a) A, E b) A, B, C, D c) A, C d) A, C e) ei mihinkään f) A, C
3. a) $(a+2)(a-2) - (2a-1)^2 = a^2 - 4 - (4a^2 - 4a + 1) = a^2 - 4 - 4a^2 + 4a - 1 = -3a^2 + 4a - 5$ b) $\frac{\sqrt{18}}{4} - 2\sqrt{8} + \sqrt{98} = \frac{\sqrt{9 \cdot 2}}{4} - 2\sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{49 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} - 4\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 3\frac{3}{4}\sqrt{2}$
4. $V \sim h^2$ ; $V = Ch^2$ ; $1 = C \cdot 10^2$ ; $C = 0,01$ ; $V = 0,01h^2$ ; $2 = 0,01h^2$ ; $h^2 = 200$ ; $h = 14,2$ (cm)
5. a) Piirrä vaaka-akselille tilavuus (0... 10 m <sup>3</sup> ) ja pystyakselille paino (0... 50 tn) sekä suora pisteiden (4,28) ja (6,34) kautta. b) Kokonaispaino on 3·15 tn = 45 tn, jolloin <b>V = 9,7 tn</b> c) <b>V = 0</b> ; <b>m = 16 tn</b>
6. a) $\frac{3+x}{2} - \frac{2-x}{3} = 2 \parallel \cdot 6$ ; $3(3+x) - 2(2-x) = 12$ ; $9+3x-4x+2x = 12$ ; $5x = 7$ ; <b>x = 1,4</b> b) $x-1 < x\sqrt{5}+3$ ; $x-x\sqrt{5} < 3+1$ ; $x(1-\sqrt{5}) < 4 \parallel \cdot (1+\sqrt{5})$ ; $x(1-5) < 4(1+\sqrt{5})$ $-4x < 4(1+\sqrt{5}) \parallel : (-4)$ ; <b>x &gt; -(1+\sqrt{5})</b>
7. Luvut ovat käänteislukuja, jos niiden tulo on 1. Lasketaan tulo $\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{36}}{6} = \frac{6}{6} = 1$
8. $ 2x-3  > 4x \Leftrightarrow 2x-3 > 4x$ TAI $2x-3 < -4x \Leftrightarrow -2x > 3$ TAI $6x < 3 \Leftrightarrow x < -1,5$ TAI $x < 0,5$ Piirrä lukusuorataulukon yhdelle riville alue $x < -1,5$ ja toiselle riville $x < 0,5$ . Näistä nähdään alue, missä ainakin toinen toteutuu $x < 0,5$ (piirrä kolmannelle riville) <b>V: x &lt; 0,5</b>
9. $\begin{cases} tx + 3y = 5 \\ 2x + uy = 10 \end{cases}$ a) $\begin{cases} 5x + 3y = 5 \parallel \cdot 2 \parallel \cdot 2 \\ 2x - uy = 10 \parallel \cdot 1 \parallel \cdot (-5) \end{cases}$ $12x = 20$ ; $x = 1\frac{2}{3}$ ; $36y = -40$ ; $x = -1\frac{1}{9}$ b) $\infty$ monta ratkaisua, jos $\frac{t}{2} = \frac{3}{u} = \frac{5}{10}$ ; $\frac{t}{2} = \frac{5}{10}$ ; $t = 1$ ; $\frac{3}{u} = \frac{5}{10}$ ; $5u = 30$ ; $u = 6$
10. 1° Jos otetaan kaikki 10 litraa 10% seosta, on siinä 1 l öljyä ja x litraa 2% seosta on siinä 0,02x öljyä. Täten $1 + 0,02x = 0,05(10+x)$ ; $1 + 0,02x = 0,5 + 0,05x$ ; $0,03x = 0,5$ ; $x = 16,7$ Kaikkiaan 26,7 l 2° Jos otetaan kaikki 20 l 2% seosta on siinä 0,4 l öljyä ja x l 10% seosta, on siinä 0,1x öljyä. Täten saadaan $0,4 + 0,1x = 0,05(x+20)$ ; $0,4 + 0,1x = 0,05x + 1$ ; $0,05x = 0,6$ ; $x = 12$ mihin ei seosta riitä. Siis on otettava 10 l + 16,7 l = <b>26,7 l</b>

95.3.1. Sievennä a)  $a^6 \cdot a^8$  b)  $2,3 \cdot 10^8 \cdot 4,1 \cdot 10^9$  c)  $2^{-2} + 2^{-1} + 2^0$  d)  $3x^2 - 4x - 5x^2$  e)  $2x^2(3x-4)$  f)  $(2x-1)^2$

95.3.2. Olkoon lukujoukot A = alkuluvut, B = kokonaisluvut ja C = irrationaaliluvut. Mihin näistä lukujoukoista kuuluu a)  $3+1$  b)  $3-1$  c)  $1 \cdot 3$  d)  $1 : 3$  e)  $\sqrt{1+3}$  f)  $\sqrt{1 \cdot 3}$

95.3.3. Sievennä a)  $(\sqrt{5})^2$  b)  $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$  c)  $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

95.3.4. Ratkaise yhtälöt a)  $2(x+1) = 3+2x$  b)  $(x+1)(x-1) + 1 = x^2$  c)  $(x+1)^2 = x^2 + 1$

95.3.5. Millainen arvo on a:lla silloin, kun epäyhtälöllä  $a(x+2) < ax+4$  ei ole ratkaisua?

95.3.6. Ratkaise yhtälöpari  $\begin{cases} 3,65x + 5,94y = 8,38 \\ 2,51x + 4,35y = 5,84 \end{cases}$

95.3.7. Opiskelija on havainnut matematiikan kokeesta saamansa numeron olevan kääntäen verrannollinen edellisestä englannin kokeesta saamaansa numeron neliöjuureen. Kun hän sai edellisen kerran englannin numeroksi 7, sai hän matematiikasta 8,2. Mitä matematiikan numeroa hän odottaa seuraavasta matematiikan kokeesta, kun hän sai englannin kokeesta  $5\frac{1}{2}$ ?

95.3.8. Ratkaise a)  $|2x-45| = 7x$  b)  $|2x-5| > 3$

95.3.9. Lukion opetustyöhön käytettävissä oleva rahamäärä pieneni 5% edellisestä lukuvuodesta. Oppilasmäärä kasvoi kuitenkin 4%. Miten muuttui yhtä oppilasta kohti käytettävissä oleva rahamäärä?

95.3.10. Mehiläistarhurilla on ollut eri vuosina eri määrä mehiläispesä. Kun pesiä oli 2, oli hunajan tuotto 28 kg/pesä, kun pesiä oli 4, oli tuotto 24 kg/pesä ja kun pesiä oli 6, oli tuotto 20 kg/pesä.

- a) Esitä graafisesti miten hunajan tuotto pesää kohti riippuu pesien lukumäärästä.  
 b) Mikä on pesien lukumäärä, jos tuotto olisi 10 kg/pesä?  
 c) Millä pesämäärällä tarhuri saa suurimman hunajan kokonaissadon?

1. a) $a^6 \cdot a^8 = a^{14}$ b) $2,3 \cdot 10^8 \cdot 4,1 \cdot 10^9 = 9,4 \cdot 10^{17}$ c) $2^{-2} + 2^{-1} + 2^0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{3}{4}$ d) $3x^2 - 4x - 5x^2 = -2x^2 - 4x$ e) $2x^2(3x - 4) = 6x^3 - 8x^2$ f) $(2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$																																																		
2. a) <b>B</b> b) <b>A ja B</b> c) <b>A ja B</b> d) <b>Ei mihinkään</b> e) <b>A ja B</b> f) <b>C</b>																																																		
3.a) $(\sqrt{5})^2 = 5$ b) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 = 5 - 2\sqrt{5}\sqrt{3} + 3 = 8 - 2\sqrt{15}$ c) $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{5 - 3} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$																																																		
4. a) $2(x + 1) = 3 + 2x$ ; $2x + 2 = 3 + 2x$ ; $2 = 3$ V: <b>L = ∅</b> b) $(x + 1)(x - 1) + 1 = x^2$ ; $x^2 - 1 + 1 = x^2$ ; $0 = 0$ V: <b>L = R</b> c) $(x + 1)^2 = x^2 + 1$ ; $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 1$ ; $2x = 0$ ; <b>x = 0</b>																																																		
5. $a(x + 2) < ax + 4$ ; $ax + 2a < ax + 4$ ; $2a < 4$ , jonka täytyy olla epätosi, jottei epäyhtälöllä olisi ratkaisua ts. $2a \geq 4$ ; <b>a ≥ 2</b>																																																		
6. $\begin{cases} 3,65x + 5,94y = 8,38 \\ 2,51x + 4,35y = 5,84 \end{cases} \begin{matrix}   \cdot 4,35 \\   \cdot (-5,94) \end{matrix} ; \begin{cases} 15,8775x + 25,839y = 36,453 \\ -14,9094x - 25,839y = -34,6896 \end{cases} ; 0,9681x = 1,7634$ <b>x = 1,82</b> ; $3,65 \cdot 1,8215 + 5,94y = 8,38$ ; $6,648 + 5,94y = 8,38$ ; $5,94y = 1,732$ ; <b>y = 0,29</b>																																																		
7. $M = \frac{C}{\sqrt{E}}$ ; $8,2 = \frac{C}{\sqrt{7}}$ ; $C = 8,2 \cdot \sqrt{7} = 21,7$ ; $M = \frac{21,7}{\sqrt{5,5}} = 9,2$																																																		
8. a) $ 2x - 45  = 7x$ <b>[MJ: <math>7x \geq 0</math> , <math>x \geq 0</math>]</b> $2x - 45 = 7x$ tai $2x - 45 = -7x$ ; $-5x = 45$ tai $9x = 45$ ; $(x = -9)$ tai <b>x = 5</b> b) $ 2x - 5  > 3$ ; $2x - 5 > 3$ tai $2x - 5 < -3$ ; $2x > 8$ tai $2x < 2$ ; <b>x &gt; 4</b> tai <b>x &lt; 1</b>																																																		
9. Alussa : oppilaita = $100a$ ; rahaa = $100b$ ; rahaa oppilasta kohti = $\frac{100b}{100a} = \frac{b}{a}$ Lopussa: oppilaita = $104a$ ; rahaa = $95b$ rahaa oppilasta kohti = $\frac{95b}{104a} = 0,913\frac{b}{a} = (1 - 0,087)\frac{b}{a}$ V: <b>pieneni 8,7%</b>																																																		
10.a) Piirrä koordinaatistoon vaaka-akselille pesien lukumäärä (0...16 kpl) ja pystyakselille tuotto pesää kohden (0...32kg) ja tämän jälkeen suora pisteiden (2,28) ja (4,24) kautta. b) tuotto 10 kg/pesä, kun <b>pesiä on 11</b> c) Pesä <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr> <tr><td>Tuotto</td><td>30</td><td>28</td><td>26</td><td>24</td><td>22</td><td>20</td><td>18</td><td>16</td><td>14</td><td>12</td><td>10</td><td>8</td><td>6</td><td>4</td><td>2</td><td>0</td></tr> <tr><td>Hunajaa</td><td>30</td><td>58</td><td>78</td><td>96</td><td>110</td><td>120</td><td>126</td><td>128</td><td>126</td><td>120</td><td>110</td><td>96</td><td>78</td><td>56</td><td>30</td><td>0</td></tr> </table> V: Suurin määrä hunajaa, kun pesiä on <b>8 kpl</b> .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Tuotto	30	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0	Hunajaa	30	58	78	96	110	120	126	128	126	120	110	96	78	56	30	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16																																			
Tuotto	30	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0																																		
Hunajaa	30	58	78	96	110	120	126	128	126	120	110	96	78	56	30	0																																		

95.4.1. Ilmoita välille  $[\sqrt{3}, \sqrt{169}]$  kuuluvat alkuluvut.

95.4.2. Sievennä a)  $\frac{(x^3 \cdot x^4)^2}{x^5 \cdot x^6}$  b)  $2[(2a + 3)(2a - 3)]$  c)  $(-4x - 1)^2$

95.4.3. Onko luku  $\frac{1}{23}$  esitettävissä

- i) päättyvänä desimaalilukuna. Jos on, niin minä desimaalilukuna?  
 ii) päätymättömänä, jaksollisena desimaalilukuna. Jos on, niin mikä on jakso?  
 iii) päätymättömänä jaksottomana desimaalilukuna.

95.4.4. Sievennä a)  $\sqrt{18} \cdot \sqrt{6}$  b)  $(3\sqrt{2} + 1)(2\sqrt{2} - 3)$  c)  $\frac{4}{3 - \sqrt{7}}$

95.4.5. Ratkaise a)  $\frac{3+x}{3} = 1 - \frac{x-3}{4}$  b)  $\frac{3+x}{3} - x < 5$ .

95.4.6. Laivan polttoaineen kulutus on suoraan verrannollinen vauhdin kolmanteen potenssiin. Kulkiessaan vauhdilla 10 km/h, oli polttoaineen kulutus 20 l/h. Mikä on kulutus, kun laivan vauhti on 8 solmua? 1 solmu on 1852 m/h.

95.4.7. Ratkaise yhtälöpari  $\begin{cases} 2(x - 1) + 3y = 2 \\ x(x - 3) - 2y = x^2 - 11 \end{cases}$

95.4.8. Astiassa on 400 g viisiprosenttista suolaliuosta. Liuos väkevöidään vettä haihduttamalla 7-prosenttiseksi, jonka jälkeen lisätään vielä 5 g suolaa. Mikä on saadun liuoksen suolapitoisuus?

95.4.9. Onko  $\sqrt{9 - 6\sqrt{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{3}$  ?

95.4.10. Autoilijat A ja B lähtevät samanaikaisesti 660 km ajotaipaleelle. Ensimmäiset 300 km he ajavat samalla keskinopeudella, jonka jälkeen B vähensi keskinopeutta 15 km/h A:n jatkaessa entisellä vauhdilla. Kun A oli perillä, oli B:llä matkaa jäljellä 60 km. Mikä oli A:n keskinopeus?

1. $[\sqrt{3}, \sqrt{169}] = [\sqrt{3}, 13]$ , joista alkulukuja <b>2, 3, 5, 7, 11</b>
2. a) $\frac{(x^3 \cdot x^4)^2}{x^5 \cdot x^6} = \frac{(x^7)^2}{x^{11}} = \frac{x^{14}}{x^{11}} = x^3$ b) $2[(2a + 3)(2a - 3)] = 2[4a^2 - 9] = 8a^2 - 18$ c) $(-4x - 1)^2 = 16x^2 + 8x + 1$
3. Koska jako ei mene tasan, on luku päättymätön desimaaliluku. Koska kyseessä murtoluku, on desimaaliesitys jaksollinen. Jakamalla jakokulmassa saadaan jakso. V: <b>ii) ja 0434782608695652173913</b>
4. a) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{9 \cdot 2} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{2 \cdot 6} = 3\sqrt{4 \cdot 3} = 3 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ b) $(3\sqrt{2} + 1)(2\sqrt{2} - 3) = 6\sqrt{4} - 9\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3 = 12 - 7\sqrt{2} - 3 = 9 - 7\sqrt{2}$ c) $\frac{4}{3 - \sqrt{7}} = \frac{4(3 + \sqrt{7})}{9 - 7} = \frac{4(3 + \sqrt{7})}{2} = 2(3 + \sqrt{7}) = 6 + 2\sqrt{7}$
5. a) $\frac{3+x}{3} = 1 - \frac{x-3}{4} \parallel \cdot 12$ ; $4(3+x) = 12 - 3(x-3)$ ; $12 + 4x = 12 - 3x + 9$ ; $7x = 9$ ; $x = \frac{9}{7}$ b) $\frac{3+x}{3} - x < 5 \parallel \cdot 3$ ; $3 + x - 3x < 15$ ; $-2x < 12 \parallel : (-2)$ ; $x > -6$
6. 8 solmua = $8 \cdot 1,852 \text{ km/h} = 14,816 \text{ km/h}$ ; $\frac{x}{20} = \frac{14,816^3}{10^3}$ ; $x = 65 \text{ l/h}$
7. $\begin{cases} 2(x - 1) + 3y = 2 \\ x(x - 3) - 2y = x^2 - 11 \end{cases}$ ; $\begin{cases} 2x - 2 + 3y = 2 \\ x^2 - 3x - 2y = x^2 - 11 \end{cases}$ ; $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \parallel \cdot 2 \\ -3x - 2y = -11 \parallel \cdot 3 \end{cases}$ ; $\begin{cases} 4x + 6y = 8 \\ -9x - 6y = -33 \end{cases}$ $-5x = -25$ ; $x = 5$ ; $2 \cdot 5 + 3y = 4$ ; $3y = -6$ ; $y = -2$
8. Suolaa aluksi $\frac{5}{100} \cdot 400 \text{ g} = 20 \text{ g}$ ; Olkoon kok.paino haihdutuksen jälkeen = x $\frac{7}{100} \cdot x = 20$ ; $x = 286$ Suolan lisäämisen jälkeen on suolaa 25 g ja kokonaispaino 291 g $\frac{x}{100} \cdot 291 = 25$ $x = 86$ V: <b>8,6%</b>
9. $\sqrt{9 - 6\sqrt{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{3}$ , jos $1^\circ (\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 = 6 - 2\sqrt{18} + 3 = 9 - 2\sqrt{9 \cdot 2} = 9 - 6\sqrt{2} = 9 - 6\sqrt{2} =$ juurrettava ja $2^\circ \sqrt{6} - \sqrt{3} > 0$ , joka on tosi, koska $6 > 3$ V: <b>ON</b>
10. Olkoon loppumatalla A:n vauhti = x, jolloin B:n vauhti on x - 15 ja A:n loppumatkaan käyttämä aika = t Matkoista saadaan: A:n matka = B:n matka + 60; $xt = (x - 15)t + 60$ ; $xt = xt - 15t + 60$ ; $15t = 60$ ; $t = 4$ A:n keskivauhti on koko ajan sama, joten vauhti on sama kuin loppumatkan vauhti = $\frac{360 \text{ km}}{4 \text{ h}} = 90 \text{ km/h}$

96.1.1. Sievennä a)  $(\sqrt{5})^2$  b)  $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$  c)  $\sqrt{50a} : \sqrt{2a}$

96.1.2. Sievennä lauseke a)  $3x + 4x - 5x^2$  b)  $3x \cdot 4x - 5x^2$  c)  $(3x)^2 - (3x + 2)(3x - 2)$

96.1.3. Ratkaise epäyhtälö a)  $4(5 - 3x) > 8x + 60$  b)  $2x - 3 < 2(x - 5)$  c)  $7x + 6 > 7(x - 4)$

96.1.4. Vastaa seuraaviin kolmeen yhdellä vaihtoehdoista A - E, joista vain yksi on oikea.

a) Jos  $x \leq 1$ , on  $|x - 1|$  A.  $x + 1$  B.  $x - 1$  C.  $-x - 1$  D.  $-x + 1$  E. positiivinen

b) Jos  $-3 \leq x \leq 4$  ja  $y \in [3, 7]$ , niin tulo  $xy$  on välillä

A.  $-9 \leq xy \leq 28$  B.  $-9 \leq xy \leq 12$  C.  $-21 \leq xy \leq 12$  D.  $12 \leq xy \leq 28$  E.  $-21 \leq xy \leq 28$

c)  $6^{6000} + 6^{6000} + 6^{6000} + 6^{6000} + 6^{6000} + 6^{6000} =$  A.  $6^{36000}$  B.  $(6 \cdot 6)^{6000}$  C.  $36^{36000}$  D.  $6^{6001}$  E.  $6^{6006}$

96.1.5. Kolmen peräkkäisen parillisen kokonaisluvun summa on 72. Mitkä ovat luvut?

96.1.6. Ratkaise yhtälöpari 
$$\begin{cases} \frac{3}{5} = \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{7} = x+2y \end{cases}$$

96.1.7. Kiihdytysajokilpailussa vauhtihirman aika on kääntäen verrannollinen kiihtyvyyden neliöjuureen. Kun auton kiihtyvyys oli kerran  $15\text{m/s}^2$ , tuli ajaksi 7,3 s. Mikä on aika, jos kiihtyvyys saadaan arvoon  $20\text{m/s}^2$ ?

96.1.8. Ratkaise epäyhtälöt a)  $|4x - 5| > 7$  b)  $|2x - 1| < 4 - 3x$

96.1.9. Määritä kaksi irrationaalista lukua  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  ja  $\sqrt{c} + \sqrt{d}$ , joiden tulo on rationaalinen. Neliöjuurien välissä on oltava + merkki. Jotkin luvuista a, b, c ja d voivat olla samoja, muttei kaikki. Osoita kertomalla, että tulo on rationaalinen.

96.1.10. Lukujen neliöjuurien likiarvo voidaan laskea vanhan arabialaisen kaavan mukaan

$\sqrt{x} \approx p + \frac{x - p^2}{2p + 1}$ , missä  $p^2$  on lähin kokonaisluku, joka on pienempi kuin x ja p on rationaalinen. Kuinka monen prosentin virhe tehdään, kun tällä kaavalla lasketaan  $\sqrt{23}$ ?

1. a) $(\sqrt{5})^2 = 5$ b) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$ c) $\sqrt{50a} : \sqrt{2a} = \sqrt{50a : 2a} = \sqrt{25} = 5$
2. a) $3x + 4x - 5x^2 = 7x - 5x^2$ b) $3x \cdot 4x - 5x^2 = 12x^2 - 5x^2 = 7x^2$ c) $(3x)^2 - (3x + 2)(3x - 2) = 9x^2 - (9x^2 - 4) = 9x^2 - 9x^2 + 4 = 4$
3. a) $4(5 - 3x) > 8x + 60$ ; $20 - 12x > 8x + 60$ ; $-12x - 8x > 60 - 20$ ; $-20x > 40$    : (-20) ; $x < -2$ b) $2x - 3 < 2(x - 5)$ ; $2x - 3 < 2x - 10$ ; $2x - 2x < 3 - 10$ ; $0 < -7$ aina epätosi V: ei ratkaisua c) $7x + 6 > 7(x - 4)$ ; $7x + 6 > 7x - 28$ ; $7x - 7x > -6 - 28$ ; $0 > -34$ aina tosi V: Kaikilla x
4. a) D b) E c) D, sillä $6^{6000} + 6^{6000} + 6^{6000} + 6^{6000} + 6^{6000} + 6^{6000} = 6 \cdot 6^{6000} = 6^1 \cdot 6^{6000} = 6^{6001}$
5. Olkoon pienin luku = x, seuraava on x + 2 ja suurin x + 4. $x + (x + 2) + (x + 4) = 72$ ; $3x = 66$ ; $x = 22$ V: Luvut ovat 22, 24 ja 26.
6. $\begin{cases} \frac{3}{5} = \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{7} = x+2y \end{cases} \begin{cases} 5x + 5y = 6 \\ x - y = 7x + 14y \end{cases} \begin{cases} 5x + 5y = 6 \\ -6x - 15y = 0 \end{cases} \begin{cases} 5x + 5y = 6 \\ -2x - 5y = 0 \end{cases}$ $3x = 6$ ; $x = 2$ ; $10 + 5y = 6$ ; $5y = -4$ ; $y = -0,8$ V: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -0,8 \end{cases}$
7. $\frac{t}{7,3} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{20}}$ ; $t = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{20}} \cdot 7,3 \text{ s} = 6,3 \text{ s}$
8. a) $ 4x - 5  > 7$ ; $4x - 5 > 7$ TAI $4x - 5 < -7$ ; $4x > 12$ TAI $4x < -2$ ; $x > 3$ TAI $x < -\frac{1}{2}$ b) $ 2x - 1  < 4 - 3x$ ; $-4 + 3x < 2x - 1 < 4 - 3x$ ; $-4 + 3x < 2x - 1$ JA $2x - 1 < 4 - 3x$ ; $x < 3$ JA $5x < 5$ x < 3 JA $x < 1$ ; $x < 1$
9. $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ ja $\sqrt{18} + \sqrt{32}$ , sillä $(\sqrt{2} + \sqrt{8})(\sqrt{18} + \sqrt{32}) = \sqrt{36} + \sqrt{64} + \sqrt{144} + \sqrt{256} = 6 + 8 + 12 + 16 = 42$
10. $\sqrt{x} \approx p + \frac{x - p^2}{2p + 1}$ ; $\sqrt{23} \approx 4 + \frac{23 - 4^2}{2 \cdot 4 + 1} \approx 4 + \frac{7}{9} = 4,7777\dots$ $\sqrt{23} \approx 4,7958$ ; Virhettä korkeintaan $4,7958 - 4,777\dots = 0,0181$ $\frac{x}{100} \cdot 4,7958 = 0,0181$ ; $4,7958x = 1,81$ ; $x = 0,38$ V: Virhe korkeintaan 0,38% oikeaa pienempi

96.2.1. Sievennä a)  $\sqrt{25a^2}$  b)  $\sqrt{\frac{36}{49}}$  c)  $(\sqrt{5})^3$

96.2.2. Sievennä lauseke a)  $2a - 4 \cdot 5a + 3a^2$  b)  $(2x - 3)^2$  c)  $(x - 2)(x + 2) - (x - 2)^2$

96.2.3. Ratkaise yhtälö  $\frac{x-1}{3} - \frac{x+1}{4} = x - 7$

96.2.4. Neljän peräkkäisen kokonaisluvun summa on 74. Mitkä ovat luvut?

96.2.5. Ratkaise yhtälöpari  $\begin{cases} 2,72x + 3,25y = 5,74 \\ 1,65x + 2,48y = 6,62 \end{cases}$

96.2.6. Kuinka paljon 8% etikkahappoa on lisättävä 200 grammaan 25% etikkahappoa, jotta saataisiin 10% etikkahappoa?

96.2.7. Oppilas on huomannut, että kokeen numero on suoraan verrannollinen kokeeseen käytetyn lukuajan neliöjuuren neliöjuureen. Edellisestä kokeesta hän sai 3 tunnin lukemisella 7,5. Minkä arvosanan hän saisi tämän mukaan 6 tunnin lukuajalla?

96.2.8. Ratkaise a)  $|2x - 3| = 4x$  b)  $|3x - 4| < 5 - 6x$

96.2.9. Luvun neliöjuuren likiarvo voidaan saada seuraavasti. Valitaan luvuiksi  $x_1$  ja  $x_2$  ne kokonaisluvut, joiden välissä neliöjuuri on. Lasketaan lukujen  $x_1$  ja  $x_2$  keskiarvo. Korvataan tällä keskiarvolla toinen luvuista  $x_1$  ja  $x_2$ , niin että neliöjuuri jää tämän keskiarvon ja valitun luvun  $x_1$  tai  $x_2$  väliin. Jatketään laskemalla näiden keskiarvo jne. Moneenko prosentin virhe syntyy, jos luvun  $\sqrt{23}$  likiarvoksi otetaan kolmas keskiarvo?

96.2.10. Kaksi muotoa  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  olevaa lukua, jotka ovat irrationaalisia, mutta niiden tulo on rationaalinen on esimerkiksi  $\sqrt{2} + \sqrt{8}$  ja  $\sqrt{8} + \sqrt{2}$ . Anna jokin yleinen tapa saada tällaista muotoa olevia lukuja, jotka täyttävät ehdon, että ne ovat irrationaalisia, mutta tulo on rationaalinen. Perustele valinta suorittamalla kyseinen kertolasku.

1. a) $\sqrt{25a^2} = 5 a $ b) $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{6}{7}$ c) $(\sqrt{5})^3 = (\sqrt{5})^2 \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$
2. a) $2a - 4 \cdot 5a + 3a^2 = 2a - 20a + 3a^2 = 3a^2 - 18a$ b) $(x-2)(x+2) - (x-2)^2 = x^2 - 4 - (x^2 - 4x + 4) = x^2 - 4 - x^2 + 4x - 4 = 4x - 8$
3. $\frac{x-1}{3} - \frac{x+1}{4} = x-7 \parallel \cdot 12$ ; $4(x-1) - 3(x+1) = 12x - 84$ ; $4x - 4 - 3x - 3 = 12x - 84$ $4x - 3x - 12x = -84 + 4 + 3$ ; $-11x = -77$ ; $x = 7$
4. Olkoon pienin luku $x$ , seuraava $x+1$ , seuraava $x+2$ ja viimeinen $x+3$ $x+x+1+x+2+x+3=74$ ; $4x=68$ ; $x=17$ V: Luvut ovat 17, 18, 19 ja 20
5. $\begin{cases} 2,72x + 3,25y = 5,74 \parallel \cdot 2,48 \\ 1,65x + 2,48y = 6,62 \parallel \cdot (-3,25) \end{cases}$ ; $\begin{cases} 6,7456x + 8,06y = 14,2352 \\ -5,3625x - 8,06y = -21,515 \end{cases}$ ; $1,3831x = -7,2798$ ; $x = -5,2634$ ; $2,72 \cdot (-5,2634) + 3,25y = 5,74$ ; $3,25y = 20,0564$ ; $y = 6,1712$ V: $x = -5,26$ , $y = 6,17$
6. 1. aine Määrä = 200 g , pitoisuus = 25% , etikkaa = 50g 2. aine Määrä = $x$ , pitoisuus = 8% , etikkaa = 0,08x Yhteensä Määrä = 200 + $x$ , pitoisuus = 10% , etikkaa = 50 + 0,08x $0,1(200 + x) = 50 + 0,08x$ ; $20 + 0,10x = 50 + 0,08x$ ; $0,02x = 30$ ; $x = 1500$ V: 1500 g
7. $\frac{x}{7,5} = \frac{\sqrt{\sqrt{6}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$ ; $x = 7,5 \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{6}}}{\sqrt{\sqrt{3}}} = 8,9$
8. a) $ 2x - 3  = 4x$ MJ: $x \geq 0$ ; $2x - 3 = 4x$ tai $2x - 3 = -4x$ ; $-2x = 3$ tai $6x = 3$ ; $(x = -1\frac{1}{2})$ tai $x = \frac{1}{2}$ b) $ 3x - 4  < 5 - 6x$ ; $-5 + 6x < 3x - 4 < 5 - 6x$ ; $-5 + 6x < 3x - 4$ JA $3x - 4 < 5 - 6x$ ; $3x < 1$ JA $9x < 9$ $x < \frac{1}{3}$ JA $x < 1$ ; $x < \frac{1}{3}$
9. $4 < \sqrt{23} < 5$ ; $x_1 = 4$ ja $x_2 = 5$ ; $ka = 4,5$ ; $4,5 < \sqrt{23} < 5$ ; $x_1 = 4,5$ ja $x_2 = 5$ ; $ka = 4,75$ $4,75 < \sqrt{23} < 5$ ; $x_1 = 4,75$ ja $x_2 = 5$ ; $ka = 4,875$ $\sqrt{23} = 4,7958$ ; Virhe = $+0,0792$ ; $\frac{x}{100} \cdot 4,7958 = 0,0792$ ; $x = 1,65$ ; V: 1,65% liian suuri
10. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{d}) = \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd}$ $ac$ on oltava neliö, jotta se olisi rationaalinen ts. $ac = x^2$ ; $c = \frac{x^2}{a} = x^2 \cdot A$ ; samoin $ad = y^2$ ; $d = \frac{y^2}{a} = y^2 \cdot A$ $bc = t^2$ ; $b = \frac{t^2}{c} = \frac{t^2}{x^2 \cdot A} = z^2 \cdot \frac{1}{A}$ ; $bd = z^2 \cdot \frac{1}{A} \cdot y^2 \cdot A = z^2 \cdot y^2$ , joka olisi neliö vaikka $\frac{1}{A}$ :n tilalla olisi $A$ Tapa voisi olla esim. $a = A$ ; $b = Az^2$ ; $c = Ax^2$ ja $d = Ay^2$ , missä $A, x, y$ ja $z$ ovat rationaalisia ja $\sqrt{A}$ on irrationaalinen. Malliksi $a = 2$ $b = 2 \cdot 2^2 = 8$ ; $c = 2 \cdot 3^2 = 18$ ja $d = 2 \cdot 4^2 = 32$ ts. $(\sqrt{2} + \sqrt{8})(\sqrt{18} + \sqrt{32})$ $(\sqrt{A} + \sqrt{Az^2})(\sqrt{Ax^2} + \sqrt{Ay^2}) = \sqrt{A^2x^2} + \sqrt{A^2y^2} + \sqrt{A^2z^2x^2} + \sqrt{A^2z^2y^2} = Ax + Ay + Azx + Azy$ , joka ration.

96.3.1. Sievennä a)  $\sqrt{16a^2}$  b)  $\frac{\sqrt{250x^5}}{\sqrt{10x}}$  c)  $\sqrt{(5\sqrt{2} + 1)(5\sqrt{2} - 1)}$

96.3.2. a) Sievennä  $2x + 3(4x - 5)$  b) Sievennä  $(2x - 3)^2$  c) Minkä lausekkeen neliö on  $25x^2 + 20x + 4$  ?

96.3.3. Goldbachin konjektuurin mukaan jokainen parillinen lukua 2 suurempi kokonaisluku on kahden alkuluvun summa. (Tätä väittämää eivät matemaatikot vielä ole pystyneet yleisesti osoittamaan). Osoita, että väittämä on tosi parillisille luvuille 20, 30, 40, 80, 90 ja 100.

96.3.4. Ratkaise epäyhtälö  $\frac{2}{3}(x - 2) > \frac{4}{5}x - 1$ .

96.3.5. Murtolukuja ei pidä laskea yhteen seuraavasti:  $\frac{3}{2} + \frac{x}{4} = \frac{3+x}{2+4}$ . Millä x:n arvolla saadaan oikea tulos?

96.3.6. Ratkaise a) yhtälö  $|x - 18| = 2x$  b) epäyhtälö  $|2x - 7| < 3$ .

96.3.7. Ratkaise yhtälöpari  $\begin{cases} ax + 2y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$ , kun a) a = 3 b) a = 2.

96.3.8. Karavaanin johtajan kuoltua hänen vanhin poikansa peri puolet ja keskimäinen poika kolmasosan kameleista. Nuorin poika sai 7 kamelia. Montako kamelia saivat vanhin ja keskimäinen poika?

96.3.9. a) Laske  $3^{123456} + 3 \cdot (-3)^{123455}$  b) Laske luvun  $0,3^{500}$  likiarvo kahden merkitsevän numeron tarkkuudella. c) Montako nollaa on kyseisen desimaaliluvun alussa?

96.3.10. Laivan polttoaineen kulutus on likipitään suoraan verrannollinen nopeuden seitsemänteen potenssiin. Montako prosenttia kasvavat kokonaismenot, jos nopeus nostetaan 21 solmusta 22 solmuun ja polttoainekulut ovat 40% kokonaismenoista?

1. a) $\sqrt{16a^2} = 4a$ ; b) $\frac{\sqrt{250x^5}}{\sqrt{10x}} = \sqrt{\frac{250x^5}{10x}} = \sqrt{25x^4} = 5x^2$ c) $\sqrt{(5\sqrt{2} + 1)(5\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{25 \cdot 2 - 1} = \sqrt{49} = 7$
2. a) $2x + 3(4x - 5) = 2x + 12x - 15 = 14x - 15$ b) $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 9 = 4x^2 - 12x + 9$ c) $25x^2 + 20x + 4 = (5x + 2)^2$
3. $20 = 17 + 3$ ; $30 = 23 + 7$ ; $40 = 37 + 3$ ; $80 = 73 + 7$ ; $90 = 83 + 7$ ; $100 = 93 + 7$
4. $\frac{2}{3}(x - 2) > \frac{4}{5}x - 1 \parallel \cdot 15$ ; $10(x - 2) > 12x - 15$ $10x - 20 > 12x - 15$ ; $10x - 12x > 20 - 15$ ; $-2x > 5 \parallel (\ominus) \cdot (-2)$ ; $x < -2\frac{1}{2}$
5. $\frac{3}{2} + \frac{x}{4} = \frac{3+x}{2+4} \parallel \cdot 12$ ; $18 + 3x = 6 + 2x$ ; $3x - 2x = 6 - 18$ ; $x = -12$
6. a) $ x - 18  = 2x$ ; $x - 18 = 2x$ tai $x - 18 = -2x$ ; $x - 2x = 18$ tai $x + 2x = 18$ ; $(x = -18)$ tai $x = 3$ b) $ 2x - 7  < 3$ ; $-3 < 2x - 7 < 3$ ; $-3 < 2x - 7$ JA $2x - 7 < 3$ ; $4 < 2x$ JA $2x < 10$ ; $2 < x$ JA $x < 5$ ; $2 < x < 5$
7. a) $\begin{cases} ax + 2y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases} \begin{cases} 3x + 2y = 3 \parallel \cdot 1 \\ x + y = 4 \parallel \cdot (-2) \end{cases} \begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ -2x - 2y = -8 \end{cases}$ ; $x = -5$ ; $-5 + y = 4$ ; $y = 9$ b) $\begin{cases} 2x + 2y = 3 \parallel \cdot 1 \\ x + y = 4 \parallel \cdot (-2) \end{cases} \begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ -2x - 2y = -8 \end{cases}$ ; $0 = -5$ ; Ei ratkaisua.
8. Kameleita kaikkiaan = $x$ . Vanhimmalle = $\frac{x}{2}$ , keskimäiselle = $\frac{x}{3}$ , nuorimmalle = 7 $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 7 = x \parallel \cdot 6$ ; $3x + 2x + 42 = 6x$ ; $x = 42$ Vanhimmalle $\frac{42}{2} = 21$ ; keskimäiselle = $\frac{42}{3} = 14$
9. a) $3^{123456} + 3 \cdot (-3)^{123455} = 3^{123456} + 3 \cdot (-3^{123455}) = 3^{123456} - 3^{123456} = 0$ b) $0,3^{500} = (0,3^{100})^5 = (5,1538 \cdot 10^{-53})^5 = 5,1538^5 \cdot 10^{-53 \cdot 5} = 3636 \cdot 10^{-265} = 3,6 \cdot 10^{-262}$ c) 262 nollaa
10. Olkoon kokonaismenot = $100a$ ; polttoainekulut = $40a$ ; muut kulut = $60a$ uudet polttoainekulut = $x$ ; $\frac{x}{40a} = \frac{22^7}{21^7}$ ; $x = \frac{22^7}{21^7} \cdot 40a = 55,4a$ Uudet kulut = $55,4a + 60a = 115,4a$ ; kasvua $15,4a$ , joka on $15,4\%$ alun kokonaismenoista

96.4.1. Sievennä a)  $(2x^2 - 3x + 4)(5x - 6)$  b)  $(x + 2)^2 - (x - 2)^2$

96.4.2. Laske a)  $\frac{6}{5} : \frac{7}{10}$  b)  $\sqrt{36a^2}$  c)  $(\frac{2}{3})^2$

96.4.3. Goldbachin konjektuurin mukaan jokainen parillinen lukua 2 suurempi kokonaisluku on kahden alkuluvun summa. Muodosta kaikki alkulukuparit, joiden summa on a) 60 b) 100.

96.4.4. Ratkaise yhtälö  $\frac{x-2}{3} - \frac{5-3x}{4} = \frac{7x}{6}$

96.4.5. Sievennä a)  $(2 + 3\sqrt{6})(4\sqrt{2} - 2\sqrt{6})$  b)  $\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}$

96.4.6. Ratkaise epäyhtälö a)  $\frac{3}{5}(x - 12) > x - 24$  b)  $3[4x - (2x - 7)] < 2(3x - 5)$

96.4.7. Vieressä on suureiden a ja b toisiaan vastaavia havaintoarvoja  $\frac{a}{b} \mid \frac{2}{5} \quad \frac{8}{10} \quad \frac{32}{20}$ . Millä tavalla suure b on verrannollinen suureeseen a?

96.4.8. Neliö leikataan sivun suuntaisesti kolmeksi samanlaiseksi suorakulmioksi. jokaisen suorakulmion ympärysmitta on 24 cm. Mikä on alkuperäisen neliön ala?

96.4.9. Ratkaise yhtälöpari  $\begin{cases} \frac{3}{5} = \frac{x+2y}{2} \\ \frac{4x+2y}{3} = \frac{3}{4} \end{cases}$

96.4.10. Päättelä käyttämättä laskinta kumpi luvuista  $5^{2000}$  vai  $3^{3000}$  on suurempi.

1. a) $(2x^2 - 3x + 4)(5x - 6) = 10x^3 - 12x^2 - 15x^2 + 18x + 20x - 24 = 10x^3 - 27x^2 + 38x - 24$ b) $(x+2)^2 - (x-2)^2 = (x^2 + 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4) = x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4x - 4 = 8x$
2. a) $\frac{6}{5} : \frac{7}{10} = \frac{6}{5} \cdot \frac{10}{7} = \frac{6}{1} \cdot \frac{2}{7} = \frac{12}{7}$ b) $\sqrt{36a^2} = 6a$ c) $(\frac{2}{3})^{-2} = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$
3. a) $60 = 7 + 53 = 13 + 47 = 17 + 43 = 19 + 41 = 23 + 37 = 29 + 31$ b) $100 = 3 + 97 = 11 + 89 = 17 + 83 = 29 + 71 = 41 + 59 = 47 + 53$
4. $\frac{x-2}{3} - \frac{5-3x}{4} = \frac{7x}{6} \parallel \cdot 12$ ; $4(x-2) - 3(5-3x) = 2 \cdot 7x$ ; $4x - 8 - 15 + 9x = 14x$ ; $4x + 9x - 14x = 8 + 15 - x = 23$ ; $x = -23$
5. a) $(2 + 3\sqrt{6})(4\sqrt{2} - 2\sqrt{6}) = 8\sqrt{2} - 4\sqrt{6} + 12\sqrt{12} - 6\sqrt{36} = 8\sqrt{2} - 4\sqrt{6} + 24\sqrt{3} - 36$ b) $\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} = \frac{(\sqrt{5} + 1)(3 + \sqrt{5})}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} = \frac{3\sqrt{5} + 5 + 3 + \sqrt{5}}{5 - 1} = \frac{4\sqrt{5} + 8}{4} = \sqrt{5} + 2$
6. a) $\frac{3}{5}(x - 12) > x - 24 \parallel \cdot 5$ ; $3(x - 12) > 5x - 120$ ; $3x - 36 > 5x - 120$ ; $-2x > -84$ ; $x < 42$ b) $3[4x - (2x - 7)] < 2(3x - 5)$ ; $3[4x - 2x + 7] < 2(3x - 5)$ ; $6x + 21 < 6x - 10$ ; $0 < -31$ ; $L = \emptyset$
7. Huomataan, että kun b kaksinkertaistuu, niin a nelinkertaistuu eli a on suoraan verrannollinen b:n neliöön ts. b on suoraan verrannollinen a:n neliöjuureen. $\frac{b_1}{b_2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ; $\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ ; $\frac{b_2}{b_3} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ ; $\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_3}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{32}} = \sqrt{\frac{8}{32}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ ; $b \sim \sqrt{a}$
8. Olkoon alkuperäisen neliön sivu = 3x . Suorakulmion sivut ovat x ja 3x Piiri = 24 ; $x + 3x + x + 3x = 24$ ; $8x = 24$ ; $x = 3$ . Neliön sivu = 3x = 9 . Ala on 81 (cm <sup>2</sup> )
9. $\begin{cases} \frac{3}{5} = \frac{x+2y}{2} \\ \frac{4x+2y}{3} = \frac{3}{4} \end{cases}$ ; $\begin{cases} 5x + 10y = 6 \parallel \cdot (-4) \parallel \cdot 16 \\ 16x + 8y = 9 \parallel \cdot 5 \parallel \cdot (-5) \end{cases}$ ; $60x = 21$ ; $x = \frac{21}{60} = \frac{7}{20}$ ; $y = \frac{51}{120} = \frac{17}{40}$
10. $5^{2000} = (5^2)^{1000} = 25^{1000}$ ; $3^{3000} = (3^3)^{1000} = 27^{1000}$ ; $27^{1000} > 25^{1000} \Rightarrow 3^{3000} > 5^{2000}$

97.1.1. Esitä ilman itseisarvoja a)  $|-4|$  b)  $|4a^2 + 3|$  c)  $|\pi - 1|$  d)  $|\sqrt{3} - 4|$  e)  $|x + 2|$ , kun  $x > 0$   
f)  $|x + 2|$ , kun  $x < -3$

97.1.2. Laske a)  $4^2$  b)  $3^0$  c)  $3^{-2}$  d)  $2^{13} \cdot 2^{-14}$  e)  $3^{2m} : 3^{-m}$  f)  $(a^{-3})^{-2}$

97.1.3. Sievennä a)  $\frac{1023}{20003} + \frac{422}{40006}$  b)  $\frac{507}{20001} : \frac{405}{40002}$  c)  $2a^2 \cdot (-2a^2)^3$

97.1.4. Muuta polynomimuotoon a)  $(2x^2 - 3x - 4)(3x - 4)$  b)  $(4x - 5)^2$  c) esitä tulona  $9x^2 - 25y^2$

97.1.5. Kuinka moniprosenttista suolaliuosta saadaan, kun 200 g 5% ja 500 g 20% suolaliuosta sekoitetaan?

97.1.6. Ville ja Kalle pyöräilivät kohti Kokkolaa. 30 minuuttia lähdöstä he näkivät kyltin, jossa luki Kokkola 42 km. 10 minuuttia myöhemmin 38 km ja 15 minuuttia siitä 32 km. a) Esitä pyöräretken eteneminen aika - etäisyys koordinaatistossa. b) Milloin pojat olivat Kokkolassa? c) Miten kaukana on poikien koti Kokkolasta?

97.1.7. Suomessa oli vuonna 1980 23 000 matkapuhelinliittymää. Sen jälkeen niiden määrä on lisääntynyt 28% vuodessa. Kuinka paljon liittymiä on vuonna 1998, jos kasvu jatkuu samanlaisena? Milloin niitä olisi yksi jokaista 5,1 miljoonaa suomalaista kohti?

97.1.8. Mikä on luvun  $10^{93} - 93$  numeroiden summa?

97.1.9. Kenttämestari leikkaa pelikentän nurmikon 75 cm leveällä leikkurilla 90 minuutissa. Kauanko aikaa kuluu kahdelta kenttämestariilta saman nurmikentän leikkaamiseen, kun heillä on käytössä kaksi 50 cm leveää leikkuria?

97.1.10. Jos M on 30% luvusta Q, Q on 20% luvusta P ja N on 50% luvusta P, niin montako prosenttia on luku M luvusta N?

1. a) $ -4  = 4$ b) $ 4a^2 + 3  = 4a^2 + 3$ c) $ \pi - 1  = \pi - 1$ d) $ \sqrt{3} - 4  = 4 - \sqrt{3}$ e) $ x + 2  = x + 2$ , kun $x > 0$ f) $ x + 2  = -x - 2$ , kun $x < -3$					
2. a) $4^2 = 16$ b) $3^0 = 1$ c) $3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ d) $2^{13} \cdot 2^{-14} = 2^{13-14} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ e) $3^{2m} : 3^{-m} = 3^{2m - (-m)} = 3^{3m}$ f) $(a^{-3})^{-2} = a^6$					
3. a) $\frac{1023}{20003} + \frac{422}{40006} = \frac{2046}{40006} + \frac{422}{40006} = \frac{2468}{40006} = \frac{1234}{20003}$ b) $\frac{507}{20001} : \frac{405}{40002} = \frac{507}{20001} \cdot \frac{40002}{405} = \frac{507 \cdot 2}{405} = \frac{169 \cdot 2}{135} = \frac{338}{135}$ c) $2a^2 \cdot (-2a^2)^3 = 2a^2 \cdot (-8a^6) = -16a^8$					
4. a) $(2x^2 - 3x - 4)(3x - 4) = 6x^3 - 8x^2 - 9x^2 + 12x - 12x + 16 = 6x^3 - 17x^2 + 16$ b) $(4x - 5)^2 = 16x^2 - 40x + 25$ c) $9x^2 - 25y^2 = (3x + 5y)(3x - 5y)$					
5.	Aine	Määrä	%	Etikka	$x/100 \cdot 700 = 110$
	I		200	5	$7x = 110 \parallel : 7$
	II		500	20	$x = 15,7$
	I + II	700	x	110	V: 15,7%
6. Piirrä koordinaatistoon vaaka-akselille aika (0...150 min) ja pystyakselille etäisyys Kokkolaan (0...60 km) sekä suora pisteiden (30,42), (40,38) ja (55,32) kautta. b) Pojat Kokkolassa, kun $t = 135$ min (saadaan, kun etäisyys on 0) c) Koti on Kokkolasta 54 km päässä (saadaan, kun $t = 0$ )					
7. $LKM = 23\,000 \cdot 1,28^v = 23\,000 \cdot 1,28^{18} = 1,96$ milj. Kokeillaan suurempia v:n arvoja 19, 20, 21, 22 $LKM = 23\,000 \cdot 1,28^{21} = 4,1$ milj. $LKM = 23\,000 \cdot 1,28^{22} = 5,25$ milj. V: Vuonna 2002.					
8. $10^{93} - 93 = 100 \dots 000 - 93$ (nollia 93) = 999 ... 9907 (9:iä $(93 - 2) = 91$ kpl) Numeroiden summa on $91 \cdot 9 + 7 = 826$					
9. Kaksi kenttämestaria 50 cm leikkureilla on sama kuin yksi kenttämestari 100 cm leikkurilla. Aika on kääntäen verrannollinen leikkurin terän leveyteen $\frac{x}{90 \text{ min}} = \frac{75 \text{ cm}}{100 \text{ cm}}$ ; $100x = 6750$ ; $x = 67,5$ V: 67½ min.					
10. $M = 0,3 Q$ ; $Q = 0,2 P \Rightarrow M = 0,3 \cdot 0,2P = 0,06P$ $N = 0,5 P \Rightarrow P = 2 N$ Siis $M = 0,06P = 0,06 \cdot 2N = 0,12N$ ts. $M = 0,12N$ V: M on 12% N:stä					

97.2.1. Sievennä a)  $-a \cdot (-b)$  b)  $-\frac{x}{y}$  c)  $(-t)^2$  d)  $-(-u)^2$  e)  $(-v)^3$  f)  $-(-x)^3$

97.2.2. Laske a)  $2,3 \cdot 10^{-8} \cdot 9,56 \cdot 10^{-9}$  b)  $7\,347\,000\,000\,000 : 0,00\,000\,000\,951\,13$  c)  $(3,24 \cdot 10^{27})^{10}$



97.2.3. Sievennä a)  $\left(\frac{2x^2}{3y}\right)^2$  b)  $(2x^2 + 3y)^2$  c)  $(2x^2 + 3y)(2x^2 - 3y)$

97.2.4. Muuta polynomimuotoon a)  $3x^2 - 4x - 2(x - 1)$  b)  $(3x^2 - 4x)(x - 1)$  c)  $(3x^2 - 4x) - (x - 1)^2$

97.2.5. Mikä tulee kultaseoksen pitoisuudeksi, kun 200 g 85%, 150 g 80% ja 350 g 90% kultaa yhdistetään?

97.2.6. Laske lausekkeen  $(x - 1)^2 + |x - 1|$  arvo, kun a)  $x = 3$  b)  $x = -3$ . c) Mikä on lausekkeen pienin arvo?

97.2.7. Porakaivotyömaalla oli klo 10.30 päästy 21 metrin syvyyteen ja klo 11.30 oltiin 30 metrin syvyydellä. Tämän jälkeen pidettiin ½ tunnin ruokatauko ja jatkettiin tasa-aineisen maan poraamista samalla teholla. Vettä löytyi klo 16.00. a) Esitä graafisesti poraussyvyys kelloajan funktiona. b) Milloin poraus alkoi? c) Kuinka syvällä on pohjavesi?

97.2.8. Suomen väestö kasvaa vuosittain 0,8%. Väkiluku oli vuonna 1997 5,1 miljoonaa. Mikä on Suomen väkiluku vuonna 2007? Milloin asukasluku ylittäisi 6 miljoonaa, jos kasvu pysyy samanlaisena?

97.2.9. Mansikkafarmari on havainnut, että tietyn litramäärän poimimiseen kuluva aika on kääntäen verrannollinen poimijan iän toiseen potenssiin. Kauanko kestää tietyn mansikkaerän poimiminen 16 vuotiaalta, kun 13 vuotias poimii saman määrän 2 tunnissa?

97.2.10. Jos perheen A vuokramenot kasvavat 10% ja perheen B vuokramenot pienenevät 20%, niin perheiden vuokramenot ovat yhtä suuret. Kuinka monta prosenttia ovat perheen B vuokramenot tällä hetkellä suuremmat kuin perheen A vuokramenot?

1. a) $-a \cdot (-b) = +ab$ b) $-\frac{x}{y} = +\frac{x}{y}$ c) $(-t)^2 = +t^2$ d) $-(-u)^2 = -u^2$ e) $(-v)^3 = -v^3$ f) $-(-x)^3 = -(-x^3) = +x^3$					
2. a) $2,3 \cdot 10^{-8} \cdot 9,56 \cdot 10^{-9} = 2,2 \cdot 10^{-16}$ b) $7\,347\,000\,000\,000 : 0,00\,000\,000\,951\,13 = 7,347 \cdot 10^{12} : 9,5113 \cdot 10^{-9} = 7,724 \cdot 10^{20}$ c) $(3,24 \cdot 10^{27})^{10} = 3,24^{10} \cdot (10^{27})^{10} = 127\,000 \cdot 10^{270} = 1,27 \cdot 10^5 \cdot 10^{270} = 1,27 \cdot 10^{275}$					
3. a) $\left(\frac{2x^2}{3y}\right)^2 = \frac{4x^4}{9y^2}$ b) $(2x^2 + 3y)^2 = 4x^4 + 12x^2y + 9y^2$ c) $(2x^2 + 3y)(2x^2 - 3y) = 4x^4 - 9y^2$					
4. a) $3x^2 - 4x - 2(x - 1) = 3x^2 - 4x - 2x + 2 = 3x^2 - 6x + 2$ b) $(3x^2 - 4x)(x - 1) = 3x^3 - 3x^2 - 4x^2 + 4x = 3x^3 - 7x^2 + 4x$ c) $(3x^2 - 4x) - (x - 1)^2 = (3x^2 - 4x) - (x^2 - 2x + 1) = 3x^2 - 4x - x^2 + 2x - 1 = 2x^2 - 2x - 1$					
5.	Aine	Määrä	%	Kulta	$x/100 \cdot 700 = 605$
	I	200	85	170	$7x = 605$
	II	150	80	120	$x = 86,4$
	III	350	90	315	$V: 86,4\%$
	I+II+III	700	x	605	
6. a) $(x - 1)^2 +  x - 1  = (3 - 1)^2 +  3 - 1  = 4 + 2 = 6$ b) $(-3 - 1)^2 +  -3 - 1  = (-4)^2 +  -4  = 16 + 4 = 20$ c) Koska neliö eikä itseisarvo voi olla negatiivinen, ei summakaan voi olla negatiivinen. Summasta voi tulla arvoltaan nolla, jos molemmat yhteenlaskettavat ovat nolliä, ja ne ovat, kun $x = 1$ . V Pienin = 0.					
7. Piirrä koordinaatistoon vaaka-akselille aika (8.00...16.00) ja pystyakselille syvyys (0...70 m) Piirrä puolisuora pisteestä (11.30,30) pisteen (10.30,21) kautta kunnes se leikkaa vaaka-akselin. Piirrä jana pisteiden (11.30) ja 12.00,30) välille sekä puolisuora pisteestä (12.00,30) oikealle samalla jyrkkyydellä kuin edellinen puolisuorakin (1 tunti eteenpäin ja 9 m lisää syvyyttä) b) poraus alkoi klo 8.10 (kun syvyys oli 0 metriä) c) porakaivo on 66 m syvä (syvyys klo 16 kohdalla)					
8. $A = 5,1 \cdot 1,008^v$ ; $A_{2007} = 5,1 \cdot 1,008^{10} = 5,5$ (milj.) Kokeillaan v:n arvoja 20, 21. $A_{2017} = 5,1 \cdot 1,008^{20} = 5,98$ ; $A_{2018} = 5,1 \cdot 1,008^{21} = 6,02$ (milj.) V: vuonna 2018					
9. Aika (t) on kääntäen verrannollinen iän (i) toiseen potenssiin $t_2 = \frac{i_1^2}{i_2^2}$ ; $t_2 = \frac{13^2}{16^2}$ ; $t_2 = \frac{169}{256}$ ; $t_2 = \frac{169}{256} \cdot 2\text{ h} = 1,27\text{ h} = 1\text{ h } 17\text{ min}$					
10. Olkoon perheen A menot nyt a ja perheen B menot b Muutosten jälkeen menot olisivat perheessä A 1,1a ja perheessä B 0,8b $0,8b = 1,1a \parallel : 0,8$ ; $b = 1,375a$ eli on 37,5% suurempi kuin perheen A menot.					

97.3.1. Sievennä

a)  $\sqrt{\frac{a^8}{49}}$

b)  $5\sqrt{3} + \sqrt{27}$

c)  $(2 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{2})$

97.3.3. Tiedetään, että 1 kg kahvia ja 2 kg sokeria maksaa 52 mk sekä 2 kg kahvia ja 1 kg sokeria maksaa 86 mk. Mitkä ovat kahvin ja sokerin kilohinnat?

97.3.5. Ratkaise yhtälö  $\frac{x+2}{3} - \frac{3x-1}{5} = \frac{1-x}{6}$

97.3.7. Onko  $x = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$  yhtälön  $x^2 - 2x - 2 = 0$  ratkaisu?

97.3.8. Ratkaise epäyhtälö  $|2x - 3| + 7 > 3x$

97.3.9. Millä a:n ja b:n arvolla yhtälöparilla  $\begin{cases} ax + by = 1 \\ (b+4)x + (a+1)y = 2 \end{cases}$  on äärettömän monta ratkaisua?

1. a) $\sqrt{\frac{a^8}{49}} = \frac{a^4}{7}$ b) $5\sqrt{3} + \sqrt{27} = 5\sqrt{3} + \sqrt{9 \cdot 3} = 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$
c) $(2 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{2}) = 6 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \sqrt{6}$
3. Kahvi = x (mk/kg), sokeri = y (mk/kg) $\begin{cases} x + 2y = 52 \parallel \cdot (-1) \\ 2x + y = 86 \parallel \cdot 2 \end{cases}$ $3x = 120$ ; $x = 40$ ; $80 + y = 86$ ; $y = 6$ V: Kahvi 40 mk/kg, sokeri 6mk/kg
5. $\frac{x+2}{3} - \frac{3x-1}{5} = \frac{1-x}{6} \parallel \cdot 30$ ; $10(x+2) - 6(3x-1) = 5(1-x)$ ; $10x + 20 - 18x + 6 = 5 - 5x$ $10x - 18x + 5x = 5 - 20 - 6$ ; $-3x = -21 \parallel \cdot (-3)$ ; $x = 7$
7. $\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$ $x^2 - 2x - 2 = 0$ ; $x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$ ; V: ON
8. $ 2x - 3  + 7 > 3x$ ; $ 2x - 3  > 3x - 7$ ; $2x - 3 > 3x - 7$ TAI $2x - 3 < -3x + 7$ $2x - 3x > 3 - 7$ TAI $2x + 3x < 3 + 7$ ; $-x > -4$ TAI $5x < 10$ ; $x < 4$ TAI $x < 2$ V: $x < 4$
9. Äärettömän monta ratkaisua, jos kertoimen suhteet ovat samat; $\frac{a}{b+4} = \frac{b}{a+1} = \frac{1}{2}$ $\begin{cases} \frac{a}{b+4} = \frac{1}{2} \\ \frac{b}{a+1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = b + 4 \\ 2b = a + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 4 \parallel \cdot 2 \\ -a + 2b = 1 \parallel \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow 3a = 9$ ; <b>a = 3</b> ; <b>6 = b + 4</b> ; <b>b = 2</b>

97.4.1. Sievennä a)  $\sqrt{64x^4}$     b)  $-5\sqrt{\frac{4}{5}}$     c)  $\sqrt{\frac{4}{9}}$

97.4.3. Mitkä ovat ne kaksi lukua, joiden summa on 273 ja erotus 109?

97.4.4. Ratkaise a)  $(x+1)^2 - (x-2)^2 = 3$     b)  $\frac{x+3}{2} = \frac{2x+5}{4}$

97.4.6. Ratkaise yhtälö  $|3x - 5| = 5x - 3$

97.4.7. Laske luvun  $2 + \sqrt{3}$  vastaluvun ja käänteisluvun erotus.

97.4.10. Suorakulmion muotoisen varastorakennuksen mitat ovat 2 m x 3 m. Sen ympärille aiotaan tehdä joka kohdalta yhtä leveä kukkapenkki, jonka yhtenä rajana on rakennus. Oven leveys on 1 m ja sen eteen ei tule kukkapenkkiä. Multaa on kukkapenkkeihin 2,5 m<sup>2</sup> alalle. Miten leveä kukkapenkki voidaan tehdä?

1. a) $\sqrt{64x^4} = 8x^2$ b) $-5\sqrt{\frac{4}{5}} = -\sqrt{25 \cdot \frac{4}{5}} = -\sqrt{4 \cdot 5} = -2\sqrt{5}$ c) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$
3. Olkoon luvut x ja y $\begin{cases} x + y = 273 \parallel \cdot 1 \\ x - y = 109 \parallel \cdot 1 \end{cases}$ $2x = 382 \parallel : 2$ ; $x = 191$ ; $191 + y = 273$ ; $y = 82$ V: Luvut 191 ja 82

4. a) $(x+1)^2 - (x-2)^2 = 3$ ; $(x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 4x + 4) = 3$ ; $x^2 + 2x + 1 - x^2 + 4x - 4 = 3$ ; $6x = 6$ ; $x = 1$ b) $\frac{x+3}{2} = \frac{2x+5}{4}$ ; $4(x+3) = 2(2x+5)$ ; $4x+12 = 4x+10$ ; $2 = 0$ ; V: ei ratkaisua.
6. $ 3x-5  = 5x-3$ . Yhtälö on järkevää vain, jos oikea puoli on väh. 0; $5x-3 \geq 0$ ; $x \geq 0,6$ $3x-5 = 5x-3$ tai $3x-5 = -5x+3$ ; $-2x = 2$ tai $8x = 8$ ; $(x = -1$ tai $x = 1$ V: $x = 1$
7. $-(2 + \sqrt{3}) - \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3} - \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = -2 - \sqrt{3} - \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3}$ $= -2 - \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3}) = -2 - \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} = -4$
10. Olkoon kukkapenkin leveys = x. Varasto + penkit leveydeltään = $2 + 2x$ ; korkeudeltaan = $3 + 2x$ Oven edessä olemattoman kukkapenkin ala = $1 \cdot x = x$ ; varaston ala = $2 \cdot 3 = 6$ Penkit alaltaan = Penkin ulkoreunan sisäpuolen ala - oven edustan ala - varaston ala $= (2 + 2x)(3 + 2x) - x - 6 = 6 + 4x + 6x + 4x^2 - x - 6 = 4x^2 + 9x$ $A = 2,5$ ; $4x^2 + 9x = 2,5$ ; $4x^2 + 9x - 2,5 = 0$ $x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 40}}{8} = \frac{-9 \pm 11}{8}$ ; $x = 0,25$ (tai $x = -2,5$ ) V: 25 cm leveä

98.1.1. Laske a)  $(-2a)^3$  b)  $(\frac{1}{2})^3$  c)  $(\frac{3}{4})^{-3}$

98.1.2. Mikä on funktion  $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$  määrittelyjoukko? Laske  $f(1)$ ,  $f(0)$  ja  $f(-2)$ .

98.1.3. Mitä on binomikaavoja käyttäen seuraavat lausekkeet toisin esitettynä

a)  $(2x+1)^2$  b)  $(3a-4)^2$  c)  $(5x+6)(5x-6)$  d)  $4a^2 + 2a + \frac{1}{4}$  e)  $36x^2 - 24x + 4$  f)  $49a^2 - 81x^2$

98.1.4. Laske  $1\frac{2}{7} \cdot (2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} - \frac{1}{6})$  merkitsemällä näkyviin laskun välivaiheet.

98.1.5. Auton nopeusmittarin lukema on suoraan verrannollinen todelliseen nopeuteen. Todellisella nopeudella 80 km/h mittarin lukema oli 92 km/h. Mikä on todellinen nopeus, kun mittarilukema on 69 km/h?

98.1.6. Sievennä a)  $(12x^3 - 18x^2) \cdot (2x - 1)$  b)  $(12x^3 - 18x^2) : 2x - 1$

98.1.7. Kuinka monta prosenttia luku  $\frac{3}{5}$  on pienempi kuin luku  $\frac{2}{3}$ ?

98.1.8. Kauppias myi bensiiniä päivässä 2000 litraa, kun litrahinta oli 5,80 mk. Hinnalla 5,40 mk/l myynti oli 4800 litraa. Myyntimäärän ja litrahinnan välinen riippuvuus oletetaan suoraviivaiseksi. a) Esitä graafisesti myyntimäärän riippuvuus litrahinnasta. b) Mikä olisi myyntimäärä, jos hinta olisi 5,55 mk/l? c) Jos bensiinin hankintahinta on 5,00 mk/l, niin mikä näistä kolmesta myyntihinnasta antaisi suurimman päivittäisen voiton?

98.1.9. Kostutetun taulusienen massa on 1 kg, kun sen painosta on 75% vettä. Mikä on sienen massa, kun siitä on puristettu vettä niin paljon, että vesipitoisuus on 10%?

98.1.10. a) Laske luvun  $9^{1999}$  likiarvo 10-potenssiesityksenä. Mikä on luvun b) viimeinen numero c) numeroiden lukumäärä?

1. a) $(-2a)^3 = -8a^3$ b) $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ c) $(\frac{3}{4})^{-3} = (\frac{4}{3})^3 = \frac{64}{27} = 2\frac{10}{27}$
2. Mj : $\text{nim} \neq 0$ ; $x - 2 \neq 0$ ; $x \neq 2$ ; $f(1) = \frac{1-1}{1-2} = 0$ ; $f(0) = \frac{0-1}{0-2} = \frac{1}{2}$ ; $f(-2) = \frac{-2-1}{-2-2} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$
3. a) $(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$ b) $(3a-4)^2 = 9a^2 - 24a + 16$ c) $(5x+6)(5x-6) = 25x^2 - 36$ d) $4a^2 + 2a + \frac{1}{4} = (2a + \frac{1}{2})^2$ e) $36x^2 - 24x + 4 = (6x-2)^2$ f) $49a^2 - 81x^2 = (7a+9x)(7a-9x)$
4. $1\frac{2}{7} \cdot (2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} - \frac{1}{6}) = \frac{9}{7} \cdot (\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{9} - \frac{1}{6}) = \frac{9}{7} \cdot (\frac{5}{9} - \frac{1}{6}) = \frac{9}{7} \cdot (\frac{10}{18} - \frac{3}{18}) = \frac{9}{7} \cdot \frac{7}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$
5. $\frac{\text{oikea2}}{\text{oikea1}} = \frac{\text{mittari2}}{\text{mittari1}}$ ; $\frac{x}{80} = \frac{69}{92}$ ; $x = \frac{69}{92} \cdot 80 = 60$ (km/h)
6. a) $(12x^3 - 18x^2) \cdot (2x - 1) = 24x^4 - 36x^3 - 12x^3 + 18x^2 = 24x^4 - 48x^3 + 18x^2$ b) $(12x^3 - 18x^2) : 2x - 1 = 12x^3 : 2x - 18x^2 : 2x - 1 = 6x^2 - 9x - 1$
7. $\frac{3}{5} : \frac{2}{3} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{10} = 0,90$ , siis $\frac{3}{5}$ on 90% luvusta $\frac{2}{3}$ , joten $\frac{3}{5}$ on 10% pienempi kuin $\frac{2}{3}$

8.a) merkitse koordinaatistoon pisteet (5,8;2000) ja (5,4;4800) ja piirrä niiden kautta suora b) katso kuvaajalta piste, jonka x-koordinaatti on 5,55. Tämän y-koordinaatti on kysytty myyntimäärä eli 3750 litraa. c) 5,80 mk/l : voitto = $0,80 \cdot 2000 = 1600$ ; 5,55 mk/l : voitto = $0,55 \cdot 3750 = 2062,50$ 5,40 mk/l : voitto = $0,40 \cdot 4800 = 1920$ , joten suurin voitto saadaan kun hinta on 5,55 mk/l
9. Alussa : kokonaispaino = 1 kg. Vettä = 0,75 kg. Kuivaa sientä = 0,25 kg Lopussa : Kuivaa sientä = 0,25 kg, jota on 90%. Kok.paino = $0,25 \text{ kg} : 0,90 = 0,278 \text{ kg}$
10. a) $9^{1999} = 9^{2000} : 9 = (9^{100})^{20} : 9 = (2,656 \cdot 10^{95})^{20} : 9 = 2,656^{20} \cdot (10^{95})^{20} : 9$ $= 3,05 \cdot 10^8 \cdot 10^{1900} : 9 = 3,39 \cdot 10^{1907}$ b) $9^1 = 9$ ; $9^2 = 81$ ; $9^3 = 729$ ; $9^4 = 6561$ ; ... , joten parillinen potenssi päättyy 1:een ja pariton potenssi päättyy 9:een. Siis luvun $9^{1999}$ viimeinen numero on 9. c) luvussa $3,39 \cdot 10^{1907}$ on ensin numero 3 ja desimaalipiikun jälkeen 1907 muuta, kaikkiaan 1908 numeroa.

98.2.1. Ratkaise yhtälöryhmä  $\begin{cases} 4x + 5y = 6 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$

98.2.2. Ratkaise yhtälö  $\frac{x}{3} - \frac{x-1}{2} = 1 + \frac{x}{2}$

98.2.4. Ratkaise epäyhtälö  $|3x - 4| < 5$ .

98.2.5. Sievennä lauseke a)  $(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(2\sqrt{3} - \sqrt{2})$  b)  $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

98.2.7. Kuinka monta prosenttia luvun a neliöjuuri kasvaa, kun luku a tulee kaksinkertaiseksi?

98.2.9. Lautapinon poikkileikkaus on suorakulmio, jonka korkeus on 100 cm ja leveys 200 cm. Laudat on suojattu muovipeitteellä, joka ylettyy juuri ja juuri maahan. Pino sortuu. Kun laudat pinotaan uudestaan ja peitetään, niin peite jää roikkumaan 5 cm korkeudelle kummaltakin puolelta. Miten korkea on uusi pino?

1. $\begin{cases} 4x + 5y = 6 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases} \parallel \cdot (-2) ; \begin{cases} -8x - 10y = -12 \\ 15x + 10y = 40 \end{cases} ; 7x = 28 \parallel : 7 ; x = 4 . 12 + 2y = 8 ; 2y = -4 ; y = -2$
2. $\frac{x}{3} - \frac{x-1}{2} = 1 + \frac{x}{2} \parallel \cdot 6 ; 2x - 3(x-1) = 6 + 3x ; 2x - 3x + 3 = 6 + 3x ; -4x = 3 \parallel : (-4) ; x = -\frac{3}{4}$
4. $ 3x - 4  < 5 \Leftrightarrow -5 < 3x - 4 < 5 \parallel + 4 \Leftrightarrow -1 < 3x < 9 \parallel : 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 3$
5. a) $(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(2\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{6} - \sqrt{4} + 4\sqrt{9} - 2\sqrt{6} = -2 + 4 \cdot 3 = 10$ b) $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{6}}{3} - \frac{2\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6} - \sqrt{6} = \sqrt{6}$
7. Alkuperäinen juuri $\sqrt{a}$ . Uusi juuri $\sqrt{2a}$ . Suhde = $\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{a}} = \sqrt{2} = 1,41 = 141\%$ V: Kasvaa 41%
9. Kolmen sivun yhteispituus uudessa lautapinossa on pressun pituus + 5 cm + 5 cm = 100 cm + 200 cm + 100 cm + 5 cm + 5 cm = 410 cm. Olkoon uuden lautapinon korkeus = x ja leveys = a. $x + a + x = 410$ ; $a = 410 - 2x$ . Vanhan ja uuden lautapinon pinta-alat ovat yhtä suuret. $100 \cdot 200 = x(410 - 2x)$ $20000 = 410x - 2x^2$ ; $2x^2 - 410x + 20000 = 0$ ; $x^2 - 205x + 10000 = 0$ $x = \frac{205 \pm \sqrt{42025 - 40000}}{2} = \frac{205 \pm 45}{2}$ ; $x = 125$ tai 80 V: 125 cm tai 80 cm.

98.3.2. Sievennä lauseke  $\frac{a^2}{b^6} : \frac{2a^3}{3b^7}$  ja laske sitten sen arvo, kun  $a = 165$  ja  $b = 6600$ .

98.3.3. Kettuja ja variksia pidettiin ennen haittaeläiminä, joiden hävittämisestä maksettiin palkkio. Kymmenen varista ja 12 kettua tuotti 335 mk sekä 8 variksesta ja 7 ketusta sai 203 mk. Mitkä olivat siihen aikaan hävityspalkkiot yhdestä ketusta ja variksesta?

98.3.4. Ratkaise epäyhtälö  $|2x - 3| < 3x - 2$ .

98.3.5. Laske päättymättömien jaksollisten desimaalilukujen 0,185185... ja 0,2727... tulo. Anna vastaus murtolukuna ja desimaalilukuna.

98.3.7. Auton bensiinin kulutus on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Nopeudella 100 km/h kulutus on 8 litraa tunnissa. Paljonko bensiiniä kuluu, jos autolla ajetaan 100 km matka nopeudella 90 km/h?

98.3.8. Miten määritellään  $\sqrt{a}$ ? Osoita määritelmää käyttäen, että  $\sqrt{30 - 12\sqrt{6}} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ .

98.3.9. A ja B ovat kaksi valuuttaa. A:n kurssi B-valuutassa laski p%. Laske B-valuutan kurssin muutosprosentti A-valuutassa.

98.3.10. Muinaisilla babylonialaisilla oli taulukot luvuista ja niiden neliöistä kertolaskua varten. Kertolaskut suoritettiin katsoen taulukostaan lukujen neliöitä, vähentäen niitä ja jakamalla erotus kahdella. Esimerkiksi  $7 \cdot 3$  suoritettiin seuraavasti:  $10^2$  on 100. Siitä pois  $7^2$  ja  $3^2$  eli  $100 - 49 - 9 = 42$ . Tämä jaetaan 2:lla, jolloin saadaan 21, mikä onkin  $7 \cdot 3$ . Laske tätä sääntöä käyttäen  $12 \cdot 8$  ja selitä sitten laskun matemaattinen perusta.

2. $\frac{a^2}{b^6} \cdot \frac{2a^3}{3b^7} = \frac{a^2}{b^6} \cdot \frac{3b^7}{2a^3} = \frac{3b}{2a} = \frac{3 \cdot 6600}{2 \cdot 165} = \frac{3 \cdot 6600}{330} = 60$
3. Olkoon $x =$ palkkio variksesta ja $y =$ palkkio ketusta $\begin{cases} 10x + 12y = 335 \parallel \cdot 4 \\ 8x + 7y = 203 \parallel \cdot (-5) \end{cases} ; \begin{cases} 40x + 48y = 1340 \\ -40x - 35y = -1015 \end{cases} ; 13y = 325 \parallel : 13 ; y = 25$ $x + 300 = 335 ; 10x = 35 ; x = 3,50$ V: Variksesta 3,50 mk ja ketusta 25 mk
4. $ 2x - 3  < 3x - 2 \Leftrightarrow -3x + 2 < 2x - 3 < 3x - 2 \Leftrightarrow -3x + 2 < 2x - 3$ JA $2x - 3 < 3x - 2$ $\Leftrightarrow -5x < -5$ JA $-x < 1 \Leftrightarrow x > 1$ JA $x > -1 \Leftrightarrow x = 1$
5. $0,185185... \cdot 0,2727... = \frac{185}{999} \cdot \frac{27}{99} = \frac{5}{99} = 0,0505...$
7. $\frac{x}{8} = \frac{90^2}{100^2} ; x = 6,48$ (l/tunnissa) Aikaa kuluu $\frac{100}{90} = 1,11...$ h. Bensaa kuluu $1,11... \text{ h} \cdot 6,48 \text{ l/h} = 7,2 \text{ l}$
8. $\sqrt{a} = x$ , joss $1^\circ x^2 = a$ ja $2^\circ x \geq 0$ . $\sqrt{30 - 12\sqrt{6}} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ , jos $1^\circ (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2 = 9 \cdot 2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} + 4 \cdot 3 = 30 - 12\sqrt{6}$ , eli ehto on tosi $2^\circ 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} = \sqrt{9 \cdot 2} - \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{18} - \sqrt{12} > 0$ , eli ehto on tosi.
9. Vanha : $a = k \cdot b$ ja $b = 1/k \cdot a$ Uusi : $a = (1 - p/100) \cdot k \cdot b$ ja $b = \frac{1}{1 - p/100} \cdot 1/k \cdot a = \frac{100}{100 - p} \cdot 1/k \cdot a$ $1 + \frac{x}{100} = \frac{100}{100 - p} ; \frac{x}{100} = \frac{100}{100 - p} - \frac{100 - p}{100 - p} ; \frac{x}{100} = \frac{p}{100 - p} ; x = \frac{100p}{100 - p}$
10. $12 \cdot 8 = ((12 + 8)^2 - 12^2 - 8^2) : 2 = (400 - 144 - 64) : 2 = 192 : 2 = 96$ Ensin lasketaan lukujen summan neliö. Olkoon luvut a ja b. Binomikaavan perusteella $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow 2ab = (a + b)^2 - a^2 - b^2 \parallel : 2 \Leftrightarrow$ $a \cdot b = [(a + b)^2 - a^2 - b^2] : 2$

98.4.1. Ratkaise yhtälöpari  $\begin{cases} 3x + 2y = 16 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

98.4.2. Ratkaise epäyhtälö  $(x + 1)^2 + (2x - 1)^2 < 5x^2$

98.4.4. Ratkaise yhtälö  $|5x + 1| = |x - 3|$ .

98.4.5. Sievennä a)  $\sqrt{54} - \sqrt{24}$  b)  $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$

98.4.7. Osoita, että  $\sqrt{35 - 12\sqrt{6}} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ .

1. $\begin{cases} 3x + 2y = 16 \parallel \cdot 1 \\ 2x - y = 6 \parallel \cdot 2 \end{cases} ; \begin{cases} 3x + 2y = 16 \\ 4x - 2y = 12 \end{cases} ; 7x = 28 \parallel : 7 ; x = 4 ; 3 \cdot 4 + 2y = 16 ; 2y = 4 ; y = 2$
2. $(x + 1)^2 + (2x - 1)^2 < 5x^2 ; x^2 + 2x + 1 + 4x^2 - 4x + 1 < 5x^2 ; -2x < -2 \parallel : (-2) ; x > 1$
4. $ 5x + 1  =  x - 3  \Leftrightarrow 5x + 1 = x - 3$ tai $5x + 1 = -x + 3 \Leftrightarrow 4x = -4$ tai $6x = 2 \Leftrightarrow x = -1$ tai $x = 1/3$
5. a) $\sqrt{54} - \sqrt{24} = \sqrt{9 \cdot 6} - \sqrt{4 \cdot 6} = 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$ b) $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} + \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} + \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$
7. $1^\circ 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 3} - \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{27} - \sqrt{8} > 0$ $2^\circ (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 3 - 12\sqrt{6} + 4 \cdot 2 = 35 - 12\sqrt{6} = \text{OP:n juurettava.}$

99.1.1. Sievennä a)  $\frac{x-xy}{x}$  b)  $(2x^2 - 3x - 4)(5x - 6)$

99.1.2. Esitä luvun 2 potensseina a)  $2^{34} \cdot 2^{45}$  b)  $(2^3)^4 : (2^{-5})^6$  c)  $2^3 \cdot 4^5 \cdot 8^9$ .

99.1.3. Jaa tekijöihin a)  $4a^2x + 6ax^2$  b)  $25x^2 + 30x + 9$  c)  $4s^3 - 49s$

99.1.4. Ratkaise yhtälö  $\frac{x}{2} - \frac{1-x}{9} = \frac{2x+1}{6}$

99.1.5. Sievennä a)  $\sqrt{12} - \sqrt{27}$  b)  $(\sqrt{6} - \sqrt{3})^2$

99.1.6. Kallen tuntipalkka on 40 mk. Ylityökorvauksena palkka nousee kahdelta ensimmäiseltä ylitunnilla 50%:lla ja seuraavilta tunneilta 100%:lla. Paljonko Kalle sai "puhtaana käteen" yhtenä työpäivänä, kun vero normaalista työstä on 30% ja ylityöstä 60% sekä työpäivässä oli 8 tuntia normaalityötä ja 5 tuntia ylityötä?

99.1.7. Tuulivoimalasta saatava teho on suoraan verrannollinen tuulen nopeuden toiseen potenssiin. Kun tuulen nopeus oli 3 m/s, saatiin voimalasta tehoa 100 W.

- a) Mikä oli teho, kun tuulen nopeus oli 5 m/s?  
 b) Millä tuulen nopeudella teho on 1000 W?  
 c) Esitä lausekkeena tehon P riippuvuus tuulen nopeudesta v.

99.1.8. Ratkaise epäyhtälö  $(x-2)^2 + \frac{x}{4} - \frac{x}{3} < x(x-4) + 5$ . Mikä on pienin kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön?

99.1.9. Ratkaise epäyhtälö  $|3x - 4| < 5x$

99.1.10. Kassatyttö tarkasti päivän lopussa kolikkokassan ja totesi, että markan ja vitosen kolikoita oli yhteensä 1150 kappaletta. Rahasumma oli yhteensä 2000 mk. Täsmäsikö kassa?

1. a) $\frac{x-xy}{x} = \frac{x}{x} - \frac{xy}{x} = 1 - y$
b) $(2x^2 - 3x - 4)(5x - 6) = 10x^3 - 12x^2 - 15x^2 + 18x - 20x + 24 = 10x^3 - 27x^2 - 2x + 24$
2. a) $2^{34} \cdot 2^{45} = 2^{34+45} = 2^{79}$ b) $(2^3)^4 : (2^{-5})^6 = 2^{3 \cdot 4} : 2^{-5 \cdot 6} = 2^{12} : 2^{-30} = 2^{12 - (-30)} = 2^{42}$
c) $2^3 \cdot 4^5 \cdot 8^9 = 2^3 \cdot (2^2)^5 \cdot (2^3)^9 = 2^3 \cdot 2^{10} \cdot 2^{27} = 2^{3+10+27} = 2^{40}$
3. a) $4a^2x + 6ax^2 = 2ax(2a + 3x)$ b) $25x^2 + 30x + 9 = (5x + 3)^2$
c) $4s^3 - 49s = s(4s^2 - 49) = s(2s + 7)(2s - 7)$
4. $\frac{x}{2} - \frac{1-x}{9} = \frac{2x+1}{6} \parallel \cdot 18$ ; $9 \cdot x - 2(1-x) = 3(2x+1)$ ; $9x - 2 + 2x = 6x + 3$ $9x + 2x - 6x = 3 + 2$ ; $5x = 5 \parallel : 5$ ; $x = 1$
5. a) $\sqrt{12} - \sqrt{27} = \sqrt{4 \cdot 3} - \sqrt{9 \cdot 3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = -\sqrt{3}$
b) $(\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{6})^2 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 6 - 2\sqrt{18} + 3 = 9 - 2\sqrt{9 \cdot 2} = 9 - 6\sqrt{2}$
6. Peruspalkka = 40 mk Ensimmäisten ylituntien palkka = 40 mk + 0,50 · 40 mk = 60 mk Viimeisten ylituntien palkka = 40 mk + 1,00 · 40 mk = 80 mk Ansio perustunneilta = 8 · 40 mk = 320 mk. Ansio ensimmäisiltä ylitunneilta = 2 · 60 mk = 120 mk Ansio viimeisiltä ylitunneilta = 3 · 80 mk = 240 mk Nettoansio perustunneilta = 0,70 · 320 mk = 224 mk Nettoansio ylitunneilta = 0,40 · (120 mk + 240 mk) = 144 mk Nettoansiot = 224 mk + 144 mk = 368 mk
7. a) $\frac{P}{100 W} = \frac{5^2}{3^2}$ ; $9P = 2500 W$ ; $P = 280 W$ b) $\frac{v^2}{3^2} = \frac{1000}{100}$ ; $v^2 = 90 \parallel \sqrt{\quad}$ ; $v = 9,5$ (m/s)
c) $\frac{P}{100} = \frac{v^2}{3^2} \parallel \cdot 100$ ; $P = \frac{100v^2}{9}$ (W)
8. $(x-2)^2 + \frac{x}{4} - \frac{x}{3} < x(x-4) + 5$ ; $x^2 - 4x + 4 + \frac{x}{4} - \frac{x}{3} < x^2 - 4x + 5$ ; $4 + \frac{x}{4} - \frac{x}{3} < 5 \parallel \cdot 12$ $48 + 3x - 4x < 60$ ; $-x < 12 \parallel \cdot (-1)$ ; $x > -12$ , joista pienin kokonaisluku on -11
9. $ 3x - 4  < 5x$ ; $-5x < 3x - 4 < 5x$ ; $-5x < 3x - 4$ JA $3x - 4 < 5x$ ; $-5x - 3x < -4$ JA $3x - 5x < 4$ $-8x < -4 \parallel : (-8)$ JA $-2x < 4 \parallel : (-2)$ ; $x > \frac{1}{2}$ JA $x > -2$ V : $x > \frac{1}{2}$

10. Olkoon markan kolikoita  $x$  kpl ja vitosen kolikoita  $y$  kpl.  
 Markkojen arvo =  $x \cdot 1 \text{ mk} = x$ , vitosten arvo =  $y \cdot 5 \text{ mk} = 5y$   
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{kolikoita yht. } 1150 \\ \text{arvo } 2000 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1150 \quad || \cdot (-1) \\ x + 5y = 2000 \quad || \cdot 1 \end{array} \right. ; 4y = 850 ; y = 212,5$   
 Koska kolikoita ei voi olla puolikkaina, ei kassa voi täsmätä

99.2.1. Sievennä a)  $2x^2(3x^3 - 4x^4)$  b)  $(2x + 5)^2$

99.2.2. Esitä luvun 3 potensseina a)  $3^{17} \cdot 3^{-13}$  b)  $(3^4)^5 : 3^6$  c)  $3^8 \cdot 9^{10}$

99.2.3. Jaa tekijöihin a)  $5a^2b - 10ab^2$  b)  $25x^2 - 10x + 1$  c)  $8y^3 - 18y$

99.2.4. Ratkaise yhtälö  $\frac{x+1}{2} - \frac{2x-3}{5} = \frac{3x-6}{4}$

99.2.5. Sievennä a)  $2\sqrt{2}(3\sqrt{2} - \sqrt{6})$  b)  $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$

99.2.6. Ratkaise epäyhtälö  $\frac{1}{2}x - (x + 1)^2 > (2 - x) \cdot x$

99.2.7. Kinkun paistoaika on suoraan verrannollinen kinkun painon neliöjuureen. Kauanko kestää 12 kg kinkun paistaminen, kun 5 kg kinkun paistoaika on 4 tuntia. Miten saadaan paistoaika  $t$  kinkun painosta  $m$ ?

99.2.8. Ratkaise epäyhtälö  $|4x - 5| > 6x$

99.2.9. Kuinka pitkä pitää ajomatka olla, jotta keskinopeuden nostaminen vauhdista 80 km/h vauhtiin 85 km/h lyhentäisi ajomatkaa 15 minuuttia?

99.2.10. Tuotteen hinnasta on raaka-aineen osuus 15%. Kuinka monta prosenttia tuotteen hintaa voidaan alentaa, jos raaka-aineen hinta alenee 8%?

1. a) $2x^3(3x^3 - 4x^4) = 6x^6 - 8x^7$ b) $(2x + 5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$
2. a) $3^{17} \cdot 3^{-13} = 3^{17-13} = 3^4$ b) $(3^4)^5 : 3^6 = 3^{20} : 3^6 = 3^{20-6} = 3^{14}$ c) $3^8 \cdot 9^{10} = 3^8 \cdot (3^2)^{10} = 3^8 \cdot 3^{20} = 3^{8+20} = 3^{28}$
3. a) $5a^2b - 10ab^2 = 5ab(a - b)$ b) $25x^2 - 10x + 1 = (5x - 1)^2$ c) $8y^3 - 18y = 2y(4y^2 - 9) = 2y(2y + 3)(2y - 3)$
4. $\frac{x+1}{2} - \frac{2x-3}{5} = \frac{3x-6}{4} \quad    \cdot 20 ; 10(x+1) - 4(2x-3) = 5(3x-6)$ $10x + 10 - 8x + 12 = 15x - 30 ; 10x - 8x - 15x = -30 - 10 - 12 ; -13x = -52 ; x = 4$
5. $2\sqrt{2}(3\sqrt{2} - \sqrt{6}) = 6\sqrt{4} - 2\sqrt{12} = 6 \cdot 2 - 2\sqrt{4 \cdot 3} = 12 - 2 \cdot 2\sqrt{3} = 12 - 4\sqrt{3}$ b) $\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$
6. $\frac{1}{2}x - (x + 1)^2 > (2 - x) \cdot x ; \frac{1}{2}x - (x^2 + 2x + 1) > 2x - x^2 ; \frac{1}{2}x - x^2 - 2x - 1 > 2x - x^2$ $\frac{1}{2}x - 2x - 2x + 1 > 1 \quad    \cdot 2 ; x - 8x > 2 ; -7x > 2 \quad    : (-7) ; x < -2/7$
7. $\frac{t}{4} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}} ; t = \frac{4\sqrt{12}}{\sqrt{5}} = 6,2 = 6 \text{ h } 10 \text{ min} ; \frac{t}{4} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{5}} ; t = \frac{4\sqrt{m}}{\sqrt{5}} = 1,8 \cdot \sqrt{m}$
8. $ 4x - 5  > 6x ; 4x - 5 > 6x$ tai $4x - 5 < -6x ; -2x > 5$ tai $10x < 5 ; x < -2\frac{1}{2}$ tai $x < \frac{1}{2} ; x < \frac{1}{2}$
9. Olkoon matka = $x$ . Aika vauhdilla 80 km/h = $x/80$ . Aika vauhdilla 85 km/h = $x/85$ $\frac{x}{80} - \frac{x}{85} = \frac{1}{4} \quad    \cdot 80 \cdot 85 ; 85x - 80x = 1700 ; x = 340 \text{ (km)}$
10. Aluksi Hintaa = 100a, raaka-ainekustannukset = 15a. Lopuksi : raaka-ainekustannukset = $0,95 \cdot 15a = 13,8a$ Hintaa voidaan laskea $15a - 13,8a = 1,2a$ , joka on 100a:sta 1,2%

99.3.1. Sievennä a)  $\sqrt{4}$  b)  $\sqrt{8}$  c)  $(\sqrt{8})^2$

99.3.2. Esitä luvun 5 potenssina a)  $5^6 \cdot 5^7$  b)  $5^8 : 5^9$  c)  $(5^3)^4 \cdot 25$

99.3.3. Sievennä a)  $4(2x + 1)^2$  b)  $(4x - 2)^2$  c)  $4(2x + 1)^2 - (4x - 2)^2$

99.3.4. Ratkaise yhtälö  $\frac{3x+1}{4} - \frac{4x+1}{3} = 2 - x$

99.3.5. Kallen tuntipalkka oli palkkaa 120 mk ja Ville 10% suurempi. Kalle sai 10% ja Ville 5% palkankorotuksen. Kuinka monta prosenttia Villen palkka oli nyt suurempi kuin Kallen?

99.3.6. Ensimmäisen asteen polynomifunktio  $P(x) = ax + b$  saa arvon 1 muuttujan  $x$  arvolla 0 ja arvon 2 muuttujan arvolla 3. Minkä arvon funktio saa muuttujan arvolla -3?

99.3.7. Heilurin heilahdusaika on suoraan verrannollinen heilurin pituuden neliöjuureen. Kun heilurin pituus on 0,50 m on heilahdusaika 1,4 s. Mikä on heilahdusaika, kun heilurin pituus on 0,70 m? Mikä pitäisi olla heilurin pituus, jotta heilahdusaika olisi 2,0 s?

99.3.8. Ratkaise kaksoisepäytälö  $3x - 4 < 5x + 6 < 7x - 8$

99.3.9. Laske lausekkeen  $(b - a)(c - d) - (1 - bd)(1 - ac)$  arvo, kun  $b$  ja  $c$  ovat toistensa käänteislukuja.

99.3.10. Olkoon lauseke  $L(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$ . Laske summa  $L(2) + L(3) + \dots + L(399) + L(400)$ .

1. a) $\sqrt{4} = 2$ b) $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$ c) $(\sqrt{8})^2 = 8$
2. a) $5^6 \cdot 5^7 = 5^{6+7} = 5^{13}$ b) $5^8 : 5^9 = 5^{8-9} = 5^{-1} = 1/5$ c) $(5^3)^4 \cdot 25 = 5^{12} \cdot 5^2 = 5^{12+2} = 5^{14}$
3. a) $4(2x + 1)^2 = 4(4x^2 + 4x + 1) = 16x^2 + 16x + 4$ b) $(4x - 2)^2 = 16x^2 - 16x + 4$
c) $4(2x + 1)^2 - (4x - 2)^2 = (16x^2 + 16x + 4) - (16x^2 - 16x + 4) = 16x^2 + 16x + 4 - 16x^2 + 16x - 4 = 32x$
4. $\frac{3x+1}{4} - \frac{4x+1}{3} = 2 - x$    $\cdot 12$ ; $3(3x+1) - 4(4x+1) = 12(2-x)$ ; $9x+3-16x-4 = 24-12x$ $9x-16x+12x = 24-3+4$ ; $5x = 25$ ; $x = 5$
5. Kallen palkka = 120 mk; Villen palkka = $1,10 \cdot 120$ mk = 132 mk Kallen uusi palkka = $1,10 \cdot 120$ mk = 132 mk; Villen uusi palkka = $1,05 \cdot 132$ mk = 138,60 mk Villen palkka Kallen palkasta = $138,60 : 120$ mk = 1,05 = 105% eli 5% suurempi
6. $P(x) = ax + b$ ; $P(0) = 1$ ; $a \cdot 0 + b = 1$ ; $b = 1$ ; $P(3) = 2$ ; $3a + 1 = 2$ ; $3a = 1$ ; $a = 1/3$ $P(-3) = 1/3 \cdot (-3) + 1 = -1 + 1 = 0$
7. $\frac{T}{1,4 \text{ s}} = \frac{\sqrt{0,70}}{\sqrt{0,50}}$ ; $T = \frac{\sqrt{0,70}}{\sqrt{0,50}} \cdot 1,4 \text{ s} = 1,7 \text{ s}$ ; $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{0,50}} = \frac{2 \text{ s}}{1,4 \text{ s}}$ ; $\sqrt{x} = \frac{2}{1,4} \cdot \sqrt{0,50}$ $\sqrt{x} = 1,01$    $( )^2$ ; $x = 1,02 \approx 1,0 \text{ m}$
8. $3x - 4 < 5x + 6 < 7x - 8$ ; $3x - 4 < 5x + 6$ JA $5x + 6 < 7x - 8$ $-2x < 10$ JA $-2x < -14$     ttt   ttt $x > -5$ JA $x > 7$       ttt   JA II -5 7 ttt V: $x > 7$
9. $(b - a)(c - d) - (1 - bd)(1 - ac) = bc - bd - ac + ad - (1 - ac - bd + abcd)$ $= bc - bd - ac + ad - 1 + ac + bd - abcd = 1 + ad - 1 - a \cdot 1 \cdot d = 0$
10. $L(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$ ; $L(2) + L(3) + L(4) + \dots + L(399) + L(400)$ $= \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{398} + \sqrt{399}} + \frac{1}{\sqrt{399} + \sqrt{400}}$ $= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{2 - 1} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} + \frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{4 - 3} + \dots + \frac{\sqrt{399} - \sqrt{388}}{399 - 388} + \frac{\sqrt{400} - \sqrt{399}}{400 - 399}$ $= \sqrt{2} - \sqrt{1} + 3 - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{399} - \sqrt{388} + \sqrt{400} - \sqrt{399}$ $= \sqrt{400} - \sqrt{1} = 20 - 1 = 19$

00.1.1. Laske ilman laskinta  $1\frac{2}{3} + 4\frac{1}{5} : 2\frac{1}{3}$

00.1.2. Laske a)  $\left(\frac{4x^6}{y^2}\right)^2$  b)  $\sqrt{\frac{4x^6}{y^2}}$  c)  $\left(\frac{4x^6}{y^2}\right)^{-2}$

00.1.3. Musti-koiraruokapakkaus maksoi edellisenä vuonna 65 mk. Vuoden alussa siihen tuli 8,2% korotus. Koiranäyttelyssä sitä myytiin kumminkin 10% alennuksella. Mikä oli hinta koiranäyttelyssä? Montako prosenttia hinta oli edellisvuoden hintaa halvempi?

00.1.4. Esitä ilman itseisarvoja

a)  $|\pi - 2|$

b)  $|x - 2|$ , kun  $x > 2$

c)  $|x - 2|$ , kun  $x < 2$



00.1.5. Sievennä a)  $\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{48} + \sqrt{27}$  b)  $\frac{6}{5\sqrt{3}}$

00.1.6. Valaistus on kääntäen verrannollinen valonlähteen etäisyyden neliöön. Valaistus 1,5 m etäisyydellä lampusta on 50 luksia. Kuinka voimakas on valaistus 3,0 m etäisyydellä ja kuinka suuri 25 cm etäisyydellä lampusta?

00.1.7. Liikenneyhtiön kuluista on 25% polttoainekuluja, 10% lainojen korkokuluja. Kuinka monta prosenttia kulut lisääntyvät, kun polttoaineen hinta nousee 35% ja pankin korkoprosentti 5%:sta 7%:iin sekä muut menot inflaation vaikutuksesta 4%?

1. $1\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4} : 2\frac{1}{3} = \frac{5}{3} + \frac{21}{5} : \frac{7}{3} = \frac{5}{3} + \frac{21}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{1} = \frac{5}{3} + \frac{9}{5} = \frac{25}{15} + \frac{27}{15} = \frac{52}{15} = 3\frac{7}{15}$
2. a) $\left(\frac{4x^6}{y^2}\right)^2 = \frac{16x^{12}}{y^4}$ b) $\sqrt{\frac{4x^6}{y^2}} = \frac{2x^3}{y}$ c) $\left(\frac{4x^6}{y^2}\right)^{-2} = \frac{y^4}{16x^{12}}$
3. Hinta viime vuonna 65 mk. Hinta tänä vuonna = $1,082 \cdot 65$ mk = 70,30 mk Alennettu hinta = $0,90 \cdot 70,30$ mk = 63,30 mk, joka on alkuperäisestä hinnasta $63,30 : 65 = 0,972 = 97,4\%$ eli hinta on alentunut 2,6%
4. a) $ \pi - 2  = \pi - 2$ b) $ x - 2  = x - 2$ , koska $x - 2 > 0$ kun $x > 2$ c) $ x - 2  = -x + 2 = 2 - x$ , koska $x - 2 < 0$ , kun $x < 2$
5. a) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{48} + \sqrt{27} = \sqrt{4 \cdot 5} - \sqrt{9 \cdot 5} + \sqrt{16 \cdot 3} + \sqrt{9 \cdot 3} = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 7\sqrt{3} - \sqrt{5}$ b) $\frac{6}{5\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{5\sqrt{9}} = \frac{6\sqrt{3}}{5 \cdot 3} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$
6. $\left(\frac{1,5}{3,0}\right)^2 = \frac{x}{10}$ ; $x = 50 \cdot \left(\frac{1,5}{3,0}\right)^2 = 12,5$ lux; $\left(\frac{1,5}{0,25}\right)^2 = \frac{y}{50}$ ; $y = 50 \cdot \left(\frac{1,5}{0,25}\right)^2 = 1800$ lux
7. Olkoon kokonaiskulut aluksi = a. Polttoainekulut = 0,25a, lainakulut 0,10a, muut = 0,65a Uudet polttoainekulut = $1,35 \cdot 0,25a = 0,3375a$ . Korkoprosentti muuttuu 5:sta 7:ään, joten korkokulut tulevat 7/5-kertaisiksi uudet korkomenot ovat $7/5 \cdot 0,10a = 0,14a$ Muut menot ovat $1,04 \cdot 0,65a = 0,676a$ Uudet menot yhteensä = $0,3375a + 0,14a + 0,676a = 1,1535a$ , joten nousu on 15,35%

00.2.1. Sievennä a)  $2x - 3(4x - 5)$  b)  $(2x - 3)(4x - 5)$

00.2.2. Ratkaise yhtälö  $4x(x - 2) + 5 = (2x - 1)^2$

00.2.3. Jaa tekijöihin a)  $2x^3 - 4x^2$  b)  $a^2 - 8a + 16$  c)  $2a^3 - 8a$

00.2.4. Ratkaise epäyhtälö  $\frac{x+2}{3} - \frac{3x-9}{6} < \frac{x-5}{2}$

00.2.5. Ratkaise yhtälöpari  $\begin{cases} 2(x-y) + 3(x+y) = 11 \\ 3x + 2(y+1) = 3 \end{cases}$

00.2.6. Viisitoista ystävää päätti ostaa Erkille 60-vuotislahjaksi pullon syntymävuoden portviiniä. Jokainen osallistuisi lahjaan yhtä suurella rahamäärällä. Kolme muuta ystävää tuli mukaan, jolloin henkilöä kohti tuleva maksu pieneni 4 mk. Kuinka kallis lahja oli?

00.2.7. Ratkaise a) yhtälö  $|2x - 10| = 3x$  b) epäyhtälö  $|x + 1| + 2 > 3x - 4$

1. a) $2x - 3(4x - 5) = 2x - 12x + 15 = 15 - 10x$ b) $(2x - 3)(4x - 5) = 8x^2 - 10x - 12x + 15 = 8x^2 - 22x + 15$
2. $4x(x - 2) + 5 = (2x - 1)^2$ ; $4x^2 - 8x + 5 = 4x^2 - 4x + 1$ ; $-8x + 4x = 1 - 5$ ; $-4x = -4$ ; $x = 1$
3. a) $2x^3 - 4x^2 = 2x^2(x - 2)$ b) $a^2 - 8a + 16 = (a - 4)^2$ c) $2a^3 - 8a = 2a(a^2 - 4) = 2a(a + 2)(a - 2)$
4. $\frac{x+2}{3} - \frac{3x-9}{6} < \frac{x-5}{2}$    $\cdot 6$ ; $2(x+2) - (3x-9) < 3(x-5)$ ; $2x+4-3x+9 < 3x-15$ $2x-3x-3x < -15-4-9$ ; $-4x < -28$    $\cdot (-4)$ ; $x > 7$
5. $\begin{cases} 2(x-y) + 3(x+y) = 11 \\ 3x + 2(y+1) = 3 \end{cases}$ ; $\begin{cases} 2x - 2y + 3x + 3y = 11 \\ 3x + 2y + 2 = 3 \end{cases}$ ; $\begin{cases} 5x + y = 11 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$    $\cdot 2$ $7x = 21$ ; $x = 3$ ; $5 \cdot 3 + y = 11$ ; $15 + y = 11$ ; $y = 11 - 15$ ; $y = -4$ V: $x = 3$ ja $y = -4$

6. Olkoon pullon hinta =  $x$ . Aluksi yhden osuus =  $\frac{x}{15}$ . Lopuksi yhden osuus =  $\frac{x}{18}$

$$\frac{x}{15} = \frac{x}{18} + 4 \quad || \cdot 15 \cdot 18 \quad ; 18x = 15x + 1080 \quad ; 3x = 1080 \quad ; x = 360 \text{ (mk)}$$

7. a)  $|2x - 10| = 3x$  ; MJ:  $x \geq 0$

$$2x - 10 = 3x \text{ TAI } 2x - 10 = -3x \quad ; -x = 10 \text{ TAI } 5x = 10 \quad ; (x = -10 \text{ TAI}) x = 2 \quad \text{V: } x = 2$$

b)  $|x + 1| + 2 > 3x - 4$  ;  $|x + 1| > 3x - 6$  ;  $x + 1 > 3x - 6$  TAI  $x + 1 < -3x + 6$

$$-2x > -7 \text{ TAI } 4x < 5 \quad ; x < 3\frac{1}{2} \text{ TAI } x < 1\frac{1}{4}$$

I EY ttt 1  $\frac{1}{4}$  t t t 3 $\frac{1}{2}$  e e e (t = tosi, e = epätosi)

II EY ttt 1  $\frac{1}{4}$  e e e 3 $\frac{1}{2}$  e e e

I TAI II ttt 1  $\frac{1}{4}$  t t t 3 $\frac{1}{2}$  e e e

$$\text{V: } x < 3\frac{1}{2}$$

00.3.1. Sievennä a)  $\sqrt{4x^2}$  b)  $\sqrt{\frac{x^8}{9}}$  c)  $\sqrt{4\frac{25}{36}}$

00.3.2. Laske ilman laskinta  $1\frac{2}{3} \cdot (1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{7} \cdot 2\frac{1}{3})$

00.3.3. Esitä ilman itseisarvoja a)  $|2\pi|$  b)  $|2 - \pi|$  c)  $\sqrt{(2 - \pi)^2}$

00.3.4. a) Suomessa rekisteröitiin vuonna 1999 yhteensä 32279 koiraa. Vuonna 1989 vastaava luku oli 37547. Kuinka monta prosenttia vähemmän koiria rekisteröitiin vuonna 1999 kuin vuonna 1989?

b) Vuonna 1999 rekisteröidyistä koirista 10,6% oli noutajia ja vesikoiria, ja näistä 12,6% oli cockerspanieleja. Kuinka monta cockerspanieliä rekisteröitiin vuonna 1999?

00.3.5. Sievennä a)  $(-1\frac{1}{2})^{-3}$  b)  $(-2x^3)^4$  c)  $\frac{(2x^2)^3}{(x^4)^{-1}}$

00.3.6. Jäähdytysputki on piirakka putoaa ikkunalaudalta 12 metrin korkeudelta. Piirakan putoama matka on suoraan verrannollinen putoamisajan neliöön. Kuinka pitkän ajan kuluttua piirakka on pudonnut alas kadulle, kun se 0,5 sekunnin aikana on pudonnut 1 metrin?

00.3.7. Tunturimökin kustannusarvio muodostui palkoista ja materiaalikustannuksista. Rakentamisen alkaessa palkat olivat nousseet 6 % ja materiaalien hinta 17 %. Kuinka monta prosenttia kustannusarviota kalliimmaksi mökin rakentaminen tuli, kun palkkojen osuus oli kustannusarviossa 70 %?

1. a) a)  $\sqrt{4x^2} = 2x$  b)  $\sqrt{\frac{x^8}{9}} = \frac{x^4}{3}$  c)  $\sqrt{4\frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{169}{36}} = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$

2.  $1\frac{2}{3} \cdot (1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{7} \cdot 2\frac{1}{3}) = \frac{5}{3} \cdot (\frac{3}{2} - \frac{15}{7} \cdot \frac{7}{3}) = \frac{5}{3} \cdot (\frac{3}{2} - \frac{5}{1}) = \frac{5}{3} \cdot (\frac{3}{2} - \frac{10}{2}) = \frac{5}{3} \cdot (-\frac{7}{2}) = -\frac{35}{6} = -5\frac{5}{6}$

3. a)  $|2\pi| = 2\pi$  b)  $|2 - \pi| = \pi - 2$  c)  $\sqrt{(2 - \pi)^2} = |2 - \pi| = \pi - 2$

4. a) Vuonna 1999 rekisteröityjen koirien osuus vuonna 1989 rekisteröidyistä koirista on

$$\frac{32279}{37547} = 0,86 = 86\%, \text{ joten määrä on } 14\% \text{ pienempi kuin vuoden 1989 määrä}$$

b) Noutajia ja vesikoiria on  $0,106 \cdot 32279 = 3422$ , josta cockerspanieleja on  $0,126 \cdot 3422 = 431$

5. a)  $(-1\frac{1}{2})^{-3} = (-\frac{3}{2})^{-3} = (-\frac{2}{3})^3 = -\frac{8}{27}$  b)  $(-2x^3)^4 = +16x^{12}$  c)  $\frac{(2x^2)^3}{(x^4)^{-1}} = \frac{8x^6}{x^{-4}} = 8x^{6-(-4)} = 8x^{10}$

6.  $\frac{t^2}{0,5^2} = \frac{12}{1}$  ;  $t^2 = 0,25 \cdot 12 = 4$  ;  $t = 2 \text{ s}$

7. Alkuperäinen kustannusarvio =  $a$ , alkuperäinen palkkameno  $0,7a$  ja muu meno  $0,3a$

Uudet palkkamenot =  $1,06 \cdot 0,7a = 0,742a$ . Uudet muut menot =  $1,17 \cdot 0,3a = 0,351a$

Uudet kokonaismenot =  $0,742a + 0,351a = 1,093a$ , joten nousua 9,3%

00.4.1. Ratkaise yhtälö a)  $x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = x(x + 1)$  b)  $2x + 1 = 2(x + 1)$

00.4.2. Ratkaise epäyhtälö a)  $x - (9x + 1) < 5 - 2(x - 3)$  b)  $3(2x - 1) + 2 > 2(3x - 1)$

00.4.3. Ratkaise yhtälöpari a)  $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$  b)  $\begin{cases} 21x + 14y = 6 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

00.4.4. Perheen kuukausipalkasta menee  $\frac{2}{5}$  veroihin,  $\frac{1}{5}$  ruokaan,  $\frac{1}{6}$  asumiseen ja  $\frac{1}{7}$  vaatteisiin. Kuinka suuri on kuukausipalkka, kun muihin kuluihin jää 1748 mk?

00.4.5. Ratkaise epäyhtälö  $\frac{2x-3}{4} - \frac{x+1}{3} < x-2$

00.4.6. Urheilutapahtuman lipputulot olivat 111 000 mk, kun aikuisten lippu maksoi 50 mk ja lastenlippu 30 mk. Yhteensä kävijöitä oli 2500. Kuinka monta aikuista ja lasta kävi tapahtumassa?

00.4.7. Ratkaise a) yhtälö  $|x+5| = 3x$  b) epäyhtälö  $|x| < 2x-1$

1. a) $x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = x(x+1)$ ; $x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = x^2 + x$ ; $1 = x - \frac{1}{2}x$ ; $1 = \frac{1}{2}x$ ; $x = 2$ b) $2x + 1 = 2(x+1)$ ; $2x + 1 = 2x + 2$ ; $1 = 2$ V: $L = \emptyset$
2. a) $x - (9x + 1) < 5 - 2(x - 3)$ ; $x - 9x - 1 < 5 - 2x + 6$ ; $-8x + 2x < 11 + 1$ ; $-6x < 12$ ; $x > -2$ b) $3(2x - 1) + 2 > 2(3x - 1)$ ; $6x - 3 + 2 > 6x - 2$ ; $6x - 6x > -2 - 2 + 3$ ; $0 > -1$ V: $L = R$
3. a) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \parallel \cdot 2$ ; $\begin{cases} 4x - 2y = 12 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$ ; $7x = 14$ ; $x = 2$ ; $4 - y = 6$ ; $y = -2$ b) $\begin{cases} 21x + 14y = 6 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \parallel \cdot 1$ ; $\begin{cases} 21x + 14y = 6 \\ -21x - 14y = -7 \end{cases}$ ; $0 = -1$ ; V: $L = \emptyset$
4. $x = \frac{2x}{5} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} + \frac{x}{7} + 1748$ $\parallel \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ ; $210x = 84x + 42x + 35x + 30x + 367\ 080$ $210x - 126x - 65x = 367\ 080$ ; $19x = 367\ 080$ $\parallel : 19$ ; $x = 19\ 320$ (mk)
5. $\frac{2x-3}{4} - \frac{x+1}{3} < x-2$ $\parallel \cdot 12$ ; $3(2x-3) - 4(x+1) < 12(x-2)$ ; $6x-9-4x-4 < 12x-24$ $6x-4x-12x < -24+9+4$ ; $-10x < -11$ $\parallel : (-10)$ ; $x > 1,1$
6. Olkoon aikuisia = x ja lapsia = y $\begin{cases} x + y = 2\ 500 \\ 50x + 30y = 111\ 000 \end{cases} \parallel \cdot (-30)$ $\begin{cases} -30x - 30y = -75\ 000 \\ 50x + 30y = 111\ 000 \end{cases}$ ; $20x = 36\ 000$ $\parallel : 20$ ; $x = 1\ 800$ $y = 2500 - 1800 = 700$ V: Aikuisia oli 1 800 ja lapsia 700
7. a) $ x+5  = 3x$ MJ: $x \geq 0$ $x+5 = 3x$ tai $x+5 = -3x$ ; $-2x = -5$ tai $4x = -5$ ; $x = 2\frac{1}{2}$ (tai $x = -1,25$ ) b) $ x  < 2x-1$ ; $-2x+1 < x < 2x-1$ $-2x+1 < x$ JA $x < 2x-1$ ; $-3x < -1$ JA $-x < -1$ ; $x > 1/3$ JA $x > 1$ ; $x > 1$

00.5.1. Ratkaise yhtälö  $\frac{x-1}{3} + \frac{x}{2} = \frac{x}{4} + 2$

00.5.2. Sievennä  $(x-2)^2 + (x-1)(3-x)$

00.5.3. Esitä ilman itseisarvoja a)  $|3 - \sqrt{10}|$  b)  $|-1 - x^2|$  c)  $|2\pi - 6|$

00.5.4. Laske a)  $3\sqrt{8} + 4\sqrt{18} - 5\sqrt{32}$  b)  $(3x^{-3})^5 \cdot (6x^{-2})^{-4} : (2x)^{-4}$

00.5.5. Stereoiden hintaa laskettiin 10%. Tästä alennetusta hinnasta annettiin vielä 2% käteisalennus, jolloin maksettavaksi tuli 1475 mk. Mikä oli alentamaton hinta?

00.5.6. Ratkaise epäyhtälö  $|2x+1| < 3x-2$

00.5.7. Hotellissa on 80 huonetta. Huone keittomahdollisuudella maksaa 600 mk/vrk ja muut 480 mk/vrk. Kun kaikki huoneet on vuokrattu, on tuotto 41 400 mk. Montako huonetta on kumpaakin huonetyyppiä?

00.5.8. Äänen nopeus ilmassa on suoraan verrannollinen absoluuttisen (eli kelvineissä ilmoitetun) lämpötilan neliöjuureen. Lämpötilassa  $0^\circ\text{C} = 273\text{ K}$  ääni etenee ilmassa nopeudella 331 m/s. Laske äänen nopeus a) Siperiassa pakkaspäivänä, jolloin lämpötila on  $-52^\circ\text{C} = 221\text{ K}$  b) saunassa lämpötilassa  $77^\circ\text{C} = 350\text{ K}$ .

00.5.9. Osoita, että a)  $\sqrt{2}$  ja  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  ovat käänteislukuja b)  $\sqrt{3} - 2$  ja  $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$  ovat vastalukuja.

00.5.10. Sievennä lauseke  $\sqrt{a^2 + a + \frac{1}{4}}$  ja laske sen arvo, kun  $a = -\frac{3}{4}$

1. $\frac{x-1}{3} + \frac{x}{2} = \frac{x}{4} + 2 \parallel \cdot 12$ ; $4(x-1) + 6x = 3x + 24$ ; $4x - 4 + 6x = 3x + 24$ $4x + 6x - 3x = 24 + 4$ ; $7x = 28$ ; $x = 4$
2. $(x-2)^2 + (x-1)(3-x) = x^2 - 4x + 4 + 3x - x^2 + x - 3 = 1$
3. a) $ 3 - \sqrt{10}  = -3 + \sqrt{10}$ b) $ -1 - x^2  = 1 + x^2$ c) $ 2\pi - 6  = 2\pi - 6$
4. a) $3\sqrt{8} + 4\sqrt{18} - 5\sqrt{32} = 3\sqrt{4 \cdot 2} + 4\sqrt{9 \cdot 2} - 5\sqrt{16 \cdot 2} = 6\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 20\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$ b) $(3x^{-3})^5 \cdot (6x^{-2})^{-4} : (2x)^{-4} = \frac{3^5 \cdot x^{-15} \cdot 6^{-4} \cdot x^8}{2^{-4} \cdot x^{-4}} = \frac{3^5 \cdot x^8 \cdot 2^4 \cdot x^4}{x^{15} \cdot 6^4} = \frac{3 \cdot 3^4 \cdot 2^4 \cdot x^{12}}{(3 \cdot 2)^4 \cdot x^{15}} = \frac{3}{x^3}$
5. Olkoon alentamaton hinta = x. Hinta 10% alennuksen jälkeen = 0,9x hintaa 2% käteisalennuksen jälkeen $0,98 \cdot 0,9x = 1475$ mk; $x = 1672,30$ mk
6. $ 2x+1  < 3x-2 \Leftrightarrow -3x+2 < 2x+1 < 3x-2 \Leftrightarrow -3x+2 < 2x+1$ JA $2x+1 < 3x-2$ $\Leftrightarrow -5x < -1$ JA $-x < -3 \Leftrightarrow x > 1/5$ JA $x > 3 \Leftrightarrow x > 3$
7. Olkoon keittomahdollisuushuoneita x, jolloin muita huoneita on $80 - x$ Tulot = 41 400; $600x + 480(80 - x) = 41 400$ ; $600x + 38 400 - 480x = 41 400$ $120x = 3 000$ ; $x = 25$ ; $y = 80 - 25 = 55$ . V: 25 huonetta keittomahdollisuudella ja 55 muuta
8. $\frac{v}{331} = \frac{\sqrt{221}}{\sqrt{273}}$ ; $v = \frac{\sqrt{221}}{\sqrt{273}} \cdot 331 = 299$ (m/s) $\frac{v}{331} = \frac{\sqrt{350}}{\sqrt{273}}$ ; $v = \frac{\sqrt{350}}{\sqrt{273}} \cdot 331 = 340$ (m/s)
9. a) $\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$ , joten luvut ovat käänteislukuja b) $\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$ ; $2-\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2 = 0$ , joten luvut ovat vastalukuja
10. $\sqrt{a^2 + a + \frac{1}{4}} = \sqrt{(a + \frac{1}{2})^2} =  a + \frac{1}{2}  =  -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}  =  -\frac{1}{4}  = \frac{1}{4}$

01.1.1. Ratkaise epäyhtälö  $\frac{x+1}{5} \leq \frac{x-1}{2}$

01.1.2. Sievennä a)  $\frac{(2a^2b^3)^4}{(4a^3b^6)^2}$  b)  $\frac{(a^2b)^{-3}}{(a^{-3}b)^{-2}}$ .

01.1.3. Esitä ilman itseisarvoja a)  $|-2 - \sqrt{5}|$     b)  $|3 - \sqrt{5}|$     c)  $|\sqrt{5} - 2|$  ja

d) sievennä lauseke  $|-2 - \sqrt{5}| - |3 - \sqrt{5}| - |\sqrt{5} - 2|$ .

01.1.4. Ratkaise yhtälö  $\frac{(2x+1)^2}{4} = (x + \frac{1}{2})^2$ .

01.1.5. Määritä vakio t siten, että yhtälöparin  $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 3x - y = -9 \end{cases}$  ratkaisu toteuttaa yhtälön  $tx + y = 0$ .

01.1.6. Ratkaise epäyhtälö  $-6 - 5x < x \leq 3 - 2x$

01.1.7. Sievennä lauseke  $(3x+1)^2 - (3x-1)^2 - (3x+1)(3x-1)$ .

01.1.8. Ratkaise yhtälö a)  $|x-1| = 2x$  , b)  $|x-1| = |3-2x|$  .

01.1.9. Auton nopeusmittarin lukema on 6 % todellista nopeutta suurempi, kun auton oikea nopeus on 50 km/h. Virheprosentin suuruus on suoraan verrannollinen auton vauhtiin. Mikä on a) virheprosentti b) mittarin näyttämä nopeus, kun oikea vauhti on 80 km/h?

01.1.10. Sievennä lauseke  $\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$  ja laske sen tarkka arvo sekä likiarvo kahden desimaalin tarkkuudella, kun  $x = \sqrt{2}$  .

1. $\frac{x+1}{5} \leq \frac{x-1}{2} \parallel \cdot 10$ ; $2(x+1) \leq 5(x-1)$ ; $2x+2 \leq 5x-5$ $2x-5x \leq -5-2$ ; $-3x \leq -7 \parallel : (-3)$ ; $x \geq 7/3$
2. a) $\frac{(2a^2b^3)^4}{(4a^3b^6)^2} = \frac{16a^8b^{12}}{16a^6b^{12}} = a^2$ b) $\frac{(a^2b)^{-3}}{(a^{-3}b)^{-2}} = \frac{a^{-2}b^{-3}}{a^{-6}b^{-4}} = b^{-3-(-4)} = b^{-3+4} = b^1 = b$

3. a) $ -2 - \sqrt{5}  = 2 + \sqrt{5}$ b) $ 3 - \sqrt{5}  = 3 - \sqrt{5}$ c) $ \sqrt{5} - 2  = \sqrt{5} - 2$
d) $ -2 - \sqrt{5}  -  3 - \sqrt{5}  -  \sqrt{5} - 2 $ $= (2 + \sqrt{5}) - (3 - \sqrt{5}) - (\sqrt{5} - 2) = 2 + \sqrt{5} - 3 + \sqrt{5} - \sqrt{5} + 2 = 1 + \sqrt{5}$
4. $\frac{(2x+1)^2}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 \parallel \cdot 4$ ; $(2x+1)^2 = 4(x + \frac{1}{2})^2$ ; $4x^2 + 4x + 1 = 4(x^2 + x + \frac{1}{4})$ ; $4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 + 4x + 1$ ; $0 = 0$ V: $L = R$
5. $\begin{cases} 2x + y = -1 \parallel \cdot 1 \\ 3x - y = -9 \parallel \cdot 1 \end{cases}$ ; $5x = -10$ ; $x = -2$ ; $2 \cdot (-2) + y = -1$ ; $-4 + y = -1$ ; $y = 3$ $t \cdot (-2) + 3 = 0$ ; $-2t = -3$ ; $t = 1\frac{1}{2}$
6. $-6 - 5x < x \leq 3 - 2x \Leftrightarrow -6 - 5x < x$ JA $x \leq 3 - 2x \Leftrightarrow -6x < 6$ JA $3x \leq 3 \Leftrightarrow x > -1$ JA $x \leq 1 \Leftrightarrow -1 < x \leq 1$
7. $(3x+1)^2 - (3x-1)^2 - (3x+1)(3x-1) = 9x^2 + 6x + 1 - (9x^2 - 6x + 1) - (9x^2 - 1)$ $= 9x^2 + 6x + 1 - 9x^2 + 6x - 1 - 9x^2 + 1 = 1 + 12x - 9x^2$
8. a) $ x - 1  = 2x$ EHTO: $2x \geq 0$ ; $x - 1 = 2x$ TAI $x - 1 = -2x$ ; $(x = -1)$ TAI $3x = 1$ b) $ x - 1  =  3 - 2x $ ; $x - 1 = 3 - 2x$ TAI $x - 1 = -3 + 2x$ ; $3x = 4$ TAI $2 = x$ ; $x = 4/3$ TAI $x = 2$
9. a) Olkoon x virheen prosenttilukema vauhdissa 80 km/h $\frac{x}{6} = \frac{80}{50}$ ; $5x = 48$ ; $x = 9,6$ b) Mittarinopeus = 80 km/h + $9,6/100 \cdot 80$ km/h = 88 km/h
10. $\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \cdot (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{x+1 - 2\sqrt{(x+1)(x-1)} + x-1}{x+1 - x+1} = \frac{2x - 2\sqrt{x^2 - 1}}{2}$ $= x - \sqrt{x^2 - 1}$ Arvo = $\sqrt{2} - \sqrt{2-1} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,41$

01.2.1. Polynomit  $tx^2 - 3$  ja  $2x^2 + tx - 1$  saavat saman arvon, kun  $x = -1$ . Laske t:n arvo.

01.2.2. Ratkaise epäyhtälö  $-\frac{1}{2}(x+1) < -\frac{1}{2}(3x+2)$ .

01.2.3. Tutki ilman laskinta kumpi luvuista  $4 \cdot 8^{160}$  ja  $8 \cdot 4^{240}$  on suurempi.

01.2.4. Ratkaise yhtälöpari  $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = \frac{1}{4} \\ x - \frac{y}{3} = -\frac{2}{3} \end{cases}$

01.2.5. Ratkaise yhtälö  $(\sqrt{x} + 2)^2 = 3 + 4\sqrt{x}$ .

01.2.6. Sievennä lauseke  $|2x - 5| + |4 - x|$ , kun  $x < 2$ .

01.2.7. Seinäkellon heilurin heilahdusaika on suoraan verrannollinen heilurin pituuden neliöjuureen. Miten pitkä pitäisi heilurin olla, jotta heilahdusaika olisi 1 sekunti, kun tiedetään, että heilahdusaika on 2,0 sekuntia, kun heilurin pituus on 1,0 m?

01.2.8. Milloin toteutuvat epäyhtälöt  $x - \frac{x}{3} < 1$  JA  $|x| \leq 2$ .

01.2.9. Kaksinumeroisen luvun kymmeniä ilmoittava luku on kolme suurempi kuin toinen numero. Tämän luvun ja siitä numeroiden paikat vaihtamalla saadun luvun summa on 143. Mikä on mainittu luku?

01.2.10. Vuonna 1995 erään automerkin markkinaosuus oli 15 %. Vuonna 1996 tämän automerkin myynti kasvoi 20 % ja autojen kokonaisymyynti kasvoi 10 %. Mikä oli ko. auton markkinaosuus vuonna 1996?

1. $tx^2 - 3 _{x=-1} = 2x^2 + tx - 1 _{x=-1}$ ; $t - 3 = 2 - t - 1$ ; $2t = 4$ ; $t = 2$
2. $-\frac{1}{2}(x+1) < -\frac{1}{2}(3x+2) \parallel : (-\frac{1}{2})$ ; $x+1 > 3x+2$ ; $-2x > 1 \parallel : (-2)$ ; $x < -\frac{1}{2}$
3. $4 \cdot 8^{160} = 2^2 \cdot (2^3)^{160} = 2^2 \cdot 2^{480} = 2^{482}$ ; $8 \cdot 4^{240} = 2^3 \cdot (2^2)^{240} = 2^3 \cdot 2^{480} = 2^{483} > 2^{482}$ V: $8 \cdot 4^{240}$
4. $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = \frac{1}{4} \parallel \cdot 4 \\ x - \frac{y}{3} = -\frac{2}{3} \parallel \cdot 3 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x + 2y = 1 \parallel \cdot 1 \\ 3x - y = -2 \parallel \cdot 2 \end{cases}$ ; $7x = -3$ ; $x = -\frac{3}{7}$ ; $-\frac{9}{7} - y = -2$ ; $y = 2 - \frac{9}{7}$ ; $y = \frac{5}{7}$
5. $(\sqrt{x} + 2)^2 = 3 + 4\sqrt{x}$ ; $x + 4\sqrt{x} + 4 = 3 + 4\sqrt{x}$ , $x = -1$ , joka $\notin M_j = R_0^+$ V: $L = \emptyset$
6. Kun $x < 2$ on $2x - 5 < 0$ ja siis $ 2x - 5  = -2x + 5$ sekä $4 - x > 0$ ja siis $ 4 - x  = 4 - x$ $ 2x - 5  +  4 - x  = -2x + 5 + 4 - x = 9 - 3x$

7. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1}} = \frac{1 \text{ s}}{2 \text{ s}} ; \sqrt{x} = \frac{1}{2} \parallel ( )^2 ; x = 0,25 \text{ (m)}$
8. $x - x/3 < 1 \text{ JA }  x  \leq 2 \Leftrightarrow 2x/3 < 1 \text{ JA }  x  \leq 2 \Leftrightarrow x < 1\frac{1}{2} \text{ JA } -2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x < 1\frac{1}{2}$
9. Luku olkoon "xy" = 10x + y. Käännetty luku on "yx" = 10y + x $\begin{cases} x = y + 3 \\ 10x + y + 10y + x = 143 \end{cases} ; \begin{cases} x - y = 3 \\ 11x + 11y = 143 \parallel : 11 \end{cases} ; \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 13 \end{cases} \mid 2x = 16 ; x = 8 ; y = 5$ V: Luku on 85
10. Kokonaismyynti = 100a ; Automerkin myynti = 0,15 · 100a = 15a Uusi kokonaismyynti = 1,10 · 100a = 110a ; ko. automerkin myynti = 1,2 · 15a = 18a Osuus = $\frac{18a}{110a} = 0,164 = 16,4\%$

02.1.1. Sievennä ilman laskinta a)  $2,0 \cdot 10^{-9} \cdot 30 \cdot 10^6$  b)  $(40 \cdot 10^{-5})^2$ . Ilmoita tulos sekä kymmenpotenssimuodossa että desimaalilukuna.

02.1.2. Ratkaise yhtälö  $\frac{x}{4} - \frac{x-1}{2} = 0,5x$ .

02.1.3. Sievennä ilman laskinta  $\sqrt{32} + 2\sqrt{18} - \frac{4}{\sqrt{2}}$ .

02.1.4. Sievennä lauseke  $2(2x - 3)^2 - (2x - 3)(2x + 3)$  ja laske sen arvo, kun  $x = -\frac{1}{2}$ .

02.1.5. Ratkaise yhtälöpari  $\begin{cases} 2(x - 1) + 3y + 2 = 0 \\ 3x - 4(y + 2) = 9 \end{cases}$

02.1.6. Kopiokoneen kuukausivuokra on 200 euroa ja lisäksi velotetaan jokaisesta monistetusta paperista 7 senttiä. Kuinka monta paperia on vähintään kuukaudessa monistettava, jotta kopion hinta jäisi alle 20 sentin?

02.1.7. Asun hinta nousi 10 % ja aleni sitten 15 %. Montako prosenttia hinta yhteensä muuttui? Mikä oli asujen alkuperäinen hinta, kun lopullinen hinta oli 187 euroa?

02.1.8. Ratkaise epäyhtälö  $|2x - 7| < x + 1$

02.1.9. Onko  $\sqrt{\sqrt{121} - \sqrt{120}} = \sqrt{6} - \sqrt{5}$

02.1.10. Hintaindeksi nousi eräänä ajanjaksona 1450 pisteestä 1595 pisteeseen. Samana ajanjaksona henkilön bruttopalkka nousi 2000 eurosta 2300 euroon, mutta toisaalta veroprosentti muuttui 35%:sta 37,5%:iin. Miten henkilön nettopalkan ostovoima muuttui?

1. a) $2,0 \cdot 10^{-9} \cdot 30 \cdot 10^6 = 2,0 \cdot 30 \cdot 10^{-9} \cdot 10^6 = 60 \cdot 10^{-3} = 6,0 \cdot 10^{-2} = 0,060$ b) $(40 \cdot 10^{-5})^2 = 40^2 \cdot (10^{-5})^2 = 1600 \cdot 10^{-10} = 1,6 \cdot 10^{-7} = 0,0000016$
2. $\frac{x}{4} - \frac{x-1}{2} = 0,5x \parallel \cdot 4 ; x - 2(x - 1) = 2x ; x - 2x + 2 = 2x ; x - 2x - 2x = -2 ; -3x = -2 ; x = 2/3$
3. $\sqrt{32} + 2\sqrt{18} - \frac{4}{\sqrt{2}} = \sqrt{16 \cdot 2} + 2 \cdot \sqrt{9 \cdot 2} - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = 4\sqrt{2} + 2 \cdot 3\sqrt{2} - \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$
4. $2(2x - 3)^2 - (2x - 3)(2x + 3) = 2(4x^2 - 12x + 9) - (4x^2 - 9) = 8x^2 - 24x + 18 - 4x^2 + 9 = 4x^2 - 24x + 27$ . Arvo = $4 \cdot (-\frac{1}{2})^2 - 24 \cdot (-\frac{1}{2}) + 27 = 4 \cdot \frac{1}{4} + 12 + 27 = 40$
5. $\begin{cases} 2(x - 1) + 3y + 2 = 0 \\ 3x - 4(y + 2) = 9 \end{cases} ; \begin{cases} 2x - 2 + 3y + 2 = 0 \\ 3x - 4y - 8 = 9 \end{cases} ; \begin{cases} 2x + 3y = 0 \parallel \cdot 4 \\ 3x - 4y = 17 \parallel \cdot 3 \end{cases} ; \begin{cases} 8x + 12y = 0 \\ 9x - 12y = 51 \end{cases}$ $17x = 51 ; x = 3 ; 2 \cdot 3 + 3y = 0 ; 3y = -6 ; y = -2$ V: $x = 3$ ja $y = -2$
6. Koska paperista menee aina 7 snt/kpl on vuokrasta jäätävä maksettavaa vähemmän kuin 13 snt/kpl ; $20000 \text{ snt} / x < 13 \parallel \cdot x > 0 ; 20000 < 13x \parallel : 13$ $1538,5 < x$ V: väh. 1539
7. Olkoon asun hinta aluksi x. 10 % nousun jälkeen hinta on 1,10x. 15% laskun jälkeen hintaa on jäljellä 85% eli hinta on $0,85 \cdot 1,10x = 0,935x$ , joka on 93,5% alkuperäisestä hinnasta. Eli hinta halpeni 6,5% alkuperäisestä $0,935x = 187 \text{ €} \parallel : 0,935 ; x = 200 \text{ €}$
8. $ 2x - 7  < x + 1 \Leftrightarrow -x - 1 < 2x - 7 < x + 1 \Leftrightarrow -x - 1 < 2x - 7 \text{ JA } 2x - 7 < x + 1$ $\Leftrightarrow -3x < -6 \text{ JA } x < 8 \Leftrightarrow x > 2 \text{ JA } x < 8 \Leftrightarrow 2 < x < 8$

<p>9. <math>\sqrt{\sqrt{121} - \sqrt{120}} = \sqrt{6} - \sqrt{5}</math>                  Vasen puoli = <math>\sqrt{\sqrt{121} - \sqrt{120}} = \sqrt{\sqrt{11^2} - \sqrt{4 \cdot 30}} = \sqrt{11 - 2\sqrt{30}}</math>                  Oikea puoli = <math>\sqrt{6} - \sqrt{5} &gt; 0</math> ja  <math>(\sqrt{6} - \sqrt{5})^2 = (\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{6}\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{30} + 5 = 11 - 2\sqrt{30} = \text{VP:n juurettava}</math></p>
<p>10. Alussa: palkka = 2000€. Nettopalkka = <math>(1 - 0,35) \cdot 2000\text{€} = 1300\text{€}</math>                  Lopussa: palkka = 2300€, jonka arvo aiemman ajankohdan rahassa x                  Tällöin indekseistä saadaan <math>\frac{x}{2300\text{€}} = \frac{1450}{1595}</math> ; <math>x = \frac{1450}{1595} \cdot 2300\text{€} = 2090,91\text{€}</math>                  Nettopalkka = <math>(1 - 0,375) \cdot 2090,91\text{€} = 1306,82\text{€}</math>                  Nettopalkka kasvoi 6,82€, joka on prosentteina <math>6,82:1300 = 0,0052 = 0,52\%</math></p>

02.2.1. Laske ilman laskinta a)  $2^{-3} + (-2)^3$  b)  $6 - 1\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{9} : \frac{3}{4}$

02.2.2. Sievennä a)  $\frac{(a^3)^4}{a^3 a^4}$  b)  $\sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{98}$

02.2.3. Ratkaise yhtälö  $(x - 2)^2 - 3(2x - 2) = (4 + x)^2$

02.2.4. Jaa tekijöihin a)  $2a^2 - 4a$  b)  $x^2 - 4$  c)  $x^2 - 20x + 100$ .

02.2.5. Määritä pienin kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön  $\frac{3 - 2x}{2} - \frac{3x + 1}{4} < -x$

02.2.6. Lämpöä johtuu seinän läpi teholla, joka on kääntäen verrannollinen seinän paksuuteen. Tämä teho on 200 W, kun seinän paksuus on 20 cm. Millä teholla 35 cm paksuinen seinä johtaa lämpöä?

02.2.7. Ratkaise epäyhtälö  $|2x - 1| > 3x + 6$

02.2.8. Tutki, onko luku  $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$  luvun  $30 - 12\sqrt{6}$  neliöjuuri.

02.2.9. Tuoreissa sienissä on 90 painoprosenttia vettä ja sieniä kuivatetaan. Kuinka paljon painaa 400 g tuoreita sieniä kuivatettuna, kun niissä on vettä 60 % painosta.

02.2.10. Luokalla kerättiin rahaa matkaa varten. Jos jokainen opiskelija olisi maksanut 40 euroa olisi rahaa tullut 250 euroa liikaa, mutta jos maksu olisi ollut 22 euroa, niin rahaa olisi tullut 200 euroa liian vähän. Montako opiskelijaa kyseisessä luokassa oli?

<p>1. a) <math>2^{-3} + (-2)^3 = (\frac{1}{2})^3 + (-2)^3 = \frac{1}{8} - 8 = -7\frac{7}{8}</math> b) <math>6 - 1\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{9} : \frac{3}{4} = 6 - \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{3} = 6 - \frac{10}{27} = 5\frac{17}{27}</math></p>
<p>2. a) <math>\frac{(a^3)^4}{a^3 a^4} = \frac{a^{12}}{a^7} = a^5</math> b) <math>\sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{98} = \sqrt{4 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{49 \cdot 2} = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 6\sqrt{2}</math></p>
<p>3. <math>(x - 2)^2 - 3(2x - 2) = (4 + x)^2</math> ; <math>x^2 - 4x + 4 - 6x + 6 = 16 + 8x + x^2</math> ; <math>-4x - 6x - 8x = 16 - 4 - 6</math>  <math>-18x = 6</math> ; <math>x = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3}</math></p>
<p>4. a) <math>2a^2 - 4a = 2a(a - 2)</math> b) <math>x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)</math> c) <math>x^2 - 20x + 100 = (x - 10)^2</math></p>
<p>5. <math>\frac{3 - 2x}{2} - \frac{3x + 1}{4} &lt; -x</math>    <math>\cdot 4</math> ; <math>2(3 - 2x) - (3x + 1) &lt; -4x</math> ; <math>6 - 4x - 3x - 1 &lt; -4x</math> ; <math>-3x &lt; -5</math>    <math>:(-3)</math>  <math>x &gt; 5/3</math> , joten ensimmäinen rajaa suurempi kokonaisluku on 2.</p>
<p>6. <math>\frac{P}{200 \text{ W}} = \frac{20}{35}</math> ; <math>P = \frac{20}{35} \cdot 200 \text{ W} \approx 110 \text{ W}</math></p>
<p>7. <math> 2x - 1  &gt; 3x + 6 \Leftrightarrow 2x - 1 &gt; 3x + 6</math> TAI <math>2x - 1 &lt; -3x - 6 \Leftrightarrow -x &gt; 7</math> TAI <math>5x &lt; -5</math>  <math>\Leftrightarrow x &lt; -7</math> TAI <math>x &lt; -1 \Leftrightarrow x &lt; -1</math></p>
<p>8. luku <math>3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}</math> luvun <math>30 - 12\sqrt{6}</math> neliöjuuri, jos  <math>1^\circ 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} = \sqrt{9 \cdot 2} - \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{18} - \sqrt{8} &gt; 0</math> ja onhan se  <math>2^\circ (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2 = 9 \cdot 2 - 12\sqrt{6} + 4 \cdot 3 = 30 - 12\sqrt{6}</math> ja onhan sekin. V: on</p>
<p>9. Alkup. massa: koko paino = 400 g , kuiva-ainetta <math>0,1 \cdot 400 \text{ g} = 40 \text{ g}</math>, vettä 360 g                  Kuivatettu: kuiva-ainetta on edelleen 40 g, joka on 40% uudesta koko painosta x.  <math>0,4x = 40</math> ; <math>x = 100 \text{ g}</math> . V: 100 g</p>
<p>10. Olkoon opiskelijoita x kpl ja kerättävä summa = S</p>

---

$S = 40x - 250$ ja $S = 22x + 200$ ; $40x - 250 = 22x + 200$ ; $18x = 450$    : 18 ; $x = 25$
---