PITKÄ

MATEMATIIKKA

KURSSI MA10

LUKUJONOT JA SARJAT

Markku Männikkö
2003

Sisällysluettelo:

MA10. Lukujonot ja sarjat

1. Matemaattinen induktio

1.1. Jaollisuusoppia

1. Luku a on jaollinen luvulla b
jos $a = b \cdot c$ ja c on kokonaisluku (kuten a ja b:kin)

1.1.1. Onko luku a) 12345 b) 2n c) 3n d) 6n jaollinen luvulla 3?
2. Osoita, että luku $n^3 - n$, missä $n \in N$ on jaollinen luvulla 6.

2. Merkintä, että a on jaollinen b:llä
$b \mid a$, (lue : b on tekijänä a:ssa tai b jakaa a:n)

3. Onko a) $3|12$ b) $12|3$ c) $6|3456$?
4. Määritä luonnollinen luku n, kun a) $7|(10 - n)$ b) $4|(10 - n)$.

3. Alkuluku
on kokonaisluku, joka 1° suurempi kuin 1 ja jolla 2° ei ole muita tekijöitä kuin luku itse ja 1.

5. Mitkä seuraavista ovat alkulukuja a) 113 b) 131 c) 311 d) 133 e) 313 f) 331?

4. Yhdistetty luku
on kokonaisluku, joka ei ole alkuluku

6. Mitkä seuraavista ovat yhdistettyjä lukuja a) 151 b) 511 c) 551?

5. Eratostheneen seula
on menetelmä, jolla löydetään alkuluvut halutulta alueelta 2, 3,…, n
Pienin luku (aluksi 2) on alkuluku. Poista muut sillä jaolliset luvut.
Pienin jäljellä oleva on alkuluku. Poista muut sen monikerrat. Jatka lukuun, joka $\le \sqrt{n}$, asti.
Jäljelle jääneet ovat alkulukuja.

7. Muodosta Eratostheneen seulalla kaikki alkuluvut, jotka ovat pienempiä kuin 200.

6. Luvun tekijöihin jako
tarkoittaa, että luku on esitettävä tulona, jonka kaikki tekijät ovat alkulukuja.

7. Aritmetiikan peruslause
Jokainen luku $n \ge 2$ voidaan esittää täsmälleen yhdellä tavalla alkulukujen tulona.

8. Esitä luvut alkulukujen tulona a) 60 b) 126 c) 612

8. Kanoninen alkutekijähajoitelma
on tekijöihin jako, jossa luvun samaa alkulukua olevat tekijät esitetään tämän alkuluvun potenssina.

9. Lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä
on yhteisistä tekijöistä suurin eli on suurin kokonaisluku, jolla molemmat luvut a ja b voidaan jakaa.

10. Suurin yhteinen tekijä luettelemalla lukujen tekijät.
Luettele lukujen kaikki tekijät.
Syt on yhteisistä tekijöistä suurin.

9. Määritä syt luvuille a) 18 ja 24 b) 24 ja 32

11. Suurimman yhteisen tekijän määrittäminen alkutekijähajoitelmasta
syt = tulo, jossa on jokaista yhteistä alkutekijää niin monta potenssia kuin niissä on vähiten

10. Määritä a) syt (126, 231) b) syt (168, 288) c) syt (48, 72, 84)

12. Suurin yhteinen tekijä laskimesta TI-85
Painele [MATH] , [MISC] , [gcd] , [luku 1] , [,] , [luku 2] , [sulku päättyy] , [ENTER]
Jos on etsittävä kolmen luvun syt, etsitään ensin kahden luvun syt ja sitten näin saadun ja kolmannen syt

11. Määritä a) syt (123456, 142536) b) syt (51184,91392) c) syt (58674, 43890, 70609)

13. Eukleideen algoritmi syt:n löytämiseksi
Jaa suurempi pienemmällä.
Jos jää jakojäännös, jaa sillä jakaja eli pienempi.
Jos tälle jää jakojäännös, jaa sillä edellinen jakaja jne.
syt = viimeinen jakaja

14. Lukujen a ja b pienin yhteinen jaettava
on pienin kokonaisluku, joka voidaan jakaa luvuilla a ja b eli on lukujen yhteisistä monikerroista pienin

15. Lukujen pienin yhteinen jaettava luettelemalla
Luettele lukujen monikertoja.
Pyj on yhteisistä monikerroista (jaettavista) pienin.

12. Määritä pyj luvuille a) 6 ja 8 b) 8, 12 ja 18 c) 2, 3, 4, 6 ja 8

16. Pienimmän yhteisen jaettavan määrittäminen alkutekijähajoitelmasta
pyj = tulo, jossa on jokaista alkulukutekijää korkeimpaan esiintyvään potenssiinsa korotettuna

13. Määritä a) pyj (24, 32) b) pyj (24, 32, 36)

17. Pienimmän yhteisen jaettavan määrittäminen laskimella TI-85
Painele $\boxed{\text{MATH}}$, $\boxed{\text{MISC}}$, $\boxed{\text{lcm}}$, $\boxed{\text{luku 1}}$, $\boxed{,}$, $\boxed{\text{luku 2}}$, $\boxed{\text{sulku päättyy}}$, $\boxed{\text{ENTER}}$
Jos lukuja on kolme, etsitään ensin kahden luvun pyj. Sitten tämän ja kolmannen pyj.

14. Määritä a) pyj (54,72) b) pyj (216, 576) c) pyj (1440,7128)

1.2. Matemaattinen induktio

1. Huomio parittomien lukujen summasta
summat ovat neliöitä

2. Perustelu, että seuraavakin summa noudattaa samaa sääntöä
Osoitetaan, että seuraavan parittoman luvun lisääminen antaa tulokseksi seuraavan kokonaisluvun neliön

3. Perustelu, että kaikki summat noudattavat samaa sääntöä
Jatketaan edellistä perustelua loputtomiin

4. Induktioperiaate yleisesti
Yritetään todistaa, että jokin sääntö on voimassa jonkin muuttujan kaikilla luonnollisen luvun arvoilla. Näytetään, että sääntö on voimassa alussa (muuttujalla on arvo 0 tai mistä väite alkaneekin) ja että sääntö on voimassa aina seuraavalla muuttujan arvolla. Täten sääntö on voimassa kaikilla seuraavilla eli siis kaikilla muuttujan arvoilla.

5. Sääntöjen todistaminen induktioperiaatteella
Osoita : 1° väite on tosi johonkin muuttujan arvoon asti, esim. 1:een asti (tai vain 1:llä)
2° tee oletus että väite on tullut osoitetuksi oikeaksi jo arvoon k asti.
3° osoita, että väite on tosi myös muuttujan arvolla (k + 1) käyttäen hyväksi oletusta 2°
4° Tällöin voidaan tehdä johtopäätös, että väite on tosi kaikilla muuttujan luonnollisten lukujen arvoilla

1.2.1. Osoita, että $4 + 8 + 12 + \dots + 4n = 2n^2 + 2n$ kaikilla luonnollisilla luvuilla n.
2. Todista induktiolla, että $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = ½(3^n - 1)$
3. Todista, että $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
4. Todista, että $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$
5. Todista induktiolla, että $a^n - b^n$ on jaollinen (a - b):llä kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.

6. Binomikaava $(1 + x)^n$
$$C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \dots + C_n^n x^n$$

7. Binomikerroin
= C_k^n

8. Laskukaava
$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!}$$

9. Kaavan todistaminen
voidaan tehdä täydellisellä induktiolla. Ks. kirja

10. Summamerkintä Σ - kirjainta käyttäen
Σ - merkin alle laitetaan mikä on indeksin alin arvo ja yläpuolelle mikä on indeksin suurin arvo sekä perään mikä on yhteenlaskettavien lauseke indeksiä käyttäen.

6. Ilmoita Σ-merkinnällä a) 1 + 2 + 3 + … + 10 b) 2 + 4 + 6 + … + 20 c) 0 + 3 + 6 + … + 99 d) 0 + 3 + 8 + 15 + … + 99.

7. Laske a) $\sum_{n=1}^{6} 2n+3$ b) $\sum_{n=1}^{5} ½n(n+1)$ c) $\sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n+1}$

11. Binomikerroin ” sulkeita ” käyttäen
$$C_k^n = \binom{n}{k} = nCk$$

12. Binomikaava
(a + b)^n = $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + \ldots C_n^n b^n$

8. Esitä polynomina a) $(a + b)^4$ b) $(x + 1)^5$ c) $(x - 2)^4$ d) $(2x - 1)^5$
9. Mikä on polynomin a) $(2x - 3)^4$ 2. asteen b) $(x + 3/x)^5$ 1. asteen termi?

13. Binomikertoimen lavennettu muoto
$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \left(\binom{n}{k} = nCk \right)$$

14. Symmetrisyys
$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

15. Ensimmäiset kertoimet
$\binom{n}{0} = C_0^n = 1$ $\binom{n}{1} = C_1^n = n$

16. Viimeiset kertoimet
$\binom{n}{n} = C_n^n = 1$ $\binom{n}{n-1} = C_{n-1}^n = n$

17. Pascalin kolmio
on kolmion muotoinen lukujoukko, jonka n:nneltä riviltä saadaan n:nnen asteen binomikertoimet

18. Pascalin kolmion muodostaminen
Reunoille laitetaan luku yksi ja edellisen rivin kahden peräkkäisen luvun summa laitetaan alapuolelle näiden lukujen puoliväliin.
Ts. $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

2. Lukujono

2.1. Lukujono funktiona

1. Jonon n:s termi Merkitään a_n

2. Lukujonon merkintätapoja Jono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ TAI $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ TAI (a_n) TAI $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

3. Lukujonon määritteleminen luettelona Luetellaan jonon peräkkäisiä termejä niin kauan, että tyhmempikin huomaa miten jono jatkuu

2.1.1. Mikä on jonon seuraava termi a) 2, 5, 8, 11, … b) 1, 4, 9, 16, … c) 2, 5, 10, 17, … d) 1, -2, 3, -4, …?

4. Lukujonon määrittäminen funktiona Annetaan lauseke, josta saadaan jonon termi sijoittamalla muuttujakirjaimen paikalle termin järjestysnumero

2. Määritä $a_1 \ldots a_5$, kun a) $a_n = 2n + 3$ b) $a_n = 2^n + 3$ c) $a_n = n^2 + 3$ d) $a_n = (n + 1)/(2n - 1)$.

5. Jonon termit TI-85:llä MATH MISC seq a_n:n kaava, muuttujakirjain, alkuindeksi, loppuindeksi, indeksin lisäys ENTER

3. Määritä $a_{10} \ldots a_{15}$, kun a) $a_n = 3n - 4$ b) $a_n = 3^{n-10} + 4$

2.2. Aritmeettinen jono

1. Aritmeettisen jonon määritelmä Jono (a_n) on aritmeettinen, jos kaikilla n:n arvoilla $a_{n+1} - a_n = d$ = vakio (,jonka arvo ei riipu n:stä)

2.2.1. Voiko jono a) 3, 5, 7, … b) 2, 4, 8, 16, … c) 0, 8, 16, 32, … olla aritmeettinen?

2. Lukujonon osoittaminen aritmeettiseksi Lasketaan $a_{n+1} - a_n$ mielivaltaisella kohtaa n. Jos tämän arvo ei riipu kohdasta n, on jono aritmeettinen.

2. Osoita, että jono a) $a_n = 7n + 4$ b) $a_n = 5 - 6n$ on aritmeettinen

3. Termien a_n arvon laskeminen aritmeettisessa jonossa $a_n = a + (n - 1)d$

3. Mikä on jonon a) 2, 5, 8, … b) -1, 3, 7, … c) 10, 5, 0, … sadas termi?

4. Aritmeettisen jonon ratkaiseminen Lasketaan kaavan $a_n = a + (n - 1)d$ yhtälöstä kateissa olevan suureen (a_n, a, n tai d) arvo TAI ratkaistaan a ja d eo. yhtälöstä saatavan yhtälöparin avulla, sillä aritmeettinen jono on täsmälleen määrätty, jos tunnetaan a ja d.

4. Luku 10 on aritmeettisen jonon …, 8, 10, … kahdeksas termi. Mikä on ensimmäinen termi?
5. Monesko termi on aritmeettisessa jonossa 1, 4, 7, … luku 1000?
6. Aritmeettisessa jonossa -3, … , 52, … on 52 kahdestoista termi. Mikä on vakioerotus?
7. Teatterin 1. penkkirivillä on 62 paikkaa, 2. rivillä 64, 3. rivillä 66 jne. Montako paikkaa on 20. rivillä?
8. Montako kahdeksalla jaollista kolminumeroista luonnollista lukua on olemassa?
9. Kuinka monta jonon 5, 9, 13, …termeistä on pienempiä kuin 1000?
10. Aritmeettisen jonon viides termi on 30 ja vakioerotus -0,4. Määritä a_1 ja a_{10}.
11. Aritmeettisen jonon kolmas termi on 12 ja yhdeksäs 30. Määritä jonon 10. ja 20. termi.
12. Jono (a_n) on aritmeettinen. Ilmoita a_n, kun a) $a_2 = 8$ ja $a_8 = -16$ b) $a_3 = 12$ ja $a_{11} = 32$.
13. Määritä x, kun jono 3, $x + 6$, $x^2 + 1$ on aritmeettinen.

2.3. Geometrinen jono

1. Geometrisen jonon määritelmä Jono (a_n) on geometrinen, jos kaikilla n:n arvoilla pätee, että $a_{n+1} / a_n = q$ = vakio, jonka arvo ei riipu n:stä

2.3.1. Voiko jono a) 3, 6, 12, 24, … b) -2, 1, -½, ¼, … c) -1, -8, -27, -81,… olla geometrinen

2. Lukujonon osoittaminen geometriseksi
Lasketaan a_{n+1} / a_n mielivaltaisella kohtaa n. Jos tämä arvo ei riipu kohdasta n, on jono geometrinen.

2. Osoita, että jono a) $a_n = 4 \cdot 5^n$ b) $a_n = 6/7^n$ c) $a_n = 2^n \cdot \cos n\pi$ on geometrinen.

3. Termien a_n arvon laskeminen geometrisessa jonossa
$a_n = aq^{n-1}$

3. Mikä on jonon a) 3, 6, 12, 24, … b) 4, -2, 1, -½, … kymmenes termi?

4. Geometrisen jonon ratkaiseminen
Lasketaan kaavan $a_n = aq^{n-1}$ yhtälöstä kateissa olevan suureen (a_n, a, n tai q) arvo
TAI ratkaistaan a ja q eo. yhtälöstä saatavan yhtälöparin avulla, sillä geometrinen jono on täsmälleen määrätty, jos tunnetaan a ja q.

4. Luku 8 on geometrisen jonon …, 4, 8, … kahdeksas termi. Mikä on ensimmäinen termi?
5. Monesko termi on luku 1 geometrisessa jonossa 256, 128, 64, …?
6. Montako geometrisen jonon 3, 6, 12, … termeistä on pienempiä kuin 10 000 000?
7. Monennestako termistä alkaen geometrisen jonon 3, 4, … termit ovat suurempia kuin 1000?
8. Geometrisessa jonossa $a_1 = 8$ ja $a_{13} = 1/8$. Mikä on jonon suhdeluku?
9. Geometrisen jonon suhdeluku on ½ ja $a_7 = 3$. Mikä on jonon ensimmäinen termi?
10. Geometrisen jonon $a_3 = 6$ ja $a_7 = 24$. Määritä a_1 ja q.
11. Geometrisessa jonossa $a_4 + a_5 = 3$ ja $a_9 + a_{10} = 9375$. Määritä jonon kolme ensimmäistä termiä.
12. Määritä luku x siten, että jono x, x - 3, ½(x - 1), … on geometrinen.
13. Määritä x siten, että jono x , x - 2, 2x - 1 on a) aritmeettinen b) geometrinen.
14. Osoita, että geometrisen jonon jokainen termi a_n (n > 1) on edellisen ja seuraavan termin keskiverto eli geometrinen keskiarvo, jolloin $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

5. Koronkoron kaava
$K = K_0 \cdot (1 + p/100)^n$,
missä K = kasvanut pääoma, K_0 = alkupääoma, p = vuotuinen korkoprosentti ja n = vuosien määrä

15. Kuinka suureksi kasvaa 10 000 mk:n pääoma 5 vuodessa, kun korkoa korolle lasketaan 3% mukaan?
16. Mikä pitäisi vuotuisen koron olla, jotta 10 000 mk:n pääoma olisi 5 vuoden kuluttua 15 000 mk?
17. Missä ajassa 10 000 mk pääoma kasvaa 15 000 mk:ksi, jos vuotuinen korko on 4%?
18. Mikä pääoma kasvaa 15 000 mk:ksi 6 vuodessa, jos vuotuinen korko on 3%?

6. Sama prosentuaalinen muutos monta kertaa
$A_n = A_0 \cdot \alpha^n$,
missä A_n = suureen arvo n:n toiston jälkeen, A_0 = suureen alkuperäinen arvo, α = yhdellä muutoskerralla tapahtuva moninkertaistuminen (= 1 + p/100) ja n = muutoskertojen lukumäärä.

19. Suomen väkiluku kasvaa vuodessa 0,4%. Vuonna 1990 oli väkiluku 5 milj. a) Kuinka suuri on väkiluku vuonna 2000? b) Milloin väkiluku on yli 6 milj.?
20. Vetelin väkiluku oli v. -97 4000. Vuosittain väheneminen on 1%. Milloin väkiluku pienempi kuin 3000?
21. Vetelin väkiluku pienenee 1% vuodessa ja Halsuan kasvaa 1%. Vetelissä on 4000 ja Halsualla 2000 asukasta. Milloin väkiluvut ovat yhtä suuret?
22. Superpallo pudotetaan 1 m korkeudelta. Se pomppaa aina korkeudelle, joka on 90% lähtökorkeudesta. Kuinka korkealla se pomppaa viidennellä kerralla? Monennenko pompun jälkeen pomput ovat alle 5 cm?

2.4. Lukujonon raja-arvo ja suppeneminen

1. Raja-arvon merkintä
$\lim_{x\to\infty} a_n = a$ TAI $\lim a_n = a$ TAI $a_n \to a$, kun $n \to \infty$

2. Raja-arvon määritelmä
Jono (a_n) suppenee kohti raja-arvoa a, jos kaikkien termien a_n poikkeama a:sta on vähemmän kuin miten pieni luku v tahansa, kun termien indeksi n on suurempi kuin v:stä riippuva indeksi n_v.

3. Lukujonon suppeneminen
tarkoittaa sitä, että lukujonolla on raja-arvo

2.4.1. Tutki laskimella lukujonon suppenemista ja anna myönteisessä tapauksessa raja-arvon likiarvo

a) $a_n = n \cdot (10^{1/n} - 1)$ b) $a_n = \sqrt[n]{3}$ c) $a_n = \sqrt[n]{1/3}$ d) $a_n = \sqrt[n]{2n + 3}$ e) $a_n = 10^n \cdot 1{,}1^{-n}$

4. Lukujonon hajaantuminen
tarkoittaa sitä, että lukujonolla ei ole raja-arvoa

5. Vakiojonon raja-arvo
on kyseinen vakio ts. lim c = c

6. Raja-arvo lim (1/n)
= 0 samoin kuin kaikki raja-arvot, joissa osoittaja on kiinteä luku ja nimittäjä kasvaa rajatta

7. Raja-arvo lim (n + c)
= ∞ samoin kuin kaikki raja-arvot, joissa yksi yhteenlaskettava kasvaa rajatta ja muut ovat vakioita

8. Raja-arvo lim (c - n)
= - ∞ samoin kuin kaikki raja-arvot, joissa yksi yhteenlaskettava vähenee rajatta ja muut vakioita

9. Jono heilahtelee rajoitetusti
esim. silloin kun joka toinen termi lähestyy lukua a ja joka toinen lukua b, missä $a \neq b$

10. Jono heilahtelee rajatta
esim. silloin kun joka toinen termi lähestyy + ∞ ja joka toinen lähestyy - ∞ (tai jotain äärellistä lukua a)

11. Mistä n:n arvosta lähtien jonon termit poikkeavat raja-arvosta vähemmän kuin v
Tehdään epäyhtälö $| a_n - a | < v$, josta ratkaistaan n

2. Lukujonon $a_n = \frac{2n + 3}{4n + 5}$ raja-arvo on ½. Miten suuri on luvun n oltava, jotta termien arvot poikkeaisivat raja-arvosta vähemmän kuin 0,001?

12. Siirretyn jonon (a_{n+k}) raja-arvo
on sama kuin jonon (a_n)

13. Ehto suhdeluvulle, jotta geometrinen jono suppenisi
$-1 < q \leq 1$

3. Suppeneeko jono a) 1, 2, 4, 8, … b) 8, 4, 2, 1, … c) 2, -6, 18, -54, … d) 1, -1, 1, -1, …

14. Geometrinen jono, jos q = 1
suppenee. On samalla vakiojono a, a, a, … ja samalla myös aritmeettinen jono, jonka d = 0

15. Suhdeluvussa olevan muuttujan määrittäminen, jotta geometrinen jono suppenisi
Tehdään epäyhtälö -1 < suhdeluku ≤ 1, joka ratkaistaan

4. Millä x:n arvoilla geometrinen jono a) 1, (x - 1), $(x - 1)^2$, … b) 2, (3x - 4), … suppenee?

2.5. Raja-arvon laskeminen

1. Yleisohje
Raja-arvot lasketaan, kuten vastaavien funktioiden raja-arvot.

2. Jono on polynomi : polynomi
Supista, nimittäjän korkeimmalla n:n potenssilla.
Tällöin äärettömyyteen menevät termit ovat nimittäjässä ja näiden termien raja-arvo on nolla

2.5.1. Laske lukujonojen raja-arvot a) $a_n = \frac{n}{n + 1}$ b) $a_n = \frac{n^2 - 2n}{2n^2 + 3}$ c) $a_n = \frac{2n - 1}{n^2 + 1}$ d) $a_n = \frac{n^2 - 3n}{4n + 5}$ e) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

2. Laske kolmen desimaalin tarkkuudella a_{10}, a_{100} ja a_{1000} sekä raja-arvo, kun $a_n = \frac{3n + 4}{\sqrt{n^2 + 1}}$

3. Jono on eksponenttifunktio : eksponenttifunktio
Supista sillä nimittäjän eksponenttifunktiolla, joka kasvaa nopeimmin kohti ääretöntä.

3. Laske lukujonojen raja-arvot a) $a_n = \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4}$ b) $a_n = \frac{3^{n+1} + 4}{2^n + 3^n}$

4. Jono on juuri - juuri Lavenna lausekkeella ”juuri + juuri”, pääset tilanteeseen ääretön : ääretön. Supista sitten nimittäjän korkeimmalla potenssilla. HUOM. $\sqrt{n^2} = n$

4. Laske lukujonon raja-arvo a) $a_n = \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}$ b) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}$ c) $a_n = \sqrt{4n^2 + 5n} - 2n$

5. lim (ca_n) = ca, missä lim a_n = a

6. lim $(a_n + b_n)$ = a + b , missä lim a_n = a ja lim b_n = b

5. Olkoon lim a_n = a. Mikä on raja-arvo a) lim $(3a_n)$ b) lim $(3 + a_n)$ c) lim $(3a_n + 4)$

7. lim $(a_n - b_n)$ = a - b , missä lim a_n = a ja lim b_n = b

8. lim $(a_n \cdot b_n)$ = a · b , missä lim a_n = a ja lim b_n = b

6. Olkoon lim a_n = a ja lim b_n = b. Määritä a) lim $[\, a_n \cdot (a_n + 2b_n)\,]$

9. lim (a_n / b_n) = a / b , missä lim a_n = a ja lim b_n = b $\neq$ 0

10. ” Voileipälause ” Jos lim a_n = lim c_n = a JA $a_n \leq b_n \leq c_n$, niin lim b_n = a

7. Olkoon lim a_n = lim b_n = a sekä $a_n < b_n$. Mitä on lim $\frac{1}{2}(a_n + b_n)$

2.6. Rajoitetut ja monotoniset jonot

1. Alhaalta rajoitettu jono Jono (a_n) on alhaalta rajoitettu, jos on olemassa sellainen luku m, että $\forall$ n : $a_n \geq m$

2.6.1. Osoita, että jono $a_n = 2 + n - (\frac{1}{2})^n$ on alhaalta rajoitettu.

2. Ylhäältä rajoitettu jono Jono (a_n) on ylhäältä rajoitettu, jos on olemassa sellainen luku M, että $\forall$ n : $a_n \leq M$

2. Osoita, että jono $a_n = 2 + (\frac{1}{2})^n$ on ylhäältä rajoitettu

3. Rajoitettu jono Jono on rajoitettu, jos se on ylhäältä ja alhaalta rajoitettu

3. Osoita, että jono $a_n = \frac{2n + 3}{n + 1}$ on rajoitettu.

4. Suppenevan jonon rajoittuneisuus Jos jono on suppeneva, niin jono on rajoitettu. HUOM: Päinvastainen väittämä ei ole tosi ts. jos jono on rajoitettu, niin jono ei välttämättä ole suppeneva

4. Osoita, että jono $a_n = \sqrt{n + 10} - \sqrt{n}$ on rajoitettu.

5. Kasvava jono Jono (a_n) on kasvava, jos $\forall$ n : $a_{n+1} > a_n$

6. Ei-vähenevä jono Jono (a_n) on ei-vähenevä, jos $\forall$ n : $a_{n+1} \geq a_n$

7. Vähenevä jono Jono (a_n) on vähenevä, jos $\forall$ n : $a_{n+1} < a_n$

8. Ei-kasvava jono
Jono (a_n) on ei-kasvava, jos $\forall$ n : $a_{n+1} \le a_n$

9. Monotoninen jono
Jono on monotoninen, jos se on kasvava tai vähenevä.

10. Monotonisuuden laatu tutkimalla yhtäpitäviä epäyhtälöitä
Tee väitteen $a_{n+1} < a_n$ kanssa yhtäpitäviä ($\Leftrightarrow$) epäyhtälöitä, joista viimeisestä tulisi nähdä, että se on tosi kaikilla n:n arvoilla

5. Osoita, että jono $a_n = n^2 + 2n + 3$ on nouseva

11. Monotonisuuden laatu tutkimalla peräkkäisten termien erotusta
Sievennä lauseketta $a_{n+1} - a_n$.
Jos siitä nähdään, että erotus on positiivinen n:n arvosta riippumatta, niin jono on kasvava.

6. Osoita, että lukujono $a_n = \frac{n}{n+2}$ on kasvava.

12. Monotonisuuden laatu tutkimalla peräkkäisten termien suhdetta
Sievennä lauseketta $a_{n+1} : a_n$.
Jos siitä nähdään, että se on > 1 n:n arvosta riippumatta ja termit positiivisia, niin jono on kasvava.

7. Osoita, että jono $a_n = \frac{2^n}{n-1}$ ($n \ge 2$) on kasvava.

13. Monotonisuuden laatu tutkimalla jonoa vastaavaa jatkuvaa funktioa
Korvaa lukujonon termin lausekkeessa n x:llä ja tutki näin saatua jatkuvan funktion monotonisuutta derivaatan avulla. Jos funktio on jatkuva kaikilla x:illä, niin se on kasvava kaikilla kokonaislukuarvoillakin.

8. Osoita, että jono $a_n = \frac{n^3 - 4}{n^2}$ on kasvava.

9. Laske lukujonon $a_n = n^2 - 11n + 12$ kaksi pienintä termiä.

14. Monotonisuuden laatu todistamalla täydellisellä induktiolla.
Todista kasvavuudesta kertova epäyhtälö $a_{n+1} > a_n$ todeksi täydellisellä induktiolla.

10. Osoita, että jono (a_n), missä $a_1 = 1$ ja $a_{n+1} = ½(a_n + n)$ on kasvava.

15. Lause, millainen jono varmasti suppenee
Jos jono on alhaalta rajoitettu ja jono on vähenevä (ei-kasvava), niin jono suppenee.
Jos jono on ylhäältä rajoitettu ja jono on kasvava (ei-vähenevä), niin jono suppenee.

11. Osoita, että jono $a_n = 2 + (½)^n + (¾)^n$ suppenee.

16. e:n määritelmä lukujonon raja-arvosta

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

17. Todistus, että e:n määrittelemä lukujono suppenee
Osoitetaan, että eo. jono on ylhäältä rajoitettu ja ei-vähenevä. Ks. kirja

18. Raja-arvon laskeminen e:n määritelmään nojautuen
Sievennetään raja-arvon lauseketta niin, että kantaluvun (1 + 1/n) nimittäjässä ja eksponentissa on sama lauseke. Jos tämä lauseke lähestyy ääretöntä, on tämän osan raja-arvo = e.

12. Laske a) $\lim (1 + \frac{1}{2n})^{2n}$ b) $\lim (1 + \frac{1}{2n})^n$ c) $\lim (1 + 2/n)^n$ d) $\lim (1 - 2/n)^n$.

3. Äärellinen summa

3.1. Summajono

1. Lukujonosta saatava summajono
on $(s_1, s_2, s_3, \dots)$, missä $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, … , $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_n$

3.1.1. Lukujonon 5 ensimmäistä termiä ovat 2, 4, 7, 11 ja 16. Muodosta summajonon 5 ensimmäistä termiä.
2. Summajonon 5 ensimmäistä termiä ovat 2, 4, 7, 11 ja 16. Muodosta lukujonon 5 ensimmäistä termiä.

3.2. Aritmeettinen summa

1. Aritmeettinen summa on summa, jonka yhteenlaskettavat muodostavat aritmeettisen jonon.

3.2.1. Mitkä summista a) 1 + 3 + 5 + … b) 1 + 4 + 9 + … c) -1 + 11 + 21 + … voivat olla aritmeettisia?

2. Aritmeettinen summakaava $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2a_1 + (n - 1)d)}{2}$

2. Laske s_{10}, kun summa on a) 1 + 3 + 5 + … b) 3 + 8 + 13 + … c) 9 + 5 + 1 + …
3. Laske a) 3 + 7 + 11 + … 47 b) 1 + 2,5 + 4 + … 31 c) 2 - 6 + 10 - 14 + … -110
4. Laske kaikkien positiivisten alle 100 olevien 7:llä jaollisten kokonaislukujen summa.
5. Laske kaikkien kolminumeroisten ja luvulla 11 jaollisten luonnollisten lukujen summa.
6. Mistä n:n arvosta alkaen n:n ensimmäisen luonnollisen luvun summa on suurempi kuin 1000?
7. Käkikello kukkuu täydet tunnit (esim. klo 19 seitsemän kertaa) ja puolet tunnit kerran. Montako kukahdusta kuuluu vuorokauden aikana?

3. Aritmeettisen sarjan ja jonon selvittäminen annetuista tiedoista Aritmeettinen jono on täsmälleen selvitetty, kun tunnetaan sen a ja d. Kaavoista 2.2.4 ja 3.2.2. saadaan yhtälö tai yhtälöpari, josta ratkaistaan a ja d.

8. Määritä aritmeettisen jonon a_1 ja d, kun $a_4 = 9$ ja $s_9 = 99$.
9. Aritmeettisen jonon vakioerotus on -2. Jonon termejä lasketaan jonon alusta yhteen. Kun viimeinen yhteenlaskettava on 17 on termien summa 897. Monesko termi on 17?

4. Summa TI-85 laskimella $\boxed{\text{MATH}}$ $\boxed{\text{MISC}}$ $\boxed{\text{sum}}$ $\boxed{\text{seq}}$ $\boxed{a_n\text{:n kaava, muuttujakirjain, alkuindeksi, loppuindeksi, indeksin lisäys}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$

10. Laske a) $\sum_{n=1}^{5} n^4$ b) $\sum_{n=2}^{6} \frac{2n}{n-1}$ c) $\sum_{n=1}^{10}(3n+4)$ d) $\sum_{n=10}^{100}(n^2-3n+4)$
11. Esitä Σ-merkkiä käyttäen ja laske arvo a) $3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots + 30^2$ b) 4 + 8 + 12 + … + 128 c) 3/2 + 5/4 + 7/8 + … + 17/256.

3.3. Geometrinen summa

1. Geometrinen summa on summa, jonka yhteenlaskettavat muodostavat geometrisen jonon.

3.3.1. Mitkä summista a) 1 + 2 + 4 + 16 + … b) 2 - 4 + 8 - 16 + … c) 1 + 8 + 27 + …voivat olla geometrisia?

2. Geometrinen summakaava $s_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$

2. Laske s_{10} summasta a) 2 + 4 + 8 + … b) 8 + 4 + 2 + … c) 8 - 4 + 2 - … d) 4 + 12 + 36 + …
3. Laske a) $1 + 0{,}2 + 0{,}2^2 + \ldots + 0{,}2^{10}$ b) $1 - 5 + 5^2 - 5^3 + \ldots + 390625$ c) $1½ + (1½)^2 + (1½)^3 + \ldots + (1½)^{10}$.
4. Geometrisessa summassa $s_{10} = 1000$ ja q = 2. Mikä on ensimmäinen termi?

3. Geometrisen sarjan ja jonon selvittäminen annetuista tiedoista Geometrinen jono on täsmälleen selvitetty, kun tunnetaan sen a ja q. Kaavoista 2.3.3. ja 3.3.2. saadaan yhtälö tai yhtälöpari, josta ratkaistaan a ja q.

5. Geometrisen jonon seitsemäs termi on 64/243 ja suhdeluku q = -2/3. Laske s_6.
6. Montako termiä summan 5 + 10 + 20 + … alusta on otettava, jotta summa ylittäisi 5115?
7. Geometrisessa sarjassa suhdeluku on ¾, summa 3367/64 ja viimeinen termi 243/64. Mikä on ensimmäinen termi ja termien lukumäärä?
8. Geometrisessa sarjassa ensimmäinen termi on 8, suhdeluku 1½ ja summa 2059/8. Mikä on viimeinen termi ja termien lukumäärä?

9. Pallo pudotetaan 2 m korkeudelta. Sen pomppu on aina 40% pudotuskorkeudesta. Kuinka pitkän matkan pallo on pomppinut, kun pomput ovat tulevat alle 1 cm.
10. Matti aikoo säästää marraskuun 1. päivänä 1 pennin, 2. päivänä 2 penniä, 3. päivänä 4 penniä jne. Paljonko hän on säästänyt kuun loppuun mennessä?
11. Huhu leviää seuraavasti. Liikkeellelaskija kertoo sen 5 henkilölle, joista jokainen kertoo 5 muulle. Oletetaan, ettei kukaan katkaise huhun levittämistä, kukaan ei kuule huhua kahdesti ja huhu kerrotaan päivän kuluessa. Kuinka nopeasti kaikki maapallon asukkaat ovat kuullet huhun?
12. Geometrisen jonon ensimmäinen termi on 10 ja viides termi on 5. Monesko termi on ensimmäinen, jonka arvo on alle yhden. Montako termiä on laskettava yhteen, jotta summa olisi yli 60?
13. Esitä osamääränä a) $1 + x + x^2 + \ldots x^{20}$ b) $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \ldots + x^{30}$ c) $1/x + 1/x^2 + 1/x^3 +\ldots + 1/x^{10}$.
14. Kirjoita polynomina a) $(x^{10} - 1) : (x - 1)$ b) $(x^{15} + 1) : (x + 1)$ tulkiten ne geometrisiksi summiksi.

4. Rekursiiviset jonot

4.1. Rekursio

1. Funktion määritteleminen rekursiivisesti Määritellään, kuinka funktion arvo lasketaan jollakin luonnollisella luvulla ja kuinka funktion arvo saadaan seuraavalla luonnollisen luvun arvolla aina edellisestä funktion arvosta.

4.1.1. Olkoon $f(1) = 2$ ja $f(n + 1) = 2\cdot f(n) + 3$. Määritä $f(5)$.
2. Olkoon $f(1) = 3$ ja $f(n + 1) = 4\cdot f(n) + n + 5$. Määritä $f(5)$.
3. Olkoon $f(5) = 63$ ja $f(n + 1) = 2\cdot f(n) + 1$. Määritä $f(1)$.

2. Lukujonon määrittäminen rekursiivisesti Annetaan jonkin termin arvo ja sääntö, miten termi saadaan edellisestä (edellisistä)

4. Olkoon $a_1 = 2$ ja $a_{n+1} = 2a_n - 3$. Määritä $a_2 \ldots a_5$.

3. Aritmeettinen jono rekursiivisesti $a_n = a + (n - 1)d \Leftrightarrow a_1 = a$ JA $a_{n+1} = a_n + d$

4. Geometrisen jonon rekursiivinen määritelmä $a_n = aq^{n-1} \Leftrightarrow a_1 = a$ JA $a_{n+1} = a_n \cdot q$

5. Määrittele rekursiivisesti geometrinen jono 3, 6, 12, 24, ….
6. Määrittele geometrisesti $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 2a_n$.

5. Summajono rekursiivisesti $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$

7. Summajono on määritelty siten, että $s_n = s_{n-1} + 2n - 1$. Määritä jono a_n.
8. Summajono on määritelty seuraavasti $s_{n+1} = s_n + 2n - 1$. Määritä jono a_n.

6. Rekursiivisen jonon raja-arvon laskemistapa Jonoilla (a_{n+1}) ja (a_n) on sama raja-arvo a. Sijoitetaan a osasten raja-arvojen paikalle rekursioyhtälöön ja lasketaan yhtälöstä a.

9. Lukujono (a_n), missä $a_1 = 1$ ja $a_{n+1} = ½a_n + 1$ suppenee. Mikä on jonon raja-arvo?
10. Lukujono (a_n), missä $a_1 = 1$ ja $a_{n+1} = ½(a_n + 2/a_n)$ suppenee. Mikä on jonon raja-arvo?

4.2. Ensimmäisen kertaluvun rekursioyhtälö

1. Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen ja vakiokertoiminen rekursioyhtälö $y_{n+1} = cy_n + d$

2. Rekursioyhtälön termejä laskimen ANS-toimintoa käyttäen. $\boxed{y_0}$ $\boxed{\text{ENTER}}$, jolloin ANS-muistipaikassa on y_0:n arvo $\boxed{c}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{\text{ANS}}$ $\boxed{+}$ $\boxed{d}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ $\to y_1$, $\boxed{\text{ENTER}}$ $\to y_2$, $\boxed{\text{ENTER}}$ $\to y_3$, …

4.2.1. Muodosta termit $y_1, \ldots y_5$. kun a) $y_{n+1} = 2y_n + 3$, $y_0 = 4$ b) $y_{n+1} = -3y_n + 4$, $y_0 = 5$

3. Rekursioyhtälön ratkaisu
on lukujono, joka toteuttaa rekursioyhtälön.
Lukujonon lausekkeesta saadaan suoraan mikä lukujonon termi tahansa. Ratkaisuja on äärettömästi.
Jos annetaan jokin alkuehto esim. ensimmäinen termi on y_0, saadaan yksikäsitteinen ratkaisu.

2. Osoita, että, $y_n = 2^n + 1$ on rekursioyhtälön $y_{n+1} = 2y_n - 1$, $y_0 = 2$ ratkaisu.

4. Ensimmäisen kertaluvun rekursioyhtälön $y_{n+1} = cy_n + d$ ratkaisukaava alkuehdolla y_0
$y_n = y_0 \cdot c^n + \frac{d(1 - c^n)}{1 - c}$, kun $c \neq 1$; $y_n = y_0 + nd$, kun $c = 1$.

3. Ratkaise, kun $y_0 = 1$ ja a) $y_{n+1} = 3y_n + 2$ b) $y_{n+1} = 5 - 4y_n$ c) $y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{4}$ d) $y_{n+1} = -2y_n + 6$.
4. Anna rekursioyhtälö, jonka ratkaisu on jono a) 2, 6, 18, … b) -1, 2, -4, 8, …
5. Mikä on c, kun rekursioyhtälöllä $y_{n+1} = cy_n$ on ehdot $y_2 = 4$ ja ja $y_3 = 10$ toteuttava ratkaisu?

4.3. Lainan maksu tasaerissä

1. Tasaerän määrääminen
$a = \frac{k\alpha^T(\alpha - 1)}{\alpha^T - 1}$, missä a = tasaerä, k = lainan alkupääoma, $\alpha = 1 + \frac{p}{100 \cdot n}$ = yhden maksuvälin korko, kun vuodessa n maksukertaa, T = takaisinmaksukertojen lukumäärä.

4.3.1. Kuinka suuri on kuukausittain tehtävä samansuuruinen lainan lyhennysmaksu pankille, kun on otettu kahdeksi vuodeksi 10 000 mk:n laina, jonka korko on 6%?
2. Uffe on saanut 10 milj. mk:n lainan 8% korolla. Hän aikoo lyhentää sitä kaksi kertaa kuukaudessa samansuuruisina erinä 10 vuoden ajan. Mikä on tämän tasaerän suuruus? Paljonko kertyy kaikkiaan korkoja tänä aikana?

*4.4. Toisen kertaluvun rekursio ja rekursioyhtälöt

1. Fibonaccin jono
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … $\Leftrightarrow$ $y_1 = 1$ JA $y_2 = 1$ JA $y_{n+1} = y_n + y_{n-1}$, kun $n > 2$

*2. Kaniongelma
Kanipari saa ensimmäisen poikueen kahden kuukauden ikäisenä.
Poikueeseen kuuluu kaksi kania (poika ja tyttö).
Alussa on vain yksi kanipari.
Kanit eivät kuole.
Mikä on kaniparien lukumäärä eri kuukausina? Vastauksena Fibonaccin jono.

*3. Toisen kertaluvun lineaarinen, vakiokertoiminen ja homogeeninen rekursioyhtälö
Toisen kertaluvun = y_{n+1} riippuu kahdesta edellisestä termistä y_n ja y_{n-1}.
Lineaarinen = y:t ensimmäistä astetta.
Vakiokertoiminen = y:itten kertoimet ovat vakioita, eivät riipu n:stä
Homogeeninen = yhtälössä ei ole vakiotermiä
$y_{n+1} + py_n + qy_{n-1} = 0$

*4. Milloin geometrin jono toteuttaa toisen kertaluvun rekursioyhtälön
$y_n = r^n$ on ratkaisu, jos r toteuttaa karakteristisen yhtälön.

4.4.1. Osoita, että jono $y_n = 3^n$ toteuttaa rekursioyhtälön $y_{n+1} - 4y_n + 3y_{n-1} = 0$

*5. Karakteristinen yhtälö
$r^2 + pr + q = 0$

*6. Jos (a_n) ja (b_n) ovat ratkaisuja, niin mikä jono myös on ratkaisu
$(ca_n + db_n)$, missä c ja d ovat vakioita.

2. Osoita, että jonot $y_n = 2^n$ ja $y_n = 3^n$ sekä $c \cdot 2^n + d \cdot 3^n$ toteuttavat rekursioyhtälön $y_{n+1} - 5y_n + 6y_{n-1} = 0$.

*7. Jos karakterisella yhtälöllä kaksi ratkaisua r_1 ja r_2, niin mikä jono on yleinen ratkaisu
$y_n = cr_1^n + dr_2^n$

3. Mikä on rekursioyhtälön $y_{n+1} - y_n - 6y_{n-1} = 0$ yleinen ratkaisu?

*8. Alkuehdot toteuttava ratkaisu.
Yleisen ratkaisun kertoimet c ja d saadaan, jos tiedetään kaksi alkuehtoa, esim. kaksi ensimmäistä termiä.

4. Mikä on rekursioyhtälön $y_{n+1} - 7y_n + 12y_{n-1} = 0$ se ratkaisu, jolle $y_0 = 1$ ja $y_1 = 2$. Mitkä ovat y_2 ja y_3?
5. Määritä jokin homogeeninen, vakiokertoiminen ja lineaarinen toisen kertaluvun rekursioyhtälö, jonka ratkaisuna on jono $y_n = 2^n - 5^n$.

*9. Fibonaccin jonon n:s termi
$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \{ [½(1 + \sqrt{5})]^n - [½(1 - \sqrt{5})]^n \}$

*10. Jos karakterisella yhtälöllä yksi reaalinen ratkaisu on r_1, niin mikä jono on myös ratkaisu
Ratkaisuja ovat jonot $y_n = r_1^n$ ja $y_n = nr_1^n$

6. Osoita, että jonot $y_n = 2^n$ ja $y_n = n\cdot 2^n$ toteuttavat rekursioyhtälön $y_{n+1} - 4y_n + 4y_{n-1} = 0$.

*11. Rekursioyhtälön yleinen ratkaisu
$y_n = cr_1^n + dnr_1^n$

7. Mikä on rekursioyhtälön $y_{n+1} - 6y_n + 9y_{n-1} = 0$ yleinen ratkaisu?

*12. Alkuehdot toteuttava ratkaisu
Kertoimet c ja d saadaan ratkaistua, jos tiedetään kaksi alkuehtoa, esim. kaksi ensimmäistä termiä.

8. Määritä rekursioyhtälön $4y_{n+1} - 4y_n + y_{n-1} = 0$ se ratkaisu, jolle $y_0 = 3$ ja $y_1 = 4$.

5. Sarjat

5.1. Osasummien jono ja sarja

1. Lukujonoa vastaava summajono
Lukujono $(a_n) = a_1, a_2, a_3, \ldots$ Vastaavan summajonon (s_n) termit ovat $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

5.1.1. Olkoon lukujono 1, 4, 9, 16, 25, 36 … Mitkä ovat summajonon 6 ensimmäistä termiä?
2. Olkoon summajono 1, 4, 9, 16, 25, 36 ... Mikä ovat lukujonon 6 ensimmäistä termiä?

2. Sarja
on summajono (s_n) ja toisaalta myös $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_{3+\ldots}$ sanotaan sarjaksi.

3. Sarjan termit
ovat $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n , \ldots$

3. Mikä on sarjan $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)$ termi a_1, a_{10} ja a_{100}?

4. Sarjan osasumma
$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

4. Määritä sarjan $\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)$ osasummat s_1, s_5 ja s_{10}.

5. Sarjan summa
on osasummien jonon raja-arvo, jos sellainen on olemassa.

5. Mikä on s_n sarjassa $1 + ½ + (½)^2 + (½)^3 + \ldots$? Mikä on $\lim s_n$?

5.2. Sarjan suppeneminen

1. Sarjan suppeneminen
Jos sarjalla on äärellinen summa, niin sarja suppenee.

2. Sarjan hajaantuminen
Jos sarjalla ei ole äärellistä summaa, niin sarja hajaantuu.

3. Teleskooppisarja
termeissä on kaksi yhteenlaskettavaa, joista toinen on edellisen termin toisen yhteenlaskettavan vastaluku $(b_n - b_{n+1})$

4. Teleskooppisarjan suppeneminen
Suppenee, kun (b_n) suppenee, jolloin $\lim b_n = \lim (b_1 - b_{n+1}) = b_1$

5.2.1. Suppeneeko sarja a) $(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \ldots$ b) $(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{8}) + (\frac{1}{8} - \frac{1}{11}) + \ldots$?

2. Osoita, että sarja $\frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 8} + \ldots + \frac{1}{2n(2n+2)}$ suppenee. Mikä on sen summa?

3. Suppeneeko sarja $\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + \ldots + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots$Jos, niin mikä on sen summa?

5. Sarjan suppenemisesta seuraava ehto
Jos sarja $\sum a_n$ suppenee, niin $\lim a_n = 0$

6. Riittävä ehto sarjan hajaantumiselle
Jos $\lim a_n \neq 0$, niin sarja hajaantuu.

4. Osoita, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+4}$ hajaantuu.

7. $\Sigma (a_n + b_n)$
$= \Sigma a_n + \Sigma b_n = a + b$, jos yhteenlaskettavat suppenevat.

5. Laske a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$

8. $\Sigma (c \cdot a_n)$
$= c \cdot \Sigma a_n = c \cdot a$, jos sarja Σa_n suppenee

6. Laske a) $\sum_{n=1}^{\infty} 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n 5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\right]$

5.3. Geometrinen sarja ja sen suppeneminen

1. Geometrisen jonon summajono
on (s_n) missä $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ ja jono (a_n) on geometrinen jono.

5.3.1. Muodosta geometrisen jonon 1, 2, 4, 8, … summajonon 5 ensimmäistä termiä.

2. Geometrinen sarja
on sama kuin summajono ja käytännössä sarja on $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ eli päättymätön summa

3. Geometrisen sarjan summa
on summajonon raja-arvo

4. Sarjan suppeneminen
jos summa on jokin reaaliluku

5. Sarjan hajaantuminen
jos sarjalla ei ole summaa

6. Geometrisen sarjan suppenemisehto
$| q | < 1$

2. Mitkä sarjoista ovat suppenevia a) $0{,}9 + 0{,}9^2 + 0{,}9^3 + \ldots$ b) $1{,}1 - 1{,}1^2 + 1{,}1^3 - \ldots$ c) $1 - 1 + 1 - \ldots$?

7. Geometrisen sarjan summa
$s = \frac{a}{1 - q}$

3. Laske a) 8 + 4 + 2 + … b) 8 - 4 + 2 - … c) 8 + 6 + 4½ + … d) 8 - 6 + 4½ - …

4. Laske a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{5^n}$

5. Laske $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+...+(\frac{1}{2})^n}{1+\frac{1}{4}+(\frac{1}{4})^2+...+(\frac{1}{4})^n}$

6. Pallo pudotetaan 2 m korkeudelta ja se pomppaa 1,50 metrin korkeudelle. Kuinka pitkän matkan pallo liikkuu ennenkuin se pysähtyy, jos pomppauskorkeus on aina samassa suhteessa lähtökorkeuteen?
7. Neliön sivu on a. Sen sisällä on ympyrä, jonka sisällä on neliö, jonka sisällä on ympyrä jne. Laske neliöiden ja ympyröiden alojen summat.
8. Robottimehiläinen on ohjelmoitu niin, että se lentää 1000 m pohjoiseen, sitten 500 m länteen, 250 m etelään jne lennettyään puolet edellisestä matkasta se kääntyy 90° vasemmalle. Missä on kukka?

8. Geometrisen sarjan suhdeluvussa olevan kirjaimen ratkaiseminen, jotta sarja suppenisi
Tehdään epäyhtälö | q | < 1, joka ratkaistaan

9. Millä x:n arvoilla geometrinen sarja a) 1 + (x -1) + (x -1)^2 + … b) x + (x -1) + (x -1)^2/x + … suppenee?
10. Millä x:n arvoilla geometrinen sarja 1 + (x - 2) + (x - 2)^2 + … suppenee? Millä x:llä sarjan arvo on 2?
11. Ratkaise yhtälö 1 - x + (1 - x)^2 + (1 - x)^3 + … = 1 - 2x/3.
12. Suppenevan geometrisen sarjan 1 + q + q^2 + … summa on 6. Muodostetaan uusi sarja 2 + q + 2q^2 + q^3 + 2q^4 + … missä parittomat termit on kerrottu kahdella. Mikä on tämän uuden sarjan arvo?

9. Sarjojen suppenemisen tutkimista eo. sääntöjen avulla
tutkitaan yhteenlaskettavien suppenemista ja summaa. Tästä päätellään koko sarjan suppeneminen ja summa. Jos osaset geometrisia sarjoja, niin summa suppenee suppenemisalueiden leikkausjoukossa.

13. Milloin sarja $\sum_{n=1}^{\infty}\left[x^n+(x-1)^n\right]$ suppenee? Mikä on silloin sarjan summa?

14. Millä välillä sarja $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(x-½)^n+(x+½)^n\right]$ suppenee ja mikä on silloin sarjan summa?

5.4. Harmoninen sarja

1. Harmoninen sarja
on $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

2. Osoitus, että harmoninen sarja hajaantuu
JOKO jakamalla yhteenlaskettavat ryhmiin, jotka > ½. 1/3 + ¼ > ½, neljä seuraavaa > ½, 8 seuraavaa >½
TAI arvioimalla summaa pylväiden aloilla, joka pienempi kuin 1/x käyrän alla oleva ala, joka kasvaa rajatta

3. Aliharmoninen sarja
on $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ missä p < 1. Aliharmoninen sarja on hajaantuva

4. Yliharmoninen sarja
on $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, missä p > 1

5. Osoitus, että yliharmoninen sarja suppenee
Sarjan osasumma s_n voidaan esittää pylväinä, joiden yläpuolella on käyrä y = 1/x^p , jonka pinta-ala on rajoitettu. Positiivitermisenä sarja suppenee

5.5. Yleinen suppeneminen ja vertailuperiaate

1. Positiivitermisen sarjan suppenemisehto
Jos sarja on positiiviterminen ja summajono (s_n) on ylhäältä rajoitettu, niin sarja suppenee.

5.5.1. Osoita, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+4^n}$ suppenee.

2. Päättyvä desimaaliluku
on rationaalinen

2. Esitä murtolukuna a) 0,23 b) 4,567

3. Päättymätön jaksollinen desimaaliluku
on rationaalinen. Jos jakso alkaa heti desimaalipilkun jälkeen, rationaaliluvun osoittaja on jakso ja nimittäjä on jakson numeroiden lukumäärä yhdeksikköjä. Saadaan myös geometrisen sarjan avulla.

3. Esitä murtolukuna a) 0,555… b) 1,5656… c) 2,567567…

4. Päättymätön sekajaksollinen desimaaliluku
on myös rationaaliluku, joka on kahden murtoluvun summa. Toinen on sekaosa murtolukuna ja toinen murtoluku, jonka osoittaja on jakso ja nimittäjä jakson numeroiden verran yhdeksikköjä perässä sekaosan numeroiden verran nollia. Jaksollinen osa saadaan myös murtoluvuksi geometrisen sarjan avulla.

4. Esitä murtolukuna a) 0,12323… b) 3,04545… c) 6,789090…

5. Osoitus, että yleinen desimaalikehitelmä on rajoitettu
koska 0,xxx… < 1

6. Osoitus, että yleinen desimaalikehitelmä suppenee
koska kehitelmä on positiiviterminen ja osasummien jono ylhäältä rajoitettu

7. Sarjan majoranttisarja
Jos $b_n > a_n$ kaikilla n jostakin n:stä alkaen, on $\Sigma\, b_n$ sarjan $\Sigma\, a_n$ majoranttisarja

8. Sarjan minoranttisarja
Jos $a_n < b_n$ kaikilla n jostakin n:stä alkaen, on $\Sigma\, a_n$ sarjan $\Sigma\, b_n$ minoranttisarja

9. Positiivitermisen sarjan suppenemisen tutkiminen vertailuperiaatteella
Jos sarjan jokin majoranttisarja suppenee, niin sarjakin suppenee

5. Osoita, että sarja a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+3n}$ suppenee.

10. Positiivitermisen sarjan hajaantumisen tutkiminen vertailuperiaatteella
Jos sarjan jokin minoranttisarja hajaantuu, niin sarjakin hajaantuu

6. Osoita, että sarja a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-½}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ hajaantuu.

11. Sarjojen suppenemisen tutkimisia vertailuperiaatteella
Yritetään löytää suppeneva majoranttisarja tai hajaantuva minoranttisarja.
Vertailusarja voi olla esim. geometrinen, harmoninen, ali- tai yliharmoninen sarja

7. Tutki sarjojen suppenemista a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2-1}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$

12. Itseinen suppenevuus
Jos sarjan termien itseisarvojen muodostama sarja suppenee, niin sarja suppenee itseisesti.
Ts. jos sarja $\Sigma\, |\, a_n\, |$ suppenee, niin sarja $\Sigma\, a_n$ suppenee itseisesti

13. Sarjan suppenemisen tutkimista itseisen suppenemisen avulla.
Osoitetaan, että sarja suppenee itseisesti, jolloin se suppenee.

8. Osoita, että sarja a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot (½)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ d) $\frac{1}{2\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 8} - \frac{1}{8\cdot 10} + \ldots$ suppenee.

14. Todistus, että itseisesti suppeneva sarja suppenee
Ks. kirja.

5.6. Potenssisarjat

1. Potenssisarja
on $\sum a_n \cdot x^n$, missä kertoimet a_n ovat reaalilukuja.

2. Geometrinen sarja potenssisarjan erikoistapauksena
Jos kertoimet a_n = vakio, saadaan geometrinen sarja

3. Potenssisarjan suppenemisalue
Jos lim $a_n / a_{n+1} = R$, niin potenssisarja suppenee välillä $-R < x < R$

5.6.1. Mikä on sarjan a) $\sum_{n=1}^{\infty}2x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(2x)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}x^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n+1}$ suppenemisalue?

4. Potenssisarjan derivoiminen suppenemisalueella
on luvallista ja derivoitujen termien summa = summan derivaatta.

2. Laske $1 + (x - 1) + (x - 1)^2 + \ldots$ Mitä on $1 + 2(x - 1) + 3(x - 1)^2 + \ldots$? Millä x:illä säännöt pätevät?

5. Potenssisarjan integroiminen suppenemisalueella
on luvallista ja termien määrättyjen integraalien summa = summan määrätty integraali samalla välillä

3. Laske $1 + (½x) + (½x)^2 + \ldots + (½x)^n + \ldots$ Mitä on $x + (½x)^2 + \frac{2}{3}(½x)^3 + \ldots + \frac{2}{n+1}(½x)^{n+1} + \ldots$?

6. Hitaasti suppeneminen
Sarja suppenee hitaasti, jos summan likiarvoa varten tarvitaan paljon termejä

7. Nopeasti suppeneminen
Sarja suppenee nopeasti, jos summan likiarvoa varten riittää vähän termejä

Vastaukset E-tehtäviin.

1.1.1. a) on b) ei välttämättä
c) on d) on
3. a) on b) ei c) on
4. a) 3 b) 2 tai 6
5. a) on b) on c) on d) ei e) on
f) on
6. a) ei b) on c) on
8. a) $2^2\cdot 3\cdot 5$ b) $2\cdot 3^2\cdot 7$
c) $2^2\cdot 3^2\cdot 17$
9. a) 6 b) 8
10. a) 21 b) 24 c) 12
11. a) 24 b) 112 c) 77
12. a) 24 b) 72 c) 24
13. a) 96 b) 288
14. a) 216 b) 1 728 c) 142 560

1.2.6. a) $\sum_{n=1}^{10}n$ b) $\sum_{n=1}^{10}2n$

c) $\sum_{n=1}^{34}3(n-1)$ d) $\sum_{n=1}^{10}(n^2-1)$
7. a) 60 b) 35 c) 2,45
8. a) $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ b) $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$ c) $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$ d) $32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$
9 a) $216x^2$ b) 90x

2.1.1. a) 14 b) 25 c) 26 d) 5
2. a) 5, 7, 9, 11, 13 b) 5, 7, 11, 19, 35 c) 4, 7, 12, 19, 28
d) 2, 1, 4/5, 5/7, 2/3
3. a) 26, 29, 32, 35, 38, 41
b) 5, 7, 13, 31, 85, 247

2.2.1. a) kyllä b) ei c) ei

3. a) 299 b) 395 c) -485
4. -4
5. 334
6. 5
7. 100
8. 112
9. 249
10. $a_1 = 31{,}6$ $a_{10} = 28$
11. $a_{10} = 33$, $a_{20} = 63$
12. a) 16 - 4n b) 4½ + 2½·n
13. 4 tai -2

2.3.1. a) K b) K c) ei
3. a) 1536 b) -1/128
4. 1/16
5. a_9
6. 22
7. 22
8. $\pm 1/\sqrt{2}$

9. 192
10. $a_1 = 3$, $q = \pm\sqrt{2}$
11. 1/250, 1/50, 1/10
12. 2 tai 9
13. a) -3 b) 1 tai -4
15. 11592,74 mk
16. 8,45%
17. 11v
18. 12 562, 26 mk
19. a) 5,2 milj. b) 2036
20. v. 2026
21. 35 v kuluttua.
22. 59 cm, 29. Pompun

2.4.1. a) suppenee, 2,3026
b) suppenee, 1 c) suppenee, 1
d) suppenee, 1 e) ei suppene
2. n > 123
3. a) E b) K c) E d) E
4. a) $0 < x \le 2$ b) $2/3 < x \le 2$

2.5.1. a) 1 b) ½ c) 0 d) ei e) 0
2. $a_{10} = 3{,}383$, $a_{100} = 3{,}040$,
$a_{1000} = 3{,}004$, a = 3
3. a) 1 b) 3
4. a) 0 b) ½ c) 1¼
5. a) 3a b) 3 + a c) 3a + 4
6. $a^2 + 2ab$
7. a

2.6.9. $a_5 = a_6 = -18$
2.6.12. a) e b) $\sqrt{e}$ c) e^2 d) e^{-2}

3.1.1. 2, 6, 13, 24, 40
2. 2, 2, 3, 4, 5

3.2.1. a) K b) E c) E
2. a) 100 b) 255 c) -90
3. a) 300 b) 336 c) -56
4. 735
5. 44550
6. 45
7. 180
8. a = 3, d = 2
9. 23
10. a) 979 b) 14 17/30 c) 205
d) 323 414
11. a) $\sum_{n=3}^{30} n^2 = 9450$

b) $\sum_{n=1}^{32} 4n = 2112$

c) $\sum_{n=1}^{8} \frac{2n+1}{2^n} = 4\,\frac{235}{256}$

3.3.1. a) E b) K c) E
2. a) 2046 b) 15 63/64
c) 5 21/64 d) 118 096
3. a) 1,25 b) 325 521
c) 169,995
4. 1000/1023
5. 133/81
6. 11
7. a =16, n = 6
8. $a_7 = 91\ 1/8$, n = 7
9. 4,64 m
10. 10 737 418,23 mk
11. 14 pv
12. 15 kpl, 18 kpl
13. a) $(x^{21} - 1)/(x - 1)$
b) $(x^{33} + 1)/(x^3 + 1)$
c) $(x^{10} - 1)/(x^{10}(x - 1))$
14. a) $x^9 + x^8 + \ldots + x + 1$
b) $x^{14} - x^{13} + \ldots - x + 1$

4.1.1. 77
2. 1305
3. 3
4. 1, -1, -5, -13
5. $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n$
6. $a_n = 5\cdot 2^{n-1}$
7. 2n - 1
8. 2n - 3
9. 2
10. $\sqrt{2}$

4.2.1. a) 11, 25, 53, 109, 221
b) -11, 37, -107, 325, -971
3. a) $y_n = 2\cdot 3^n - 1$ b) $y_n = 1$
c) $y_n = (½)^{n+1} + ½$
d) $y_n = 2 - (-2)^n$
4. a) $y_{n+1} = 3y_n$, $y_0 = 2$
b) $y_{n+1} = -2y_n$, $y_0 = -1$.
5. c = 2½

4.3.1. 443,20 mk
2. 60 598 mk, 4 543 527 mk

4.4.3. $c\cdot 3^n + d\cdot(-2)^n$
4. $y_n = 2\cdot 3^n - 4^n$, $y_2 = 2$,
$y_3 = -10$
5. $y_{n+1} - 7y_n + 10y_{n-1} = 0$
7. $y_n = c\cdot 3^n + dn\cdot 3^n$
8. $y_n = 3\cdot(½)^n + 5n\cdot(½)^n$

5.1.1. 1, 5, 14, 30, 55, 91
2. 1, 3, 5, 7, 9, 11
3. $a_1 = 3$, $a_{10} = 21$,
$a_{100} = 201$
4. $s_1 = 3$, $s_5 = 25$, $s_{10} = 75$
5. $2 - 2\cdot(½)^n$, $\lim s_n = 2$

5.2.1. a) E b) K
2. S = ¼
3. Ei
5. a) 1½ b) 2/3 c) 4/3
6. a) 3 b) 3

5.3.1. 1, 3, 7, 15, 31
2. a) K b) E c) E
3. a) 16 b) 16/3 c) 32 d) 32/7
4. a) ½ b) $\sqrt{2} + 1$ c) -1/5 d) 1
5. 1½
6. 14 m
7. $A_N = 2a^2$, $A_Y = ½\pi a^2$
8. Pesästä 800 m pohjoiseen
ja 400 m länteen.
9. a) 0 < x < 2 b) x > ½
10. 1 < x < 3, x = 2½
11. $½(3 - \sqrt{3})$
12. 9 3/11
13. $0 < x < 1$, $\frac{-2x^2 + 4x - 1}{x^2 - 3x + 2}$
14. $-½ < x < ½$, $\frac{-8x^2 + 8x + 2}{4x^2 - 8x + 3}$

5.5.2. a) $\frac{23}{100}$ b) $4\,\frac{567}{1000}$
3. a) $\frac{5}{9}$ b) $1\,\frac{56}{99}$ c) $2\,\frac{21}{37}$
4. a) $\frac{61}{495}$ b) $3\,\frac{1}{22}$ c) $6\,\frac{217}{275}$
7. a) S b) S c) H d) H

5.6.1. a)]-1,1[b) -½,½ c)]-1,1[
d)]-½,½[e)]-3,3[
2. $\frac{1}{2-x}$, $\frac{1}{(x-2)^2}$,]0,2[
3. $\frac{2}{2-x}$, $-2\ln(2 - x)$

Koetehtäviä aiemmilta vuosilta

91.2.1. Mikä on a_{20} ja S_{20} a) sarjassa 2 + 6 + 10 + ... b) 2 + 6 + 18 + ... ? [a) a = 78 , S = 800
b) a = 2 324 522 934 , S = 3 486 784 400]

91.2.4. Mikä on lukujonon $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$ raja-arvo? [½]

91.2.6. Tennispallo pomppaa ylös aina 60% pudotuskorkeudesta. Kuinka monta kertaa 2,00 m:n korkeudelta pudotettu pallo on pompannut silloin, kun se viimeisen kerran nousee yli 1,0 cm korkeuteen? Kuinka pitkän matkan on pallo tällöin kulkenut? [10 ; 7,95 m]

91.2.7. Lukujono määritellään (a_n) : $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ ja $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$. Laske $a_{20} + a_{21}$. [3 486 784 401]

92.2.1. Määritä lukujonon (a_n), missä $a_1 = 3$ ja $a_2 = 4$ sekä $a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 2 \cdot a_{n-2}$ kaikilla $n \geq 3$ kymmenen ensimmäistä termiä. [3, 4, 6, 10, 18, 34, 66, 130, 258, 514]

92.2.2. Kuinka monta positiivista termiä on jonossa 1992 , 1990.8 , 1989.6 , ... ja mikä on niiden summa? [1660 kpl , 1 654 356]

92.2.3. Kirjassaan Andromeda uhkaa Michael Crichton kertoo, että *E. coli* bakteerin solu jakautuu joka 20. minuutti kahdeksi emosolun kokoiseksi soluksi. Jos solut saavat jatkaa jakautumistaa eivätkä osat kuole, väitetään, että *E. coli*-populaatio kasvaa vuorokaudessa maapallon kokoiseksi. Mikä näillä tiedoilla on *E. coli*n alkuperäinen koko? (Maapallon säde on 6 350 km) [227 litraa]

92.4.1. Määritä lukujonon (a_n), missä $a_1 = 2$ ja $a_n = a_{n-1} + n \cdot (-1)^n$, kun $n \geq 2$, kymmenen ensimmäistä termiä. [2, 4, 1, 5, 0, 6, - 1, 7, - 2, 8]

92.4.2. Lapsi haluaa rakentaa kolmiomaisen tornin palikoista siten, että ylimmällä rivillä on yksi palikka, seuraavalla 2, seuraavalla 3 jne. Jos hänellä on 1000 palikkaa, niin kuinka monta riviä hän pystyy tekemään ja montako palikkaa jää yli? [44 riviä , 10 yli]

92.4.3. Geometrisessa sarjassa $a_3 = 12$ ja $S_2 = 9$. Laske kymmenen ensimmäisen termin summa. [15 919]

94.2. Sukututkimusryhmässä päätettiin selvittää Matin (s.1977) esi-isät ja -äidit. Arvioidaan, että uusi sukupolvi syntyy aina 25 vuoden välein. Montako esivanhemmista on syntynyt 1500-luvun alussa? Montako esivanhempaa on kaikkiaan?

94.4. Päivien kolmannessa ryhmässä on 10 jäsentä. Koulun 125 oppilaasta jokainen kuuluu yhteen ja vain yhteen 10 ryhmästä. Mitkä ovat ryhmien koot, kun ne muodostavat aritmeettisen jonon?

94.9. Oppilaskunnan tavoitteena on saada jollekin seuraaville Meirän-päiville Suomen jääkiekkomaajoukkue laulamaan "Den glider in". Tarkoitusta varten avataan myös pankkitili, jonne laitetaan joka kuun alussa 750 mk. Kuinka monen tilillepanon jälkeen on päästy tavoitteeseen, joka on 150 000 mk, kun tilillä oleville rahoille maksetaan kuukaudessa 0,50% korkoa?

2. Matti (1. polvi) = 1 kpl, Vanhemmat (2.polvi, s. 1950) = 2 kpl , Isovanhemmat (3.polvi, s. 1925) = 4 kpl , ... , Esivanhemmat (20. polvi, s. 1500) = 2^{19} = **524 288**

Yhteensä = $2 + 4 + ... + 2^{19} = \frac{2(2^{19} - 1)}{2 - 1}$ = **1 048 574**

4. Olkoon 1. ryhmän jäseniä = a ja jonon vakioerotus olkoon d

$$\begin{cases} a + 2d = 10 \\ \frac{a + a + 9d}{2} \cdot 10 = 125 \end{cases} \begin{cases} a + 2d = 10 \;||\cdot(-2) \\ 2a + 9d = 25 || \cdot 1 \end{cases} ; 5d = 5 ; d = 1 ; a + 2 = 10 \; ; \; a = 8$$

V: Ryhmissä on **8, 9, 10, ... , 17 jäsentä**

9. 1. kk:n alussa rahaa tilillä = 750 mk = a , 2. kk:n alussa = $(a + a \cdot p/100) + a = a(1 + p/100) = a\alpha + a$

3. kk:n alussa = $a\alpha^2 + a\alpha + a$, ... , n. kk:n alussa = $a\alpha^{n-1} + ... + a\alpha^2 + a\alpha + a = \frac{a(\alpha^n - 1)}{\alpha - 1} = 150\,000$;

$\frac{750 \cdot (1{,}005^n - 1)}{1{,}005 - 1} = 150\,000$; $1{,}005^n - 1 = 1$; $1{,}0005^n = 2$ || lg( ) ; $n \cdot \lg 1{,}005 = \lg 2$; $n = 138{,}9$

V : **139 kerralla**

95.1.1. Määritä $\lim_{x \to \infty} \frac{(n+3)^2}{5n^2 - n + 1}$

95.1.2. Laske a_{10} ja S_{10} sarjassa 180 + 120 + 80 +....

95.1.6. Aritmeettisen sarjan termien erotus on 2,5. Kolmannen ja seitsemännen termin summa on 30 ja koko sarjan summa 162,5. Kuinka monta termiä on sarjassa?

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n+3)^2}{5n^2-n+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n^2+6n+9}{5n^2-n+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+6/n+9/n^2}{5-1/n+1/n^2} = \mathbf{\dfrac{1}{5}}$

2. Sarja on geometrinen, koska $\dfrac{120}{180} = \dfrac{80}{120} = \dfrac{2}{3} = q$; $a_{10} = aq^9 = 180 \cdot (\dfrac{2}{3})^9 = \dfrac{10240}{2187} = \mathbf{4\,\dfrac{1492}{2187}}$

$S_{10} = \dfrac{a(1 - q^{10})}{1-q} = \dfrac{180 \cdot [1 - (2/3)^{10}]}{1 - 2/3} = \dfrac{180 \cdot [1 - (2/3)^{10}]}{1/3} = 540 \cdot (1 - \dfrac{1024}{59049}) = \dfrac{1160500}{2187} = \mathbf{530\,\dfrac{1390}{2187}}$

6. $a_3 + a_7 = a + 2\cdot 2{,}5 + a + 6\cdot 2{,}5 = 30$; $2a + 20 = 30$; $2a = 10$; $a = 5$

$S_N = n \cdot \dfrac{5 + 5 + (n - 1)\cdot 2{,}5}{2} = 162{,}5$; $n(10 + 2{,}5n - 2{,}5) = 325$; $2{,}5n^2 + 7{,}5n - 325 = 0$

$5n^2 + 15n - 650 = 0$; $n = \dfrac{-15 \pm \sqrt{225 + 13000}}{10} = \dfrac{-15 \pm 115}{10}$; $\mathbf{n = 10}$ ($n = -13$)

97.1.1. Laske summat a) $\sum\limits_{n=1}^{10}(3+2n)$ b) $\sum\limits_{n=1}^{10}3\cdot 2^n$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{2^n}$

97.1.2. a) Määritä lukujonon $a_n = \dfrac{3n + 7}{7n + 3}$ raja-arvo $a = \lim a_n$.
b) Millä n:n arvoilla $| a_n - a | < 0{,}01$?

97.1.3. Päättyvän aritmeettisen lukujonon ensimmäinen termi on 2, termien erotus on 3 ja viimeinen termi on 3302. a) Montako lukua on jonossa? b) Mikä on niiden summa? Jonosta poistetaan kaikki luvulla 5 jaolliset termit. c) Kuinka monta lukua jää jäljelle?

97.1.4. Tutki lukujonon $a_n = \dfrac{n^3}{3} + n^2 - 3n$ monotonisuutta.

97.1.5. Luvut a, 20 ja b ovat aritmeettisen jonon peräkkäisiä jäseniä, ja vastaavasti luvut a, 16 ja b geometrisen jonon peräkkäisiä jäseniä. Määritä luvut a ja b.

97.1.6. Osoita matemaattista induktiota käyttäen, että kaikilla luonnollisilla luvuilla on voimassa $4 + 10 + \ldots + (6n - 2) = n(3n + 1)$.

97.1.7. Mitä arvoja geometrisen sarjan $(x) + (x + 2) + \ldots$ summa voi saada?

1. a) $\sum\limits_{n=1}^{10}(3+2n) = 5 + 7 + 9 + \ldots + 23 = \dfrac{10(5 + 23)}{2} = 140$

b) $\sum\limits_{n=1}^{10}3\cdot 2^n = 6 + 12 + 24 + \ldots = \dfrac{6(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 6(1023) = 6138$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{2^n} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{8} + \ldots = \dfrac{1½}{1 - ½} = 3$

2. $\lim \dfrac{3n + 7}{7n + 3} = \lim \dfrac{3 + 7/n}{7 + 3/n} = \dfrac{3}{7}$; $\left| \dfrac{3n + 7}{7n + 3} - \dfrac{3}{7} \right| = \left| \dfrac{21n + 49}{7(7n + 3)} - \dfrac{21n + 9}{7(7n + 3)} \right| = \dfrac{40}{7(7n + 3)} < 0{,}01$

$4000 < 49n + 21$; $49n > 3979$; $n > 81{,}2$ V: $n \geq 82$

3. a) $a_n = a_1 + (n - 1)d$; $3302 = 2 + (n - 1)3$; $3300 = (n - 1)3$; $1100 = n - 1$; $n = 1101$

b) $S = \dfrac{1101(2 + 3302)}{2} = 1\,818\,852$

c) $5 + 20 + \ldots + 3290$; $3290 = 5 + (n - 1)15$; $219 = n - 1$; $n = 220$; Jää $1101 - 220 = 881$

4. $a_n = \dfrac{n^3}{3} + n^2 + 3n$; Tutkitaan jatkuvaa funktioa $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^2 - 3x$, kun $x \geq 1$

$f'(x) = x^2 + 2x - 3$; $f'(x) = 0$; $x^2 + 2x - 3 = 0$; $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2 + 12}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4}{2}$; $x = 1$ tai $x = -3$

Par.: +++ -3 --- 1 +++   Ts. fkt on kasvava kun $x \geq 1$ eli lukujono a_n on kasvava

5. $\begin{cases} a, 20, b \text{ aritm.} \\ a, 16, b \text{ geom.} \end{cases}$; $\begin{cases} b - 20 = 20 - a \\ \dfrac{b}{16} = \dfrac{16}{a} \end{cases}$; $\begin{cases} b = 40 - a \\ ab = 256 \end{cases}$; $a(40 - a) = 256$; $40a - a^2 = 256$

$a^2 - 40a + 256 = 0$; $a = \dfrac{40 \pm \sqrt{1600 - 1024}}{2} = \dfrac{40 \pm 24}{2}$; $a = 32$ tai $a = 8$, jolloin $b = 8$ tai 32

6. 1° väite on tosi, kun n = 1, sillä 4 = 1(3 + 1)
2°Oletetaan, että väite on tosi, kun n = k $\Leftrightarrow$ 4 + 10 + … + (6k - 2) = k(3k + 1)
3° Osoitetaan, että väite on tosi myös kun n = k + 1
$\Leftrightarrow$ 4 + 10 + … + (6k - 2) + [6(k + 1) - 2] = (k + 1)[3(k + 1) + 1]
$\Leftrightarrow$ k(3k + 1) + [6(k + 1) - 2] = (k + 1)[3(k + 1) + 1]
$\Leftrightarrow 3k^2 + k + 6k + 6 - 2 = (k + 1)(3k + 4) \Leftrightarrow 3k^2 + 7k + 4 = 3k^2 + 4k + 3k + 4$, joka on tosi

7. (x) + (x + 2) + … on geometrinen sarja, jonka suhdeluku on $\frac{x+2}{x}$

Se suppenee eli saa reaalisen arvon , jos $\left|\frac{x+2}{x}\right| < 1 \Leftrightarrow |x + 2| < |x| \;||\; (\;)^2$

$x^2 + 4x + 4 < x^2$; 4x < -4 ; x < -1

Tällöin sarjan summa on $\dfrac{x}{1 - \frac{x+2}{x}} = \dfrac{x^2}{x - x - 2} = -½x^2$, joka on kasvava funktio, kun x < 0

Tällöin kun x < -1, on summa $S < -½(-1)^2 \Leftrightarrow S < -½$

97.2.1. Laske a) $\sum_{k=1}^{10}(3k+4)$ b) $\sum_{k=1}^{10}3^{k+4}$ c) $\sum_{k=1}^{\infty}(½)^k$

97.2.2. Laske aritmeettisen jonon 30. termi, kun $a_5 = 14$ ja $a_8 = 23$.

97.2.3. Milloin sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(x - 2)^k$ suppenee? Mikä on sen summa?

97.2.4. Osoita, että lukujono $a_n = 5^n$ on geometrinen jono.

97.2.5. Kuinka monta yhteenlaskettavaa on otettava summassa 1 + 3 + 5 + … + (2k - 1) , jotta summa olisi suurempi kuin 1000?

97.2.6. Laske lukujonon $a_n = \frac{n+3}{2n+1}$ raja-arvo. Mistä n:n arvosta alkaen jonon termit poikkeavat raja-arvostaan vähemmän kuin 0,001?

97.2.7. Henkilö aikoo sijoittaa joka vuoden alussa saman summan osakkeisiin, joiden arvo kohoaa vuosittain 12%. Miten suuri tämä summa on oltava, jotta osakkeiden arvo olisi 10 vuoden kuluttua miljoonan markkaa?

97.2.8. Osoita, että lukujonot $a_n = \frac{n+a}{n+b}$ ovat kasvavia, kun b > a.

97.2.9. Milloin monotoninen jono on suppeneva? Osoita, että jono (a_n), missä $a_1 = 2$ ja $a_{n+1} = \frac{a_n + 4}{5}$ suppenee.

97.2.10. Osoita täydellisellä induktiolla, että $5^k + 7$ on jaollinen 4:llä kaikilla $k \in N$

1. a) $\sum_{k=1}^{10}(3k+4) = 7 + 10 + 13 + … + 34 = \frac{7+34}{2}\cdot 10 = 205$

b) $\sum_{k=1}^{10}3^{k+4} = 3^5 + 3^6 + … + 3^{14} = \frac{3^5(1 - 3^{10})}{1 - 3} = 7\,174\,332$ c) $\sum_{k=1}^{\infty}(½)^k = (½) + (½)^2 + (½)^3 + … = \frac{½}{1 - ½} = 1$

2. $\begin{cases} a_5 = 14 \\ a_8 = 23 \end{cases}$; $\begin{cases} a + 4d = 14 \\ a + 7d = 23 \end{cases}$; 3d = 9 ; d = 3 ; a + 12 = 14 ; a = 2 ; $a_{30} = 2 + 29\cdot 3 = 89$

3. | q | < 1 ; | x - 2 | < 1 ; -1 < x - 2 < 1 ; 1 < x < 3. $S = \frac{x-2}{1-(x-2)} = \frac{x-2}{3-x}$

4. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5^{n+1-1} = 5$ on n:stä riippumaton vakio $\Rightarrow (a_n)$ on geometrinen jono.

5. 1 + 3 + 5 + … + (2k - 1) > 1000 ; $\frac{1 + 2k - 1}{2}\cdot k > 1000$; $k^2 > 1000$; k > 31,6 ; k > 32

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{n+3}{2n+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+3/n}{2+1/n} = ½$ $\left\lvert \frac{n+3}{2n+1} - \frac{1}{2} \right\rvert < \frac{1}{1000}$; $\left\lvert \frac{2n+6}{4n+2} - \frac{2n+1}{4n+2} \right\rvert < \frac{1}{1000}$; $\left\lvert \frac{5}{4n+2} \right\rvert < \frac{1}{1000}$; $\frac{5}{4n+2} < \frac{1}{1000}$ 4n + 2 > 5000 ; 4n > 4998 ; n > 1249,5 . V : 1250 alkaen
7. $s_0 = a$; $s_1 = a\alpha + a$; $s_2 = a\alpha^2 + a\alpha + a$; … ; $s_{10} = a\alpha^{10} + a\alpha^9 + \ldots + a = \frac{a(\alpha^{11} - 1)}{\alpha - 1}$ = 1 milj. mk $a = \frac{\alpha - 1}{\alpha^{11} - 1} \cdot 1$ milj. mk $= \frac{1{,}12 - 1}{1{,}12^{11} - 1}$ = 48 415,40 mk
8. $a_n = \frac{n+a}{n+b}$; $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$; $f'(x) = \frac{1\cdot(x+b) - 1\cdot(x+a)}{(x+b)^2} = \frac{b-a}{(x+b)^2} > 0 \Rightarrow f(x)$ on kasvava. Kun a_n yhtyy kokonaislukukohdilla funktioon f, on (a_n) myös kasvava.
9. Monotoninen jono suppenee, jos se on kasvava ja ylhäältä rajoitettu tai vähenevä ja alhaalta rajoitettu. $a_1 = 2 > 1$; $a_2 = \frac{a_1 + 4}{5} > \frac{1+4}{5} = 1$; $a_{n+1} = \frac{a_n + 4}{5} > \frac{1+4}{5} = 1$. Siis (a_n) on alhaalta rajoitettu. $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + 4}{5} - a_n = \frac{4 - 4a_n}{5} = \frac{4(1 - a_n)}{5} < 0$, joten $a_{n+1} < a_n$ joten jono on vähenevä. Koska jono on alhaalta rajoitettu ja vähenevä, on jono suppeneva.
10. 1° $5^1 + 7 = 12$ on jaollinen 4:lla 2° Oletetaan, että väite on tosi n:ään asti ts. $5^n + 7$ on jaollinen 4:lla ts. $5^n + 7 = 4d$ ts. $5^n = 4d - 7$, $n \in Z$ 3° Osoitetaan, että väite on tosi myös seuraavalla indeksin arvolla eli $5^{n+1} + 7$ on jaollinen 4:lla $5^{n+1} + 7 = 5\cdot 5^n + 7 = 5(4d - 7) + 7 = 20d - 35 + 7 = 20d - 28 = 4(5d - 7)$ on jaollinen 4:lla, koska $5d - 7 \in Z$

98.1.1. Laske a) 3 + 6 + 9 + … + 300 b) 24 + 12 + 6 + 3 + …

98.1.2. Geometrisen lukujonon kolmas termi on 36 ja neljäs termi 24. Mikä on lukujonon suhdeluku ja ensimmäinen termi?

98.1.3. Perunannoutokilpailussa 10 perunaa on sijoitettu lähtöpaikan kanssa samalle suoralle jonoon 2 m välein. Perunat on noudettava yksitellen lähtöpaikalle koriin, joka on jonon edessä 3 m ensimmäisestä perunasta. Kuinka pitkän matkan kilpailija joutuu juoksemaan noutaessaan kaikki perunat?

98.1.4. Metsässä on ensimmäisen vuoden alussa 12 000 puuta. Joka vuosi kaadetaan 2,5% puistaja sen jälkeen istutetaan 500 puuta.
a) Kuinka paljon puita on metsässä kolmannen vuoden alussa?
b) Esitä rekursiivisesti lukujono (a_n), missä a_n ilmaisee puumäärän n:nnen vuoden alussa.

98.1.5. Osoita, että lukujono $a_n = \frac{n}{2n+1}$ on kasvava. Määritä lukujonon raja-arvo.

98.1.6. Tasasivuisen kolmion sivun pituus on 10 cm. Kolmion sisään piirretään uusi kolmio yhdistämällä sivujen keskipisteet, tämän sisälle taas uusi kolmio jne. loputtomiin. Laske syntyneen kolmiojonon kaikkien kolmioiden a) piirien summa b) pinta-alojen summa.

98.1.7. Millä x:n arvoilla sarja $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} + \ldots$ suppenee? Mitä on summa S(x)? Piirrä y = S(x).

98.1.8. Olkoon $a_n = \ln \frac{n}{n+1}$, $n \in Z_+$. Tutki, suppeneeko sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

98.1.9. Henkilö on luvannut lahjoittaa koulun stipendirahastoon joka vuoden lopussa 5000 mk siksi, kunnes on kertynyt rahasto, josta voidaan joka vuosi jakaa 1000 mk suuruinen stipendi. Kuinka monta talletusta henkilön on tehtävä, jos korkokannaksi oletetaan 2%?

98.1.10. Osoita, että $1\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \ldots + n\cdot 3^n = ¾ \cdot [(2n - 1)3^n + 1]$ kaikilla n = 1, 2, 3, …

1. a) $3 + 6 + 9 + \ldots + 300 = \frac{3 + 300}{2} \cdot 100 = 15150$ b) $24 + 12 + 6 + \ldots = \frac{24}{1 - ½} = 48$
2. $a_3 \cdot q = a_4 \Leftrightarrow 36 \cdot q = 24$ || : 36 $\Leftrightarrow q = 2/3$. $a \cdot q^2 = a_3 \Leftrightarrow a \cdot (2/3)^2 = 36 \Leftrightarrow a \cdot (4/9) = 36$ || · 9/4 $\Leftrightarrow a = 81$

3. Matka $= 2 \cdot (3 + 5 + 7 + \ldots + (3 + 9\cdot 2)) = 2 \cdot \frac{3 + 21}{2} \cdot 10 = 240$ (m)

4. $a_1 = 12000$; $a_2 = 12000 – 0{,}025\cdot 12000 + 500 = 12200$
$a_3 = 12200\cdot 0{,}975 + 500 = 12375$ $a_1 = 12000$ JA $a_{n+1} = 0{,}975\cdot a_n + 500$

5. $a_n = \frac{n}{n + 1}$. Tutkitaan funktiota $f(x) = \frac{x}{x + 1}$, $x \geq 1$. $\lim \frac{n}{n + 1} = \lim \frac{1}{1 + 1/n} = 1$
$f'(x) = \frac{1\cdot(x + 1) - 1\cdot x}{(x + 1)^2} = \frac{1}{(x + 1)^2} > 0 \Rightarrow$ f on kasvava $\Rightarrow$ lukujono on kasvava.

6. Kolmion kahden sivun yhdysjana on kolmannen suuntainen ja puolet siitä.
Piirit yhteensä $= 3 \cdot (10\text{ cm} + 5\text{ cm} + 2½\text{ cm} + \ldots) = 3 \cdot \frac{10\text{ cm}}{1 - ½} = 60$ cm
Tasasivuisen kolmion ala $= \frac{s^2\sqrt{3}}{4}$ Alat yhteensä $= \frac{100\sqrt{3}}{4} + \frac{25\sqrt{3}}{4} + \ldots$
$= \frac{\sqrt{3}}{4}(100 + 25 + \ldots) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{100}{1 - ¼} = \frac{100\sqrt{3}}{3} \approx 57{,}7\ (\text{cm}^2)$

7. Suppenee, kun $|q| < 1$; $\left|\frac{1}{x + 1}\right| < 1 \Leftrightarrow 1 < |x + 1| \Leftrightarrow x + 1 > 1$ tai $x + 1 < -1 \Leftrightarrow x > 0$ tai $x < -2$
$S(x) = \frac{1/(x + 1)}{1 - 1/(x + 1)} = \frac{1}{x}$, jonka kuvaaja on hyperbeli, mutta vain se osa mikä on suppenemisalueella

8. $S_n = \sum \ln \frac{k}{k + 1} = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + \ldots + \ln\frac{n}{n + 1}$
$= \ln 1 – \ln 2 + \ln 2 – \ln 3 + \ln 3 – \ln 4 + \ldots + \ln n – \ln (n + 1) = -\ln (n + 1) \rightarrow -\infty$, joten sarja hajaantuu

9. Olkoon k = 5000 mk ja $\alpha = 1{,}02$.
Viimeinen pano = k , viimeistä edellinen korkoineen $k\cdot\alpha$, sitä edellinen korkoineen $k\cdot\alpha^2$, …
Summa $= k + k\alpha + k\alpha^2 + \ldots + k\alpha^{n-1} = \frac{k(\alpha^n - 1)}{\alpha - 1}$
Tämän korko on oltava 1000 mk ; $(\alpha – 1) \cdot \frac{k(\alpha^n - 1)}{\alpha - 1} = 1000$; $5000(\alpha^n – 1) = 1000$
$\alpha^n – 1 = 0{,}2$; $\alpha^n = 1{,}2$; $1{,}02^n = 1{,}2$ || log ( ) ; $\log 1{,}02^n = \log 1{,}2$;
$n\cdot\log 1{,}02 = \log 1{,}2$; $n = 9{,}2$. V: 10 kertaa

10. $1\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \ldots + n\cdot 3^n = ¾ \cdot [(2n - 1)3^n + 1]$
1° tosi , kun n = 1, sillä $1\cdot 3 = ¾ \cdot [(2\cdot 1 – 1)\cdot 3 + 1)] \Leftrightarrow 3 = ¾ \cdot [3 + 1] \Leftrightarrow 3 = 3$
2° Oletetaan, että väite on tosi k:hon asti $1\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \ldots + k\cdot 3^k = ¾ \cdot [(2k - 1)3^k + 1]$
3° Osoitetaan, että väite on tosi myös kun n = k + 1
$1\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \ldots + k\cdot 3^k + (k + 1)\cdot 3^{k+1} = ¾ \cdot [(2(k + 1) - 1)3^{k+1} + 1]$
$\Leftrightarrow ¾ \cdot [(2k – 1)3^k + 1] + (k + 1)\cdot 3^{k+1} = ¾ \cdot [(2k + 1)3^{k+1} + 1]$ $\|\cdot 4$
$\Leftrightarrow 3[(2k – 1)3^k + 1] + 4(k + 1)3^{k+1} = 3[(2k + 1)3^{k+1} + 1]$
$\Leftrightarrow 3(2k – 1)3^k + 3 + 4(k + 1)3^{k+1} = 3(2k + 1)3^{k+1} + 3$
$\Leftrightarrow 3(2k – 1)3^k + 4(k + 1)3^{k+1} = 3(2k + 1)3^{k+1}$ $\| : 3^k$ $\Leftrightarrow 3(2k – 1) + 4(k + 1)3 = 3(2k + 1)3$
$\Leftrightarrow 6k – 3 + 12k + 12 = 18k + 9 \Leftrightarrow 18k + 9 = 18k + 9$ mikä ja myös väite on tosi

98.2.1. Laske a) $\sum_{k=1}^{100}(5k+2)$ b) $\sum_{k=1}^{\infty}5^{2-k}$

98.2.2. Jalkapallostadionilla on 33 penkkiriviä. Alimmalla rivillä on 800 istumapaikkaa ja ylimmällä 4160. Istuimien lukumäärä lisääntyy rivi riviltä yhtä paljon. Kuinka monta istumapaikkaa on stadionilla a) kaikkiaan b) keskimmäisellä rivillä?

98.2.3. Lottovoittaja sijoittaa 4 miljoonan markan voittonsa valtion obligaatioihin, joiden korko on 5%. Vuoden lopussa hän maksaa tuotosta 28% veron ja nostaa huvituksiin 300 000 mk.
a) Kuinka paljon on hänellä rahaa 5. vuoden alussa?
b) Esitä rekursiivisesti lukujono (a_n), missä a_n on obligaatioiden arvo n:nnen vuoden alussa.

98.2.4. Aritmeettisen jonon viides termi on 25 ja seitsemän ensimmäisen termin summa on 147. Mikä on lukujonon ensimmäinen termi ja vakioerotus?

98.2.5. Osoita, että $x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6$ on geometrinen summa ja sovella siihen geometrisen summan laskukaavaa. Sievennä laskukaavan antama lauseke.

98.2.6. Millä x:n arvoilla sarja $\frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)^2} + \frac{x^3}{(x+1)^3} + \dots$ suppenee? Mikä on tällöin sarjan summa S(x)? Piirrä käyrä y = S(x)

98.2.7. Todista täydellisellä induktiolla, että epäyhtälö $3n^2 \geq 2n + 1$ on tosi kaikilla posit. kokonaisluvuilla n.

98.2.8. Tasasivuisen kolmion sivun pituus on 10 cm. Kolmion sisään piirretään ympyrä, tämän sisälle uusi tasasivuinen kolmio jne. loputtomiin. Laske syntyneen kolmiojonon kaikkien kolmioiden a) piirien summa b) alojen summa.

98.2.9. Osoita, että lukujono $a_n = \cos\frac{\pi}{2n}$ on kasvava ja suppeneva.

98.2.10. Henkilö maksaa ottamansa 20 000 mk lainan takaisin siten, että hän maksaa joka kuukausi 1000 mk ja kuukauden korot. Kuinka paljon hän joutuu maksamaan korkoja, kun lainan korkoprosentti on 7,5%?

1. a) $\sum_{k=1}^{100}(5k+2) = 7 + 12 + 17 + \dots + 502 = \frac{7 + 502}{2} \cdot 100 = 25450$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} 5^{2-k} = 5 + 1 + 1/5 + \dots + = \frac{5}{1 - 1/5} = \frac{25}{4} = 6¼$

2. $a_{33} = 4160$; $a_1 + 32d = 4160$, $800 + 32d = 4160$; $32d = 3360$; $d = 105$

$S = \frac{800 + 4160}{2} \cdot 33 = 81\,840$; $a_{17} = 800 + 16 \cdot 105 = 2480$

3. Olkoon a_0 = 4 milj. mk ja b = 300 000 mk ;

$a_1 = a_0 + 0{,}05a_0 - 0{,}28 \cdot 0{,}05a_0 - b = 1{,}036a_0 - b$ = 3 844 000 mk ; $a_2 = 1{,}036a_1 - b$ = 3 682 384 mk ;

$a_3 = 1{,}036a_2 - b$ = 3 514 949,82 mk ; $a_4 = 1{,}036a_3 - b$ = 3 341 488 mk

b) a_0 = 4 milj. mk ja $a_{n+1} = 1{,}036a_n - b$, missä b = 300 000 mk

4. $\begin{cases} a_5 = 25 \\ S_7 = 147 \end{cases}$ $\begin{cases} a + 4d = 25 \\ \frac{a + a + 6d}{2} \cdot 7 = 147 \end{cases}$ $\begin{cases} a + 4d = 25 \\ a + 3d = 21 \end{cases}$; d = 4 , a = 9

5. $x^6 + x^5y + x^4y^2 + \dots + xy^5 + y^6$ on geometrinen summa, sillä

$\frac{x^5y}{x^6} = \frac{x^4y^2}{x^5y} = \frac{x^3y^3}{x^4y^2} = \dots = \frac{y^6}{xy^5} = \frac{y}{x}$ = vakio $S_7 = \frac{x^6(1 - (y/x)^7)}{1 - y/x} = \frac{x^7(1 - y^7/x^7)}{x - y} = \frac{x^7 - y^7}{x - y}$

6. $q = \frac{x}{x+1}$. Sarja suppenee, jos $\left|\frac{x}{x+1}\right| < 1$; $| x | < | x + 1 |$ || $( )^2$; $x^2 < x^2 + 2x + 1$; $2x > -1$; $x > -½$

$S = \frac{x/(x + 1)}{1 - x/(x + 1)} = \frac{x}{x + 1 - x} = x$. Kuvaaja y = x piirretään vain alueelle x > - ½

7. $3n^2 \geq 2n + 1$. 1° Väite on tosi, kun n = 1 , sillä $3 \cdot 1^2 \geq 2 \cdot 1 + 1$ eli $3 \geq 2 + 1$, mikä on totta

2° Oletetaan, että väite on totta indeksin arvoon n = k asti ts. $3k^2 \geq 2k + 1$

3° Osoitetaan, että tällöin väite on totta myös kun n = k + 1 eli $3(k + 1)^2 \geq 2(k + 1) + 1$

$VP = 3(k + 1)^2 = 3k^2 + 6k + 3 \geq 2k + 1 + 6k + 3 = 2(k + 1) + 6k + 2 > 2(k + 1) + 1 = OP$

8. Alkup. kolmion sivu = a_1 = 10 cm ; Taulukkokirjasta sisään piirretyn ympyrän $r_1 = \frac{a_1\sqrt{3}}{6}$

Taulukosta ympäri piirretyn ympyrän $r_1 = \frac{a_2}{\sqrt{3}}$, joten $a_2 = r_1\sqrt{3} = ½a_1$ Samoin $a_3 = ½a_2 = ¼\, a_1$

Piiri = $3a_1 + 3 \cdot ½a_1 + 3 \cdot ¼a_1 + \dots = \frac{3a_1}{1 - ½} = 6a_1$ = 60 cm

$A = ¼\sqrt{3}a_1^2 + ¼\sqrt{3}(½a_1)^2 + ¼\sqrt{3}(¼a_1)^2 + \dots = ¼\sqrt{3}a_1^2(1+¼+1/16+\dots) = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4}\,\frac{1}{1 - 1/4} = \frac{\sqrt{3}}{3}a_1^2 = 0{,}577\ dm^2$

9. $a_n = \cos \pi/2n \leq 1$, joten jono on ylhäältä rajoitettu. Kulmat $\pi/2n$ ovat välillä $[0,½\pi]$, jolloin kosinin arvot positiivisia ja kosini on vähenevä. $\pi/2(n+1) < \pi/2n$ ja vähenevyys $\Rightarrow \cos \pi/2(n+1) > \cos \pi/2n$ eli jono on kasvava. Koska (a_n) on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, on (a_n) suppeneva.

10. $k_1 = \frac{20\,000 \cdot 7{,}5 \cdot 1}{100 \cdot 2} = 125$; $k_2 = \frac{19\,000 \cdot 7{,}5 \cdot 1}{100 \cdot 2} = 118{,}75$, … , $k_{20} = \frac{1000 \cdot 7{,}5 \cdot 1}{100 \cdot 12} = 6{,}25$

$K = \frac{125 + 6{,}25}{2} \cdot 20 = 1312{,}50$ (mk)

99.1.1. Laske summa a) $\sum_{n=1}^{5}(2+3n)$ b) $\sum_{n=1}^{5} 2\cdot 3^n$

99.1.2. Muodosta lukujonon $a_n = \frac{1+2+3+...+n}{n^2}$, n = 1, 2, 3, ... neljä ensimmäistä termiä. Sievennä termi a_n. Määritä lukujonon raja-arvo.

99.1.3. Aritmeettisessa jonossa on 10 termiä, joiden summa on 60. Määritä jonon ensimmäinen termi ja vakioerotus, kun viides termi on 5.

99.1.4. Suppeneeko a) jono $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$ b) sarja $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n+2}$?

99.1.5. Henkilö otti 500 000 mk:n asuntolainan 6% korolla. Takaisinmaksun ensimmäinen erä suoritettiin vuoden kuluttua lainan ottamisesta. Kuinka paljon hän joutui maksamaan korkoja, kun hän vuosittain maksoi koron ja 25 000 mk lyhennystä?

99.1.6. Osoita, että lukujono $a_n = \frac{2n}{n+1}$ on kasvava.

99.1.7. Ratkaise yhtälö $\frac{3-4x}{3} = (1-x) - (1-x)^2 + (1-x)^3 - (1-x)^4 + ...$

99.1.8. Kuinka monennesta termistä alkaen geometrisen jonon 2, 3, ... termit ovat suurempia kuin 1000?

99.1.9. Neliön, jonka sivu on 1 dm, sisään on piirretty tasakylkinen kolmio, jonka kanta yhtyy neliön sivuun ja kärki on vastakkaisella sivulla. Kolmion sisään on piirretty neliö, jonka kaksi kärkeä on kolmion kannalla, muut kärjet kolmion kyljillä. Tämän neliön sisään on piirretty kolmio kuten edellä jne. Laske näin muodostettujen neliöiden alojen summa.

99.1.10. Osoita täydellisellä induktiolla oikeaksi $1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + .. + n(n+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$

1. a) $\sum_{n=1}^{5}(2+3n) = 5 + 8 + 11 + 14 + 17 = 55$ b) $\sum_{n=1}^{5} 2\cdot 3^n = 6 + 18 + 54 + 162 + 486 = 726$

2. $a_n = \frac{1+2+3+...+n}{n^2}$. $a_1 = \frac{1}{1^2} = 1$; $a_2 = \frac{1+2}{2^2} = \frac{3}{4}$; $a_3 = \frac{1+2+3}{3^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$a_4 = \frac{1+2+3+4}{4^2} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$; $a_n = \frac{1+2+3+...+n}{n^2} = \frac{\frac{1}{2}(1+n)n}{n^2} = \frac{1+n}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}$

3. $\begin{cases} s_{10} = 60 \\ a_5 = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{1}{2}(a + a + 9d)\cdot 10 = 60 \\ a + 4d = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 2a + 9d = 12 \;\|\cdot 1 \\ a + 4d = 5 \;\|\cdot(-2) \end{cases}$; d = 2 ; a + 8 = 5 ; a = -3

4. a) $a_n = \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2+1/n}{1+2/n} \rightarrow 2$, joten jono suppenee

b) $\sum a_n$ ei suppene, koska sen termit eivät lähesty nollaa.

5. $k_1 = 500\,000\cdot 0{,}06 = 30\,000$, $k_2 = 475\,000\cdot 0{,}06 = 28\,500$, ... , $k_{20} = 25\,000\cdot 0{,}06 = 1500$
korot = 30 000 + 28 500 + ... + 1 500 = ½·20·(30 000 + 1 500) = 315 000 (mk)

6. $a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)}{(n+1)+1} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{(2n+2)(n+1) - 2n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n^2 + 2n + 2n + 2 - 2n^2 - 4n}{(n+1)(n+2)} =$
$\frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0$, joten $a_{n+1} > a_n$ ja siis a_n on kasvava

7. Yhtälön oikea puoli on geometrinen sarja, jonka q = -(1 - x) = x - 1.
Sarja suppenee, jos $|x - 1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$
$\frac{3-4x}{3} = (1-x) - (1-x)^2 + (1-x)^3 - (1-x)^4 + ...$; $\frac{3-4x}{3} = \frac{1-x}{1-(x-1)}$; $\frac{3-4x}{3} = \frac{1-x}{2-x}$
$(3 - 4x)(2 - x) = 3(1 - x)$; $6 - 3x - 8x + 4x^2 = 3 - 3x$; $4x^2 - 8x + 3 = 0$
$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{8} = \frac{8 \pm 4}{8}$; x = ½ tai x = 1½ (molemmat kelpaa)

8. $q = 3/2$; $a_n = 2\cdot(3/2)^{n-1}$; $a_n > 1000$; $2\cdot(1½)^{n-1} > 1000$; $(1½)^{n-1} > 500$ || lg ( ) $\lg (1½)^{n-1} > \lg 500$; $(n-1)\lg 1½ > \lg 500$ || : lg 1½ ; $n - 1 < 15{,}3$; $n > 16{,}3$ V: 17. alkaen
9. Ensimmäisen kolmion kanta = 1 ja korkeus = 1 eli neliön sivun suuruinen.   Olkoon toisen neliön sivu = x. Sen yläpuolelle jäävän kolmion kanta = x ja korkeus 1 - x.   Yläkolmio on yhdenmuotoinen ensimmäisen kolmion kanssa. $\frac{1-x}{1} = \frac{x}{1}$; $x = 1 - x$; $2x = 1$; $x = ½$, joten toisen neliön sivu on puolet ensimmäisen neliön suvusta. Samoin kolmannen neliön sivu on puolet toisen neliön sivusta eli ¼ .   Alojen summa $= 1 + (½)^2 + (¼)^2 + ... = \frac{1}{1 - ¼} = \frac{1}{¾} = 4/3$
10. Todistettava : $1\cdot3 + 2\cdot4 + 3\cdot5 + .. + n(n+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$ 1° Kun n = 1 : $1\cdot3 = \frac{1}{6}\cdot1(1+1)(2+7) \Leftrightarrow 3 = 3$ eli väite on tosi alussa.   2° Oletetaan, että väite on tosi n = k:hon asti ts. $1\cdot3 + 2\cdot4 + .. + k(k+2) = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+7)$ 3° Osoitetaan, että väite on tosi myös seuraavalla n:llä eli kun n = k + 1. $1\cdot3 + 2\cdot4 + .. + k(k+2) + (k+1)(k+3) = \frac{1}{6}(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+7)$ $\Leftrightarrow \frac{1}{6}k(k+1)(2k+7) + (k+1)(k+3) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+9)$ || $\cdot6 : (k+1)$ $\Leftrightarrow k(2k+7) + 6(k+3) = (k+2)(2k+9)$ $\Leftrightarrow 2k^2 + 7k + 6k + 18 = 2k^2 + 9k + 4k + 18$ $\Leftrightarrow 2k^2 + 13k + 18 = 2k^2 + 13k + 18$

99.2.1. Määritä aritmeettisen jonon sadas termi, kun kaksi ensimmäistä ovat 2 ja $1\frac{1}{3}$.

99.2.2. Määritä lukujonon, missä $a_1 = 3$, $a_{n+1} = n\cdot a_n + 2(n + 1)$, termit $a_2, ... , a_7$.

99.2.3. Laske lukujonon $a_n = \frac{2n - n^2}{2n^2 + 3}$ raja-arvo.

99.2.4. Laske summa $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

99.2.5. Luvut x, 20 ja y ovat kolme peräkkäistä termiä aritmeettisessa jonossa ja samoin luvut x, 16 ja y geometrisessa jonossa. Määritä luvut x ja y.

99.2.6. Osoita, että lukujono $a_n = \frac{n}{2n - 1}$ on vähenevä.

99.2.7. Kuinka monta termiä on otettava sarjasta 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - ... jotta summa olisi 421?

99.2.8. Millä x:n arvoilla sarja $e^x + e^{2x} + e^{3x} + ...$ suppenee? Määritä x siten, että sarjan summaksi tulee 2.

99.2.9. Tasasivuisen kolmion OAB sivu on a. A_1 on sivun OA keskipiste, A_2 janan OA_1 keskipiste jne. Vastaavasti B_1 on sivun OB keskipiste, B_2 janan OB_1 keskipiste jne. Laske päättymättömän murtoviivan $BA_1B_1A_2B_2$... pituus.

99.2.10. Todista, että $3 + 8 + ... + (n^2 - 1) = \frac{1}{6}n(n - 1)(2n + 5)$, kun $n \geq 2$

1. a = 2. d = 4/3 - 2 = -1/3 ; $a_{100} = 2 + 99\cdot(-2/3) = 2 - 66 = -64$
2. $a_{n+1} = n\cdot a_n + 2(n+1)$; $a_1 = 3$. $a_2 = 1\cdot a_1 + 2(1+1) = 1\cdot3 + 4 = 7$; $a_3 = 2a_2 + 2\cdot(2+1) = 2\cdot7 + 6 = 20$; $a_4 = 3a_3 + 2(3+1) = 3\cdot20 + 8 = 68$; $a_5 = 4a_4 + 2(4+1) = 4\cdot68 + 10 = 282$; $a_6 = 5a_5 + 2(5+1) = 5\cdot282 + 12 = 1422$ $a_7 = 6a_6 + 2(6+1) = 6\cdot1422 + 14 = 8546$
3. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-n^2}{2n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{2/n-1}{2+3/n^2} = \frac{-1}{2} = -½$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + ...$ on geom. sarja, a = 1 ja q = $\frac{2}{3}$, joten se suppenee ja arvo on $\frac{1}{1 - 2/3} = 3$
5. x, 20 ja y aritmeettista jonoa $\Rightarrow$ y - 20 = 20 - x ; y = 40 - x x, 16 ja y geometrista jonoa $\Rightarrow \frac{x}{16} = \frac{16}{y}$; xy = 256 ; x(40 - x) = 256 ; 40x - x^2 = 256 $x^2 - 40x + 256 = 0$; $x = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 1024}}{2} = \frac{40 \pm 24}{2}$; x = 32 jolloin y = 40 - 32 = 8 tai x = 8 , jolloin y = 40 - 8 = 32 .
6. $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2(n+1) - 1} - \frac{n}{2n - 1} = \frac{n+1}{2n+1} - \frac{n}{2n-1} = \frac{(n+1)(2n-1) - n(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{2n^2 - n + 2n - 1 - 2n^2 - n}{(2n+1)(2n-1)} =$ $\frac{-1}{(2n+1)(2n-1)} < 0 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$, joten a_n on vähenevä
7. 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - ... = 1 + (-3 + 5) + (-7 + 9) + ... = 1 + 2 + 2 + 2 + ... = 1 + n·2 = 421 n = 210, joten 1:n jälkeen on 210 paria termejä eli yhteensä 421 kpl
8. $e^x + e^{2x} + e^{3x} + ... = e^x + (e^x)^2 + (e^x)^3 + ...$ on geometrinen sarja, jonka a = e^x ja q = e^x Suppenee, kun $-1 < e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < 1$ (koska $e^x > 0$) $\Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$ Summa = 2 ; $\frac{e^x}{1 - e^x} = 2$; $e^x = 2 - 2e^x$; $3e^x = 2$; $e^x = 2/3$; x = ln 2/3
9. BA_1 = korkeusjana = ½$a\sqrt{3}$; A_1B_1 = ½a koska päätepisteet puolittavat sivut B_1A_2 = ½·½$a\sqrt{3}$ = ¼$a\sqrt{3}$; A_2B_2 = ½·½a = ¼a jne... seuraava jana puolet edellisestä Korkeusjanojen summa = $\frac{½a\sqrt{3}}{1 - ½} = a\sqrt{3}$ Sivujen summa = $\frac{½a}{1 - ½}$ = a. Joten murtoviiva = $a\sqrt{3} + a = a(\sqrt{3} + 1)$
10. 3 + 8 + ... + $(n^2 - 1)$ = 1/6 · n(n - 1)(2n + 5) n = 2 : 3 = 1/6 · 2 · 1 · 9 eli väite on tosi OL: väite on tosi n:n arvoon k asti ts. 3 + 8 + ... + $(k^2 - 1)$ = 1/6 ·k(k - 1)(2k + 5) VÄ: väite on tosi seuraavalla n:n arvolla n = k + 1 3 + 8 + ... + $(k^2 - 1) + [(k + 1)^2 - 1]$ = 1/6 ·(k + 1)k[2(k + 1) + 5] $\Leftrightarrow$ 1/6 · k(k - 1)(2k + 5) + $[k^2 + 2k + 1 - 1]$ = 1/6 ·k(k + 1)[2k + 7] || ·6 $\Leftrightarrow$ k(k - 1)(2k + 5) + 6k(k + 2) = k(k + 1)(2k + 7) || : k $\Leftrightarrow 2k^2 + 5k - 2k - 5 + 6k + 12 = 2k^2 + 7k + 2k + 7$ $\Leftrightarrow 2k^2 + 9k + 7 = 2k^2 + 9k + 7$ joka on tosi.

99.3.1. Laske a) $\sum_{n=1}^{10}(4n+5)$ b) $\sum_{n=1}^{10}(4^n \cdot 5)$

99.3.2. Määritä x siten, että jono x , x - 2, 2x - 1 on aritmeettinen. Mikä on kymmenes termi ja kymmenen ensimmäisen termin summa?

99.3.3. Määritä lukujonon $\left(\frac{2n + 1}{4n}\right)^3$ raja-arvo.

99.3.4. Aritmeettisessa summassa on kymmenen termiä, joiden summa on 40. Kahden ensimmäisen termin summa on -8. Määritä summan termit.

99.3.5. Ratkaise yhtälö ¼ = $x - x^3 + x^5 - x^7 + ...$

99.3.6. Henkilö otti 50 000 mk:n lainan 6% korolla. Takaisinmaksun ensimmäinen erä suoritettiin kuukauden kuluttua lainan ottamisesta. Kuinka paljon hän joutui maksamaan kaikkiaan korkoa, kun hän kuukausittain maksoi koron ja 2 500 mk lyhennystä?

99.3.7. Millä x:n arvoilla geometrinen sarja $x + \frac{2x^2}{2x - 1} + ...$ suppenee ja mikä on tällöin sen summa? Mitä arvoja sarjan summa voi saada? Piirrä summafunktion kuvaaja.

99.3.8. Määritä lukujonon $a_n = \frac{8n}{n^2 + 4}$ kolme suurinta termiä.

99.3.9. Olkoon (a_n) lukujono, jossa $a_1 = 3$ ja $a_n = (½)^{n-1} + a_{n-1}$, kun n = 2, 3, ... Määritä a_n.

99.3.10. Todista, että $2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + ... + (n+1) \cdot 2^n = n \cdot 2^{n+1}$.

---

1. $\sum_{n=1}^{10}(4n+5) = 9 + 13 + 17 + \ldots + 45 = \frac{9 + 45}{2} \cdot 10 = 270$

b) $\sum_{n=1}^{10}(4^n \cdot 5) = 20 + 80 + 320 + \ldots + 4^{10} \cdot 5 = \frac{20 \cdot (4^{10} - 1)}{4 - 1} = 6\,990\,500$

---

2. (x - 2) - x = (2x - 1) - (x - 2) ; x - 2 - x = 2x - 1 - x + 2 ; x = -3. Jono -3, -5, -7, …

$a_{10} = -3 + (10 - 1) \cdot (-2) = -3 - 18 = -21$; $s_{10} = \frac{-3 - 21}{2} \cdot 10 = -120$

---

3. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2n+1}{4n}\right)^3 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+1/n}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{8}\right)$

---

4. $\begin{cases} S_{10} = 40 \\ a_1 + a_2 = -8 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{a + a + 9d}{2} \cdot 10 = 40 \\ a + a + d = -8 \end{cases}$; $\begin{cases} 2a + 9d = 8 \;\|\cdot 1 \\ 2a + d = -8 \;\|\cdot(-1) \end{cases}$; 8d = 16 ; d = 2

2a + 2 = -8 ; 2a = -10 ; a = -5 . Summa = -5 -3 -1 + 1 + … + 13

---

5. $x - x^3 + x^5 - x^7 + \ldots = ¼$. Sarja suppenee, jos $|-x^2| < 1$; $x^2 < 1$; $|x| < 1$; $-1 < x < 1$

$\frac{x}{1 + x^2} = ¼$; $1 + x^2 = 4x$; $x^2 - 4x + 1 = 0$; $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$ V: $2 - \sqrt{3}$

---

6. Korot = $\frac{50\,000 \cdot 6 \cdot 1}{100 \cdot 12} + \frac{47\,500 \cdot 6 \cdot 1}{100 \cdot 12} + \ldots + \frac{2\,500 \cdot 6 \cdot 1}{100 \cdot 12} =$

$\frac{1}{200} \cdot (50\,000 + 47\,500 + \ldots + 2\,500) = \frac{1}{200} \cdot \frac{50\,000 + 2\,500}{2} \cdot 20 = 2\,625$ mk

---

7. $\left|\frac{2x}{2x - 1}\right| < 1$; $|2x| < |2x - 1|$ $\|\ ()^2$; $4x^2 < 4x^2 - 4x + 1$; $4x < 1$; $x < ¼$

$S = \frac{x}{1 - \frac{2x}{2x - 1}} = \frac{x(2x - 1)}{2x - 1 - 2x} = x - 2x^2$, jonka kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli ja siitä vain huipusta (¼, 1/8) vasemmalle oleva puolikas.

---

8. $a_n = \frac{8n}{n^2 + 4}$. Tutkitaan funktiota $f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}$, $x \geq 1$. $f´(x) = \frac{8 \cdot (x^2 + 4) - 2x \cdot 8x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{32 - 8x^2}{(x^2 + 4)^2}$

$f´= 0$; $32 - 8x^2 = 0$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$. f ´;n kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli

f ´:n merkit : | 1 +++ 2 ---

f:n kulku : | 1 kasvaa 2 vähenee joten suurin arvo on $f(2) = a_2$ ja muut suurimmat löytyvät sen molemmilta puolilta $a_1 = 8/5$; $a_2 = 2$; $a_3 = 24/13$; $a_4 = 8/5$

---

9. $a_1 = 3$ ja $a_n = (½)^{n-1} + a_{n-1}$, $a_1 = 3$; $a_2 = ½ + a_1$; $a_3 = (½)^2 + a_2 = (½)^2 + ½ + a_1$

$a_4 = (½)^3 + a_3 = (½)^3 + (½)^2 + ½ + a_1$, … , $a_n = (½)^{n-1} + (½)^{n-2} + \ldots + ½ + a_1 = \frac{½(1 - (½)^{n-1})}{1 - ½} + 3$

$= 1 - (½)^{n-1} + 3 = 4 - (½)^{n-1}$

---

10. $2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \ldots + (n+1) \cdot 2^n = n \cdot 2^{n+1}$.

1° n = 1 ; $2 \cdot 2^1 = 1 \cdot 2^{1+1}$ on tosi .

2° Oletetaan että väite on tosi n = k asti, ts. $2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + (k+1) \cdot 2^k = k \cdot 2^{k+1}$ on totta.

3° Osoitetaan, että väite on tosi myös seuraavalla n:n arvolla, ts. kun n = k+1

eli $2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + (k+1) \cdot 2^k + (k+1+1) \cdot 2^{k+1} = (k+1) \cdot 2^{k+1+1}$

VP = $2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + (k+1) \cdot 2^k + (k+1+1) \cdot 2^{k+1} = k \cdot 2^{k+1} + (k+1+1) \cdot 2^{k+1} = (k + k + 2) \cdot 2^{k+1} = 2(k+1) \cdot 2^{k+1} =$ $(k+1)2^{k+2}$ = OP

00.1.1. Laske lukujonon 10. termi ja 10 ensimmäisen termin summa jonossa a) 3, 5, 7, … b) 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, …

00.1.2. Montako aritmeettisen jonon 3, 10, 17, … termiä on välillä [2000,3000]

00.1.3. Geometrisen jonon kolme ensimmäistä termiä ovat 2, 3x + 2 ja $x^2 + 8x + 12$. Laske x.

00.1.4. Aritmeettisen jonon termi $a_{20} = 4320$ ja $a_{60} = -3480$. Määritä kolme ensimmäistä termiä.

00.1.5. Kalle joutui kesälomalla kuukaudeksi kotonaan töihin. Palkkavaatimukseksi hän asetti ensimmäisestä päivästä 1 p, toisesta 2 p, kolmannesta 4 p jne. Mikä oli Kallen palkka, kun työpäiviä oli heinäkuussa 21?

00.1.6. Matti aikoo juosta 10 000 m aikaan 30.00,00. Lasse Virenin oppien mukaan hän aikoo kiristää vauhtia loppua kohden ja tavoite on, että joka kierroksella aikaa kuluisi kierrokseen 2% vähemmän kuin edelliseen. Mikä on aika ensimmäisellä ja viimeisellä 400 m kierroksella?

00.1.7. Todista, että $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$

1. a) 3, 5, 7, … on aritm. jono a = 3 ja d = 2. $a_{10} = 3 + (10 - 1) \cdot 2 = 21$ $\quad s_{10} = \dfrac{3 + 21}{2} \cdot 10 = 120$

b) $1, \dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}$, … on geom. jono a = 1 , $q = \dfrac{2}{3}$; $a_{10} = 1 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^9 = \dfrac{512}{19683}$ $\quad s_{10} = \dfrac{1 \cdot (1 - (2/3)^{10})}{1 - 2/3} = \dfrac{58025}{19683} \approx 2{,}95$

2. 3, 10, 17, … aritm. jonon a = 3 ja d = 7

$a_n \geq 2000$; $3 + (n - 1) \cdot 7 \geq 2000$; $7(n - 1) \geq 1997$; $n - 1 \geq 285{,}3$; $n \geq 286{,}3$; $n \geq 287$

$a_n \leq 3000$; $3 + (n - 1) \cdot 7 \leq 3000$; $7(n - 1) \leq 2997$; $n - 1 \leq 428{,}1$; $n \leq 429{,}1$; $n \leq 429$

Jonossa on termejä 429 - 286 = 143

3. 2, 3x + 2, $x^2 + 8x + 12$ geometrinen ; $\dfrac{3x + 2}{2} = \dfrac{x^2 + 8x + 12}{3x + 2}$

$9x^2 + 12x + 4 = 2x^2 + 16x + 24$; $7x^2 - 4x - 20 = 0$ $\quad x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 560}}{14} = \dfrac{4 \pm 24}{14}$; x = 2 tai $x = -\dfrac{10}{7}$

4. $\begin{cases} a_{20} = 4320 \\ a_{60} = -3480 \end{cases}$; $\begin{cases} a + 19d = 4320 \quad \| \cdot (-1) \\ a + 59d = -3480 \quad \| \cdot 1 \end{cases}$; $40d = -7800 \quad \| : 40$; d = - 195

$a + 19 \cdot (-195) = 4320$; $a - 3705 = 4320$; $a = 8025$

$a_1 = 8025$; $a_2 = 8025 - 195 = 7830$; $a_3 = 7830 - 195 = 7635$

5. 1p + 2p + 4p + … on geom. summa a = 1 p ja q = 2 $\quad s_{21} = \dfrac{1\text{ p} \cdot (2^{21} - 1)}{2 - 1} = 1\text{ p} \cdot 2\,097\,151 = 20\,971{,}51$ mk

6. Olkoon 1. kierroksen aika = a. Muiden kierrosten ajat ovat $a_n = a \cdot 0{,}98^{n-1}$

$a + a \cdot 0{,}98 + a \cdot 0{,}98^2 + \ldots + a \cdot 0{,}98^{20} = 30 \cdot 60$ s ; $\dfrac{a(1 - 0{,}98^{25})}{1 - 0{,}98} = 1800$ s

$a(1 - 0{,}98^{25}) = 36 \quad \| : 0{,}3965a = 36 \quad \| : 0{,}3965$; a = 90,8s

$a_{25} = 90{,}8 \cdot 0{,}98^{24} = 55{,}9$ s V: 1. kierroksen aika on 90,8 s ja viimeisen aika on 55,9 s

7. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$

1° Tosi, kun n = 1 ? : $1 \cdot 1! = (1 + 1)! - 1$; 1 = 2 - 1

2° Oletetaan, että epäyhtälö on tosi n = k asti , ts $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots k \cdot k! = (k + 1)! - 1$

3° Todistetaan, että väite on tosi myös seuraavalla n:n arvolla

ts $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots k \cdot k! + (k + 1) \cdot (k+1)! = (k + 2)! - 1$

VP = $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots k \cdot k! + (k + 1) \cdot (k+1)! = (k + 1)! - 1 + (k + 1) \cdot (k + 1)!$

$= (1 + k + 1)(k + 1)! - 1 = (k + 2)(k + 1)! - 1 = (k + 2)! - 1 =$ OP

00.2.1. Mitkä ovat lukujonon termit $a_1 - a_3$, kun $a_0 = 2$ ja $a_{n+1} = n - a_n$.

00.2.2. Määritä raja-arvo a) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2 - 2n}{3n^2 + 4}$ b) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{n^2 + 1}}{3n - 1}$ c) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 - 3^n}{3 + 2 \cdot 3^n}$

00.2.3. Ratkaise yhtälö $x + x^3 + x^5 + \ldots = \dfrac{2}{3}$

00.2.4. Osoita, että jono (a_n), missä $a_n = \dfrac{n}{3n + 1}$, on kasvava ja ylhäältä rajoitettu.

00.2.5. Geometrisen sarjan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ summa on 4 ja suhdeluku $-\dfrac{1}{3}$. Laske summa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$

00.2.6. Neliön sivu on 10. Piirretään alkuperäisen neliön sisään uusi neliö, jonka kärkipisteet ovat ensimmäisen neliön sivujen keskipisteessä. Tämän sisään piirretään taas pienempi neliö samalla systeemillä ja niin edelleen. Mikä on neliöiden alojen summa?

00.2.7. Kalle ja Ville heittävät vuorotellen tieltä löytämäänsä 10 mk kolikkoa. Päätettiin, että rahan saa se, joka ensimmäisenä saa heitollaan kruunan. Millä todennäköisyydellä Kalle voittaa, jos hän saa aloittaa?

1. $a_1 = 0 - a_0 = 0 - 2 = -2$; $a_2 = 1 - a_1 = 1 - (-2) = 3$; $a_3 = 2 - a_2 = 2 - 3 = -1$
2. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-2n}{3n^2+4} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2/n}{3+4/n^2} = \frac{1-0}{3+0} = \frac{1}{3}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{3n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+1/n^2}}{3-1/n} = \frac{\sqrt{1}}{3} = \frac{1}{3}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-3^n}{3+2\cdot 3^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1/3)^n-1}{3\cdot(1/3)^n+2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$
3. $x + x^3 + x^5 + \ldots = \frac{2}{3}$ Vasen puoli on geometrinen sarja, $a = x$ ja $q = x^2$ Vasemmalla puolella on äärellinen arvo, jos se suppenee eli $\lvert x^2\rvert < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ $\frac{x}{1-x^2} = \frac{2}{3}$; $3x = 2 - 2x^2$; $2x^2 + 3x - 2 = 0$; $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$; $x = \frac{1}{2}$ (tai $x = -2$)
4. $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{3(n+1)+1} - \frac{n}{3n+1} = \frac{n+1}{3n+4} - \frac{n}{3n+1} = \frac{(n+1)(3n+1) - n(3n+4)}{(3n+4)(3n+1)} = \frac{3n^2 + n + 3n + 1 - 3n^2 - 4n}{(3n+4)(3n+1)}$ $= \frac{1}{(3n+4)(3n+1)} > 0$, koska osoittaja ja nimittäjä ovat > 0. Täten $a_{n+1} > a_n \;\forall\, n$, joten jono on aidosti kasvava. $a_n = \frac{n}{3n+1} < \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$, joten jono on ylhäältä rajoitettu.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 4$; $a - a/3 + a/9 - a/27 + \ldots = 4$; $\frac{a}{1-(-1/3)} = 4$; $\frac{a}{4/3} = 4$; $a = \frac{16}{3}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} = a_2 + a_4 + a_6 + \ldots = -a/3 - a/27 - \ldots = \frac{-a/3}{1-1/9} = \frac{-3a}{8} = -\frac{3}{8}\cdot\frac{16}{3} = -2$
6. Jokaisen neliön sisällä oleva neliö sisältää suuremman neliön jokaisesta nurkkaneljänneksistä puolet, joten sisällä olevan neliön ala on puolet edellisestä. Alojen summa on = $A + A/2 + A/4 + A/8 + \ldots = \frac{A}{1-\frac{1}{2}} = 2A = 2\cdot 10^2 = 200$
7. P(Kalle voittaa) = P(Kr tai Kl ja Kl ja Kr tai Kl ja Kl ja Kl ja Kl ja Kr tai …) = P(Kr) + P(Kl ja Kl ja Kr) + P(Kl ja Kl ja Kl ja Kl ja Kr) + … $= \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^5 + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$

00.3.1. Laske lukujonon 10. termi ja 10 ensimmäisen termin summa jonossa a) 3, 15, 27, … b) $1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$

00.3.2. Montako aritmeettisen jonon 3, 12, 21, … termiä on välillä [8 000,10 000]

00.3.3. Geometrisen jonon kolme ensimmäistä termiä ovat 3, $4x - 2$ ja $x^2 + 3x + 2$. Laske x.

00.3.4. Aritmeettisen jonon termi $a_{20} = 432$ ja $a_{60} = -328$. Määritä kolme ensimmäistä termiä.

00.3.5. Tasasivuisen kolmion sivu on 10. Piirretään alkuperäisen kolmion sisään uusi kolmio, jonka kärkipisteet ovat ensimmäisen kolmion sivujen keskipisteessä. Tämän sisään piirretään taas pienempi kolmio samalla systeemillä ja niin edelleen. Mikä on kolmioiden alojen summa?

00.3.6. Määritä raja-arvo a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2-5n}{3n^2+4}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n+1}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-3^n}{3+2\cdot 3^n}$

00.3.7. Ratkaise yhtälö $x + x^3 + x^5 + \ldots = \frac{1}{2}$

00.3.8. Osoita, että jono (a_n), missä $a_n = \frac{n}{4n+3}$, on kasvava ja ylhäältä rajoitettu.

00.3.9. Todista täydellisellä induktiolla, että $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ on tosi kaikilla $n \in Z_+$.

00.3.10. Kalle ja Ville heittävät vuorotellen tieltä löytämäänsä kahta 10 mk kolikkoa. Päätettiin, että rahat saa se, joka ensimmäisenä saa heitollaan molemmista kruunan. Millä todennäköisyydellä Kalle voittaa, jos hän saa aloittaa?

1. a) 3, 15, 27, … on aritmeettinen jono, jonka a = 3 ja d = 12. $a_{10} = a_1 + 9d = 3 + 9\cdot 12 = 111$
$s_{10} = \frac{1}{2}\cdot 10(a_1 + a_{10}) = 5(3 + 111) = 570$
b) $1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}$, … on geometrinen jono, jonka $a_1 = 1$ ja $q = -\frac{2}{3}$ $a_{10} = a_1\cdot q^9 = 1\cdot(-\frac{2}{3})^9 = -\frac{512}{19683}$

$$s_{10} = \frac{a_1(1 - q^{10})}{1 - q} = \frac{1\cdot(1 - \frac{1024}{59049})}{(1 + \frac{2}{3})} = \frac{11605}{19683}$$

2. jonossa 3, 12, 21, … d = 9. $a_1 = 8001$ ja $a_n = 9999$
$8001 + (n - 1)\cdot 9 = 9999$; $(n - 1)\cdot 9 = 1998 \;||\; : 9$; $n - 1 = 222$; $n = 223$

3. 3, $4x - 2$ ja $x^2 + 3x + 2$ on geometrinen, kun $\frac{x^2 + 3x + 2}{4x - 2} = \frac{4x - 2}{3}$
$(4x - 2)^2 = 3(x^2 + 3x + 2)$; $16x^2 - 16x + 4 = 3x^2 + 9x + 6$; $13x^2 - 25x - 2 = 0$
$x = \frac{25 \pm \sqrt{625 + 104}}{26} = \frac{25 \pm 27}{26}$; $x = 2$ tai $x = -\frac{1}{13}$

4. $\begin{cases} a_{20} = 432 \\ a_{60} = -328 \end{cases}$; $\begin{cases} a + 19d = 432 \;\; || \cdot (-1) \\ a + 59d = -328 \;\; || \cdot 1 \end{cases}$; $40d = -760$; $d = -19$; $a + 19\cdot(-19) = 432$
a = 793 ; a2 = 793 - 19 = 774 ; a3 = 774 - 19 = 755

5. Kolmion kahden sivun yhdysjana on kolmannen suuntainen ja puolet siitä. Täten kolmiot ovat yhdenmuotoisia mittakaavassa 1:2 ja alojen suhde on $k^2 = 1:4 = q \in\,]-1,1[$
$A_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{100\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$; $A = \frac{a}{1 - q} = \frac{25\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{100\sqrt{3}}{3}$

6. a) $\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2 - 5n}{3n^2 + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{6 - 5/n}{3 + 4/n^2} = \frac{6}{3} = 2$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{2n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1 + 1/n^2}}{2 + 1/n} = \frac{1}{2}$
c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1 - 3^n}{3 + 2\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/3^n - 1}{3/3^n + 2} = -\frac{1}{2}$

7. $x + x^3 + x^5 + \ldots = \frac{1}{2}$; Vasen puoli on geometrinen sarja, joka suppenee kun $|q| < 1$ eli $|x^2| < 1$ eli $|x| < 1$
$\frac{x}{1 - x^2} = \frac{1}{2} : 2x = 1 - x^2$; $x^2 + 2x - 1 = 0$; $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$, joista kelpaa $x = -1 + \sqrt{2}$

8. $a_{n+1} - a_n = \frac{n + 1}{4(n + 1) + 3} - \frac{n}{4n + 3} = \frac{n + 1}{4n + 7} - \frac{n}{4n + 3} = \frac{(n + 1)(4n + 3) - n(4n + 7)}{(4n + 3)(4n + 7)} =$
$\frac{4n^2 + 3n + 4n + 3 - 4n^2 - 7n}{(4n + 3)(4n + 7)} = \frac{3}{(4n + 3)(4n + 7)} > 0$, koska $n > 0$ jolloin nimittäjä > 0
Täten jono on kasvava
$a_n < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{n}{4n + 3} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4n < 4n + 3 \Leftrightarrow 0 < 3$,joka tosi. Jono on ylhäältä rajoitettu.

9. 1° väite tosi kun n = 1 sillä $\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + 1}$
2° Oletetaan, että väite on tosi n = k asti eli $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{k(k + 1)} = \frac{k}{k + 1}$
3° Osoitetaan, että tällöin väite on tosi myös seuraavallakin n:n arvolla eli kun n = k + 1 eli
$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{k(k + 1)} + \frac{1}{(k + 1)(k + 2)} = \frac{k + 1}{k + 2} \Leftrightarrow \frac{k}{k + 1} + \frac{1}{(k + 1)(k + 2)} = \frac{k + 1}{k + 2} \;||\; \cdot(k + 1)(k + 2)$
$\Leftrightarrow k(k + 2) + 1 = (k + 1)^2 \Leftrightarrow k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$ mikä on totta.

10. P(Kalle voittaa) = P(Kalle voittaa heti tai Kalle ei voita ja Ville ei voita ja Kalle voittaa tai…)
= P(2kr tai ei-2kr ja ei-2kr ja 2kr tai ei-2kr ja ei-2kr ja ei-2kr ja ei-2kr ja 2kr tai …)
= P(2kr) + P(ei-2kr ja ei-2kr ja 2kr) + P(ei-2kr ja ei-2kr ja ei-2kr ja ei-2kr ja 2kr) + …
$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \ldots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - (\frac{3}{4})^2} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - 9/16} = \frac{4}{16 - 9} = \frac{4}{7}$

01.1.1. Laske $\sum_{n=1}^{5} a_n$, kun $a_1 = 1$ ja $a_2 = 2$ sekä $a_{n+2} = 2a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n$ kaikilla $n \geq 1$.

01.1.2. Määritä $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 + 3n^2 + 2n + 1}{8n^3 - 6n^2 + 4n - 2}$

01.1.3. Aritmeettisen jonon kolmas termi on 6 ja viides termi on 9. Mikä on jonon ensimmäinen termi?

01.1.4. Todista, että $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

01.1.5. Suppenevan geometrisen sarjan $1 + q + q^2 + \ldots$ summa on 5.
Mikä on sarjan $2 + q + 2q^2 + q^3 + 2q^4 + \ldots$ summa?

01.1.6. Vuoden 1998 alussa oli alueella A 20 000 asukasta ja alueella B 3 000 asukasta. A:n väkiluku vähenee 5% ja B:n väkiluku kasvaa 3,5% vuosittain. Minä vuonna B:n väkiluku ylittää A:n väkiluvun?

01.1.7. Kuinka monennesta termistä lähtien lukujonon $a_n = \dfrac{2n+20}{2n+21}$ termit poikkeavat itseisarvoltaan raja-arvosta vähemmän kuin 0,001?

01.1.8. Osoita, että lukujono $a_n = \dfrac{2n}{3n+4}$ on kasvava ja rajoitettu.

01.1.9. Millä x:n arvoilla sarja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^n$ suppenee? Millä x:n arvolla summa on ¼ ?

01.1.10. Henkilö ottaa 100 000 mk lainan, jonka kiinteä korko on 9% ja laina-aika 10 v. Kuinka suuret ovat korkokulut, kun hän maksaa lainan takaisin vuosittain a) tasaerämaksuna b) ko. vuoden korot ja lyhentää lainaa joka vuosi 10 000 mk:lla?

1. $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 2\cdot 2 + \tfrac12\cdot 1 = 4\tfrac12,\ a_4 = 2\cdot 4\tfrac12 + \tfrac12\cdot 2 = 10;\ a_5 = 2\cdot 10 + \tfrac12\cdot 4\tfrac12 = 22\tfrac14$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{5} a_n = 1 + 2 + 4\tfrac12 + 10 + 22\tfrac14 = 39\tfrac34$

2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+3n^2+2n+1}{8n^3-6n^2+4n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{4+3/n+2/n^2+1/n^3}{8-6/n+4/n^2-2/n^3} = \frac{4+0+0+0}{8-0+0-0} = \tfrac12$

3. $\begin{cases} a_3 = 6 \\ a_5 = 9 \end{cases}$; $\begin{cases} a + 2d = 6 \ \|\cdot(-1) \\ a + 4d = 9 \ \|\cdot 1 \end{cases}$; $2d = 3$; $d = 1\tfrac12$; $a + 3 = 6$; $a = 3$

4. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

1° VÄ on tosi, kun n = 1, sillä $1^3 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$; $1 = \dfrac{1\cdot(2)^2}{4}$; $1 = 1$

2° Oletetaan, että VÄ on tosi n:n arvoon n = k asti , ts $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$

3° Onko VÄ tosi myös kun n = k + 1, ts. $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \dfrac{(k+1)^2(k+1+1)^2}{4}$

$VP = 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4} + \dfrac{4(k+1)^3}{4} = \dfrac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} =$

$\dfrac{(k+1)^2\,[k^2 + 4(k+1)]}{4} = \dfrac{(k+1)^2\,[k^2 + 4k + 4]}{4} = \dfrac{(k+1)^2\,(k+2)^2}{4} = OP$

5. $1 + q + q^2 + \ldots = 5$; $\dfrac{1}{1-q} = 5$; $1 = 5(1-q)$; $0{,}2 = 1 - q$; $q = 0{,}8$.

$2 + q + 2q^2 + q^3 + 2q^4 + \ldots = 2(1 + q^2 + q^4 + \ldots) + (q + q^3 + \ldots)$

$= \dfrac{2}{1-0{,}8^2} + \dfrac{0{,}8}{1-0{,}8^2} = \dfrac{2}{0{,}36} + \dfrac{0{,}8}{0{,}36} = \dfrac{200}{36} + \dfrac{80}{36} = \dfrac{280}{36} = \dfrac{70}{9} = 7\dfrac{7}{9}$

6. $V_{An} = 20\,000\cdot 0{,}95^n$; $V_{Bn} = 3000\cdot 1{,}035^n$; $V_{Bn} > V_{An}$; $3000\cdot 1{,}035^n > 20\,000\cdot 0{,}95^n$; $\dfrac{1{,}035^n}{0.95^n} > \dfrac{20\,000}{3000}$

$1{,}0895^n > 6{,}6667 \ \|\ \lg(\ )$; $n\cdot\lg 1{,}0895 > \lg 6{,}6667 \ \|\ : \lg 1{,}0895$; $n > 22{,}13$. Vastaus : vuonna 2020

7. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+20}{2n+21} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+20/n}{2+21/n} = \frac{2+0}{2+0} = 1$; $\left|a_n - 1\right| < 0{,}001$; $\left|\dfrac{2n+20}{2n+21} - 1\right| < 0{,}001$

$\left|\dfrac{2n+20}{2n+21} - \dfrac{2n+21}{2n+21}\right| < 0{,}001$; $\left|\dfrac{-1}{2n+21}\right| < 0{,}001$; $\dfrac{1}{2n+21} < 0{,}001 \ \|\ \cdot 1000(2n+21) > 0$

$2n + 21 > 1000$; $2n > 979$; $n > 489{,}5$. V: a_{490} lähtien

8. $a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)}{3(n+1)+4} - \frac{2n}{3n+4} = \frac{2n+2}{3n+7} - \frac{2n}{3n+4} = \frac{(2n+2)(3n+4) - 2n(3n+7)}{(3n+7)(3n+4)} =$

$\frac{6n^2 + 8n + 6n + 8 - 6n^2 - 14n}{(3n+7)(3n+4)} = \frac{8}{(3n+7)(3n+4)}$ > 0, koska kaikki tekijät > 0. $a_{n+1} > a_n$

Koska jono on kasvava on $a_n > a_1 = 2/7$, joten jono on alhaalta rajoitettu.

$a_n = \frac{2n}{3n+4} < \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$, joten jono on ylhäältä rajoitettu. Täten jono on rajoitettu.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^n$ on geometrinen sarja, joka suppenee, jos suhdeluku $|q| = \left|\frac{2x-1}{x+1}\right| < 1$

$|2x - 1| < |x + 1| \;||\; (\;)^2$; $4x^2 - 4x + 1 < x^2 + 2x + 1$; $3x^2 - 6x < 0$; NK : $3x(x - 2) = 0$; $x = 0$ tai $x = 2$.
KUV: YAP +++ 0 --- 2 +++ joten $0 < x < 2$.

$S = ¼$; $\frac{\frac{2x-1}{x+1}}{1 - \frac{2x-1}{x+1}} = ¼$; $\frac{2x-1}{x+1-2x+1} = ¼$; $\frac{2x-1}{2-x} = ¼$; $8x - 4 = 2 - x$; $9x = 6$; $x = \frac{2}{3}$

10. a) Tasaerämaksu $a = \frac{K\alpha^T(\alpha - 1)}{\alpha^T - 1}$ $\frac{100000 \cdot 1{,}09^{10} \cdot (1{,}09 - 1)}{1{,}09^{10} - 1} = 15582{,}00$

Kulut kaikkiaan 10·15582 mk = 155 820 mk, josta lyhennystä 100 000 mk ja korkoa 55 820 mk
b) Korkoja 100 000·0,09 + 90 000·0,09 + … + 10 000·0,09 = (100 000 + 90 000 + … + 10 000)·0,09 =
$\frac{100\,000 + 10\,000}{2} \cdot 10 \cdot 0{,}09 = 49\,500$ (mk)

01.2.1. Määritä $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + 2n}{2n^2 - 4}$.

01.2.2. Laske summa $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \ldots$

01.2.3. a) Määritä aritmeettisessa jonossa ensimmäisen negatiivisen termin järjestysluku, kun jonon kaksi ensimmäistä termiä ovat 263 ja 240. b) Laske kyseisten positiivisten termien summa.

01.2.4. Geometrisen jonon ensimmäinen termi on 2 ja neljäs termi on 6¾. Mikä on jonon kuudes termi?

01.2.5. Osoita, että lukujono $a_n = \frac{2n+3}{n+1}$ on monotoninen. Mikä on monotonisuuden laatu?

01.2.6. Ratkaise yhtälö $\sum_{n=1}^{k}(5 - \frac{n}{2}) = 0$.

01.2.7. Jauhe-erän puhdistamiseen käytetään laitetta, joka poistaa roskista 25% yhdellä puhdistuskerralla. Jos jauhe-erässä on alkuun roskia 17% tilavuudesta, niin kuinka monta puhdistuskertaa tarvitaan, että roskien osuus vähenee alle 0,1%:iin tilavuudesta?

01.2.8. Vähenevän aritmeettisen jonon kolmen ensimmäisen termin summa on 12. Samojen jäsenien tulo on 55. Montako termiä jonon alusta on vähintään laskettava yhteen, jotta summa olisi negatiivinen?

01.2.9. Ratkaise yhtälö $\frac{3 - 4x}{3} = 1 - x - (1 - x)^2 + (1 - x)^3 - (1 - x)^4 - \ldots$

01.2.10. Todista täydellisellä induktiolla, että $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$, kun $n \geq 2$

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + 2n}{2n^2 - 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 + 2/n}{2 - 4/n^2} = \frac{4}{2} = 2$

2. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1 - (-1/3)} = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4}$ (päättymätön geometrinen sarja)

3. $a_1 = 263$, $a_2 = 240$, $d = a_2 - a_1 = 240 - 263 = -23$

a) $a_n < 0$; $263 + (n - 1)(-23) < 0$; $263 -23n + 23 < 0$; $-23 < -286$; $n > 12,4$. V : n = 13
b) $a_{12} = 263 + 11\cdot(-23) = 10$; $s_{12} = ½(263 + 10)\cdot 12 = 1638$

4. $a_1 = 2$; $a_4 = 6¾$; $2\cdot q^3 = 27/4$; $q^3 = 27/8$; $q = 3/2$; $a_6 = 2\cdot(3/2)^5 = 243/16 = 15\ 3/16$

5. $a_n = \dfrac{2n + 3}{n + 1}$; $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 1}$; $f'(x) = \dfrac{2(x + 1) - 1(2x - 3)}{(x + 1)^2} = \dfrac{-1}{(x + 1)^2} < 0$
$\Rightarrow$ f aidosti vähenevä $\Rightarrow a_n$ on aidosti vähenevä

6. $\sum_{n=1}^{k}(5-\frac{n}{2})=0$; $(5 - \frac{1}{2}) + (5 - \frac{2}{2}) + (5 - \frac{3}{2}) + \ldots + (5 - \frac{k}{2}) = 0$
$4½ + 4 + 3½ + \ldots + (5 - \frac{k}{2}) = 0$. Huomataan, että $5 - \frac{k}{2} = - 4½$; $\frac{k}{2} = 9½$; k = 19

7. Roskia aluksi 0,17V. Jokaisen puhdistuskerran jälkeen roskista 75% on jäljellä
$0,17V\cdot 0,75^n < 0,001V$; $0,75^n < 0,00588$ || ln ( ) $n\cdot \ln 0,75 < \ln 0,00588$; $n > 17,9$. V: 18 krt.

8. Olkoon keskimmäinen termi = a, ensimmäinen = a - d ja kolmas = a + d
a - d + a + a+ d = 12 ; 3a = 12 ; a = 4.
$(4 - d)4(4 + d) = 55$; $16 - d^2 = 55/4$; $d^2 = 9/4$; $d = \pm 3/2$. Vähenevä $\Rightarrow d = -1½$
$5½ + 4 + 2½ + \ldots (5 - (n - 1)1½) < 0$; $\dfrac{5½ + 5½ -1½(n - 1)}{2}\cdot n < 0$; $11 - 1½(n - 1) < 0$
$- 1½n < -12½$; $n > 8,3$; V: Vähintään 9 termiä.

9. $q = \dfrac{- (1 - x)^2}{(1 - x)} = x - 1$. Sarja suppenee, kun $|x - 1| < 1$; $-1 < x - 1 < 1$; $0 < x < 2$
$\dfrac{3 - 4x}{3} = (1 - x) - (1 - x)^2 + (1 - x)^3 + \ldots$; $\dfrac{3 - 4x}{3} = \dfrac{1 - x}{1 - (x - 1)}$; $(3 - 4x)(2 - x) = 3(1 - x)$
$6 - 3x - 8x + 4x^2 = 3 - 3x$; $4x^2 - 8x + 3 = 0$; $x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{8} = \dfrac{8 \pm 4}{8}$; x = 1½ tai x = ½

10. $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n - 1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$ n = 2 : $\frac{1}{2!} = 1 - \frac{1}{2!} \Leftrightarrow ½ = ½$ eli väite on tosi, kun n = 2
Oletetaan, että väite on tosi n:n arvoon k asti ts. $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{k - 1}{k!} = 1 - \frac{1}{k!}$
Todistetaan, että väite on tosi myös seuraavalla n:n arvolla eli kun n = k + 1
$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{k - 1}{k!} + \frac{k + 1 - 1}{(k + 1)!} = 1 - \frac{1}{(k + 1)!}$
$VP = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{k - 1}{k!} + \frac{k + 1 - 1}{(k + 1)!} = 1 - \frac{1}{k!} + \frac{k}{(k + 1)!} = 1 - \frac{k + 1}{(k + 1)!} + \frac{k}{(k + 1)!} = 1 - \frac{1}{(k + 1)!} = OP$

02.1.1. Määritä jonon a_n viisi ensimmäistä termiä, kun $a_1 = 2$, $a_{n+1} = (2n – 1) a_n$

02.1.2. Laske $\sum_{k=1}^{100}(3k+5)$

02.1.3. Mistä n:n arvosta alkaen jonon $a_n = \dfrac{2n - 1}{3n}$ termit poikkeavat jonon raja-arvosta vähemmän kuin 10^{-4}?

02.1.4. Millä x:n arvoilla suppenee geometrinen sarja, jonka kaksi ensimmäistä termiä ovat x + 1 ja x - 3? Mikä on tällöin sarjan arvo?

02.1.5. Määritä aritmeettisen jonon termi a_{20} , kun $a_5 = 10$ ja $a_8 = 12$.

02.1.6. Geometrisen sarjan summa on 4. Kun siitä poistetaan termit, joiden järjestysluku on parillinen, jää jäljelle sarja, jonka summa on 3. Määritä a ja q.

02.1.7. Määritä lukujonon $u_n = \dfrac{n - 1}{(n + 2)^2}$, n =1, 2, 3 , . . . , kolme suurinta termiä.

02.1.8. Laske summa $\sum_{n=1}^{100}(-1)^n\cdot n^2$.

02.1.9. Perhe otti asuntoa varten 100 000 € lainan koron ollessa 4,5 %. He lyhentävät lainaa kuukausittain 765 €:n suuruisella tasaerällä. Kuinka monta vuotta perheen asuntolainan lyhennys kestää ?

02.1.10. Todista, että $1\cdot2^1 + 2\cdot2^2 + 3\cdot2^3 + \ldots + n\cdot2^n = (n - 1)2^{n+1} + 2$ kaikilla $n \geq 1$

---

1. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = (2n - 1)\,a_n$. $a_2 = a_{1+1} = (2\cdot1-1)a_1 = 1\cdot2 = 2$. $a_3 = a_{2+1} = (2\cdot2 - 1)a_2 = 3\cdot2 = 6$
$a_4 = a_{3+1} = (2\cdot3 - 1)a_3 = 5\cdot6 = 30$. $a_5 = a_{4+1} = (2\cdot4 - 1)a_4 = 7\cdot30 = 210$ V: 2, 2, 6, 30 ja 210

---

2. $\sum_{k=1}^{100}(3k + 5) = 8 + 11 + 14 + \ldots + 305 = \frac{8 + 305}{2}\cdot100 = 15650$ (kyseessä aritm. summa!)

---

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n - 1}{3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2 - 1/n}{3} = \frac{2}{3}$; $\left|\frac{2n - 1}{3n} - \frac{2}{3}\right| < 10^{-4} \Leftrightarrow \left|\frac{2n - 1 - 2n}{3n}\right| < 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{1}{3n} < \frac{1}{10\,000} \;\|\cdot30\,000n$
$\Leftrightarrow 10\,000 < 3n \Leftrightarrow n > 3\,333{,}3$ V: $n = 3\,334$ alkaen

---

4. $q = \frac{x - 3}{x + 1}$ sarja suppenee, jos $\left|\frac{x - 3}{x + 1}\right| < 1 \Leftrightarrow |x - 3| < |x + 1| \;\|\;(\,)^2$ mol. puolet > 0

$x^2 - 6x + 9 < x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow -8x < -8 \;\|:(-1) \Leftrightarrow x > 1$; $S = \frac{x + 1}{1 - \frac{x - 3}{x + 1}} = \frac{(x + 1)^2}{x + 1 - x + 3} = \frac{1}{4}(x + 1)^2$

---

5. $\begin{cases} a_5 = 10 \\ a_8 = 12 \end{cases}$; $\begin{cases} a + 4d = 10 \\ a + 7d = 12 \end{cases}$; $3d = 2$; $d = \frac{2}{3}$; $a + 4\cdot\frac{2}{3} = 10$; $a = \frac{22}{3}$; $a_{20} = a + 19d = \frac{22}{3} + 19\cdot\frac{2}{3} = \frac{60}{3} = 20$

---

6. $\begin{cases} a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots = 4 \\ a + aq^2 + aq^4 + \ldots = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} a/(1 - q) = 4 \\ a/(1 - q^2) = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} a = 4 - 4q \\ a = 3 - 3q^2 \end{cases}$; $4 - 4q = 3 - 3q^2$

$3q^2 - 4q + 1 = 0$; $q = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6}$; ($q = 1$ tai) $q = \frac{1}{3}$; $a = 4 - 4\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

---

7. $u_n = \frac{n - 1}{(n + 2)^2}$, Tutkitaan funktiota $f(x) = \frac{x - 1}{(x + 2)^2}$, kun $x \geq 1$

$f'(x) = \frac{1\cdot(x + 2)^2 - 2(x + 2)\cdot(x - 1)}{(x + 2)^4} = \frac{x + 2 - 2x + 2}{(x + 2)^3} = \frac{4 - x}{(x + 2)^3}$

f ' 1 + + + 4 - - -
f | ↗ ‾ ↘ $\Rightarrow u_4$ on suurin ja seuraavat kaksi löytyvät oikealta tai vasemmalta

$u_4 = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$; $u_3 = \frac{2}{25}$; $u_2 = \frac{1}{16}$; $u_5 = \frac{4}{49}$; $u_6 = \frac{5}{64}$ V: $\frac{1}{12}$, $\frac{4}{49}$ ja $\frac{2}{25}$

---

8. $\sum_{n=1}^{100}(-1)^n\cdot n^2 = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 - \ldots - 99^2 + 100^2$
$= (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + (6^2 - 5^2) + \ldots + (100^2 - 99^2)$
$= (2 + 1)(2 - 1) + (4 + 3)(4 - 3) + (6 + 5)(6 - 5) + \ldots + (100 + 99)(100 - 99)$
$= 3 + 7 + 11 + \ldots + 199 = \frac{3 + 199}{2}\cdot50 = 5050$

---

9. Olkoon velka alussa $V_0 = 100\,000$€ ja n:ntenä kuukautena $= V_n$ sekä lyhennys $A = 765$€

Kuukausikorko $= \frac{4{,}5}{12\cdot100} = 0{,}00375$, joten koronkorkotekijä $\alpha = 1{,}00375$

$V_{n+1} = V_n\cdot\alpha - A$, jonka rekursioyhtälön ratkaisu on $V_n = V_0\cdot\alpha^n - \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}\cdot A$

$= 100\,000\alpha^n - \frac{\alpha^n - 1}{0{,}00375}\cdot765 = 100\,000\alpha^n - (\alpha^n - 1)\cdot204\,000 = 204\,000 - 104\,000\cdot\alpha^n$

Velka lopussa = 0 ; $204\,000 = 104\,000\alpha^n$ eli $\alpha^n = 1{,}9615$; $1{,}00375^n = 1{,}9615 \;\|\lg(\,)$
$n\cdot\lg 1{,}00375 = \lg 1{,}9615$; $n = 180$. Vuosia kuluu 180 / 12 = 15 vuotta

---

10. $1\cdot2^1 + 2\cdot2^2 + 3\cdot2^3 + \ldots + n\cdot2^n = (n - 1)2^{n+1} + 2$ kaikilla $n \geq 1$
1° väite tosi, kun n = 1: $1\cdot2^1 = (1 - 1)2^{1+1} + 2 \Leftrightarrow 2 = 2$ eli tosi
2° Oletetaan että väite on tosi n = k asti, eli $1\cdot2^1 + 2\cdot2^2 + 3\cdot2^3 + \ldots + k\cdot2^k = (k - 1)2^{k+1} + 2$
3° Osoitetaan, että väite on tällöin tosi myös seuraavallakin n:n arvolla eli, kun n = k + 1.
$1\cdot2^1 + 2\cdot2^2 + 3\cdot2^3 + \ldots + k\cdot2^k + (k + 1)\cdot2^{k+1} = (k + 1 - 1)2^{k+1+1} + 2$
$\Leftrightarrow (k - 1)\cdot2^{k+1} + 2 + (k + 1)\cdot2^{k+1} = k\cdot2^{k+2} + 2 \Leftrightarrow (k - 1 + k + 1)\cdot2^{k+1} = k\cdot2^{k+2} \;\|:2^{k+1} \Leftrightarrow 2k = k\cdot2$, mikä on tosi,
joten väite on tosi myös seuraavallakin n = k + 1.