



Tulosääntö, kertoma, kombinaatio

1.1. Luokalla on 7 poikaa ja 18 tyttöä. Montako erilaista toimikuntaa heistä voidaan valita, jos siihen tulee a) huvimestari, - sihteerin ja - jäsen b) samat kuin edellä, mutta sihteerin tulee olla tyttö c) kolme jäsentä?

1. a) $25 \cdot 24 \cdot 23 = 13\,800$ b) $18 \cdot 24 \cdot 23 = 9936$ c) $\binom{25}{3} = 2300$

2.4. Kuoroon kuuluu 6 poikaa ja 6 tyttöä. Kuinka monella eri tavalla kuorolaiset voidaan järjestää näyttämölle a) yhteen riviin kasvot yleisöön päin, tytöt ja pojat vuorotellen b) kahteen riviin kasvot yleisöön päin, tytöt eteen ja pojat heidän taakseen?

4. a) (PTPT...tai TPTP...): $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots = 2 \cdot 6! \cdot 6! = 1\,036\,800$ b) (TTTTTT ja PPPPPP): $6! \cdot 6! = 518\,400$

3.4. Laatikossa on 6 punaista, 5 valkoista ja 4 sinistä palloa. Kuinka monta mahdollisuutta on valita näistä 4 palloa, joista a) 3 on punaista ja 1 on sininen b) 2 on punaista, 1 sininen ja 1 on valkoinen c) ainakin 1 on punainen ja täsmälleen 1 on valkoinen?

4. a) $3 \text{ P ja } 1 \text{ S} = \binom{6}{3} \binom{4}{1} = 20 \cdot 4 = 80$ b) $2 \text{ P ja } 1 \text{ S ja } 1 \text{ V} = \binom{6}{2} \binom{4}{1} \binom{5}{1} = 15 \cdot 4 \cdot 5 = 300$

c) ainakin 1 P ja 1 V = 1 V ja (1 P ja 2 S tai 2 P ja 1 S tai 3 P) = $\binom{5}{1} \cdot \left(\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2} + \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} + \binom{6}{3} \right)$
 $= 5 \cdot (6 \cdot 6 + 15 \cdot 4 + 20) = 5 \cdot 116 = 580$

Todennäköisyysslaskenta

5.6. Eräällä Tyynen Valtameren saarella on päivän sateen todennäköisyys 0,6, jos edellisenä päivänä satoi ja 0,2, jos edellisenä päivänä oli pouta. Mikä on todennäköisyys sille, että ylihuomenna ei sada, jos eilen satoi?

6. Puumallin mukaan tai esim. $P(\text{ylihuomenna sataa}) = P(\text{SSE tai SEE tai ESE tai EEE})$
 $= 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,2 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,624$

6.5. Ryhmästä, jossa on 6 tyttöä ja 4 poikaa, valitaan arvalla työryhmä hoitamaan kirjatilauksia. Millä todennäköisyydellä ryhmään tulee kaksi tyttöä, jos ryhmään valitaan kaikkiaan a) 2 b) neljä oppilasta?

5. a) $P(2 \text{ T}) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ b) $P(2 \text{ T ja } 2 \text{ P}) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{15 \cdot 6}{210} = \frac{3}{7}$

Tai a) $\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9}$ b) TTPP, TPTP, TPPT, PTPP, PTPT, PPTT $\Rightarrow 6 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7}$

7.1. Eräässä viikkoennusteessa ilmoitettiin sateen todennäköisyydeksi lauantaina 40% ja sunnuntaina 30%. Millä todennäköisyydellä kyseisenä viikonloppuna ainakin toinen päivä sateeton?

1. $P(\text{ainakin 1 sateeton}) = 1 - P(\text{molempina sataa}) = 1 - 0,4 \cdot 0,3 = 1 - 0,12 = 0,88$

8.2. Kaksinumeroinen luonnollinen luku arvotaan noppaa heittämällä niin, että ensimmäinen heitto antaa kymmenten ja toinen heitto ykkösten numeron. Millä todennäköisyydellä näin saatu luku on a) suurempi kuin 60 b) suurempi kuin 30 ja parillinen?

2. a) $P(\text{arvo} > 60) = P(1. = 6 \text{ ja } 2. = \text{mikä vaan}) = 1/6 \cdot 1 = 1/6$ (Tai luettelemalla eri mahdollisuudet jne.)
 b) $P(\text{arvo} > 30 \text{ ja parillinen}) = P(1. \geq 3 \text{ ja } 2. \text{ on parillinen}) = 4/6 \cdot 3/6 = 1/3$

9.8. Juha ja Riikka poimivat omenoita, kumpikin omaan samanlaiseen koriinsa: Juha 3 punaista ja 7 valkoista, Riikka 4 punaista ja 6 valkoista. Korit vietiin kellariin, josta Juha illan pimetessä haparoi käteensä yhden omenan. a) Millä todennäköisyydellä Juha sai punaisen omenan? b) Valoisaa tultuaan Juha huomasi omenan olevan punainen. Millä todennäköisyydellä se oli peräisin hänen omasta koristaan?

8. $P(\text{pun}) = P(\text{Juhan kori ja pun. tai Riikan kori ja pun.}) = 0,5 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,4 = 0,35$
 $P(\text{Juhan kori} | \text{pun.}) = \frac{P(\text{Juhan kori ja pun.})}{P(\text{pun.})} = \frac{0,5 \cdot 0,3}{0,35} = \frac{3}{7}$

10.3. Pikku Villellä on ämpärissä 10 vihreää lehtisammakkoa ja 3 rupikonaa. Hän antaa umpimähkään niistä kaksi parhaalle ystävälleen pikku Kallelle. Millä todennäköisyydellä kaikki rupikonat jäävät Villelle?

3. $P(\text{rupikonat Villelle}) = P(\text{Kallelle 2 lehtisammakkoa}) = \frac{10}{13} \cdot \frac{9}{12} = 15/26 \approx 0,577$

11.4. Tavaratalon herrainosasto ilmoittaa lehdessä, että eräässä partavesierässä on ilmennyt valmistusvirhe, josta johtuen niillä vesillä ei olekaan haluttua iskutehoa. Tavaratalossa myydyistä partavesipakkauksista 5% oli virheellistä erää. Nuorukainen osti 3 pakkausta kyseistä partavettä. Millä todennäköisyydellä ainakin yksi pakkaus oli virheellistä erää?

4. $P(\text{ain. 1 virh.}) = 1 - P(\text{ei yhtään virh.}) = 1 - P(\text{ei JA ei JA ei}) = 1 - 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,95 = 1 - 0,857 = 0,143$

12.6. Laatikossa on mustia ja punaisia palloja. Jos laatikosta poistetaan yksi punainen pallo, niin nostettaessa jäljelle jääneistä palloista yksi, saadaan punainen todennäköisyydellä 1/7. Jos taas laatikosta otetaan pois kaksi mustaa palloa, niin todennäköisyys saada yhdellä nostolla punainen pallo on 1/5. Määritä mustien ja punaisten pallojen lukumäärät.

6. Olkoon mustia palloja x kpl ja punaisia y kpl. Siis yhteensä $x + y$ kpl

$$\begin{cases} P(\text{pun, kun 1 punainen poissa}) = 1/7 \\ P(\text{pun, kun 2 mustaa poissa}) = 1/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y-1)/(x+y-1) = 1/7 \\ y/(x+y-2) = 1/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-1 = 7y-7 \\ x+y-2 = 5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6y = -6 \\ x-4y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6y = -6 \\ x-4y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y = -8 \\ -2y = -8 \end{cases} \Rightarrow y = 4$$

 $2y = 8$; $y = 4$; $x - 4 \cdot 4 = 2$; $x = 18$ V: Mustia oli 18 ja punaisia 4

13.7. Kolme kolikkoa heitetään kahdesti peräkkäin. Millä todennäköisyydellä kruunujen määrä on jälkimmäisellä kerralla a) sama b) suurempi kuin edellisellä kerralla?

7. Kolmen kolikon heitossa mahdollisuudet KKK, KKL, KLK, LKK, KLL, LKL, LLK ja LLL siis 8 kpl
 $P(0 \text{ K}) = 1/8$, $P(1 \text{ K}) = 3/8$, $P(2 \text{ K}) = 3/8$ ja $P(3 \text{ K}) = 1/8$
 a) $P(\text{sama määrä K}) = P(0 \& 0 \text{ tai } 1 \& 1 \text{ tai } 2 \& 2 \text{ tai } 3 \& 3) = 1/8 \cdot 1/8 + 3/8 \cdot 3/8 + 3/8 \cdot 3/8 + 1/8 \cdot 1/8 = 20/64 = 5/16$
 b) $P(\text{enemmän 2. kerralla}) = P(0 \& 1 \text{ tai } 1 \& 2 \text{ tai } 2 \& 3) = 1/8 \cdot 7/8 + 3/8 \cdot 4/8 + 3/8 \cdot 1/8 = 22/64 = 11/32$

14.3. Paperiliuskalle on kirjoitettu sana MATEMATIIKKA. Kirjaimet leikataan erillisiksi lappusiksi, jotka pannaan hattuun ja sekoitetaan. Laput poimitaan yksitellen hatusta ja pannaan poimimisjärjestyksessä jonoon. Millä todennäköisyydellä niistä muodostuu jälleen sana MATEMATIIKKA?

3. $P(\text{MATEMATIIKKA}) = P(M)P(A)P(T)P(E)P(M)P(A)P(T)P(I)P(I)P(K)P(K)P(A) =$
 $\frac{2}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{49800}$

15.4. Suuressa henkilökoukossa on 70% tummatukkaisia ja 40 % ruskeasilmäisiä. Sekä tummatukkaisia että ruskeasilmäisiä on 30%. Millä todennäköisyydellä umpimähkään valittu henkilö a) on tummatukkainen tai ruskeasilmäinen, b) on ruskeasilmäinen mutta ei tummatukkainen, c) ei ole tummatukkainen eikä ruskeasilmäinen?

4. a) $P(T \text{ tai } R) = P(T) + P(R) - P(T \text{ ja } R) = 70\% + 40\% - 30\% = 80\%$
 b) $P(T \text{ ja ei-R}) = P(R) - P(R \text{ ja } T) = 40\% - 30\% = 10\%$
 c) $P(\text{ei-T ja ei-R}) = 1 - P(T \text{ tai } R) = 1 - 0,8 = 0,2 = 20\%$

16.4. Heitetään kerran valkoista ja mustaa noppaa. Millä todennäköisyydellä valkoisen nopan tulos on ykköstä suurempi ja mustan kuutosta pienempi, mutta pistelukujen summa on kuitenkin suurempi kuin 6?

4. Suotuisia ruutuja 6×6 ruudukossa (2,5), (3,5), (3,4), (4,5), (4,4), (4,3), (5,5), (5,4), (5,3), (5,2), (6,5), (6,4), (6,3), (6,2) ja (6,1). Siis $k = 15$, $n = 36$ $P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

17.8. Eräessä de Meren suosimassa pelissä koko potin voitti kahdesta pelaajasta se, joka ensin sai viisi erävoittoa. Peli joudutaan keskeyttämään, kun pelaajalla A on neljä ja pelaajalla B kolme erävoittoa. Missä suhteessa on oikeudenmukaista jakaa potti, eli mikä on pelaajien A ja B voiton todennäköisyyksien suhde?

$$8. P(A \text{ voittaa}) = P(A \text{ tai } BA) = P(A) + P(B)P(A) = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{40}{49}. \text{ Suhde} = \frac{40}{49} : \frac{9}{49} = 40 : 9$$

Binomijakauma

18.5. Seudun koivuista on 35% hieskoivuja, loput rauduskoivuja. Saunavihdan tekijä tekee vihtansa umpimähkään valitusta koivusta. Millä todennäköisyydellä viidestä vihdasta on ainakin 3 rauduskoivusta?

5. $P(\text{ain. 3 rauduskoivuvihtaa 5:stä})$

$$= \binom{5}{3} \cdot 0,65^3 \cdot 0,35^2 + \binom{5}{4} \cdot 0,65^4 \cdot 0,35^1 + \binom{5}{5} \cdot 0,65^5 \cdot 0,35^0 = 0,76$$

19.4. Kolmea arpanoppaa heitetään yhtä aikaa. Millä todennäköisyydellä a) kaikilla saadaan kuutonen, b) saadaan tarkalleen kaksi kuutosta?

$$4. a) P(6 \text{ ja } 6 \text{ ja } 6) = 1/6 \cdot 1/6 \cdot 1/6 = 1/216 \quad b) P(\text{täsm. 2 kpl } 6) = P(6 \text{ ja } 6 \text{ ja muu tai } 6 \text{ ja muu ja } 6 \text{ tai muu ja } 6 \text{ ja } 6) = 1/6 \cdot 1/6 \cdot 5/6 \cdot 3 = 5/72$$

20.7. Kahdessa perheessä on kummassakin neljä lasta. Millä todennäköisyydellä kummassakin perheessä on yhtä monta tyttöä? $p(\text{tyttö}) = p(\text{poika}) = 0,5$

$$7. P(0 \text{ T}) = 0,5^4 = 0,0625 = P(4 \text{ T}) ; P(1 \text{ T}) = \binom{4}{1} \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^3 = 0,25 = P(3 \text{ T})$$

$$P(2 \text{ T}) = \binom{4}{2} \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^2 = 0,375$$

$$P(\text{yhtä monta T}) = P(0 \text{ ja } 0 \text{ tai } 1 \text{ ja } 1 \text{ tai } 2 \text{ ja } 2 \text{ tai } 3 \text{ ja } 3 \text{ tai } 4 \text{ ja } 4) = P(0 \text{ ja } 0) + P(1 \text{ ja } 1) + P(2 \text{ ja } 2) + P(3 \text{ ja } 3) + P(4 \text{ ja } 4) = 0,0625^2 + 0,25^2 + 0,375^2 + 0,25^2 + 0,0625^2 = 0,2586$$

21.5. Perheessä on kuusi lasta. Millä todennäköisyydellä poikia on enemmän kuin tyttöjä, kun pojan syntymisen todennäköisyys on 0,52?

5. $P(\text{poikia enemmän kuin tyttöjä}) = P(6:\text{sta } 4 \text{ P tai } 6:\text{sta } 5 \text{ P tai } 6:\text{sta } 6 \text{ P})$

$$= \binom{6}{4} \cdot 0,52^4 \cdot 0,48^2 + \binom{6}{5} \cdot 0,52^5 \cdot 0,48^1 + 0,52^6 = 0,253 + 0,109 + 0,020 = 0,382$$

22.9. Arkipäivän liikenteessä noin kaksi autoilijaa tuhannesta ajaa alkoholin vaikutuksen alaisena. Kuinka monta autoilijaa poliisin pitää puhalluttaa, jotta todennäköisyys, että ainakin kaksi rattijuoppoa saadaan kiinni, on suurempi kuin 0,90 ?

$$9. P(\text{ainakin } 2) > 0,9 ; 1 - P(0) - P(1) > 0,9 ; 1 - 0,998^n - \binom{n}{1} \cdot 0,998^{n-1} \cdot 0,002 > 0,9 \quad \text{josta kokeilemalla eri } n:n \text{ arvoja}$$

saadaan $n = 1944$ $V : 1944$ autoilijaa

Tunnuslukuja (keskiarvo, moodi, mediaani, keskihajonta)

23.2. Määritä x niin, että lukujen 19, 11, x , 13 ja 21 keskiarvo on 17. Mikä on silloin lukujen mediaani, tyyppiarvo ja keskihajonta?

$$2. (19 + 11 + x + 13 + 21) / 5 = 17 \quad || \cdot 5 ; 64 + x = 85 ; x = 21$$

Luvut ovat järjestyksessä 11, 13, 19, 21, 21, jolloin mediaani on 19 ja tyyppiarvo on 21

Keskihajonta saadaan laskimella 4,20

24.3. Monistuspaperin neliömetrimassan (g/m^2) tarkkailemiseksi otettiin paperilaboratoriossa satunnaisesti 20 näytettä ja mitattiin jokaisen neliömetrimassa. Tulokset olivat seuraavat:

80,6	80,3	79,6	79,5	79,3	79,4	80,8	80,1	79,6	80,3
80,6	80,1	79,1	80,0	80,4	79,7	80,3	80,8	79,7	80,2

Määritä mittaussaineiston a) keskiarvo b) vaihteluväli c) otoskeskihajonta.

3. Laskimella a) $\bar{x} = 80,0$ (g/m^2) ja c) $0,51$ (g/m^2) b) Vaihteluväli = $80,8 - 79,1 = 1,7$ (g/m^2)

Normaalijakauma

25.2. Satunnaismuuttuja $\underline{x} \sim N(3,2)$. Laske $P(\underline{x} < 3,5)$ ja $P(\underline{x} > 4,5)$.

$$2. \underline{x} \sim N(3,2) ; \underline{z} = \frac{\underline{x} - 3}{2} \sim N(0,1) \text{ a) } P(\underline{x} < 3,5) = P(\underline{z} < \frac{3,5 - 3}{2}) = P(\underline{z} < 0,25) = \Phi(0,25) = 0,60$$

$$\text{b) } P(\underline{x} > 4,5) = P(\underline{z} > \frac{4,5 - 3}{2}) = P(\underline{z} > 0,75) = 1 - \Phi(0,75) = 1 - 0,77 = 0,23$$

26.5. Tehtaassa valmistetaan tuotetta, jonka massa on normaalisti jakautunut parametrein $\mu = 18,5$ kg ja $\sigma = 1,5$ kg. Millä todennäköisyydellä tehtaan tuotannosta satunnaisesti valittu tuote painaa a) yli 21,5 kg, b) väliltä 18,0 - 19,0 kg?

$$5. \underline{x} \sim N(18,5 ; 1,5) ; \underline{z} = \frac{\underline{x} - 18,5}{1,5} \sim N(0,1)$$

$$P(\underline{x} > 21,5) = P(\underline{z} > \frac{21,5 - 18,5}{1,5}) = P(\underline{z} > 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

$$P(18 < \underline{x} < 19) = P(\frac{18 - 18,5}{1,5} < \underline{z} < \frac{19 - 18,5}{1,5}) = P(-0,33 < \underline{z} < 0,33) = \Phi(0,33) - \Phi(-0,33) \\ = \Phi(0,33) - [1 - \Phi(0,33)] = 2\Phi(0,33) - 1 = 2 \cdot 0,6293 - 1 = 0,2586$$

27.7. Eräällä tieosuudella on nopeusrajoitus 90 km/h. Autojen nopeuksien oletetaan noudattavan normaalijakaumaa, jonka keskiarvo on 85 km/h ja keskihajonta 5 km/h. Kuinka monta prosenttia autoilijoista ajoi korkeintaan 75 km/h nopeudella?

$$7. \text{ Nopeus } \underline{x} \sim N(85,5) , \underline{z} = \frac{\underline{x} - 85}{5} \sim N(0,1) ; P(\underline{x} \leq 75) = P(\underline{z} \leq \frac{75 - 85}{5}) = P(\underline{z} \leq -2) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228 \approx 2,3\%$$

Jakaumat

28. b) Satunnaismuuttujalla X on binomijakauma $\text{Bin}(4, \frac{2}{3})$. Laske todennäköisyys $P(X = 3)$ ja odotusarvo $E(X)$.

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 4 \cdot \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{3} = \frac{32}{81} \approx 0,395 \quad E(X) = 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

$$\text{Vastaus: } P(X = 3) = \frac{32}{81} \approx 0,395 \cdot E(X) = 2\frac{2}{3}$$

29.8. a) Mimmiliigan joukkueen UPS maalitykkien Jaanan ja Sirpan onnistumistodennäköisyydet rangaistuspotkussa ovat 75 % ja 84 %. Kumpikin saa yhden rangaistuspotkun. Laske joukkueen UPS saamien rangaistuspotkumaalien odotusarvo.

8. a) Satunnaismuuttuja X kuvatkoon maalien lukumäärää. Tällöin saadaan

todennäköisyysjakauma

X	TN
0	$0,25 \cdot 0,16 = 0,04$
1	$0,75 \cdot 0,16 + 0,25 \cdot 0,84 = 0,33$
2	$0,75 \cdot 0,84 = 0,63$

$$EX = 0,04 \cdot 0 + 0,33 \cdot 1 + 0,63 \cdot 2 = 1,29.$$