

Normaalijakauma

Normaalijakauman tiheysfunktio

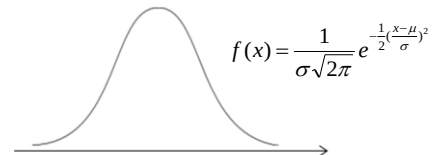
Tiheysfunktiot ovat samanmuotoisia, jonka huippu on keskiarvon kohdalla.

Kuvaajat ovat symmetrisiä huipun kautta kulkevan pystysuoran suoran suhteen.

Gaussin käyrä, kellokäyrä

Tiheysfunktion kuvaajia sanotaan Gaussin käyriksi eli kellokäyriksi

Merkintä $X \sim N(\mu, \sigma)$



Normitettu normaalijakauma $N(0,1)$

Normaalijakauma on normitettu, jos odotusarvo $\mu = 0$ ja keskihajonta $\sigma = 1$.

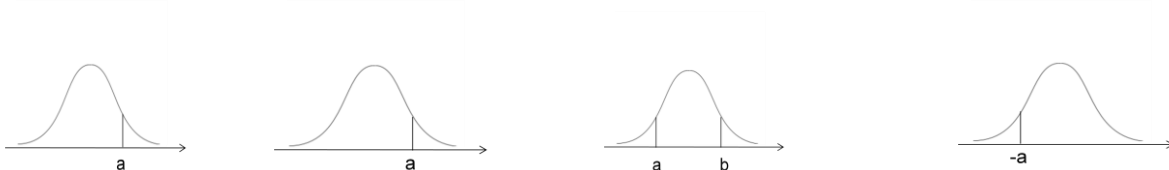
Normitetun normaalijakauman kertymäfunktion arvot taulukkokirjasta

E.1. Mitä on a) $\Phi(0,12)$ b) $\Phi(1,68)$ c) $\Phi(0,86)$?

E.2. Mikä on a, kun $\Phi(a) = 0,5675$ b) $\Phi(a) = 0,86$ c) $\Phi(a) = 0,91$?

- | | |
|--------------|------------|
| 1. a) 0,5478 | 2. a) 0,17 |
| b) 0,9535 | b) 1,08 |
| c) 0,8051 | c) 1,34 |

1) $P(X \leq a) = \Phi(a)$ 2) $P(X \geq a) = 1 - \Phi(a)$ 3) $P(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$ 4) $P(X \leq -a) = \Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$



E.3. $X \sim N(0,1)$.

Laske a) $P(X < 0,73)$ b) $P(X > 1,2)$ c) $P(X < -0,15)$

a) $P(X < 0,73) = \Phi(0,73) = 0,7673$

b) $P(X > 1,2) = 1 - \Phi(1,2) = 1 - 0,8849 = 0,1151$

c) $P(X < -0,15) = 1 - \Phi(0,15) = 1 - 0,5596 = 0,4404$

E.4. $X \sim N(0,1)$. Määritä a , kun a) $P(X < a) = 0,75$ b) $P(X > a) = 0,35$

a) $a = 0,67$ b) $a = 0,39$

Yleinen normaalijakauma

Jos $X \sim N(\mu, \sigma)$, niin $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

E.5. $X \sim N(3,2)$. Laske a) $P(X \leq 2)$ b) $P(X \geq 3,8)$ c) $P(3 < X < 3,8)$

$$z = \frac{2-3}{2} = -0,5$$

$$a) P(X \leq 2) = P(Z \leq -0,5) = 1 - \Phi(0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085$$

$$b) P(X \geq 3,8) = P(Z \geq 0,4) = 1 - \Phi(0,4) = 1 - 0,6554 = 0,3446$$

$$z = \frac{3,8-3}{2} = 0,4$$

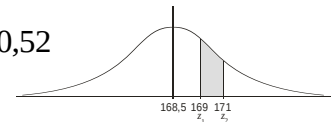
$$c) P(3 < X < 3,8) = P(0 < Z < 0,4) = \Phi(0,4) - \Phi(0) = 0,6554 - 0,5000 = 0,1554$$

E.6. Suomalaisten naisten pituus noudattaa normaalijakaumaa keskipituuden ollessa 168,5 cm ja keskihajonnan 4,8 cm.

Kuinka monta prosenttia suomalaisista naisista pituus on välillä 169 – 171?

$$Z_1 = \frac{169-168,5}{4,8} = 0,104... \approx 0,10$$

$$Z_2 = \frac{171-168,5}{4,8} = 0,520... \approx 0,52$$



$$P(169 < X < 171) = P(0,10 < Z < 0,52) = \Phi(0,52) - \Phi(0,10) = 0,6985 - 0,5398 = 0,1587 \approx 0,159$$

Vastaus: 15,9%

E.7. a) Yo-kokeen tulokset olivat jakautuneet normaalisti $N(32,12)$.

Määritä eximian raja, jotta noin 20 % kokelaista saa vähintään tämän arvosanan.

b) Approbatur raja oli 13 pistettä. Montako prosenttia kokelaista reutti?

a) $\Phi(a) = 0,80$, $a = 0.84$

$$\frac{X - 32}{12} = 0,84 \quad X \approx 42,08$$

Täten eximian rajaksi laitettava sitä seuraava kokonaisluku eli 43 pistettä

$$b) \quad Z = \frac{13-32}{12} = -1,58$$

$$P(X \leq 13) = P(Z \leq -1,58) = P(Z \geq 1,58) = 1 - P(Z < 1,58) = 1 - \Phi(1,58) = 1 - 0,9429 = 0,0571 \quad \text{Vastaus: 5,7\%}$$