

K02

1. a) Ratkaise yhtälö $3x + 4 = 5 - 6x$. b) Ratkaise yhtälö $12x^2 - 7x + 1 = 0$.

S02

2. Laske paraabelien $y = 5x^2 - x$ ja $y = 1 - x^2$ leikkauspisteet.
3. Liikenneministeriön teettämässä tutkimuksessa kotitalouksien autoistumista selitettiin mallilla $y = 0,21a + 0,36b + 0,20c + 0,34d - 0,26$, jossa y ilmoittaa, millä todennäköisyydellä tietyn tyyppisellä kotitaloudella on auto käytettävissään. Selittävinä muuttujina mallissa ovat a = perhetyyppi, b = tulot, c = perheen päämiehen ikä ja d = asuinkunnan kaupunkimaisuus. Keskituloisella kahden huoltajan lapsiperheellä, jonka päämiehen ikä on 30 vuotta, on $a = 0,93$, $b = 0,79$ ja $c = 1,35$. Millä todennäköisyydellä kuvatuslaisella kotitaloudella on käytettävissään auto, jos perheen asuinkunta on a) kaupunkimainen, jolloin $d = 0,78$, b) maaseutumainen, jolloin $d = 1,01$?

K03

3. a) Kuinka suuret ovat kolmion kulmat, kun niiden suhde on $5 : 11 : 20$? b) Kuinka suuret ovat suorakulmaisen kolmion sivut, kun niiden suhde on $3 : 4 : 5$ ja kolmion ala on $13\frac{1}{2}$?

S03

2. Ratkaise yhtälö $5(3x + 1) - 4(3 - 2x) = 2x$. Tutki, toteuttaako tämä ratkaisu myös yhtälön $27x^3 - 54x + 17 = 0$.

K04

1. Ratkaise a) yhtälö $x(x + 1) = 156$, b) yhtälöpari
$$\begin{cases} 2x + 3y = -8, \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

S04

2. Esitä luvut $a = 260\,000\,000\,000$, $b = 7\,800\,000\,000\,000$ ja $c = 39\,000\,000\,000\,000$ kymmenen potenssien avulla ja laske esityksiä käyttäen lausekkeiden $\frac{a+b+c}{a}$ ja $\frac{ab}{c}$ arvot.

K05

3. Nuoripari pitää kirjaa talousmenoistaan. Joka kuukauden viimeisenä päivänä he laskevat, kuinka paljon kuukauden menot ovat olleet. Eräänä vuonna marraskuun lopussa menot olivat olleet keskimäärin 1 651,20 euroa kuukaudessa. Joulukuussa menot olivat 1 814,88 euroa. Mikä oli talousmenojen kuukausikeskiarvo koko vuoden osalta?

S05

1. a) Ratkaise yhtälö $(3x - 2)(3x + 5) = 0$. b) Mikä on lausekkeen $\frac{a^2 - c^2}{b - c}$ arvo, kun $a = 1$, $b = -2$ ja $c = -\frac{1}{2}$?

K06

1. Ratkaise yhtälöt a) $20x^2 - 49x + 9 = 0$, b) $\frac{x}{3} + \frac{4}{6} = \frac{x}{2}$

S06

2. Olkoon annettuna kaksi pistettä: $A = (2, 6)$ ja $B = (1, -1)$. Määritä a) pisteiden A ja B määrittämän suoran yhtälö, b) janan AB pituus, c) janan AB keskipisteen koordinaatit.
4. Abiturgentilla on kaksi herätyskelloa. Uudempi toimii oikein 98 %:n todennäköisyydellä ja vanhempi 85 %:n todennäköisyydellä. Matematiikan kokeen aattona abiturgentti asettaa molemmat kellot soimaan seuraavana aamuna. Millä todennäköisyydellä kelloista soi oikeaan aikaan a) molemmat, b) vain toinen, c) ei kumpikaan?

K07

2. a) Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 1 ja 3. Määritä kolmion terävien kulmien suuruudet 0,01 asteen tarkkuudella.
- b) Määritä funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{3}$ derivaatta.
- c) Määritä geometrisen lukujonon $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \dots$ kolmas termi.

S07

2. a) Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 11 ja toisen kateetin pituus 5. Määritä kolmion terävät kulmat 0,01 asteen tarkkuudella.
- b) Derivoi funktio $f(x) = 3x^{2007} - 15x^{12} + 2x - 12345$.
- c) Mikä on aritmeettisen lukujonon 1, 4, ... kymmenes termi?

K08

1. a) Ratkaise yhtälö $2x + 1 = x^2 + 2x$.
- b) Ratkaise yhtälöryhmä $2x + y = 1, x - y = 0$.
- c) Kumpi luvuista $\frac{5}{7}$ ja $\frac{6}{9}$ on suurempi? Perustele ratkaisusi likiarvoja käyttämättä esimerkiksi muodostamalla lukujen erotus.
2. a) Ratkaise yhtälö $5x - (1 - x) = 13x$.
- b) Määritä lukujen 7, 3, 6, 3, 5, 3, 1 mediaani ja keskiarvo.
5. Kännykkäliittymän A kuukausimaksu on 4 euroa ja puhelumaksu 0,09 euroa minuutilta. Kännykkäliittymässä B ei ole kuukausimaksua, mutta puhelumaksu on 0,12 euroa minuutilta. Määritä kuukausilaskun suuruus kummassakin tapauksessa lausekkeena, jossa muuttujana on puheaika minuutteina. Millä puheajalla liittymien A ja B kuukausilaskut ovat yhtä suuret?
8. Kulhossa on viisi punaista ja kymmenen mustaa palloa. Kulhosta poimitaan umpimähkään viisi palloa palauttamatta yhtäkään. Mikä on todennäköisyys, että ainakin yksi poimituista palloista on punainen? Millä todennäköisyydellä kaikki viisi ovat samanvärisiä?

muoto $9x = 1$

$$x = \frac{1}{9}$$

sijoitus ratkaisukaavaan

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{4}$$

$$2. \quad 6x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{9}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

$$a) \quad y = [0,7549]$$

$$\approx 0,75$$

$$b) \quad y = [0,8331]$$

$$\approx 0,83$$

$$a) \quad 5a + 11a + 20a = 180, \text{ josta } a = 5$$

Kulmat $5a$, $11a$ ja $20a$ eli 25° , 55° , 100°

$$b) \quad \text{Kateetit } 3a \text{ ja } 4a, \text{ ehto } \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 4a = 13\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{Vastaus: Toteuttaa yhtälön}$$

$$a) \quad \text{Sulkeiden poisto } x^2 + x - 156 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 156}}{2}, \text{ josta } x_1 = -13, \quad x_2 = 12$$

$$b) \quad \text{Eliminoitu esim. } x, \text{ jolloin } 4y = -12$$

$$\text{Tästä tuntemattoman } y \text{ ratkaisuksi } y = -3$$

$$\text{Toinen tuntematon } x = \frac{1}{2}$$

$$a = 26 \cdot 10^{10}, b = 78 \cdot 10^{11}, c = 39 \cdot 10^{12}$$

$$\frac{a+b+c}{a} = \frac{(26+78+3900) \cdot 10^{10}}{26 \cdot 10^{10}} \\ = 181$$

$$\frac{ab}{c} = \frac{26 \cdot 78}{39} \cdot \frac{10^{10} \cdot 10^{11}}{10^{12}} \\ = 52 \cdot 10^9 \text{ tai vast.}$$

Koko vuoden menot $11 \cdot 1651,20 + 1814,88$ [= 19978,08]

Laskettu keskiarvo, jakajana luku 12: $\frac{11 \cdot 1651,20 + 1841,88}{12}$

Vastaus: 1664,84 €

a) $3x - 2 = 0$, $3x + 5 = 0$ tai $9x^2 + 9x - 10 = 0$

$$x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -\frac{5}{3}$$

$$\text{Osoittaja} = \frac{3}{4}, \text{nimittäjä} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Tulos} = -\frac{1}{2}$$

a) Ratkaisukaavan käyttö

$$x_1 = \frac{9}{4}$$

$$x_2 = \frac{1}{5}$$

Tulos $x = 4$

a) Kulmakerroin $k = 7$

yhtälö $y = 7x - 8$, $7x - y = 8$ tai vast.

b) Etäisyyden juurilauseke oikeilla luvuilla

tulos $5\sqrt{2}$ tai $\sqrt{50}$

c) Keskiarvolausekkeet oikeilla luvuilla

tulos $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$

2. a) $\tan \alpha = \frac{1}{3}$

$$\alpha = 18,4349 \dots^\circ$$

$$\tan \beta = 3 \Leftrightarrow \beta = 71,5650 \dots^\circ$$

$$\alpha \approx 18,43^\circ, \beta \approx 71,57^\circ$$

b) $f'(x) = x^2 + 3x - 4$

a) $0,98 \cdot 0,85 = 0,833$

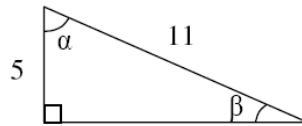
b) $0,98 \cdot 0,15 + 0,02 \cdot 0,85 = 0,164$

c) $0,15 \cdot 0,2 = 0,003$

c) $q = \frac{4}{9} / \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

$$a_3 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$$

2. a) $\cos \alpha = \frac{5}{11} \Leftrightarrow \alpha = 62,964\dots^\circ \approx 62,96^\circ$
 $\sin \beta = \frac{5}{11} \Leftrightarrow \beta = 27,035\dots^\circ \approx 27,04^\circ$



b) $f(x) = 3x^{2007} - 15x^{12} + 2x - 12345$
 $f'(x) = 6021x^{2006} - 180x^{11} + 2$

c) 28

1. a) $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$

$$x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = \pm 1$$

b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x = 1$

$$x = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} - y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

c) $\frac{5}{7} - \frac{6}{9} = \frac{1}{21}$ (TAI $\frac{5}{7} = \frac{45}{63}$, $\frac{6}{9} = \frac{42}{63}$)

$$\frac{5}{7} \text{ suurempi}$$

2. a) $5x - (1 - x) = 13x \Leftrightarrow 5x - 1 + x = 13x$

$$-7x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}$$

b) 1, 3, 3, **3**, 5, 6, 7 mediaani 3

$$\text{keskiarvo} = \frac{1+3+3+3+5+6+7}{7} = 4$$

5. A: $f(x) = 0,09x + 4$ tai A: $0,09x + 4$

B: $g(x) = 0,12x$ tai B: $0,12x$

$$0,09x + 4 = 0,12x \Leftrightarrow$$

$$x = 133,33\dots$$

Vast: 133 min

$$P(\text{kaikki mustia}) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11}$$

$$= \frac{12}{143}$$

$$P(\text{ainakin yksi punainen}) = 1 - \frac{12}{143} = \frac{131}{143} = 0,916083... \approx 0,916 \text{ tai } 0,92$$

$$P(\text{kaikki punaisia}) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{3003}$$

$$P(\text{kaikki samanvärisiä}) = \frac{12}{143} + \frac{1}{3003} = \frac{23}{273} = 0,084249... \approx 0,084$$



"VIIME HETKEN" TEHTÄVIÄ

K02

14. Vanhemmat päättivät tallettaa lapsilleen Anjalle ja Artolle vuoden 2003 alussa yhteensä 9 500 € siten, että lapset saisivat nostaa yhtä suuret rahamäärät 21-vuotissyntymäpäiväänsä seuraavan vuoden alussa. Kuinka paljon vanhempien on sijoitettava lasten tileille, kun vuoden 2003 alussa Anja on 16-vuotias ja Arto 12-vuotias? Oletetaan, että pankki maksaa vuotuista korkoa 2,5 prosentin mukaan. Verotusta ei oteta huomioon.

S02

5. Jalallisen viinilasin sisätila on kärjellään seisova suora ympyräkartio, jonka tilavuus on 1,75 dl. Kuinka paljon lasissa on nestettä nestepinnan lasissa ulottuessa puoleenväliin lasin sisätilan korkeudesta?

K03

11. Polynomin $P(x)$ nollakohdan voi määrittää likimääräisesti Newtonin algoritmilla. Menetelmässä valitaan ensin nollakohdalle karkea likiarvo, ns. alkuarvo x_0 , ja tarkennetaan tätä sitten muodostamalla jono $x_1, x_2, x_3, \dots$ kaavalla

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Muodosta tämä algoritmi polynomille $P(x) = x^5 + x + 1$ ja laske sitten arvot $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ käyttäen alkuarvoa $x_0 = 0$. Esitä näihin laskuihin perustuva arvio siitä, kuinka monen desimaalin tarkkuudella x_6 antaa nollakohdan likiarvon.

14. Piensijoittaja osti vuoden alussa erään yhtiön osakkeita. Osake menetti kuitenkin lyhyessä ajassa viidenneksen vuoden alun arvostaan. Tämän jälkeen osakkeen kurssi kääntyi hitaaseen nousuun ja nousi vuoden loppuun mennessä alimmalta tasoltaan 7,0 %. a) Kuinka monta prosenttia osakkeiden arvo oli muuttunut vuoden alusta vuoden loppuun mennessä? b) Mihin hintaan piensijoittaja oli osakkeet ostanut, kun hän myi ne vuoden lopussa ja laski menettäneensä 900 €? c) Kuinka monta prosenttia osakekurssin olisi tullut edelleen nousta, jotta se olisi saavuttanut alkuperäisen tasonsa? Pörssin välityspalkkioita tms. ei laskussa oteta huomioon.

S03

8. Tilille sijoitettiin ensimmäisen vuoden alussa 5 000 € ja toisen vuoden alussa 4 500 €. Kolmannen vuoden alkaessa tilin saldo oli 9 894,85 €. Mikä on tilin korkokanta, kun korko lisättiin pääomaan vuosittain vuoden lopussa ja koroista perittiin vuosittain lähdevero 29 %? Tilillä ei kyseisenä aikana ollut muita tilitapahtumia.
9. Lottoarvonnassa arvotaan 39 numerosta 7 numeroa. Kuinka monta erilaista 7 rastin lottoruudukkoa on olemassa? Kun on arvottu seitsemän numeroa (eikä ns. lisänumeroita oteta huomioon), erilaisia 4 oikein -ruudukkoja on erään lehtiartikkelin mukaan olemassa 173 600. Tarkista, onko luku oikea. Jos ei, niin mikä on oikea lukumäärä? Laske, kuinka monta erilaista 5 oikein -ruudukkoa ja kuinka monta erilaista 6 oikein -ruudukkoa on olemassa.

K04

8. Opiskelija on opintojensa alussa tehnyt lainasopimuksen, jonka mukaan hän nostaa jokaisen opiskeluvuoden alussa opintolainaa 4 000 €. Vuotuinen lainakorko on 4 %, mutta opiskeluaikana ei korkoa eikä lyhennyksiä tarvitse maksaa, vaan kertynyt korko liitetään jokaisen opiskeluvuoden lopussa lainapääomaan. Laske sopivan summausekkeen avulla, paljonko opiskelijalla on velkaa, kun hän 12 vuoden opintojen jälkeen lopulta valmistuu.

S04

10. Osoita, että funktioilla $f(x) = -4x^3$ ja $g(x) = x^3 + x$ ei ole ääriarvoja, mutta summafunktiolla $h(x) = f(x) + g(x)$ on. Mitkä ovat nämä ääriarvot?

K05

8. Henkilön palkasta jäi ennakonpidätyksen jälkeen käteen 73 %. Vuodenvaihteessa henkilö sai 45 euron palkankorotuksen. Samanaikaisesti ennakonpidätys laski 0,8 prosenttiyksikköä. Henkilölle jäi ennakonpidätyksen jälkeen käteen nyt 49,60 euroa enemmän kuin ennen muutoksia. Mikä oli henkilön uusi ennakonpidätysprosentti, ja mikä oli hänen uusi palkkansa?
11. Määritä se paraabelin $y = x^2 + 2x - 1$ piste (x, y) , jossa koordinaattien summa on mahdollisimman pieni.

S05

6. Kokouksen alussa osanottajat kättelivät toisensa kertaalleen. Kädenpuristuksia tuli tällöin kaikkiaan 66. Kuinka monta osanottajaa kokouksessa oli?

K06

8. Tehtaan on vähennettävä vesistöön joutuvia päästöjä yhteensä 20 prosenttia seuraavien neljän vuoden aikana. a) Kuinka monta prosenttia on asetettava vuotuiseksi tavoitteeksi, kun halutaan, että suhteellinen vähennys on sama kaikkina vuosina? b) Jos samaa vuotuista tavoitetta noudatetaan edelleen, kuinka monen vuoden kuluessa päästöt on saatu vähenemään alle puoleen alkuperäisestä määrästä?

S06

11. a) Kuinka monta erilaista istumajärjestystä voidaan muodostaa luokassa, jossa on 30 oppilasta ja 30 pulpettia? b) Kuinka monella tavalla kolme tyhjää pulpettia voidaan valita luokassa, jossa on 27 oppilasta ja 30 pulpettia? Kuinka monta erilaista istumajärjestystä on tässä luokassa? c) Kuinka monta vuotta tietokoneelta kuluisi, jos se kävisi läpi a-kohdan erilaiset istumajärjestykset käsitellen biljoona (10^{12}) istumajärjestystä sekunnissa? Yksi vuosi on keskimäärin 365,25 vuorokautta.

K07

6. a) Millä x :n arvolla on $2^x = 1$? b) Ratkaise yhtälö $2^{x^2-2} = 1$.
12. Paraabelin $y = ax^2 + bx - 3$ huippu on pisteessä $(\frac{3}{2}, 1)$. Määritä kertoimet a ja b .

S07

11. Golfsimulaattorissa pallon puttaaminen reikään onnistuu varmasti, jos pallo on enintään 80 cm:n päässä reiästä. Tästä alkaen todennäköisyys saada pallo reikään on kääntäen verrannollinen pallon ja reiän välisen etäisyyden neliöön. Millä todennäköisyydellä kymmenestä pallosta ainakin yksi menee reikään putattaessa kolmen metrin etäisyydeltä?

K08

10. Kolmannen asteen polynomifunktiolla $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ on paikallinen minimi -2 kohdassa $x = 0$ ja paikallinen maksimi 1 kohdassa $x = 2$. Määritä kertoimet a , b , c ja d .
11. Isoisä avasi vuoden 2006 alussa lapsenlastaan varten tilin, jonka vuotuinen korkoprosentti lähdeveron vähentämisen jälkeen on $1,750$, ja talletti tilille 700 euroa. Isoisä jatkaa seuraavina vuosina tallettamalla saman summan. Korko lisätään vuosittain tilin saldoon vuoden viimeisenä päivänä. Kuinka paljon tilillä on rahaa vuoden 2010 lopussa koron lisäyksen jälkeen? Muodosta ja sievennä lauseke, joka antaa tilin saldon vuoden lopussa, kun talletus on tehty n kertaa. Minkä vuoden lopussa rahaa on vähintään $12\,000$ euroa?



Apua laskemiseen

korkotekijä $q = 1,025$

$a =$ Anjan, $b =$ Arton sijoitus:

ehdot $a + b = 9500$, $q^5 a = q^9 b$

yhtälöparin ratkaiseminen

$[a = 4984,3893\dots, b = 4515,6106\dots]$

Anja 4 984,39 € tai 4 984,40 €

Arto 4 515,61 € tai 4 515,60 €

0,22 dl

$$P'(x) = 5x^4 + 1$$

$$\text{Iteraatiokaava } x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 + x_n + 1}{5x_n^4 + 1}$$

$$x_1 = -1, x_2 = -0,8333\dots, x_3 = -0,764382\dots$$

$$x_4 = -0,7550248\dots, x_5 = -0,7548777\dots, x_6 = -0,7548776\dots$$

5 tai 6 desimaalia

Osakkeiden arvo eli ostohinta vuoden alussa a

Arvo vuoden lopussa $1,07 \cdot 0,8a = 0,856a$

a) Arvo laskenut $a - 0,856a = 0,144a$ eli 14,4 % (tai 14 %)

b) Ostohinta a : $0,144a = 900 \Rightarrow a = 6\,250$ €

c) Kurssi noustava x -kertaiseksi:

$$x \cdot 0,856a = a \Rightarrow x = 1,1682\dots, \text{ ts. } 16,8 \% \text{ (tai } 17 \%)$$

$$5000q^2 + 4500q = 9894,85$$

toisen asteen yhtälön ratkaisukaava

$$p = 2,6980\dots$$

3,8 %

$$\text{Lottoruudukkoja } \binom{39}{7} = 15\,380\,937$$

$$4 \text{ oikein-ruudukkoja } \binom{7}{4} \binom{32}{3} = [35 \cdot 4960] = 173\,600, \text{ OK}$$

$$5 \text{ oikein-ruudukkoja } \binom{7}{5} \binom{32}{2} = [21 \cdot 496] = 10\,416$$

$$6 \text{ oikein-ruudukkoja } \binom{7}{6} \binom{32}{1} = [7 \cdot 32] = 224$$

Kun $a = 4000$ ja $q = 1,04$, on kertynyt velka

$$\begin{aligned} &aq + aq^2 + \dots + aq^{12} \\ &= aq \frac{1 - q^{12}}{1 - q}, \text{ ts. kyseessä on geometrinen summa} \\ &= 62507,350\dots \approx 62\,507,35 \text{ €} \end{aligned}$$

$$f'(x) = -12x^2, \quad g'(x) = 3x^2 + 1$$

$f'(x) \leq 0$, derivaatta ei vaihda merkkiään,
ei ääriarvoja, (f vähenevä kaikkialla,)

$g'(x) > 0$, derivaatalla ei nollakohtia, ei ääriarvoja,
(g kasvava kaikkialla)

$$h(x) = -3x^3 + x, \quad h'(x) = -9x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{3}$$

Ääriarvot: $h(\frac{1}{3}) = \frac{2}{9}$ (max) ja $h(-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{9}$ (min)

Perustelut ääriarvoille, esim. derivaatan merkkitarkastelu

Uusi ennakonpidätys 26,2 %

Vanha palkka x , ehto:

$$0,738(x + 45) - 0,73x = 49,6$$

Ratkaisu $x = 2048,75$

Uusi palkka 2093,75 €

Koordinaattien summa $s(x) = x + (x^2 + 2x - 1) = x^2 + 3x - 1$

Ehto: $s'(x) = 2x + 3 = 0$

$$\text{Tulos } x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Vastaava } y = -\frac{7}{4}$$

Minimikohdan perustelut, esim. viittaus ylöspäin aukeavaan paraabeliin.

$$n^2 - n - 132 = 0$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 66 \quad n_1 = 12 \quad ((n_2 = -11 < 0))$$

Vastaus: 12 osanottajaa

Taulukoinnilla mahdollisuus viiteen pisteeseen

8. Päästöt P , vähenemiskerroin k

a) Yhtälö $k^4 P = 0,80P$

Ratkaisu $k = 0,945741 \dots$

Vähennysprosentti $5,4258 \dots$, vastaus: vuosituloite $5,4 \%$ tai $5,43 \%$

b) Yhtälö $k^n P = 0,5P$

Ratkaisu $n = \frac{\log 0,5}{\log k} = 12,42513 \dots$

Vastaus: 13 vuoden kuluttua

11. a) $30!$

$$= 2,6525 \dots \cdot 10^{32}$$

b) $\binom{30}{3} = 4060$ (tavat valita kolme tyhjää pulpettia)

istumajärjestykset $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \dots \cdot 4 = 4,4208 \dots \cdot 10^{31}$

c) aika $\frac{30!}{10^{12} \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365,25}$
 $\approx 8,4 \cdot 10^{12}$ vuotta

6. a) $x = 0$

b) $x^2 - 2 = 0$
 $x = \pm \sqrt{2}$

12. $y' = 2ax + b$

ehdot $y'(\frac{3}{2}) = 3a + b = 0$, $y(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b - 3 = 1$

$$a = -\frac{16}{9}, \quad b = \frac{16}{3}$$

11. Etäisyys reiästä x

Todennäköisyys, kun $x \geq 80$: $P(x) = \frac{k}{x^2}$ (tai verranto)

$$P(80) = 1 \Rightarrow k = 6400$$

$$P(300) = \frac{6400}{90000} = \frac{16}{225} = 0,07111...$$

$$P(\text{ainakin yksi kymmenestä menee reikään}) = 1 - (1 - P(300))^{10} \\ = 0,521769... \approx 0,52$$

10. $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$f'(x) = 0, \text{ josta } c = 0$$

$$f(0) = -2, \text{ josta } d = -2$$

$$f'(2) = 0, \text{ josta } 12a + 4b = 0$$

$$f(2) = 1, \text{ josta } 8a + 4b - 2 = 1$$

$$a = -\frac{3}{4}, b = \frac{9}{4}$$

11. $a = 700, q = 1,075$

$$2010, n = 5; a(q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q) = 3688,0941... \approx 3688,09 \text{ €}$$

$$\text{yleinen tapaus } aq \frac{1 - q^n}{1 - q} = 40700(1,0175^n - 1)$$

$$\text{ehto } 40700(1,0175^n - 1) = 12000, n = 14,8938...$$

vuoden 2020 lopussa

14. Ennen 1.1.05 nettokorkoprosentti: $0,71 \cdot 1,5 \% = 1,065 \%$

$$\text{sen jälkeen } 0,72 \cdot 1,5 \% = 1,08 \%$$

$$\text{Vastaavat korkokertoimet } q_1 = 1,01065 \text{ ja } q_2 = 1,0108$$

$$\text{Talletus 2007 alussa } 1000 q_1^3 q_2^2 = 1054,7093... \approx 1054,71 \text{ €}$$

Vuoden 2007 arvo vuoden 2002 rahassa

$$\frac{1548}{1632} \cdot 1054,709... = 1000,4228...$$

reaaliarvon muutos

$$\frac{1000,4228... - 1000}{1000} \cdot 100\%$$

$$= 0,042286... \approx 0,042\% \text{ tai } 0,04 \% \text{ tai } 0,0423 \%$$