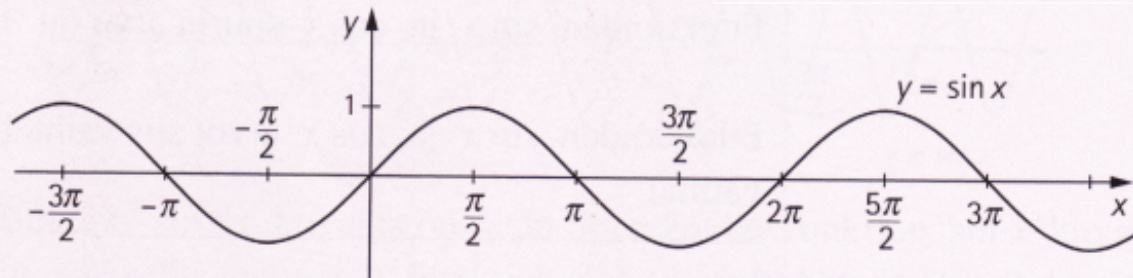


Funktiot $\sin x$ ja $\cos x$

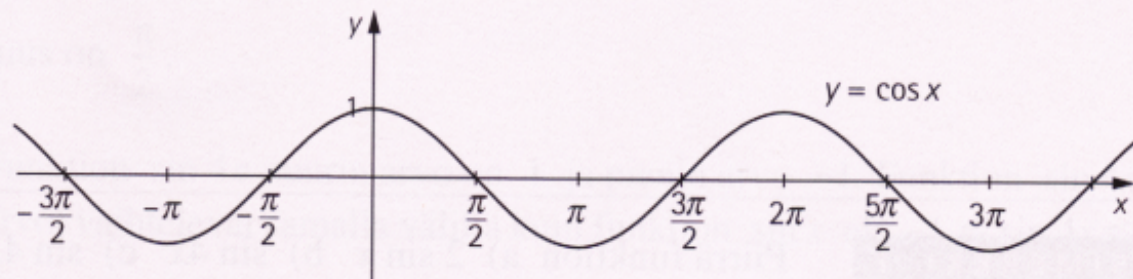
Funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ jaksollisuus

Funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ kuvaajilla on aaltomainen muoto, jossa samantyyppiset aallot seuraavat toisiaan 2π :n (täysikulman) välein.

Funktion $\sin x$ kuvaaja



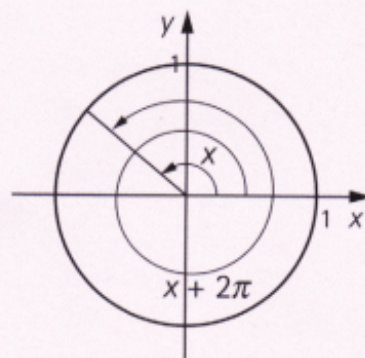
Funktion $\cos x$ kuvaaja



$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Sinifunktio ja kosinifunktio ovat *jaksollisia* funktioita.
Molempien funktioiden *jakso* on 2π .

Geometrinen selitys funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ jaksollisuudelle on, että kulmilla x ja $x + 2\pi$ on yksikköympyrässä aina sama kehäpiste.



Funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ arvot

Funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ suurin arvo on 1 ja pienin arvo -1 .

Funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ arvot siis vaihtelevat $-1:n$ ja $1:n$ välillä:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{ ja } -1 \leq \cos x \leq 1.$$

Siis arvot eivät voi olla muuta
kuin $-1:n$ ja $1:n$ välillä

ESIMERKKI 2

- a) Määritä funktion $f(x) = 2,7 \cos 6x + 5,1$ jakson pituus.
- b) Määritä funktion $f(x) = 2,7 \cos 6x + 5,1$ suurin ja pienin arvo. Millä muuttujan x arvoilla funktio f saa suurimman ja millä pienimmän arvonsa?

a) Funktion $f(x) = 2,7 \cos 6x + 5,1$ jakson pituus on sama kuin funktion $2,7 \cos 6x$ jakson pituus. Jakson pituus on

$$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}. \quad \text{Funktion } a \cos kx \text{ jakson pituus on } \frac{2\pi}{k}.$$

Jakson saa aina jakamalla 2π :n kertoimella joka on kulmalla, ks. yllä se on 6

ESIMERKKI 2

- a) Määritä funktion $f(x) = 2,7 \cos 6x + 5,1$ jakson pituus.
- b) Määritä funktion $f(x) = 2,7 \cos 6x + 5,1$ suurin ja pienin arvo. Millä muuttujan x arvoilla funktio f saa suurimman ja millä pienimmän arvonsa?

b) Funktion $\cos 6x$ suurin arvo on 1. Siis funktion $f(x) = 2,7 \cos 6x + 5,1$ suurin arvo on $2,7 \cdot 1 + 5,1 = 7,8$.

Funktion $\cos 6x$ pienin arvo on -1 . Siis funktion $f(x) = 2,7 \cos 6x + 5,1$ pienin arvo on $2,7 \cdot (-1) + 5,1 = 2,4$.

Funktio $f(x) = 2,7 \cos 6x + 5,1$ saa suurimman arvon kohdissa, joissa $\cos 6x = 1$.

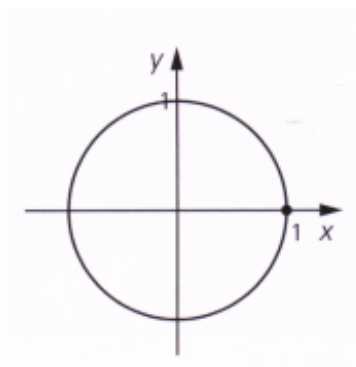
Kulman $6x$ kosini on 1, kun kulman kehäpiste on $(1, 0)$.

Tulee olla:

$$6x = n \cdot 2\pi \quad | : 6$$

$$x = n \cdot \frac{2\pi}{6}$$

$$x = n \cdot \frac{\pi}{3}, \quad n \text{ kokonaisluku.}$$



Funktio $f(x) = 2,7 \cos 6x + 5,1$ saa pienimmän arvon kohdissa, joissa $\cos 6x = -1$.

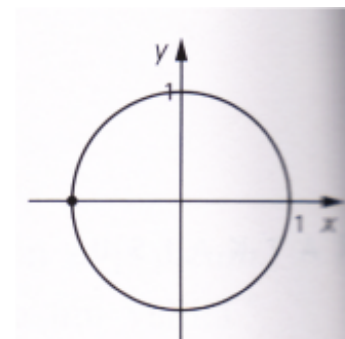
Kulman $6x$ kosini on -1 , kun kulman kehäpiste on $(-1, 0)$.

Tulee olla:

$$6x = \pi + n \cdot 2\pi \quad | : 6$$

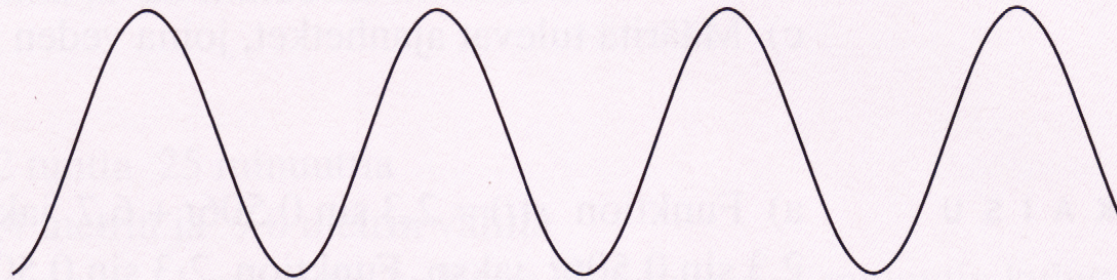
$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2\pi}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}, \quad n \text{ kokonaisluku.}$$

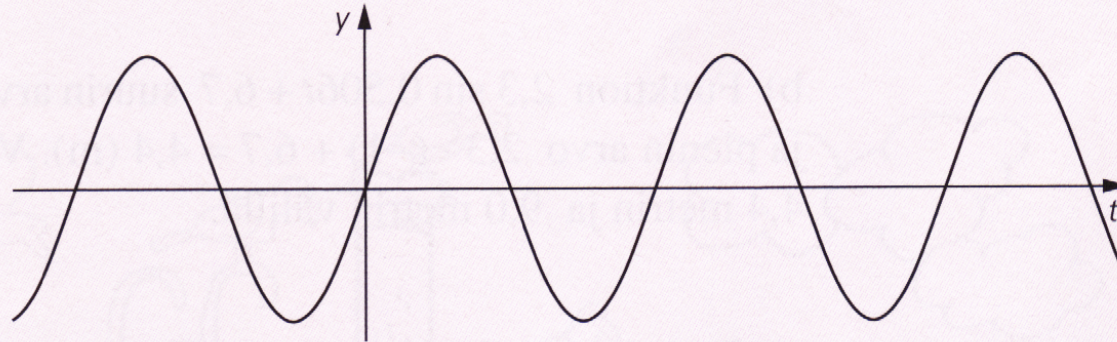


Sinifunktio matemaattisena mallina

Kun värähtelevän kielen aiheuttama ääniaalto (kielen värähtelyn aiheuttama ilmanpaineen vaihtelu) muutetaan tietokoneen mittausjärjestelmällä kuvaksi, aallolla on sini- ja kosinifunktioiden kuvaajia muistuttava muoto.*



Kun käyrä sijoitetaan koordinaatistoon niin, että origo on nousevan aallon keskikohdassa, käyrä on muotoa $a \sin kt$ olevan funktion kuvaaja.



Funktiot $a \sin kt + b$ ovat matemaattisia malleja erilaisille jaksollisesti toistuville ilmiöille, esimerkiksi aaltoliikkeelle, heilurin liikkeelle ja vedenkorkeuden vaihtelulle vuoroveden myötä.